УДК 004.3

И. А. Мочалов, д-р техн. наук, проф., МГТУ им. Н. Э. Баумана,
М. С. Хрисат, аспирант, e-mail: mohd.khrisat@fet.edu.yo, **М. Я. Шихаб Еддин,** аспирант,
Российский университет дружбы народов

Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть II*

Изложены основные положения нечетких вычислений и теории нечетких обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены различные типы решений и их взаимосвязь. Приведены разнообразные примеры решения нечетких дифференциальных уравнений первого порядка.

Ключевые слова: *нечеткие системы, нечеткие обыкновенные дифференциальные уравнения*

Введение

Широкое использование теории нечетких множеств при решении прикладных задач позволяет более полно учитывать различные возмущения в системе и создавать более адекватные модели и алгоритмы по сравнению с традиционным подходом. Особо следует выделить направление, связанное с нечеткими вычислениями, нечеткими линейными системами алгебраических уравнений, нечеткими дифференциальными уравнениями в частных производных и обыкновенного типов [1—3]. Это обусловлено тем, что в нечетком случае появляются новые свойства перечисленных объектов, что приводит к изменению традиционных свойств различных их приложений. Эти два обстоятельства, состоящие в наличии традиционных систем, и достижения в области теории нечетких множеств позволяют реализовывать алгоритмы решения задач управления, идентификации и другие, когда имеют место разнообразные модели возмущений, описываемые нечеткими терминами.

Ниже реализуются задачи по решению нечетких обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В статье приняты следующие обозначения: нечеткий элемент — $x_{\text{н}}$; нечеткая функция (отображение) — $\varphi_{\text{н}}(t)$ для одного переменного и $\varphi_{\text{н}}(t, x, ..., z)$ для многих переменных; нечеткая производная $\dot{\varphi}_{\text{н}}(t)$; тип производной обозначается верхним индексом, например, $\dot{\varphi}_{\text{н}}^{S}$ — нечеткая производная Seikkala (Сейккала) и др.

* Ч. I в журнале "Информационные технологии", Том 21, № 3, 2015.

1. Нечеткая начальная задача [2]

Нечеткая начальная задача рассматривается для производных типа $\dot{y}_{\text{н}}^{PR}(x)$, $\dot{y}_{\text{н}}^{S}(x)$, $\dot{y}_{\text{н}}^{KFM}(x)$. Для нечетких производных $\dot{y}_{\text{н}}^{GV}(x)$, $\dot{y}_{\text{н}}^{DP}(x)$ нечеткая начальная задача, как правило, не рассматривается. Это обусловлено тем, что возможна ситуация, когда эти производные для какого-то $x = x_*$ не выражаются нечеткими числами (см. п. 1.2 (ii), Часть I), т. е. один из углов их функций принадлежностей относительно основания больше 90°, и тогда эти производные не существуют. Для $\dot{y}_{\text{н}}^{PR}(x)$, $\dot{y}_{\text{н}}^{S}(x)$, $\dot{y}_{\text{н}}^{KFM}(x)$ эти производные всегда существуют, так как в случае, отмеченном ранее, используются нечеткие "слабые" числа.

1.1. Постановка задачи. Пусть имеем четкое обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, k);\ y(x = 0) = c = \text{const}, \tag{1.1}$$

где $k = (k_1, ..., k_n)$ — вектор констант; $x \in I$ — некоторый промежуток (закрытый и ограниченный), который также содержит константу, равную нулю. Полагается, что $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям, когда (1.1) имеет единственное решение

$$y = g(x, k, c) \text{ для } x \in I \subset R_1,\ k \in K \subset R^n,\ c \in C \subset R_1.$$

Пусть I_1 является промежутком для y и $\mathcal{R} = I \times I_1$ — область в R_2. Известны условия, при которых (1.1) имеет единственное решение:

- k и $c \in (0; c) = \mathcal{R}$;
- f — непрерывна в $\mathcal{R}$ для фиксированного и выбранного k;
- f_y — непрерывна в $\mathcal{R}$.

Если эти условия выполняются, то $y = g(x, k, c)$ является единственным решением для $x \in I^*$. Далее полагается, что $g(\cdot)$ является непрерывной на $I \times k \times c$.

Константы k_i, c всегда являются неточно заданными (неопределенными). Пусть эта неопределенность моделируется посредством нечетких треугольных чисел (п. 1.2, Часть I) для k_i, c уравнения (1.1). Заменим $k_i \to k_{i\text{н}}$, $c \to c_\text{н}$, где индекс "н" — символ нечеткости для треугольных чисел, тогда в результате получим:

$$\frac{dy_\text{н}}{dx} = f(x, y_\text{н}, k_\text{н}),\ y_\text{н}(x = 0) = c_\text{н}, \tag{1.2}$$

где $\dot{y}_\text{н}$ — некоторое определение производной для нечеткой функции $y_\text{н}$ (см. 3.1, Часть I). Необходимо получить решение (1.2) относительно $y_\text{н}(x)$, которое для любого x является нечетким числом.

1.2. Типы нечетких решений. Рассмотрим (1.2) с использованием производных Сейккалы (см. 3.2, Часть I) — $\dot{y}_\text{н}^S(x)$, Пури—Ралеску (см. п. 3.4, Часть I) — $\dot{y}_\text{н}^{PR}(x)$ и Кэндела—Фридмана—Минга (см. 3.5, Часть I) — $\dot{y}_\text{н}^{KFM}(x)$. Для них решение соответствующих задач (1.2) обозначим:

(i) $\hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$ — решение Сейккалы (Seikkala solution-*SS*);

(ii) $\hat{y}_\text{н}^{PRS}(x)$ — решение Пури—Ралеску (Puri-Ralescu solution-*PRS*);

(iii) $\hat{y}_\text{н}^{KFMS}(x)$ — решение Кэндела—Фридмана—Минга (Kandel—Friedman—Ming solution—*KFMS*). Далее пусть существует $\hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$, тогда также вводится нечеткое решение:

(iv) $\hat{y}_\text{н}^{BFS}(x)$ — решение Баклей—Фейринга (*BFS*, Buckley—Feuring solution). Оно существует при выполнении следующих условий:

$$\dot{f}_y > 0;\ \dot{g}_c > 0,\ (\dot{f}_{k_i})(\dot{g}_{k_i}) > 0,\ i = \overline{1, n}, \tag{1.3}$$

где f — правая часть (1.1); g — решение (1.1); k_i — компоненты вектора k.

1.3. Взаимосвязь нечетких решений. Имеют место следующие теоремы (без доказательства).

Теорема 1.1. Если существует $\hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$, то при выполнении (1.3) имеем:

$$\hat{y}_\text{н}^{BFS}(x) = \hat{y}_\text{н}^{SS}(x).$$

Если хотя бы одно из условий (1.3) не выполняется, то $\hat{y}_\text{н}^{BFS}(x) \neq \hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$ и $\hat{y}_\text{н}^{BFS}(x)$ не существует.

Теорема 1.2. Если четкое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = f(x, y, k);\ y(x = 0) = c$$

имеет решение, то существует $\hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$ и из системы четких обыкновенных дифференциальных уравнений определяется

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}}^S(x) = f(x, \underline{y}, \underline{k}); \\ \dot{\overline{y}}^S = f(x, \overline{y}, \overline{k}); \\ \underline{y}(y = 0) = \underline{c},\ \overline{y}(x = 0) = \overline{c}, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $k_\text{н} = (\underline{k}(r), \overline{k}(r) | r \in [0; 1])$; $c_\text{н} = (\underline{c}(r), \overline{c}(r) | r \in [0; 1])$; $y_\text{н} = (\underline{y}(x, r), \overline{y}(x, r) | r \in 0; 1$.

Теорема 1.3. Если существует $\hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$, то имеем: $\hat{y}_\text{н}^{PRS}(x) = \hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$.

Теорема 1.4. Если существует $\hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$, то имеем: $\hat{y}_\text{н}^{KFMS}(x) = \hat{y}_\text{н}^{SS}(x)$.

1.4. Алгоритм решения нечеткой начальной задачи. Теоремы по п. 1.3 позволяют сформулировать следующий алгоритм решения нечеткой начальной задачи. Первоначально решается четкая начальная задача. Ее решение обозначается как $y = g(x, k, c)$. Для $g(\cdot)$ и $f(\cdot)$ правой части (1.1) проводится процедура фаззификации (fz) для четких параметров k, c и независимой переменной $y(x)$, т. е. четкие переменные заменяются на нечеткие: $k \to k_\text{н}$, $c \to c_\text{н}$, $y \to y_\text{н}$. В результате появляется нечеткая начальная задача (1.2). Для нее определяется существование *BF* решения (*BFS*) путем проверки условий (1.3). Если (1.3) выполняется, то *BFS* существует, поэтому оно существует для всех остальных решений $y_\text{н}^{PRS}(x)$, $y_\text{н}^{BFS}(x)$. Решение *BF* находится из (1.1) $y_\text{н}^{BFS}(x) = g(x, k, c, r)$, $r \in [0; 1]$, в котором после fz выделяются $\min g(\cdot)$, $\max g(\cdot)$. Это дает *BFS* в виде

$$y_\text{н}^{BFS}(x) = \Big(\underbrace{\underline{g}(\cdot)}_{\min g(\cdot)}, \underbrace{\overline{g}(\cdot)}_{\max g(\cdot)} | r \in [0;1]\Big).$$

Если же хотя бы одно из условий (1.3) не выполняется, то *BFS* не существует, поэтому ищется *S*-решение(*SS*), т. е. $y_\text{н}^{SS}(x)$ находится из системы (1.4). При существовании $y_\text{н}^{SS}(x)$ существуют $y_\text{н}^{PRS}(x)$, $y_\text{н}^{KFMS}(x)$. Если же $y_\text{н}^{SS}(x)$ не существует, то не существует решение (1.2). Таким образом, первоначально находится *BF*-решение, если же оно не существует, то ищется *S*-решение, которое является более общим, чем *BF*-решение.

Результаты, приведенные в разделе 1, позволяют сделать следующие выводы:

- нечеткая начальная задача имеет два типа решений: *BFS* (Buckley-Feuzing solution) и *SS* (Seikkala solution). Между ними имеется следующая взаимосвязь:

$$BFS \Rightarrow SS;\ SS \nRightarrow BFS \Rightarrow\Rightarrow BFS \nLeftrightarrow SS;$$

- достаточное условие $\exists BFS$ состоит в выполнении (1.3), которые эквиваленты условиям одновременно возрастания (убывания) $g(\cdot), f(\cdot)$ относительно параметров.

Здесь символ $\exists$ — квантор "существования", $\overline{\exists}$ — отрицание $\exists$.

2. Примеры решения нечетких дифференциальных уравнений первого порядка [2, 3]

В общем виде задача формулируется следующим образом. Имеется четкая начальная задача. Необходимо сформулировать нечеткую начальную задачу и исследовать типы решений. Ниже на основании типовых примеров решения четких начальных задач формулируются соответствующие их нечеткие аналоги и для них находятся различные типы нечетких решений, рассмотренные в разделе 1.

2.1. Нечеткие уравнения с разделяющимися переменными. Такими уравнениями будем называть уравнения, в которых зависимая и независимые переменные разделяются относительно знака равенства между ними с помощью элементарных преобразований. Для простоты полагаем, что производная, входящая в уравнение, имеет первый порядок.

Пример 1. Имеем четкую начальную задачу:

$$\dot{y} = f(x, y, k) = ky(x);$$
$$y(x = 0) = c;\ k, c = \text{const}. \qquad (2.1)$$

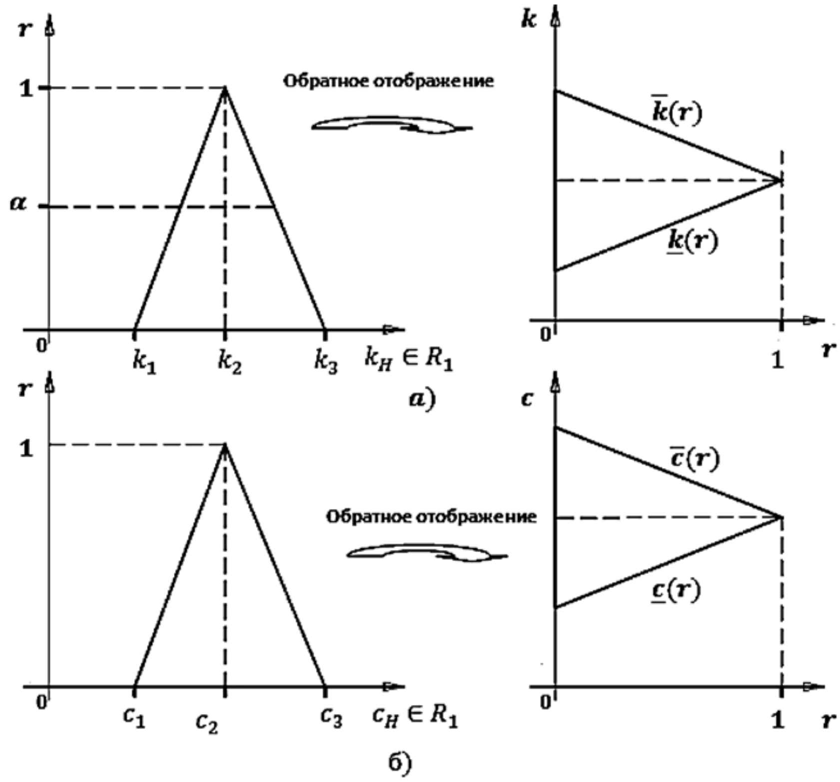

Рис. 2.1. Функции принадлежностей нечетких треугольных чисел $k_н = (k_1|k_2|k_3)$ — (*а*) и $c_н = (c_1|c_2|c_3)$ — (*б*)

Необходимо сформулировать нечеткую начальную задачу и затем для нее исследовать типы решения.

Случай 1 ($k > 0$, $c \geqslant 0$). Задача (2.1) имеет решение $y = g(x, k, c) = c \cdot \mathbf{e}^{kx}$; $k > 0$.

Проверяем условие (1.3) существования *BFS*:

$$\dot{f}_y = k > 0;\ \dot{g}_c = \mathbf{e}^{kx} > 0;\ \dot{g}_k = c\mathbf{e}^{kx}x > 0\ (x > 0);$$
$$\dot{f}_k = c\mathbf{e}^{kx} > 0 \Rightarrow \dot{g}_k \dot{f}_k > 0.$$

Таким образом, условия (1.3) выполнены, поэтому $\hat{y}_н^{BFS}(x)$ существует и для него справедлива нечеткая начальная задача, которая получается при фаззификации ($k \to k_н$, $c \to c_н$, $y \to y_н$) из (2.1):

$$\begin{cases} \dot{y}_н(x) = k_н y_н(x); \\ y_н(x = 0) = c_н. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Пусть $k_н$, $c_н$ являются нечеткими треугольными числами $k_н = (k_1|k_2|k_3)$, $k_1 > 0$; $c_н = (c_1|c_2|c_3)$, $c_1 \geqslant 0$ (рис. 2.1, *а*, *б*) или с использованием обратных отображений в уровневой форме $k_н = (\underline{k}(r), \overline{k}(r)|\ r \in [0,1]))$; $c_н = (\underline{c}(r), \overline{c}(r)|\ r \in [0,1]))$, тогда *BFS* задачи (2.2) будет равно

$$\hat{y}_н^{BFS}(x) = (\min_r \underline{y}(r), \max_r \overline{y}(r)|r \in [0, 1]) =$$
$$= (\underline{c}(r)\mathbf{e}^{\underline{k}(r),x}, \overline{c}(r)\mathbf{e}^{\overline{k}(r),x}|r \in [0, 1])). \qquad (2.3)$$

Нетрудно показать, что $\hat{y}_н^{BFS}(x)$ по (2.3) является решением (1.2). Из (1.3) следует, что: $\hat{y}_н^{BFS}(x, r = 0) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$; $\hat{y}_н^{BFS}(x, r = 1) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$; $\underline{y}(x, r = 1) - \overline{y}(x, r = 1) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, поэтому $\operatorname{supp}\hat{y}_н^{BFS}(x)$ в асимптотике становится значительных размеров.

Случай 2 ($k < 0$, $c \geqslant 0$). Имеем: $k_н = (k_1|k_2|k_3)$, $k_1 < 0$; $c_н = (c_1|c_2|c_3)$, $c_1 \geqslant 0$, тогда, как и ранее (случай 1), получим $y = c\mathbf{e}^{kx}$, $k < 0$.

Условие (1.3) существования *BFS* не выполняется, так как $\dot{f}_y = k < 0$, поэтому оно для (2.2) не существует. В этих условиях ищем *SS* для (2.2). Так как $k < 0$, то согласно свойствам арифметических операций в банаховом пространстве *X* нечетких переменных для $x_{iн} \in X$ имеем (см. п. 2.3, Часть I):

$$kx_{iн} = \begin{cases} (k\underline{x}_i(r), k\underline{x}_i(r)|r \in [0; 1]);\ k \geqslant 0; \\ (k\overline{x}_i(r), k\overline{x}_i(r)|r \in [0; 1]);\ k < 0. \end{cases}$$

Это означает, что для нахождения *SS* имеем

$$\begin{cases} \dot{y}_н(x) = k_н y_н(x) \\ y_н(x = 0) = c_н \end{cases} \overset{k_н<0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{k_н<0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \underline{\dot{y}}(x, r) = \underline{k}\overline{y}(x, r),\ \underline{y}(x = 0, r) = \underline{c}(r) \\ \dot{\overline{y}}(x, r) = \overline{k}\underline{y}(x, r),\ \overline{y}(x = 0, r) = \overline{c}(r) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Y}(x, r) = A.Y(x, r) \\ Y(x = 0, r) = c(r) \end{cases} \qquad (2.4)$$

где $Y(x, r) = (\overline{y}(x, r), \underline{y}(x, r))^T$; $c(r) = (\underline{c}(r), \overline{c}(r))^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \underline{k}(r) \\ \overline{k}(r) & 0 \end{pmatrix}$.

Решаем матричное дифференциальное уравнение (2.4) стандартным способом. Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$ имеем:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & \underline{k}(r) \\ \overline{k}(r) & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \underline{k}(r)\overline{k}(r) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = = \underbrace{[\underline{k}(r)\overline{k}(r)]^{1/2}}_{\lambda};\ \lambda_2 = -\lambda.$$

Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения действительные и различные, поэтому общее решение для (2.4) равно:

$$\underline{y}(x, r) = a_{11}\mathbf{e}^{\lambda x} + a_{12}\mathbf{e}^{-\lambda x},\ \underline{y}(x = 0, r) = \underline{c}(r);$$

$$\overline{y}(x, r) = a_{21}\mathbf{e}^{\lambda x} + a_{22}\mathbf{e}^{-\lambda x},\ \overline{y}(x = 0, r) = \overline{c}(r).$$

Всего имеем четыре неизвестных и два начальных условия $\underline{c}(r)$, $\overline{c}(r)$, поэтому необходимо найти соотношения между a_{ij}. Для этого $\underline{y}(\cdot)$, $\overline{y}(\cdot)$ подставляем, например, в первое уравнение системы (2.4):

$$\frac{a_{11}\lambda\mathbf{e}^{\lambda x} + a_{12}(-\lambda)\mathbf{e}^{-\lambda x}}{\underline{\dot{y}}(\cdot)''} = \frac{k(a_{21}\mathbf{e}^{\lambda x} + a_{22}\mathbf{e}^{-\lambda x})}{\overline{\dot{y}}(\cdot)''},$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\mathbf{e}^{\lambda x}$ и $\mathbf{e}^{-\lambda x}$, получим:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda = \underline{k}a_{21}; \\ -a_{12}\lambda = \underline{k}a_{22}; \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a_{11} = (\underline{k}\lambda^{-1})a_{21}; \\ -a_{12} = -(\underline{k}\lambda^{-1})a_{22}. \end{array}\right\}$$

Для нахождения a_{ij} имеем систему:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{y}(x=0, r) = a_{11}\mathbf{e}^{\lambda 0} + a_{12}\mathbf{e}^{-\lambda 0} = \underline{c}(r) \\ \overline{y}(x=0, r) = a_{21}\mathbf{e}^{\lambda 0} + a_{22}\mathbf{e}^{-\lambda 0} = \overline{c}(r) \\ a_{11} = (\underline{k}\lambda^{-1})a_{21},\ a_{12} = -(\underline{k}\lambda^{-1})a_{22} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}^*(r) = 0{,}5[\underline{c}(r) + \lambda\overline{c}(r)]; \\ a_{12}^*(r) = 0{,}5[\underline{c}(r) - \lambda\overline{c}(r)]; \\ \Rightarrow a_{21}^*(r) = 0{,}5\underline{c}(r)/(\lambda + \overline{c}(r)); \\ a_{22}^*(r) = \dfrac{0{,}5\underline{c}(r)}{(\lambda - \overline{c}(r))};\ \lambda = [\underline{k}(r)\overline{k}(r)]^{1/2}. \end{array}\right\}$$

Таким образом, нечеткое *SS* для (2.4) будет равно:

$$\hat{y}_{\text{н}}^{SS} = (a_{11}^*(r)\mathbf{e}^{\lambda x} + a_{12}^*(r)\mathbf{e}^{-\lambda x},\ a_{21}^*(r)\mathbf{e}^{\lambda x} + + a_{22}^*(r)\mathbf{e}^{-\lambda x}]r \in [0, 1]),$$

где $a_{ij}^*(r)$, λ были определены ранее.

Пример 2. Имеем четкую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y, k) = y + kx, x > 0; \\ y(x = 0) = c;\ k, c = \text{const}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Необходимо сформулировать нечеткую начальную задачу и затем для нее определить тип решения.

Пусть первоначально $k > 0$, $c \geqslant 0$, тогда (2.5) при использовании замены $z = y + kx$ имеет решение:

$$y = g(x, k, c) = (k + c)\mathbf{e}^x - k(x + 1). \quad (2.6)$$

Проверяем условия (1.3) существования *BFS*-решения:

$$\dot{f}_y = (y + kx)'_y = 1 > 0;$$

$$\dot{g}_c = [(k + c)\mathbf{e}^x - k(x + 1)]'_c = \mathbf{e}^x > 0;$$

$$\dot{f}_k = (y + kx)'_c = x > 0;$$

$$\dot{g}_k = [(k + c)\mathbf{e}^x - k(x + 1)]'_k = \mathbf{e}^x - (x + 1)|_{x \approx 0} \approx \approx 1 + x + 0{,}5x^2 - x - 1 = 0{,}5x^2 > 0;$$

$$\dot{f}_k\,\dot{g}_k \approx x(0{,}5x^2) > 0.$$

Таким образом, условия (1.3) выполнены и не зависят от k, c, *поэтому SS*, *BFS* существуют для $k < \infty$, $-\infty < c < \infty$ и *BFS* находится из нечеткой начальной задачи, которая следует из (2.5) в результате процедуры fz:

$$\begin{cases} \dot{y}_{\text{н}}(x) = y_{\text{н}}(x) + k_{\text{н}}x; \\ y_{\text{н}}(x = 0) = c_{\text{н}}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Пусть $k_{\text{н}}$, $c_{\text{н}}$ являются нечеткими треугольными числами $k_{\text{н}} = (k_1|k_2|k_3)$; $c_{\text{н}} = (c_1|c_2|c_3)$, $c_1 \geqslant 0$ (рис. 2.1, *а*, *б*), тогда *BFS* для (2.7) равно: $\hat{y}_{\text{н}}^{BFS}(x) = (\min_r \underline{y}(x, r), \max_r \overline{y}(x, r)|\ r \in [0,1])$.

Находим $\min_r \underline{y}(x, r)$, $\max_r \overline{y}(x, r)$. Из (2.2) имеем при $k = k_{\text{н}}$, $c = c_{\text{н}}$:

$$y_{\text{н}}(x) = (k_{\text{н}} + c_{\text{н}})\mathbf{e}^x - k_{\text{н}}(x + 1);$$

$$\min_r y_{\text{н}}(x, r) = [\underline{k}(r) + \underline{c}(r)]\mathbf{e}^x - \overline{k}(r)(x + 1);$$

$$\max_r y_{\text{н}}|_{\overline{y}(x)} = [\overline{k}(r) + \overline{c}(r)]\mathbf{e}^x - \underline{k}(r)(x + 1).$$

Таким образом, *BFS* для (2.3) равно ($x > 0$):

$$\hat{y}_{\text{н}}^{BFS}(x) = ([\underline{k}(r) + \underline{c}(r)]\mathbf{e}^x - \overline{k}(r)(x + 1), [\overline{k}(r) + \overline{c}(r)]\mathbf{e}^x - \underline{k}(r)(x + 1)|\ r \in [0,1]). \quad (2.8)$$

Из (2.8) имеем следующую асимптотику:

$$r = 0 \Rightarrow \hat{y}_{\text{н}}^{BFS}(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ r = 1 \Rightarrow \hat{y}_{\text{н}}^{BFS}(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;$$

$$r = 1 \Rightarrow \underline{y}(x, r = 1) - \overline{y}(x, r = 1) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty,$$

т. е. $\operatorname{supp}\hat{y}_{\text{н}}^{BFS}(x)$ в асимптотике имеет значительные размеры.

Заметим, что аналогичным способом решается и исследуется дифференциальное уравнение $\dot{y}(x) = f(k_1x + k_2y)$, которое может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными путем использования замены

$$z = k_1x + k_2y.$$

2.2. Нечеткие однородные уравнения. Они могут быть представлены в виде $\dot{y}(x) = f(yx^{-1})$ или $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ — однородные функции одинаковой степени n, т. е. $M(ax, ay) \equiv a^n M(x, y)$, $N(ax, ay) \equiv a^n N(x, y)$. Для решения используется замена $y = zx$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3. Имеем четкую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y, k) = k(1 + y \cdot x^{-1}), x > 0, k \neq 1; \\ y(x = t) = c,\ t > 0,\ c > 0;\ k, c = \text{const}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Необходимо сформулировать нечеткую начальную задачу и определить тип решения. Имеем однородное уравнение, сделаем замену переменных $y = xz$, тогда решение для (2.9) будет равно:

$$y(x) = g(x, k, c) = \\ = c(x \cdot t)^k + kt^{-(k+1)} - k(k-1)^{-1}x. \quad (2.10)$$

Проверяем условия (1.3) существования *BFS*:

$$\dot{f}_y = \frac{\partial}{\partial y}(k(1 + yx^{-1})) = kx^{-1}\Big|_{\substack{k>0 \\ x>0}} > 0;$$

$$\dot{f}_k = \frac{\partial}{\partial k}(k(1 + yx^{-1})) = 1 + yx^{-1}\Big|_{\substack{y>0 \\ x>0}} > 0;$$

$$\dot{g}_c = \frac{\partial}{\partial c}(c(xt)^k + kt^{-(k+1)} - \\ - k(k-1)^{-1}x) = xt^k\Big|_{\substack{k>0 \\ x>0 \\ t>0}} > 0;$$

$$\dot{g}_k = \frac{\partial}{\partial k}(c(xt)^k \pm kt^{-(k+1)} - k(k-1)^{-1}x) = \\ = c(xt)^k \ln(xt)\big|_{xt>1} + (t^{-(k+1)} + \\ + kt^{-(k+1)}\ln t)\Big|_{\substack{k>0 \\ t>1}} + x(k-1)^{-2} > 0;$$

$$\dot{f}_k\,\dot{g}_k > 0.$$

Условия (1.3) выполнены, поэтому *BFS* существует. Таким образом, *BFS* находится из нечеткой начальной задачи, получаемой из (2.9) после процедуры fz:

$$\begin{cases} y_{\text{н}} = k_{\text{н}}(1 + yx^{-1}); \\ y_{\text{н}}(x = t) = c_{\text{н}}, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $k_{\text{н}}$, $c_{\text{н}}$ являются нечеткими треугольными числами $k_{\text{н}} = (k_1|k_2|k_3)$; $c_{\text{н}} = (c_1|c_2|c_3)$, $c_1 \geqslant 0$ (рис. 2.1, *а*, *б*). Тогда *BFS* для (2.11) получается из (2.10) после вычисления $\min_r \underline{y}(r)$, $\max_r \overline{y}(r)$:

$$\hat{y}_{\text{н}}^{BFS}(x) = (\min_r \underline{y}(\cdot), \max_r \overline{y}(\cdot) |\ r \in [0,1]),$$

где

$$\min_r \underline{y} = \underline{c}(r)(xt)^{\underline{k}(r)} + \underline{k}(r)t^{-(\overline{k}(r)+1)} - \overline{k}(r)(\underline{k}(r) - 1)^{-1}x;$$

$$\max_r \overline{y} = \overline{c}(r)(xt)^{\underline{k}(r)} + \overline{k}(r)t^{-(\underline{k}(r)+1)} - \underline{k}(r)(\overline{k}(r) - 1)^{-1}x.$$

Нетрудно показать, что в асимптотике $\operatorname{supp}\hat{y}^{BFS}(x)$ имеет значительные размеры. Заметим, что уравнение типа $\dot{y} = f((a_1x + b_1y + c_1)(ax + by + c)^{-1})$ может быть сведено к однородному путем соответствующего преобразования системы координат (x, y).

2.3. Нечеткие линейные уравнения с постоянными коэффициентами первого порядка. Эти уравнения имеют вид уравнения линейной зависимости относительно независимой переменной и ее производной. Подобные уравнения, например, возникают в системах автоматической оптимизации (САО) с запоминанием экстремума инерционными объектами с нечеткими динамическими параметрами [8].

Пример 4. Случай 1 ($k_1 < 0$, $k_2 > 0$, c $\geqslant 0$). Имеем (2.1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, k) = -k_1y + k_2; \\ y(x = 0) = c, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, $c \geqslant 0$ Необходимо сформулировать нечеткую начальную задачу и исследовать типы решений.

Решение 1. Исходная четкая начальная задача имеет решение $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$, $y_0(x)$ — решение однородного дифференциального уравнения; $y_1(x)$ — частное решение для (2.12). Для $y_0(x)$ имеем цепочку соотношений:

$$\dot{y}_x = -k_1y \Rightarrow \int y^{-1}dy = -k_1\int dx \Rightarrow \ln y = -k_1x + a,$$

$$a = \text{const} \Rightarrow y_0(x) = \mathbf{e}^{-k_1x + a}.$$

Решение $y_1(x)$ находим по методу неопределенных коэффициентов:

$$\dot{y}_x + k_1y = k_2 \Rightarrow y_1(x) = b_1;\ b_1 = \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b_1)'_x + k_1b_1 = k_2 \Rightarrow b_1 = k_2k_1^{-1} \Rightarrow y_1(x) = k_1^{-1}k_2,$$

откуда $y = \mathbf{e}^{-k_1x + a} + k_1^{-1}k_2$.

Из начальных условий получим:

$$y(x = 0) = \underbrace{\mathbf{e}^a}_{a''}\mathbf{e}^{-k_1, 0} + k_1^{-1}k_2 = c \Rightarrow a = c - k_2k_1^{-1}.$$

В результате получим решение (2.12) в виде

$$y(x) = g(x, k_1, k_2, c) = (c - k_1^{-1}k_2)\mathbf{e}^{-k_1x} + k_1^{-1}k_2.$$

Исследуем типы решений для (2.12). Для того чтобы существовало *BFS*, необходимо выполнение условий (1.3):

$$\dot{f}_y(-k_1y + k_2) = -k_1 > 0;$$

$$\dot{g}_c[(c - k_1^{-1}k_2)\mathbf{e}^{-k_1x} + k_1^{-1}k_2] = \mathbf{e}^{-k_1x} > 0;$$

$$\dot{g}_{k_1}\Big|_{k_2>0} < 0;\ \dot{f}_{k_1}(-k_1y + k_2) < 0 \Rightarrow \dot{f}_{k_1}\dot{g}_{k_1} > 0;$$

$$\dot{g}_{k_2} > 0;\ \dot{f}_{k_2} > 0 \Rightarrow \dot{f}_{k_2}\dot{g}_{k_2} > 0.$$

Таким образом, (1.3) выполнено, поэтому *BFS* для (2.12) существует, и для него справедлива нечеткая начальная задача ($k_1 \to k_{1н}$, $k_2 \to k_{2н}$, $c \to c_н$, $y \to y_н$):

$$\frac{dy}{dx} = -k_{1н}y_н + k_{2н};\ y(x = 0) = c_н. \qquad (2.13)$$

Пусть $k_{1н}$, $k_{2н}$, $c_н$ являются нечеткими треугольными числами:

$$k_{1н} = (k_{11}|k_{12}|k_{13}),\ k_{13} > 0,\ k_{2н} = (k_{21}|k_{22}|k_{23}),\ k_{21} > 0;$$
$$c_н = (c_1|c_2|c_3)c_1 > 0,$$

тогда *BFS* равно:

$$\hat{y}_н^{BFS}(x) = (\min_r \underline{y}(x, r),\ \max_r \overline{y}(x, r)|\ r \in [0,1]); \quad (2.14)$$

$$\underline{y}(x, r) = (\underline{k}_2(r)\underline{k}_1^{-1}(r)) +$$
$$+ (\underline{c}(r) - \underline{k}_2(r)\underline{k}_1^{-1}(r))\mathbf{e}^{-\underline{k}_1(r)x};$$

$$\overline{y}(x, r) = (\overline{k}_2(r)\overline{k}_1^{-1}(r)) +$$
$$+ (\overline{c}(r) - \overline{k}_2(r)\overline{k}_1^{-1}(r))\mathbf{e}^{-\overline{k}_1(r)x}.$$

Подстановка $\hat{y}_н^{BFS}(x)$ в (2.13) обращает его в тождество, поэтому $\hat{y}_н^{BFS}(x)$ по (2.14) является *BFS* нечеткой начальной задачи (2.13). Из (2.14) имеем следующую асимптотику:

(i) при $r = 0 \Rightarrow \hat{y}_н^{BFS}(x) =$
$= (\underline{y}(x, 0),\ \overline{y}(x, 0)|r \in [0,1]) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty;$

(ii) при $r = 1 \Rightarrow \hat{y}_н^{BFS}(x) =$
$= (\underline{y}(x, 1),\ \overline{y}(x, 1)|r \in [0,1]) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty;$

(iii) при $r = 1 \Rightarrow \underline{y}(x, 1) - \overline{y}(x, 1) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty,$

т. е. в асимптотике $\mathrm{supp}\hat{y}_н^{BFS}(x)$ имеет значительные размеры.

Случай 2 ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $c > 0$, т. е. $k_{12} > 0$, $k_{21} > 0$, $c_1 > 0$). Проверяем выполнение условий (1.3). Имеем $\dot{f}_y = -k_1 < 0$, т. е. одно из условий (1.3) не выполняется, поэтому *BFS* для (2.13) не существует. Ищем *SS*. Так как $k_1 > 0$, поэтому в правой части (2.13) $\dot{f}_y = -k_1y + k_2 < 0$. С учетом свойств арифметических операций в банаховом пространстве (умножение на отрицательную константу) уравнение (2.13) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_н(x) = -k_{1н}y_н + k_{2н} \\ y_н(x = 0) = c_н \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\dot{y}}(x, r) = -\underline{k}_1\overline{y}(x, r) + \underline{k}_2r \\ \dot{\overline{y}}(x, r) = -\overline{k}_1\underline{y}(x, r) + \overline{k}_2r \\ \underline{y}(x = 0) = \underline{c}(r),\ \overline{y}(x = 0) = \overline{c}(r) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{Y}(x, r) = AY(x, r) + BK_2(r); \\ Y(x = 0, r) = c(r), \end{cases},$$

где $Y(x, r) = (\overline{y}(x, r),\ \underline{y}(x, r))^т$; $c(r) = (\underline{c}(r),\ \overline{c}(r))^т$;

$$K_2(r) = (\underline{k}_2(r),\ \overline{k}_2(r))^т;\ B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{k}_1(r) \\ -\underline{k}_1(r) & 0 \end{pmatrix}.$$

Из решения характеристического уравнения $\det(A - \omega I) = 0$ имеем:

$$\det\begin{pmatrix} -\omega & -\overline{k}_1(r) \\ -\underline{k}_1(r) & -\omega \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^2 - \underline{k}_1(r)\overline{k}_1(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = [\underline{k}_1(\cdot)\overline{k}_1(\cdot)]^{1/2} = \omega,$$

$$\omega_2 = [\underline{k}_1(\cdot)k_1(\cdot)]^{1/2} = -\omega.$$

Общее решение $\hat{y}_н^S(x) = (\underline{y}(x, r),\ \overline{y}(x, r)|r \in [0,1])$ для каждой из компонент имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{y}(x, r) &= a_{11}\mathbf{e}^{\omega x} + a_{12}\mathbf{e}^{-\omega x} + \lambda_1; \\ \overline{y}(x, r) &= a_{21}\mathbf{e}^{\omega x} + a_{22}\mathbf{e}^{-\omega x} + \lambda_2, \end{aligned} \qquad (2.15)$$

где a_{ij} находятся, как в примере 3.1, случай 2 (Часть I), из соответствующих соотношений, что дает с учетом нечетких начальных условий:

$$\omega_1 = [\underline{k}_1(r)\overline{k}_1(r)]^{1/2};$$

$$\lambda_1 = \underline{k}_1^{-1}(r)\overline{k}_2(r);$$

$$\lambda_2 = \underline{k}_2(r)\overline{k}_1^{-1}(r);$$

$$a_{11} = [(\underline{c}(r) - \lambda_1)\mu - (\overline{c}(r) - \lambda_2)](2\mu)^{-1};$$

$$a_{12} = [(\overline{c}(r) - \lambda_2) + \mu - (\underline{c}(r) - \lambda_1)](2\mu)^{-1};$$

$$a_{21} = -\mu a_{11};$$

$$a_{22} = -\mu a_{12};$$

$$\mu = [\underline{k}_2(r)\overline{k}_1(r)]^{1/2}.$$

Из (2.15) имеем следующую асимптотику. Пусть $\underline{c}(r) = \overline{c}(r) = c$; $\underline{k}_1(r) = \overline{k}_1(r) = k_1$; $\underline{k}_2(r) = \overline{k}_2(r) = k_2$. При $r = 1$ имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = k_2k_{-1}^{-1} = \lambda$, $\mu = 1$, $\mu = k$, тогда из (2.15) получаем $\underline{y}(x, r = 1) = \overline{y}(x, r = 1) = = \lambda + (c - \lambda)\mathbf{e}^{-k_1 x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \lambda$. Затем очевидно, что при $\forall r \in [0,1]$ имеем $a_{11} < 0$, $a_{21} > 0$, поэтому $\underline{y}(x, r) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty$; $\overline{y}(x, r) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$.

Асимптотика показывает, что с увеличением x нечеткость в $\hat{y}^S_{\text{н}}(x)$ возрастает до тех пор, пока она не станет полностью нечеткой.

Вывод. Приведенный пример 4 показывает, что при $k_1 < 0$ имеет место BFS $\hat{y}^{BFS}_{\text{н}}(x)$ (случай 1), а при $k_1 > 0$, соответственно, SS $\hat{y}^{SS}_{\text{н}}(x)$ (случай 2).

Однако можно показать, что тип нечеткого решения чувствителен к изменениям k_1 или, в терминах системы автоматической оптимизации, имеется значительная инерционность у объекта управления.

Пример 5. Пусть (2.12) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + k_1 y = 3k_2^*; \\ y(x = 0) = c; \end{cases} \qquad (2.16)$$

$$k_1 = 10^{-2};\ k_2^* > 0,\ c \geqslant 0,$$

т. е. k_1 является достаточно малой величиной, поэтому можно положить $k_1 \approx 0$. Решение (2.16) получается из решения (2.12), если в нем положить $k_1 = 10^{-2}$; $k_2 = 3k_2^*$.

$$y(x) = g(x, k_1, k_2, c) =$$
$$= k_2 k_1^{-1} + (c - k_1 k_2^{-1})\mathbf{e}^{-k_1 x}\Big|_{\substack{k_1 = 10^{-2} \\ k_2 = 3k_2^*}} =$$
$$= 300k_2^* + (c - 300k_2^*)\mathbf{e}^{-0{,}01x}.$$

Первоначально ищем BFS, для этого проверяем условия (1.3). При $k_1 \approx 0$ для (2.16) $\dot{f}_y$ отсутствует, поэтому проверяем другие условия: $\dot{g}_{k_2} = (300 - 300\mathbf{e}^{-0{,}01x}) > 0$; $\dot{g}_c = 0 + \mathbf{e}^{-0{,}01x}\cdot 1 > 0$. Это означает, что BFS существует даже при $k_1 > 0$. После преобразований будем полагать $k_{2\text{н}} = (k_{21}|k_{22}|k_{23})$, $k_{21} > 0$; $c_{\text{н}} = (c_1|c_2|c_3)$, $c_1 > 0$, тогда BFS будет равно:

$$\begin{aligned} &\hat{y}^{BFS}_{\text{н}}(x) = (\underline{y}(x, r), \overline{y}(x, r) | r \in [0,1]); \\ &\underline{y}(x, r) = (300\underline{k}_2(r) + [\underline{c}(r) - 300\underline{k}_2(r)])\mathbf{e}^{-0{,}01x}; \quad (2.17) \\ &\overline{y}(x, r) = (300\overline{k}_2(r) + [\overline{c}(r) - 300\overline{k}_2(r)])\mathbf{e}^{-0{,}01x}. \end{aligned}$$

Заметим, что если (2.16) не записывается в форме $\dot{y}_x = f(x, y, k_2)$, то в этом случае BFS также существует, т. е. тип решения зависит от форм представления (2.16).

При определенных условиях $\dot{y}^S_{\text{н}}(x)$ существует, т. е. она имеет функцию принадлежностей $r(\dot{y})$. Действительно, из (2.15) имеем:

$$\dot{\underline{y}}_x = [\underline{c}(r) - 300\underline{k}_2(r)](-0{,}01)\mathbf{e}^{-0{,}01x};$$
$$\dot{\overline{y}}_x = [\overline{c}(r) - 300\overline{k}_2(r)](-0{,}01)\mathbf{e}^{-0{,}01x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dot{\underline{y}}_x = [3\underline{k}_2(r) - 0{,}01\underline{c}(r)]\mathbf{e}^{-0{,}01x};$$
$$\dot{\overline{y}}_x = [3\overline{k}_2(r) - 0{,}01\overline{c}(r)]\mathbf{e}^{-0{,}01x},$$

откуда $r(\dot{y})$ существует, если:

$$3\underline{k}_2(r) - 0{,}01\underline{c}(r) > 0 \Leftrightarrow 3(k_{22} - k_{21}) > 0{,}01(c_2 - c_1);$$
$$3\overline{k}_2(r) - 0{,}01\overline{c}(r) > 0 \Leftrightarrow 3(k_{23} - k_{22}) > 0{,}01(c_3 - c_2),$$

где $k(\cdot)$, $c(\cdot)$ — элементы треугольного представления соответствующих функций принадлежностей $r(k_2)$ и $r(c)$.

Чувствительность нечеткой начальной задачи относительно BFS и SS, очевидно, обусловлена особенностями нечеткой арифметики, в которой элемент $-N_{\text{н}}$ является обратным нечетким числом для $N_{\text{н}}$.

2.4. Другие типы нечетких уравнений. Выше были рассмотрены решения некоторых типов нечетких дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными, однородные и линейные. Для них было показано, что их решения, в отличие от решений для четких уравнений, имеют одновременно один (S-решение) или два (SS и BFS) типа решений. Их число определяется коэффициентами уравнений. Другие типы нечетких уравнений в большинстве случаев получаются путем элементарных их преобразований и сведения к рассмотренным выше. В схематической форме имеем:

1) нечеткое уравнение Бернулли $\Rightarrow$ замена переменных $\Rightarrow$ нечеткое линейное уравнение;

2) нечеткое уравнение Риккати $\Rightarrow$ замена переменных с использованием частного решения $\Rightarrow$ уравнение Бернулли $\Rightarrow$ нечеткое линейное уравнение;

3) нечеткое уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow$ преобразование к системе уравнений и ее решение методом подстановки $\Rightarrow$ один из типов уравнения по пп. 2.1—2.3 или п. 2.4 (1—2);

4) нечеткое уравнение с интегрирующим множителем $\Rightarrow$ метод подбора множителя $\Rightarrow$ нечеткое уравнение по п. 5.4 (3);

5) нечеткие уравнения в неявной форме, включая уравнения Лагранжа и Клеро $\Rightarrow$ разрешение относительно производной (метод 1) $\Rightarrow$ система уравнений $\Rightarrow$ нечеткое уравнение по пп. 2.1—2.3 или по п. 2.4 (1—4) или 2.4 (3) $\Rightarrow$ введение параметра (метод 2) $\Rightarrow$ нечеткое уравнение по п. 2.4 (3).

Выводы и перспективы

- Дается постановка нечеткой начальной задачи и различные типы ее решения в зависимости от способа задания нечеткой производной. Выделяются два основных типа решений: *SS* (Seikkala solution) и *BFS* (Buckley-Feuring solution), для которых имеет место следующая взаимосвязь. При $\exists BFS \Rightarrow \exists SS$, однако $\exists SS \not\Rightarrow \exists BFS$.

- Результаты изложенной теории по решению нечеткой начальной задачи используются для ее решения для основных типов нечетких дифференциальных уравнений первого порядка.
- Перспективными исследованиями в дальнейших работах является решение проблемы начальной задачи для нелинейных нечетких дифференциальных уравнений. Для этого целесообразно рассмотреть различные приближенные методы, когда соответствующие нечеткие переменные аппроксимируются нечетким степенным многочленом [6], нечеткой нейронной сетью [7], а для идентификации неизвестных параметров использовать нелинейный нечеткий метод наименьших квадратов.

Целесообразно также модифицировать известные стандартные методы Эйлера и Рунге—Кутты для решения нелинейных нечетких дифференциальных уравнений.

Известно, что четкие уравнения в частных производных разных порядков, как правило, решаются различными методами, которые преобразуют исходную задачу к четким обыкновенным дифференциальным уравнениям. В нечеткой модификации эти методы приводят к различным типам нечетких обыкновенных дифференциальных уравнений, которые рассмотрены в настоящей статье. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является расширение изложенной методики для решения нечетких уравнений в частных производных.

Список литературы

1. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems// Fuzzy sets and systems, 1998. N. 96. P. 201—209.
2. **Buckley J. J., Feuring J.** Fuzzy differential equations// Fuzzy sets and systems, 2000, N. 110. P. 43—54.
3. **Buckley J. J., Feuring J.** Introduction to fuzzy partial differential equations // Fuzzy sets and systems. 1999. N. 105. P. 241—248.
4. **Асмолова Ю. Е., Мочалов И. А.** Элементы нечеткого вариационного исчисления // Вестник Российского университета дружбы народов. 2010. № 4. P. 37—43.
5. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
6. **Деменков Н. П., Мочалов И. А.** Нечеткая интерполяция // Наука и образование. № 2. 2012.
7. **Mosleh, Otadi M.** Numerical solution of quadratic Riccati differential equation by neural network // Mathematical Sciences. 2011. V. 5, N. 3. P. 249—257.

I. A. Mochalov, Professor, Bauman Moscow State Technical University,
M. S. Khrisat, Graduate Student, e-mail: mohd.khrisat@fet.edu.jo, **M. Ya. Shihab Eddin,** Graduate Student,
Russian Peoples' Friendship University

Fuzzy Differential Equations in Control. Part II

The initial value problem of Formulated fuzzy is obtained from a clear initial problem in which the parameters of the problem and the initial condition rely inaccurately given. This inaccuracy is modelled by fuzzy variables with triangular membership functions. Modelling by fuzzification parameters leads to fuzzy initial value problem. Depending on the type of fuzzy derivatives allocated fuzzy solutions SS (Seikkala-solution), PRS (Puri-Ralescu-solution), KFMS (Kandel-Fridman-Mingsolution) and BFS (Buckley-Feuring-solution). For the existence of BFS formulated appropriate conditions. Without proof a statement. If there SS, there BFS, however, if there BFS, it does not coincide with the SS.

An algorithm for solving fuzzy initial value problem is clear in the decision of the initial problem. Then checks the conditions of existence of SS and BFS, if there is a BFS, then by fuzzification parameters clear the initial problem and finding the minimum and maximum solutions generated fuzzy BFS. If the BFS does not exist, then the SS is the solution of the corresponding system of differential equations.

The examples of the simplest solutions of fuzzy initial value problems, fuzzier linear problem are solved. She appears in the calculation of fuzzy phase trajectory of a continuous system of automatic optimization remembering extremum property type nonlinearity-linearity.

Figures are given representation of fuzzy numbers in the form of triangular membership functions and the equivalent of the inverse mapping. We give a list of references containing 7 items. 4 of them are in English, the other in Russian.

Keywords: *fuzzy system, fuzzy ordinary differential equations*

References

1. **Friedman M., Ming M., Kandel A.** Fuzzy linear systems. *Fuzzy sets snd systems.* 1998. N. 96. P. 201—209.
2. **Buckley J. J., Feuring J.** Fuzzy differential cquations. *Fuzzy sets and systems.* 2000. N. 110. P. 43—54.
3. **Buckley J. J., Feuring J.** Introduction to fuzzy partial differential equations. *Fuzzy sets and systems.* 1999. N. 105. P. 241—248.
4. **Asmolova Ju. E., Mochalov I. A.** Jelementy nechetkogo variacionnogo ischislenija. *Vestnik rossiiskogo universiteta druzhby narodov.* 2010. N. 4. P. 37—43.
5. **Kolmogorov A. N., Fomin S. V.** *Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza.* M.: Nauka, 1972.
6. **Demenkov N. P., Mochalov I. A.** Nechetkaja interpoljacija. *Nauka i obrazovanie.* 2012. N. 2.
7. **Mosleh, Otadi M.** Numerical solution of quadratic Riccati differential equation by neural network. *Mathematical Sciences.* 2011. V. 5, N. 3. P. 249—257.