

Ю. А. Зак, д-р техн. наук, науч. эксперт и консультант,
Германия, г. Аахен, e-mail: yuriy_zack@hotmail.com

Вероятностные динамические модели анализа работы сборочных конвейерных линий

Рассматриваются вероятностные динамические модели работы конвейерных линий в условиях стохастически заданных времен выполнения операций. Приведены законы распределения и вероятностные характеристики времени такта работы синхронных конвейерных линий. Предложены стохастические критерии эффективности работы. Сформулирована и решена задача оптимального распределения технологических операций по постам сборочного конвейера, с максимальной вероятностью обеспечивающая достижение времени такта работы конвейерной линии не выше заданного установленного значения либо обеспечивающая с вероятностью не ниже заданной некоторого минимального такта работы конвейера.

Предложены математические модели, технико-экономические показатели эффективности работы и алгоритмы анализа этих производств на основе дискретных цепей Маркова в условиях разбиения технологического процесса на несколько независимых друг от друга стадий и создания промежуточных накопителей определенных объемов. Сформулированы критерии эффективности работы производств, обеспечивающие минимальное значение суммарных приведенных потерь в этих условиях.

Ключевые слова: конвейерные линии, минимизация времени такта, вероятностные динамические модели анализа, стохастические критерии эффективности

Введение

Под структурной надежностью работы конвейерной линии понимается обеспечение возможности функционирования и эффективной работы отдельных стадий технологического процесса в условиях:

- случайных изменений времен выполнения отдельных технологических операций на некоторых сборочных постах;
- выхода из строя или снижения производительности отдельных рабочих станций;
- сбоев в поступлении материалов, заготовок и комплектующих, работы транспорта;
- отбраковки изделий после выполнения определенных объемов работ.

Обеспечение структурной надежности достигается рассинхронизацией технологического процесса, разбиением его на несколько независимых друг от друга стадий и созданием промежуточных накопителей определенных объемов. Благодаря наличию этих буферных накопителей и запасов изделий между отдельными стадиями технологического процесса при остановке или снижении производительности отдельных постов конвейера остальные посты некоторое время могут продолжать работать с прежней производительностью. При этом успешное решение задачи создания промежуточных накопителей между отдельными стадиями, определение оптимальных мест их расположения и объемов

этих накопителей позволит повысить эффективность их работы и сократить затраты на их создание и эксплуатацию.

В литературе наибольшее внимание уделялось решению задач в детерминированной постановке оптимального распределения всего множества технологических операций по постам сборочного конвейера, которые являются чрезвычайно важными для массового и крупносерийного производства (см., например, [1–9]). В качестве критерия эффективности работы сборочного конвейера можно рассматривать максимальную производительность сборочного конвейера, т. е. количество изделий, выпускаемых в единицу времени при заданном числе рабочих станций, определяемую выражением

$$E_1 = \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{i \in \tilde{I}_k} t_i + \tau \geq \frac{1}{m\theta} \sum_{i \in \tilde{I}} t_i, \quad (1)$$

где m — заданное число рабочих станций; $\tilde{I} = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ — множество технологических операций, длительность каждой из которых равна t_i ; $\theta = \bar{\theta} + \tau$ — время такта работы конвейера, включающего максимальную длительность обработки изделия на рабочих постах $\bar{\theta}$ и время τ перемещения изделия с одного рабочего поста на другой. В дальнейшем для простоты изложения под тактом работы конвейерной линии будем понимать величину $\bar{\theta} = \theta - \tau$; \tilde{I}_k — подмножество операций, выполняемых на k -й рабочей станции. Пусть допусти-

мая последовательность выполнения технологических операций задана некоторым графом, где \bar{U} — множество всех дуг графа. Определим также следующие показатели:

$\bar{A}(i)$ — множество операций, которые могут выполняться только после завершения выполнения операции i ; $\bar{B}(i)$ — множество операций, которые должны быть выполнены перед началом выполнения операции i .

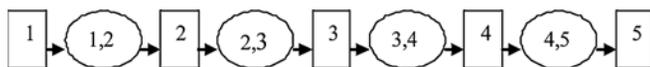
Рассматриваемая задача относится к классу NP -сложных задач экспоненциальной сложности. Применяемые на практике методы решения этой задачи, основанные на методах ветвей и границ, глобального случайного поиска, генетических алгоритмах и эволюционных стратегиях, а также эвристических методах, требуют больших объемов вычислений и не гарантируют получения точных решений для реальных практических приложений в условиях большой размерности.

Задачам обеспечения структурной надежности конвейерных линий в условиях стохастических или нечетких данных о временах выполнения отдельных операций и суммарных времен выполнения всех операций на отдельных постах сборочного конвейера уделялось недостаточное внимание в монографиях и периодической литературе. Здесь следует отметить работы [6, 7].

В данной работе рассматриваются математические модели анализа в следующих условиях. Конвейерная линия разбивается на несколько относительно независимо друг от друга работающих участков, соединенных буферными накопителями определенных размеров (см. рисунок), функцией которых является хранение продукции незавершенного производства.

В этих условиях снижение производительности отдельных рабочих станций или стадий технологического процесса не оказывает существенного влияния на остальные посты (рабочие станции) конвейерной линии, которые даже в этих условиях могут работать с прежней производительностью.

Создание буферных накопителей больших размеров связано с увеличением площадей, капитальных и эксплуатационных затрат и, начиная с некоторых размеров, уже не приводит к существенному увеличению производительности конвейерной линии. Изменяя структуру технологической линии, варьируя размерами буферных накопителей и распределением операций по постам сборочного конвейера, можно методами имитационного моделирования определить оптимальную структуру и технологию производственного процесса. Поэтому выбор их месторасположения и оптимальных раз-



Организация конвейерного производства

меров, а также алгоритма управления линией является очень важной задачей проектирования и организации конвейерного производства.

1. Распределение вероятностей времени такта работы конвейерной линии без буферных накопителей

Рассмотрим синхронно работающую конвейерную линию без буферных накопителей, включающую m рабочих станций. Пусть заданы $W_k = \{w_{k1}, \dots, w_{kl}, \dots, w_{kL}\}$, $k = 1, \dots, m$, — множество операций, выполняемых на k -й рабочей станции, g_{kl}^p — время выполнения операции $t(w_{kl})$, а также дискретное распределение времени выполнения каждой из операций $\pi_{kl}^g = p\{t(w_{kl}) = g_{kl}^p\}$, $l = 1, \dots, L$; $k = 1, \dots, m$; $p = 1, \dots, d$. Тогда дискретные распределения вероятностей суммарных времен выполнения всех технологических операций на каждой рабочей станции $p_{kr} = p\{T_k = r\}$, $r = 1, \dots, R$, $k = 1, \dots, m$, определяются по формулам

$$p_{kr} = \left\{ \prod_{l=1}^L \pi_{kl}^p \mid l = 1, \dots, L; \sum_{l=1}^L g_{kl}^p = r \right\}. \quad (2)$$

Если рабочая станция состоит из нескольких сборочных постов $v = 1, \dots, V$ и $\pi_{kl}^{vp} = p\{t(w_{kl}^{vp}) = g_{kl}^{vp}\}$ — дискретное распределение времени выполнения каждой из операций на v -м посту k -й рабочей станции, то распределение вероятностей суммарного времени выполнения всех технологических операций на этой рабочей станции

$$p_{kl}^v = \left\{ \prod_{l=1}^L \pi_{kl}^{vp} \mid l = 1, \dots, L; \sum_{l=1}^L g_{kl}^{vp} = r \right\},$$

$$p_{kr}\{T_k = r\} = \sum_{\eta=1}^V p_{kr}^v \left[\prod_{v=1}^{\eta-1} \left(\sum_{l=1}^{r-1} p_{kl}^v \right) \right] \left[\prod_{v=\eta+1}^V \left(\sum_{l=1}^r p_{kl}^v \right) \right]. \quad (3)$$

Пример 1. На рабочей станции выполняются три технологические операции. Распределение вероятностей времен выполнения операций на этой рабочей станции задано в табл. 1.

Таблица 1
Распределение вероятностей времени выполнения операций на k -й рабочей станции

№ операции l	Распределение вероятностей времен выполнения операций					
	1-е значение		2-е значение		3-е значение	
	g_l^1	$\pi(g_l^1)$	g_l^2	$\pi(g_l^2)$	g_l^3	$\pi(g_l^3)$
1	2	0,4	3	0,6	—	—
2	5	0,3	6	0,4	7	0,3
3	4	0,2	5	0,8	—	—

Распределение вероятностей суммарных времен выполнения операций на рабочих станциях

№ стан- ции k	Распределение вероятностей суммарных времен выполнения операций							
	1-е значение		2-е значение		3-е значение		4-е значение	
	T_k	$p(T_k)$	T_k	$p(T_k)$	T_k	$p(T_k)$	T_k	$p(T_k)$
1	10	0,1	11	0,5	12	0,3	13	0,1
2	10	0,2	11	0,3	12	0,3	13	0,2
3	10	0,1	11	0,4	12	0,3	13	0,2

Распределение вероятностей суммарного времени выполнения всех операций на данной k -й рабочей станции:

$$p\{T_k = 11\} = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024;$$

$$p\{T_k = 12\} = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,164;$$

$$p\{T_k = 13\} = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,344;$$

$$p\{T_k = 14\} = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,324;$$

$$p\{T_k = 15\} = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,144.$$

Математическое ожидание и дисперсия времени такта

$$m\{T_k\} = (11 \cdot 0,024 + 12 \cdot 0,164 + 13 \cdot 0,344 + 14 \cdot 0,324 + 15 \cdot 0,144 = 13,224;$$

$$D\{T_k\} = 0,024 \cdot [11 - 13,224]^2 + 0,164 \cdot [12 - 13,224]^2 + 0,344 \cdot [13 - 13,224]^2 + 0,324 \cdot [14 - 13,224]^2 + 0,144 \cdot [15 - 13,224]^2 = 0,8359.$$

Распределение вероятностей времени такта работы конвейерной линии, т. е. распределение максимального времени работы среди всех рабочих станций, определяется согласно выражению

$$P\{\bar{T} = r\} = \sum_{k=1}^m p_{kr} \left[\prod_{l=1}^{k-1} \left(\sum_{l=1}^{r-1} p_{kl} \right) \right] \left[\prod_{l=k+1}^m \left(\sum_{l=1}^r p_{kl} \right) \right], \quad r = 1, \dots, R. \quad (4)$$

Если заданы непрерывные распределения вероятностей времен выполнения технологических операций на каждой рабочей станции $p\{T_k = r\}$, $r \in [q, R]$, $k = 1, \dots, m$, то распределение $P\{\bar{T} = r\}$ вычисляется по формуле

$$P\{\bar{T} = r\} = p(T_{kr}) \cdot \sum_{l=1}^m \int_{l=k}^r p(T_{ls}) \cdot dp(T_l), \quad r \in [q, R]. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем $r \in [q, R]$ — возможный диапазон времен выполнения всех технологических операций.

Математическое ожидание и дисперсия времени такта работы конвейерной линии определяются согласно следующим выражениям:

$$m\{\bar{T}\} = \sum_{r=1}^R r \cdot P\{\bar{T} = r\},$$

$$D\{\bar{T}\} = \sum_{r=1}^R P\{\bar{T} = r\} \cdot (r - m\{\bar{T}\})^2. \quad (6)$$

Пример 2. Пусть конвейерная линия состоит из трех рабочих станций. Распределение вероятностей суммарных времен выполнения технологических операций на каждой рабочей станции сведены в табл. 2.

Распределение вероятностей времени такта работы конвейерной линии

$$p\{\bar{T} = 10\} = 0,1 \cdot 1,0 \cdot 1,0 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 1,0 = 0,352;$$

$$p\{\bar{T} = 11\} = 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,548;$$

$$p\{\bar{T} = 12\} = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,096;$$

$$p\{\bar{T} = 13\} = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,004.$$

Математическое ожидание и дисперсия времени такта работы конвейерной линии соответственно равны

$$m\{\bar{T}\} = (10 \cdot 0,352 + 11 \cdot 0,548 + 12 \cdot 0,096 + 13 \cdot 0,004 = 10,652;$$

$$D\{\bar{T}\} = 0,352 \cdot [10,652 - 10,0]^2 + 0,548 \cdot [10,652 - 11,0]^2 + 0,096 \cdot [10,652 - 12,0]^2 + 0,004 \cdot [10,652 - 13,0]^2 = 0,412.$$

2. Критерии эффективности работы синхронных конвейерных линий

В случае стохастически заданных времен выполнения операций на постах сборочного конвейера в качестве критерия оптимальности могут рассматриваться следующие показатели:

- минимизация математического ожидания времени такта работы конвейерной линии ($m\{\bar{T}\} \rightarrow \min$) в условиях ограничений $D\{\bar{T}\} \leq \bar{D}$;
- максимизация вероятности того, что время такта работы конвейерной линии будет не более некоторого наперед заданного значения E :

$$\Phi_1 = P\{\bar{T} \leq E\} \rightarrow \max; \quad (7)$$

- минимизация времени такта работы конвейерной линии, значение ниже которого гарантируется с вероятностью не ниже заданной \bar{P} —

$$\Phi_2 = \min\{F|P\{\bar{T} \leq F\} \geq \bar{P}\}. \quad (8)$$

Кроме того, может рассматриваться двухкритериальная задача

$$m\{\bar{T}\} \rightarrow \min, D\{\bar{T}\} \rightarrow \min,$$

которая может быть сведена к однокритериальной линейной свертке критериев

$$\Phi_3 = m\{\bar{T}\} + \alpha \cdot \sigma\{\bar{T}\} \rightarrow \min. \quad (9)$$

Здесь $\sigma\{\bar{T}\} = \sqrt{D\{\bar{T}\}}$, α — некоторый весовой коэффициент, который может быть выбран в пределах $\alpha \in [0,15; 0,25]$.

Наибольший интерес для практических приложений представляют критерии (7) и (8). В случае дискретных распределений суммарных времен выполнения операций на рабочих станциях сборочного конвейера

$$P\{\bar{T} \leq E\} = \sum_{r=\rho}^H \{P(\bar{T} = r)|H \leq E\} \rightarrow \max, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \{F|P\{\bar{T} \leq F\} \geq \bar{P}\} = \\ & = \left\{ \min H \left| \sum_{r=\rho}^H P(\bar{T} = r) \geq \bar{P} \right. \right\} \rightarrow \min, \quad (11) \end{aligned}$$

где значения $P(\bar{T} = r)$ вычисляются по формулам (4).

В случае непрерывных законов распределения вероятностей

$$P\{\bar{T} \leq E\} = \int_{\rho}^E \{P(\bar{T} = r)\} \cdot dP(\bar{T} = r) \rightarrow \max, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \{F|P\{\bar{T} \leq F\} \geq \bar{P}\} = \\ & = \left\{ \min H \left| \int_{\rho}^H P(\bar{T} = r) \cdot dP(\bar{T} = r) \geq \bar{P} \right. \right\} \rightarrow \min. \quad (13) \end{aligned}$$

Здесь значения $P(\bar{T} = r)$ вычисляются по формулам (6).

Рассмотрим алгоритм получения приближенного решения эвристическими методами задачи оптимального распределения технологических операций по постам сборочного конвейера, оптимизирующего один из критериев оптимальности (9)—(13).

Задача формулируется следующим образом. Пусть последовательность технологических операций сборки задана некоторым графом. Известны число рабочих станций, последовательности и длительности выполнения технологических операций t_i . Каждая из технологических операций должна выполняться только на какой-либо одной из рабочих станций.

Необходимо определить распределение всех операций по рабочим постам (станциям) и построить последовательность их выполнения на каждом k -м посту, обеспечивающие заданную технологию сборки и максимальную производительность сборочного конвейера, т. е. минимизацию одного из критериев оптимальности (9)—(13). Точные и приближенные методы решения этой задачи в условиях детерминированных времен выполнения технологических операций рассматривали многие авторы (см., например, [4—8]). Автором разработаны алгоритмы точных и приближенных методов решения этой задачи с учетом целого ряда важных для практических приложений ограничений на условия работы конвейерной линии. Автору неизвестны публикации, описывающие методы решения этой задачи в условиях стохастически заданных времен выполнения операций t_i с критериями оптимальности (9)—(13).

3. Обсуждение алгоритмов решения задачи обеспечения с максимальной вероятностью заданного времени такта работы конвейерной линии

Если известны математические ожидания времени выполнения каждой из технологических операций

$$M(t_i) = \sum_{l=1}^L p\{t_i = g_i^l\} \cdot g_i^l, \quad i \in \tilde{I} = \{1, \dots, i, \dots, n\}, \quad (14)$$

то нижняя граница приближенного значения такта работы конвейерной линии определяется выражением

$$\xi\{M(\bar{\theta})\} = \max \left\{ \left\lfloor \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n M(t_i) \right\rfloor; \max_{1 \leq i \leq n} M(t_i) \right\} + \tau. \quad (15)$$

Здесь и в дальнейшем $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть частного от деления двух величин; τ — детерминированное значение времени транспортировки собираемого изделия с одного поста на другой.

Обозначим \tilde{I}_k — подмножество операций, выполняемых на k -м сборочном посту. Приближенное решение задачи минимизации математического ожидания времени такта работы конвейерной линии может быть выполнено алгоритмами минимизации времени такта работы синхронных конвейерных линий, алгоритмами, описанными в работах [5—8, 10], принимая значения $M(t_i)$ в качестве детерминированных времен выполнения операций. В результате решения этой задачи будут определены подмножества выполнения операций на каждом из постов сборочного конвейера \tilde{I}_k , $k = 1, \dots, m$, а также допустимые последовательности их выполнения.

Полученное допустимое решение задачи может быть использовано в качестве начального приближения и в дальнейшем улучшаться относительно значений критериев (10), (12) (или (11), (13)), описанным ниже методом локальных вариаций (см., например, [10]).

Если построено некоторое допустимое решение $\tilde{\Omega}_0$, удовлетворяющее условиям технологической последовательности выполнения операций, то для этого начального приближения могут быть вычислены следующие показатели:

- дискретные распределения вероятностей суммарных времен выполнения всех технологических операций на каждой рабочей станции $p_{kr} = P\{T_k = r\}$ по формулам (2) или (3), которые обозначим $(p_{kl}/\tilde{\Omega}_s)$, $s = 0$;
- вероятность того, что суммарное время выполнения всех технологических операций на каждой рабочей станции не будет превышать заданное значение E ,

$$P\{T_k \leq E\} = \sum_{r=q}^H \{P(T_k \leq r) | H \leq E\}, \quad (16)$$

где q и H — соответственно минимальное и максимальное из допустимых в выражении (16) времена выполнения всех технологических операций;

- минимальное значение суммарного времени выполнения всех технологических операций на каждой рабочей станции, достижение которого гарантируется с вероятностью не ниже величины \bar{P} .

$$F_k = \{F | P(T_k \leq F) \geq \bar{P}\} = \left\{ \min H \mid \sum_{r=q}^H P(T_k \leq r) \geq \bar{P} \right\}; \quad (17)$$

- распределение вероятностей времени такта работы конвейерной линии по формулам (5) или (6);
- вероятность того, что время такта работы конвейерной линии не будет превышать заданного значения E и минимального времени такта работы конвейерной линии, достижение которого гарантируется с вероятностью не ниже величины \bar{P} , которые вычисляются соответственно по формулам (10), (11).

Обозначим все эти величины соответственно $(p_{kl}/\tilde{\Omega}_s)$, $P\{(T_k \leq E)|\tilde{\Omega}_s\}$, $\{F_k|\tilde{\Omega}_s\}$, $l = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, m$, $\{P(\bar{T} \leq E)|\tilde{\Omega}_s\}$, $\{F|\tilde{\Omega}_s\}$ — значения соответствующих показателей на s -м шаге алгоритма.

Здесь $s = 0, 1, \dots, S$ — шаги алгоритма локальной вариации.

С помощью процедуры локальной вариации осуществляется переход к другому допустимому

решению (от $\tilde{\Omega}_s$ к $\tilde{\Omega}_{(s+1)}$) с лучшим значением критерия оптимальности. Для простоты изложения алгоритм локальной вариации описываем для случая, когда каждая рабочая станция включает только один пост сборки изделий.

На каждом s -м шаге алгоритма ($s = 0, 1, \dots, S$) выполняем следующее.

1. Вычисляем значения $(p_{kl}/\tilde{\Omega}_s)$, $l = 1, \dots, L$; $P\{(T_k \leq E)|\tilde{\Omega}_s\}$ или $\{F_k|\tilde{\Omega}_s\}$, $k = 1, \dots, m$, а также значения критерия оптимальности $\{P(\bar{T} \leq E)|\tilde{\Omega}_s\}$ или $\{F|\tilde{\Omega}_s\}$.

2. Находим индекс рабочей станции, являющейся "узким местом":

$$\lambda_s = \arg \min_{1 \leq k \leq K} P\{(T_k \leq E)|\tilde{\Omega}_s\} \text{ или } \lambda_s = \arg \max_{1 \leq k \leq K} \{F_k|\tilde{\Omega}_s\}. \quad (18)$$

3. Обозначим \tilde{I}_{λ_s} , \tilde{I}_{λ_s-1} и \tilde{I}_{λ_s+1} — подмножества технологических операций, выполняемых соответственно на λ_s -й, $(\lambda_s - 1)$ -й и $(\lambda_s + 1)$ -й рабочих станциях. Если

$$P\{(T_{\lambda_s+1} \leq E)|\tilde{\Omega}_s\} \geq P\{(T_{\lambda_s-1} \leq E)|\tilde{\Omega}_s\} \text{ или } \{F_{\lambda_s+1}|\tilde{\Omega}_s\} \leq \{F_{\lambda_s-1}|\tilde{\Omega}_s\}, \quad (19)$$

а) выберем одну из операций $j \in \tilde{I}_{\lambda_s}$, для которой $\bar{A}(i) \cap \{\tilde{I}_{\lambda_s}/j\} = \emptyset$, и перенесем ее в подмножество операций \tilde{I}_{λ_s+1} . Выполняем преобразования

$$\tilde{I}_{\lambda_s} = (\tilde{I}_{\lambda_s+1}/j), \tilde{I}_{\lambda_s+1} = (\tilde{I}_{\lambda_s} \cup j); \quad (20)$$

б) выберем одну из операций $j \in \tilde{I}_{\lambda_s}$, для которой $\bar{A}(i) \cap \{\tilde{I}_{\lambda_s}/j\} = \emptyset$, и одну из операций $\zeta \in \tilde{I}_{\lambda_s+1}$, для которых $\bar{A}(i) \cap \{\tilde{I}_{\lambda_s}/j\} = \emptyset$, и $\bar{B}(i) \cap \{\tilde{I}_{\lambda_s+1}/\zeta\} = \emptyset$, если $M(t_j) > M(t_\zeta)$, и поменяем их местами. Для этого выполняем преобразования

$$\tilde{I}_{\lambda_s} = \{(\tilde{I}_{\lambda_s+1}/j) \cup \zeta\}, \tilde{I}_{\lambda_s+1} = \{(\tilde{I}_{\lambda_s}/\zeta) \cup j\}. \quad (21)$$

Вычислим для вновь образованных подмножеств операций значения

$$(p_{kl}/\tilde{\Omega}_s), l = 1, \dots, L; P\{(T_k \leq E)|\tilde{\Omega}_s\} \text{ или } \{F_k|\tilde{\Omega}_s\},$$

где $k = \lambda_s, \lambda_s + 1$.

Вновь полученное решение обозначим $\tilde{\Omega}_s^1$.

Если для преобразования 3а или хотя бы для одной пары преобразования 3б справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max\{P\{(T_{\lambda_s} \leq E)|\tilde{\Omega}_s^1\}; P\{(T_{\lambda_s+1} \leq E)|\tilde{\Omega}_s^1\}\} > \\ > P\{(\bar{T} \leq E)|\tilde{\Omega}_s\}, \\ \min\{F_{\lambda_s}|\tilde{\Omega}_s^1\}; \{F_{\lambda_s+1}|\tilde{\Omega}_s^1\} < \{F|\tilde{\Omega}_s\}, \end{aligned} \quad (22)$$

то оставляем преобразованные подмножества выполнения операций на рабочих станциях $k = \lambda_s, \lambda_s + 1$, формируем новые последовательности выполнения операций на этих рабочих станциях и переходим к $(s + 1)$ -му шагу итерации, т. е., положив $s := (s + 1)$, возвращаемся к пункту 1 алгоритма. В противном случае переходим к пункту 4.

4. а) Выберем одну из операций $j \in \tilde{I}_{\lambda_s}$, для которой $\bar{B}(i) \cap \{\tilde{I}_{\lambda_s}/j\} = \emptyset$, и перенесем ее в подмножество операций $i \in \tilde{I}_{\lambda_s-1}$. Выполняем преобразование

$$\tilde{I}_{\lambda_s} = (\tilde{I}_{\lambda_s+1}/j)\tilde{I}_{\lambda_s-1} = (\tilde{I}_{\lambda_s} \cup j). \quad (23)$$

б) Выберем одну из операций $j \in \tilde{I}_{\lambda_s}$, для которой $\bar{B}(i) \cap \{\tilde{I}_{\lambda_s}/j\} = \emptyset$, и одну из операций $\varsigma \in \tilde{I}_{\lambda_s-1}$, для которой $\bar{A}(i) \cap \{\tilde{I}_{\lambda_s-1}/\varsigma\} = \emptyset$ и $M(t_j) > M(t_\varsigma)$. Поменяем их местами, выполнив преобразования соответствующих подмножеств

$$\tilde{I}_{\lambda_s} = \{(\tilde{I}_{\lambda_s+1}/j) \cup \varsigma\}, \tilde{I}_{\lambda_s-1} = \{(\tilde{I}_{\lambda_s}/\varsigma) \cup j\}. \quad (24)$$

Вычислим для вновь образованных подмножеств операций значения

$$(p_{kl}|\tilde{\Omega}_s), l = 1, \dots, L; P\{(T_k \leq E)|\tilde{\Omega}_s\} \text{ или } \{F_k|\tilde{\Omega}_s\},$$

где $k = \lambda_s, \lambda_s - 1$.

Вновь полученное решение обозначим $\tilde{\Omega}_s^2$.

Если для преобразования 3а или хотя бы для одной пары преобразования 3б справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max\{P\{(T_{\lambda_s} \leq E)|\tilde{\Omega}_s^2\}; P\{(T_{\lambda_s-1} \leq E)|\tilde{\Omega}_s^2\}\} > \\ > P\{(\bar{T} \leq E)|\tilde{\Omega}_s\}, \\ \min\{F_{\lambda_s}|\tilde{\Omega}_s^2\}; \{F_{\lambda_s-1}|\tilde{\Omega}_s^2\} < \{F|\tilde{\Omega}_s\}, \end{aligned} \quad (25)$$

то оставляем преобразованные подмножества выполнения операций на рабочих станциях $k = \lambda_s, \lambda_s - 1$, формируем новые последовательности выполнения операций на этих рабочих станциях и, положив $\tilde{\Omega}_{s+1} = \tilde{\Omega}_s^2$, переходим к $(s + 1)$ -му шагу итерации, положив $s := (s + 1)$, возвращаемся к п. 1 алгоритма. В противном случае алгоритм завершает свою работу и полученное распределение операций по постам сборочного конвейера принимается в качестве оптимального решения.

Отметим, что если не выполняется система неравенств (19), то вначале выполняется пункт 4 алгоритма, а потом пункт 3.

Автором был выполнен вычислительный эксперимент, в процессе которого решались задачи размерностью $n = 100 \dots 150$ операций и $m = 8 \dots 15$ рабочих станций. Матрица смежности графа последовательности технологических операций содержала 10...15 % единиц. Времена выполнения технологических операций в диапазоне $t_j \in [3, 10]$ выбирались случайным образом. Было решено более 40 задач. В результате выполненного вычислительного эксперимента было установлено, что алгоритмом локальных вариаций за число больших итераций, равное $S \leq 75$, как правило, может быть получено решение, значение критерия оптимальности которого на 7...15 % лучше решения, принятого в качестве начального приближения.

4. Стохастический анализ работы асинхронных конвейерных линий

Рассматриваются динамические вероятностные модели (на основе дискретных цепей Маркова с конечным множеством состояний) анализа состояния производительности и запасов в буферных накопителях для различных организационных структур конвейерных линий. Суммарные времена выполнения операций на каждом из постов сборочного конвейера заданы произвольными дискретными законами распределения вероятностей. Распределения вероятностей времени такта и производительности сборочного конвейера — функция от размеров буферных емкостей и выбранного распределения времени выполнения всех операций на различных постах сборочного конвейера. В результате анализа будут определены вероятности различных значений производительности отдельных станций, участков технологического процесса и всей технологической линии, а также состояния запасов в буферных накопителях в произвольные моменты времени.

Введем следующие обозначения:

$k = 1, \dots, m$ — индексы рабочих станций (постов сборочного конвейера);

$l = 0, 1, \dots, L$ (в частности, $L = m$) — индексы буферных накопителей;

$t = 0, 1, \dots, T$ — номера временных интервалов;

$B_l(B_l^-, B_l^+)$ — максимальный объем l -го буферного накопителя (стоящего до ($l = k - 1$) и после k -й ($l = k$) рабочей станции), измеряемый числом хранящихся в нем изделий;

$\rho_k(t, \tau) \geq 0$ — вероятность того, что в t -м временном интервале суммарное время выполнения всех операций на k -й рабочей станции равно τ ,

$$\sum_{\tau = d_k}^{D_k} \rho_k(t, \tau) = 1, \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T. \text{ Если}$$

случайные процессы изменения времени выполнения технологических операций стационарны, то значения вероятностей $\rho_k(t, \tau)$ при установлении стационарного режима работы системы не зависят от уровня начальных запасов в накопителях; d_k и D_k — соответственно минимальное и максимальное значения времени выполнения всех операций на k -й рабочей станции;

$S_k^-(t) = S_{k-1}(t)$ и $S_k^+(t) = S_k(t)$ — соответственно число изделий в буферном накопителе перед и после k -й рабочей станции в t -м временном интервале;

$p(S_k^-(r, t)), p(S_k^+(r, t))$ — вероятности того, что в t -м временном интервале число изделий в соответствующем накопителе будет равно r ;

$$\sum_{r=0}^{B_k^-} p(S_k^-(r, t)) = 1, \quad \sum_{r=0}^{B_k^+} p(S_k^+(r, t)) = 1, \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (26)$$

$p(A_k(t))$ — вероятности того, что в t -й временной интервал k -я рабочая станция начнет выполнение технологических операций; $p(E_k(t))$ — вероятности того, что в t -й временной интервал k -я рабочая станция завершит выполнение всех технологических операций по сборке какого-то изделия; $p(G_k(t))$ — вероятности того, что в t -й временной интервал k -я рабочая станция завершила обработку предыдущего и будет готова к началу обработки нового изделия; $p(F_k(t))$ — вероятности того, что в t -й временной интервал k -я рабочая станция в одном из предыдущих временных интервалов закончила обработку изделия и передает его в накопитель, стоящий после этой станции; $p(R_k(t))$ — некоторое вспомогательное значение вероятности, необходимое для последующих вычислений.

Дискретные распределения вероятностей времени начала, завершения обработки изделия и готовности каждой рабочей станции для начала обработки

следующего изделия в произвольный момент времени t могут быть вычислены либо по формулам

$$p(E_k(t)) = \sum_{\tau = d_k}^{D_k} \rho_k(t, \tau) \cdot p(A_k(t - \tau)), \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T; \quad (27)$$

$$p(A_k(t)) = p(G_k(t)) \cdot p[S_k^-(t - 1) \geq 1], \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (28)$$

$$p(R_k(t)) = p(E_k(t)) + p(F_k(t - 1)) - p(E_k(t)) \cdot p(F_k(t - 1)), \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (29)$$

$$p(G_k(t)) = p(R_k(t)) \cdot p(S_k^+(t - 1) < B_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (30)$$

$$p(F_k(t)) = p(R_k(t)) \cdot [1 - p(G_k(t))], \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (31)$$

или согласно выражениям

$$p(G_k(t)) = p(G_k(t - 1)) \cdot [1 - p(A_k(t - 1))] + p(E_k(t - 1)) - p(G_k(t - 1)) \times [1 - p(A_k(t - 1))] \cdot p(E_k(t - 1)), \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (32)$$

$$p(F_k(t)) = p[S_k^+(t - 1) < B_k^+] \cdot \{p(E_k(t)) + \sum_{h=1}^{H_k} p(E_k(t - h)) \cdot p[S_k^+(t - h - 1) = B_k^+] - \sum_{h=1}^{H_k} p(E_k(t)) \cdot p(E_k(t - h)) \cdot p[S_k^+(t - h - 1) = B_k^+]\}, \quad k = 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (33)$$

Вероятности различных значений состояния запасов (измеряемое числом изделий) в накопителях, расположенных перед и после рабочих станций, в произвольный момент времени t могут быть вычислены по следующим формулам:

$$p(S_k(r, t)) = p(S_k(r, t - 1)) \cdot \{p(A_{k+1}(t)) \cdot p(G_k(t)) + [1 - p(A_{k+1}(t))] \cdot [1 - p(G_k(t))] + p(S_k(r + 1, t)) \times p(A_{k+1}(t)) \cdot [1 - p(G_k(t))] + p(S_k(r - 1, t)) \times [1 - p(A_{k+1}(t))] \cdot p(G_k(t)), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (34)$$

$$p(S_k(0, t)) = p(S_k(0, t - 1)) \cdot \{p(A_{k+1}(t)) \cdot p(G_k(t)) + [1 - p(G_k(t))] + p(S_k(1, t)) \cdot p(A_{k+1}(t)) \times [1 - p(G_k(t))], \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad (35)$$

$$p(S_k(B_k, t)) = p(S_k(B_k, t - 1)) \cdot \{p(A_{k+1}(t)) \cdot p(G_k(t)) + [1 - p(A_{k+1}(t))] + p(S_k(B_k - 1, t)) \cdot p(G_k(t)) \times [1 - p(A_{k+1}(t))], \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (36)$$

В качестве частных случаев могут быть рассмотрены ситуации, в которых отсутствуют буферные накопители, стоящие либо перед, либо после рабочей станции, а также случаи, когда отсутствуют два накопителя. Во всех рассматриваемых ниже случаях вероятности того, что завершение выполнения всех технологических операций на k -й рабочей станции произойдет в t -м временном интервале, т. е. значение $p(E_k(t))$, рассчитывается по формулам (27). Распределения вероятностей времен начала выполнения операций на рабочей станции в этих случаях рассчитывают по другим формулам. Рассмотрим следующие случаи:

а) отсутствуют два накопителя:

$$p(F_k(t)) = p(E_k(t)) + p(F_k(t-1)) \cdot [1 - p(A_k(t-1))] - p(E_k(t)) \cdot p(F_k(t-1)) \cdot [1 - p(A_k(t-1))],$$

$$k = 0, 1, \dots, m; t = 0, 1, \dots, T; \quad (37)$$

$$p(A_k(t)) = p(F_k(t)) \cdot p(E_{k-1}(t-1)) \cdot p(E_{k+1}(t-1));$$

$$k = 0, 1, \dots, m; t = 0, 1, \dots, T; \quad (38)$$

б) отсутствует буферный накопитель перед рабочей станцией. Вероятности $p(R_k(t))$, $p(G_k(t))$ и $p(F_k(t))$ рассчитываются по формулам (29)–(31); вероятности значений времени начала обработки изделий на k -й рабочей станции в момент времени t определяются по формулам

$$p(A_k(t)) = p(G_k(t)) \cdot p(E_{k-1}(t-1)),$$

$$k = 0, 1, \dots, m; t = 0, 1, \dots, T; \quad (39)$$

в) отсутствует буферный накопитель перед рабочей станцией.

Вероятности $p(F_k(t))$ рассчитываются по формулам (31), а вероятности $p(A_k(t))$ — по следующим формулам:

$$p(A_k(t)) = p(F_k(t)) \cdot p(F_{k+1}(t-1)) \cdot p(S_k^-(t-1) \geq 1),$$

$$k = 0, 1, \dots, m; t = 0, 1, \dots, T. \quad (40)$$

Анализ работы асинхронной конвейерной линии представляет собой некоторый итеративный процесс. На каждом шаге итерации $t = 0, 1, \dots, T$, число которых равно числу анализируемых временных интервалов, предусматривается последовательность расчетов вероятностей начала, завершения выполнения всех операций на каждой рабочей станции, а также распределения вероятностей состояния запасов во всех буферных накопителях в каждом временном интервале t , т. е. выполняются вычисления и рассчитываются все показатели технологического процесса для данного временного интервала t по формулам (27)–(36). После выполнения итеративного процесса рассчитываются все технико-экономические показатели производства по формулам, приведенным ниже в разделе 5 работы.

5. Анализ технико-экономических показателей результатов моделирования

Математическое ожидание и дисперсия суммарного числа изделий, обработанных каждой рабочей станцией и всей конвейерной линией за T временных интервалов, определяются согласно выражениям

$$M[G_k(T)] = \sum_{t=0}^T p(E_k(t)), \quad k = 1, \dots, m; \quad (41)$$

$$\sigma^2[G_k(T)] = \sum_{t=0}^T \left\{ p(E_k(t)) - \frac{M[G_k(T)]}{T+1} \right\}^2,$$

$$k = 1, \dots, m. \quad (42)$$

Для приближенных расчетов распределения вероятностей суммарного количества выпущенных k -й рабочей станцией изделий за $(T+1)$ временных интервалов можно воспользоваться предельной теоремой теории вероятностей. Согласно этой теореме при значении $(T+1) \rightarrow \infty$ распределение суммы независимых случайных величин стремится к нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным $M[G_k(T)]$, и дисперсией, равной $\sigma^2[G_k(T)]$, которые рассчитываются согласно выражениям (41), (42). Перейдем к рассмотрению нормированных значений переменных:

$$z_k = \frac{G_k(T) - M[G_k(T)]}{\sigma[G_k(T)]\sqrt{2}}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (43)$$

Функция нормального закона распределения для нормированных переменных имеет вид

$$P\{\beta_{1k} \leq z_k \leq \beta_{2k}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\beta_{1k}}{\sigma_k}}^{\frac{\beta_{2k}}{\sigma_k}} e^{-\frac{z_k^2}{2}} dz_k,$$

$$k = 1, \dots, m. \quad (44)$$

Вероятности соответствующих значений объемов выпуска изделий вычисляются по формулам Лапласа. В литературе по теории вероятностей и математической статистике [11] приведены соответствующие таблицы, упрощающие выполнение таких расчетов. В выражении (44) значения M_k и σ_k заменены величинами $M[G_k(T)]$ и $\sigma[G_k(T)]$, рассчитанными по формулам (41), (42). Вместо значений β_{1k} и β_{2k} должны быть подставлены соответствующие граничные значения временного диапазона.

Если известна функция распределения вероятностей суммарного количества выпущенных изделий каждой k -й рабочей станцией за $(T+1)$ временных интервалов, то могут быть рассчитаны все моменты более высоких порядков этой функции распределения, а также следующие технико-экономические показатели и вероятностные оценки

работы каждой рабочей станции и всей конвейерной линии:

— суммарное количество обработанных изделий, выпуск которого гарантируется с вероятностью не ниже заданной;

— вероятность того, что объем выпуска изделий будет больше и равен заданного установленного количества.

Список литературы

1. Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний. М.: Физматгиз, Наука, 1975. 359 с.
2. Танаев В. С., Ковалев М. Я., Шафранский Я. М. Теория расписаний. Групповые технологии. Минск: Изд-во Института технической кибернетики НАН Беларуси, 1998. 289 с.
3. Танаев В. С., Сотсков Ю. Н., Струевич В. А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: URSS, 1989. 328 с.

4. Ху Т. С. Параллельное упорядочение и проблемы линии сборки // Кибернетический сборник. 1967. Вып. 4. С. 43—56.

5. Зак Ю. А. Оптимальное распределение технологических операций на сборочном конвейере // Кибернетика. 1990. № 4. С. 45—54.

6. Зак Ю. А. Прикладные задачи теории расписаний и маршрутизации перевозок. М.: URSS, 2012. 394 с.

7. Зак Ю. А. Повышение эффективности работы сборочных конвейерных линий // Научное обозрение: экономика и управление. 2012. № 4. С. 123—134.

8. Domschke W., Scholl A., Voss S. Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. 456 s.

9. Joldbauer H. Produktionsoptimierung: Wirtschaftliche sowie kundenorientierte Planung und Steuerung. Berlin-Wien: Springer, 2008. 390 s.

10. Зак Ю. А. Методы локальных вариаций в решении задач теории расписаний // Информационные технологии. 2013. № 4. С. 12—19.

11. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

Yu. A. Zack, Dokt.-Ing. Deutschland, Aachen, Deutschland
e-mail: yuriy_zack@hotmail.com

Probabilistic Dynamic Models of the Analysis of Functioning of Assembly Conveyorlines

Probabilistic dynamic models of the conveyor lines are considered for stochastically given times of the operations. The distribution and probabilistic characteristics of the machine cycle of the synchronous assembly lines are defined. Stochastic performance criteria are introduced. The problem of optimal allocation of technological operations of the assembly line with the maximal probability of the machine cycle time of the assembly line to be not higher than a given value or with the probability to be not less than a given minimal conveyor's cycle time is considered.

The mathematical models, technical and economic parameters of the efficiency and algorithms of the analysis of these types of industries are based on using discrete Markov chains assuming the partition of the technological process in several independent stages and the creation of intermediate storage of certain volumes. The criteria of the efficiency of production minimizing total losses are formulated.

Keywords: conveyor lines, minimization of machine cycle, probabilistic dynamic models, stochastic criteria of efficiency

References

1. Konvej R. V., Maxwell V. L., Miller L. V. Teoria raspisanij. M.: Fizmatgiz, Nauka, 1975. 395 p.
2. Tanajev V. S., Kovalev M. Ja., Shafransky Ja. M. Teoria raspisanij. Gruppovije tehnologij. Minsk: Institut Technicheskoj Kibernetiki NAN Belorusii, 1998. 289 p.
3. Tanajev V. S., Sotskov Yu. N., Strusevitch V. A. Teoria raspisanij. Mnogostadijnije sistemi. M.: URSS, 1989, 328 p.
4. Hu T. S. Parallelnoje uporyadochenije i problemi linii sborki. Kibemeticheskij sbornik. M.: Nauka, 1967. V. 4. P. 43—56.
5. Zack Yu. A. Optimalnoje raspredelemje texnologicheskich operacij na sborochnom konvejere. Kibemetika (Kiev). 1990. N. 4. P. 45—54.

6. Zack Yu. A. Prikladnije zadachi teorii raspisanij i marshrutisazii perevosok. M.: URSS, 2012. 394 p.

7. Zack Yu. A. Povishenije effektivnosti raboti sborochnich konvejernih linij. Nauchnoje obosrenije: ekonomika i upravlenije. 2012. N. 4. P. 123—134.

8. Domschke W., Scholl A., Voss S. Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. 456 p.

9. Joldbauer H. Produktionsoptimierung: Wirtschaftliche sowie kundenorientierte Planung und Steuerung. Berlin-Wien: Springer, 2008. 390 p.

10. Zack Yu. A. Metodi lokalnich variatsij v reshenii sadach teorii raspisanij. Informatsionnije tehnologij. 2013. N. 4. P. 12—19.

11. Ventzel E. S. Teorija verojatnostej. M.: Nauka, 1969. 576 p.