УДК 519.233

Б. Г. Кухаренко, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., вед. науч. сотр.,
Институт машиноведения РАН, г. Москва, e-mail: kukharenko@imash.ru
М. О. Солнцева-Чалей, аспирант,
Московский физико-технический институт (ГУ), e-mail: solnceva.chalei@gmail.com

Применение моделей нелинейных динамических систем для анализа результатов кластеризации многомерных траекторий

Анализ кластеров траекторий, полученных методом полиномиальных регрессий, выполняется с помощью адаптивного нелинейного фильтра Калмана. Для решения задачи одновременной оценки неизвестных параметров и скрытых состояний нелинейной динамической системы применяется алгоритм ожидания и максимизации правдоподобия, использующий приближения гауссовых радиальных базисных функций для представления нелинейной динамики вектора состояний системы. Выделенные компоненты вектора состояний системы позволяют выявить тонкую структуру кластера в соответствии с мерой косинуса.

Ключевые слова: *анализ данных, многомерные траектории, кластеризация, полиномиальная регрессия, адаптивный фильтр Калмана, сглаживатель Рауха, нелинейные динамические системы, радиальные базисные функции, алгоритм ожидания и максимизации правдоподобия*

Введение

Задача кластеризации траекторий обусловлена необходимостью организации движения управляемых объектов. При рассмотрении траекторий движения в трехмерном пространстве наиболее естественно их разделение на кластеры согласно характерной форме траекторий. Такому подходу к выделению кластеров наилучшим образом отвечает метод полиномиальных регрессий, позволяющий оценить форму некоторой обобщенной траектории (маршрута) для каждого кластера [1]. Одновременные кластеризация и выравнивание траекторий движения самолетов по методу полиномиальных регрессий являются достаточно эффективной мерой для решения этой задачи [2].

Траектории объектов описываются векторами переменной длины, представляющими зависимость их координат от времени. Каждый вектор $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^{N_i \times 1}$, $i = \overline{1, q}$ (одномерный временной ряд) состоит из последовательности измерений координатной зависимости $\mathbf{s}_i = s_i(t)$ в моменты времени $\mathbf{t}_i \in \mathbb{R}^{N_i \times 1}$. Вектор $\mathbf{s}_i$ моделируется регрессионной моделью

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\beta}$ — вектор коэффициентов регрессии размерности $(m + 1) \times 1$, и $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ — гауссов шум с нулевым средним, а $\mathbf{T}_i$ — регрессионная матрица. Матрица $\mathbf{T}_i$ зависит от типа используемой регрессионной модели. В случае полиномиальной регрессии $\mathbf{T}_i$ имеет вид стандартной матрицы Вандермонта

$$\mathbf{T}_i = [[1\ t_i[n]\ (t_i[n])^2 \dots (t_i[n])^m],\ n = \overline{1, N_i}]. \tag{2}$$

Основой одновременных кластеризации и выравнивания является модель смеси регрессий, в которую вводятся четыре независимых параметра преобразований выравнивания и масштабирования во времени и пространстве $\{\Phi_i\} = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ (параметры a_i и b_i описывают масштабирование и сдвиг во времени, а параметры c_i и d_i — масштабирование и смещение в пространстве измерений) [3]. Полиномиальная регрессия для одномерного случая имеет вид

$$\mathbf{s}_i = c_i \boldsymbol{\Upsilon}_i \boldsymbol{\beta}_l + d_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \tag{3}$$

где матрица $\boldsymbol{\Upsilon}_i$ получается из матрицы $\mathbf{T}_i$ (2) подстановкой $\mathbf{t}_i \to a_i \mathbf{t}_i - b_i$, параметры $\boldsymbol{\beta}_l$ определяют полиномиальную регрессию для траекторий из l-го кластера $(l = \overline{1, L})$; $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ — гауссов шум с нулевым средним и дисперсией $\boldsymbol{\sigma}_l^2 \mathbf{I}$. Поэтому распределение плотности условной вероятности имеет вид

$$p_l(\mathbf{s}_i | a_i, b_i, c_i, d_i) = \mathcal{N}(\mathbf{s}_i | c_i \boldsymbol{\Upsilon}_i \boldsymbol{\beta}_l + d_i, \boldsymbol{\sigma}_l^2 \mathbf{I}). \tag{4}$$

Плотность вероятности для кривой $\mathbf{s}_i$ однозначно задается соответствующим множеством параметров $\{\Phi_i\}$, которые требуется определить. Задача кластеризации кривых решается как стандартная задача оценки значений скрытых переменных. Каждый из параметров преобразования в выражениях (3) и (4) рассматривается как характерная для $\mathbf{s}_i$ случайная переменная с заранее известным распределением вероятности для кластера. Параметры преобразования в (3) и (4) и параметры $\boldsymbol{\beta}_l$, $l = \overline{1, L}$, полиномиальной регрессии оцениваются одновременно посредством алгоритма ожидания и максимизации правдоподобия (*EM*-алгоритма) [4].

Число кластеров L, определяемых методом полиномиальных регрессий, невелико и на практике не превышает 10. Поэтому для набора достаточно неоднородных траекторий, полученные кластеры также не являются однородными. Для неоднородного кластера полиномиальная регрессия является весьма общим представлением. Поэтому, чтобы выявить неоднородность кластеров траекторий самолетов, структуру кластеров анализируют с помощью моделей линейных динамических систем [3]. Для подтверждения выявленной тонкой структуры кластеров в настоящей работе анализ кластеров выполняется более общим методом моделей нелинейных динамических систем [5].

Определение тонкой структуры рассматриваемого кластера траекторий требует определения компонент, являющихся скелетными кривыми его подкластеров. Определение компонент скрытого состояния заданной размерности и вывод относительно линейности/нелинейности многомерных временных рядов могут быть сделаны в результате анализа этих временных рядов с помощью адаптивного нелинейного фильтра Калмана [6, 7]. При этом для удобства описания вместо матрицы траекторий (измерений) $\mathbf{Y} = [\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_q]$, где $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_q$ — вектор-столбцы из (1) и (3), используется транспонированная матрица, которая имеем вид

$$[\mathbf{y}[1], ..., \mathbf{y}[N]] = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{q \times N}.$$

1. Адаптивный нелинейный фильтр Калмана

Для обучения нелинейного фильтра Калмана используется алгоритм ожидания и максимизации правдоподобия (*Expectation-Maximization algorithm* — *EM*-алгоритм) [5, 8]. Нелинейная динамическая система в дискретном времени описывает эволюцию состояния $\mathbf{x}[k+1] \leftarrow \mathbf{x}[k]$ на одном временном шаге и текущую связь состояния и входа $\mathbf{x}[k]$, $\mathbf{u}[k]$ с наблюдениями $\mathbf{y}[k]$, $k = \overline{1, N}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) + \mathbf{v}[k], \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{g}(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) + \mathbf{w}[k], \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где $\mathbf{v}[k]$, $k = \overline{1, N}$ и $\mathbf{w}[k]$, $k = \overline{1, N}$ — гауссовы шумы с нулевым средним [6, 7]. Динамические системы непрерывного времени (в которых производные специфицируются как функции текущего состояния и входа) могут быть преобразованы в системы дискретного времени (5) посредством дискретизации (*sampling*) их состояния и входа [9]. В частности, для линейной системы непрерывного времени

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t)$$

при дискретизации с интервалом времени τ

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k,$$

динамическая матрица и матрица влияния имеют вид

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_c^k \tau^k}{k!} = \exp(\mathbf{A}_c\tau)$$

и

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_c^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{B}_c.$$

Вектор состояния $\mathbf{x}[k]$ эволюционирует в соответствии с нелинейной, но стационарной, марковской динамикой, производимой входом $\mathbf{u}[k]$, $k = \overline{1, N}$ в присутствии шума $\mathbf{w}[k]$, $k = \overline{1, N}$. Наблюдения $\mathbf{y}[k]$, $k = \overline{1, N}$, нелинейные с шумом, но стационарные, и являются функцией текущего состояния $\mathbf{x}[k]$ и текущего входа $\mathbf{u}[k]$. Нелинейные вектор-функции $\mathbf{f}(..)$ и $\mathbf{g}(..)$ считаются дифференцируемыми. Ниже на *E*-шаге (*EM*-алгоритма) для оценки приблизительного распределения скрытых состояний нелинейной системы (2) используется расширенный сглаживатель Рауха, а на *M*-шаге для нелинейной регрессии вектор-функций $\mathbf{f}(..)$ и $\mathbf{g}(..)$ — разложение по радиальным базисным функциям (*radial basis function* — RBF) [5, 8].

Два условных распределения вероятности

$$\left.\begin{aligned} &P(\mathbf{x}[k]|\mathbf{u}[1], ..., \mathbf{u}[N], \mathbf{y}[1], ..., \mathbf{y}[N]),\ k = \overline{1, N}, \\ &P(\mathbf{x}[k], \mathbf{x}[k+1]|\mathbf{u}[1], ..., \mathbf{u}[N], \mathbf{y}[1], ..., \mathbf{y}[N]),\ k = \overline{1, N-1}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

используются на *E*-шаге для определения последовательности скрытых состояний нелинейной системы (5) на основе последовательностей наблюдений $\{\mathbf{y}[k],\ k = \overline{1, N}\}$ и входов $\{\mathbf{u}[k],\ k = \overline{1, N}\}$. Условные распределения (6) являются не гауссовыми, поэтому уравнения вывода не могут быть представлены в замкнутой форме. Более того, объемы вычислений растут экспоненциально с увеличением длины временных рядов. Расширенный сглаживатель Рауха аппроксимирует стационарную нелинейную динамическую систему (2) нестационарной линейной системой [9]. Он применяет стандартный сглаживатель Рауха к локально линеаризованной нелинейной системе. В каждой точке $\bar{\mathbf{x}}$ в пространстве состояний $\mathbf{x}$, производные вектор-функций $\mathbf{f}(..)$ и $\mathbf{g}(..)$ определяют матрицы

$$\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{x}}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}} \text{ и } \mathbf{G}_{\bar{\mathbf{x}}} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}},$$

соответственно. Уравнения (2) линеаризуются в окрестности $\bar{\mathbf{x}}[k]$ средней текущей отфильтрованной (а не сглаженной) оценки состояния $\mathbf{x}[k]$ (в момент времени k). Аналогично линеаризуется уравнение для наблюдения. Эти линеаризации дают уравнения

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &\approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}[k], \mathbf{u}[k]) + \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{x}}[k]}(\mathbf{x}[k] - \bar{\mathbf{x}}[k]) + \mathbf{w}[k], \\ \mathbf{y}[k] &\approx \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}[k], \mathbf{u}[k]) + \mathbf{G}_{\bar{\mathbf{x}}[k]}(\mathbf{x}[k] - \bar{\mathbf{x}}[k]) + \mathbf{v}[k]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Поскольку распределение шума и априорные распределения состояния при $k = 1$ — гауссовы, то в линеаризованной системе (7) условное распределение вероятности состояния в произвольный момент времени при заданной последовательности входов и выходов также гауссово. Таким образом, сглаживатель Рауха может использоваться на линеаризованной системе (7) для вывода этого условного распределения. В противоположность линейному сглаживателю Рауха, в линеаризованном сглаживателе Рауха ошибка ковариации для оценки состояния и матрицы усиления Калмана зависит не только от наблюдений с текущим временным индексом.

На M-шаге (EM-алгоритма) проблема в том, что вектор-функции $\mathbf{f}(..)$ и $\mathbf{g}(..)$ обучаются, используя неопределенные оценки состояния посредством сглаживателя Рауха [5, 8]. Это затрудняет применение стандартных методов регрессии. Рассмотрим оценку $\mathbf{f}(..)$ с параметрами $\mathbf{x}[k]$ и $\mathbf{u}[k]$ и результатом $\mathbf{x}[k+1]$. Для каждого k оцениваемое сглаживателем Рауха условное распределение является гауссовым с полной ковариацией в пространстве $\{\mathbf{x}[k], \mathbf{x}[k+1]\}$. Ниже разложения нелинейных функций $\mathbf{f}(..)$ и $\mathbf{g}(..)$ по набору гауссовых радиальных базисных функций (*radial basis functions* — RBFs) адаптируются к этим гауссовым выборкам данных.

Рассматривается представляющее функцию $\mathbf{f}(..)$ нелинейное отображение векторов состояния $\mathbf{x}$ и входа $\mathbf{u}$ на вектор состояния $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{h}[i]\rho_i(\mathbf{x}) + \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{b} + \mathbf{w}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{w}$ — гауссов шум с нулевым средним и ковариацией $\mathbf{Q}$. Параметрами отображения (8) являются коэффициенты $\mathbf{h}[i]$, $i = \overline{1, M}$, при скалярных радиальных базисных функциях $\rho_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, M}$, матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и вектор смещения $\mathbf{b}$. Гауссовы радиальные базисные функции в пространстве векторов $\mathbf{x}$ с центром $\mathbf{c}[i]$ и ковариационной матрицей $\mathbf{S}[i]$ имеют вид

$$\rho_i(\mathbf{x}) = |2\pi\mathbf{S}[i]|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{c}[i])^{\mathrm{T}}\mathbf{S}[i]^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{c}[i]\right), \qquad (9)$$

где $|\mathbf{S}[i]|$ — это детерминант матрицы $\mathbf{S}[i]$. Отображение (8) используется несколькими способами для представления систем (7), в зависимости от того, какое из отображений $\mathbf{f}(..)$ или $\mathbf{g}(..)$ считается нелинейным. Приведем три примера этого: 1) для $\mathbf{f}(..)$ используются подстановки $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}[k]$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}[k]$ и $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{x}[k+1]$; 2) для $\mathbf{f}(..)$ используются подстановки $\mathbf{x} \leftarrow (\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k])$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}$ и $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{x}[k+1]$; 3) для $\mathbf{g}(..)$ используются подстановки $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}[k]$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}[k]$ и $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{y}[k]$. Поскольку набор данных для переменных ($\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$) является выборкой распределения в виде смеси гауссовых распределений, это распределение аналитически исключается посредством интегрирования, чтобы обеспечить соответствие RBF-модели (8). Распределение данных имеет вид

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{J}\sum_j \mathcal{P}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}[j]), \qquad (10)$$

где гауссово распределение $\mathcal{P}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\mu}[j], \mathbf{C}[j])$ со средним $\boldsymbol{\mu}[j] = \{\boldsymbol{\mu}_\mathbf{x}[j], \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}[j]\}$ и ковариационной матрицей

$$\mathbf{C}[j] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{xx}}[j] & \mathbf{C}_{\mathbf{xz}}[j] \\ \mathbf{C}_{\mathbf{zx}}[j] & \mathbf{C}_{\mathbf{zz}}[j] \end{bmatrix}.$$

Определим вектор

$$\bar{\mathbf{z}}_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{h}[i]\rho_i(\mathbf{x}) + \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{b} = \boldsymbol{\theta\Phi},$$

где $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{h}[1], ..., \mathbf{h}[M], \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{b}]$ — вектор параметров и $\boldsymbol{\Phi} = [\rho_1(\mathbf{x}), ..., \rho_M(\mathbf{x}), \mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}, \mathbf{1}]^{\mathrm{T}}$ — вектор переменных отображения (8). Поскольку в (8) шум $\mathbf{w}$ — гауссов с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathbf{Q}$, то, в рамках RBF-модели, логарифм правдоподобия одного вектора $\mathbf{z}$ имеет вид

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{u}))^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{u})) - \frac{1}{2}\log|\mathbf{Q}| + c, \qquad (11)$$

где c — константа. Поскольку набор $\{\mathbf{x}, \mathbf{z}\}$ — это гауссова выборка данных, максимум ожидаемого логарифма правдоподобия RBF-модели (8) дается минимизацией проинтегрированной квадратичной формы (11) (со знаком минус)

$$\min_{\theta,\mathbf{Q}}\left\{\sum_j \int_\mathbf{x}\int_\mathbf{z} \mathcal{P}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{u}))^{\mathrm{T}} \times \right.$$
$$\left. \times\, \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{u}))d\mathbf{x}d\mathbf{z} + J\log|\mathbf{Q}|\right\}. \qquad (12)$$

Пусть угловые скобки $\langle\cdot\rangle_j$ обозначают ожидание по гауссову распределению $\mathcal{P}_j$ (7). С учетом обозначений для вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ отображения (8) и вектора переменных $\boldsymbol{\Phi}$, и матричного тождества

$$(\mathbf{z} - \boldsymbol{\theta\Phi})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\theta\Phi}) = \mathrm{tr}(\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\theta\Phi})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\theta\Phi})^{\mathrm{T}}),$$

где tr(..) обозначает след (трек) матриц, формула (8) принимает следующий вид:

$$\min_{\theta,\mathbf{Q}}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathbf{Q}^{-1}\sum_j\langle(\mathbf{z} - \boldsymbol{\theta\Phi})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\theta\Phi})^{\mathrm{T}}\rangle_j\right) + J\log|\mathbf{Q}|\right\}. \qquad (13)$$

Вычисляя в формуле (13) частную производную по $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}$ и приравнивая ее к нулю, получаем уравнение

$$\sum_j\langle(\mathbf{z} - \boldsymbol{\theta\Phi})\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\rangle_j = 0,$$

которое дает оценку

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\sum_j\langle\mathbf{z}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\rangle_j\right)\left(\sum_j\langle\boldsymbol{\Phi\Phi}^{\mathrm{T}}\rangle_j\right)^{-1}. \qquad (14)$$

Аналогично, выражение для оценки ковариационной матрицы $\mathbf{Q}$ имеет вид

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{J}\left(\sum_j\langle\mathbf{zz}^{\mathrm{T}}\rangle_j - \boldsymbol{\theta}\sum_j\langle\boldsymbol{\Phi}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\rangle_j\right). \qquad (15)$$

Ожидания, необходимые для оценки $\boldsymbol{\theta}$ и $\mathbf{Q}$ по формулам (14), (15) следующие: $\langle \mathbf{x} \rangle_j$, $\langle \mathbf{z} \rangle_j$, $\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \rangle_j$, $\langle \mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \rangle_j$, $\langle \mathbf{x}\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \rangle_j$, $\langle \rho_i(\mathbf{x}) \rangle_j$, $\langle \mathbf{x}\rho_i(\mathbf{x}) \rangle_j$, $\langle \mathbf{z}\rho_i(\mathbf{x}) \rangle_j$ и $\langle \rho_i(\mathbf{x})\rho_l(\mathbf{x}) \rangle_j$, полные их выражения приведены в работах [5, 8]. Эти ожидания выражаются через параметры гауссовых распределений $\mathcal{P}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\boldsymbol{\mu}[j], \mathbf{C}[j])$ (10).

Практический успех *EM*-алгоритма зависит от его инициализации. Для нелинейных систем с линейной функцией выхода инициализация использует факторный анализ по максимуму правдоподобия, обучаемый на наборе наблюдений $\mathbf{y}[k]$, $k = \overline{1, N}$. Факторный анализ предполагает, что выходные переменные генерируются небольшим количеством независимых гауссовых скрытых состояний, и к каждой выходной переменной добавляется независимый гауссов шум [10—12]. Матрица весов (называемая матрицей нагрузок) обучается посредством факторного анализа для инициализации матрицы наблюдений $\mathbf{G}$ динамической системы (7). Это дает оценки состояния в каждый момент времени. Эти оценки используются в нелинейной регрессии на основе RBF-функций. Перед инициализацией нелинейной регрессии проводится обучение линейной системы.

Эксперименты на многомерных временных рядах показывают возможности нелинейной байесовской фильтрации при использовании нелинейных динамических моделей.

2. Численный эксперимент

В настоящей работе анализ тонкой структуры кластеров траекторий движения самолетов, полученных методом полиномиальных регрессий [1, 2], выполняется с помощью адаптивного нелинейного фильтра Калмана, т. е. посредством модели нелинейных динамических систем (5).

В качестве анализируемых данных использовались траектории 117 самолетов, идущих на посадку в международном аэропорту и зарегистрированных радаром TRACON 1 января 2006 г. (https:// c3.nasa.gov/dashlink/resources/132/). Начало координат совпадает с положением радара, интервал времени между точками регистрации составляет около 5 с. В работе учитываются только 160 последних точек каждой траектории, что позволяет исключить случайные маневры самолетов перед заходом на посадку. Эти траектории в трехмерном пространстве представлены в работе [2].

Пять кластеров траекторий самолетов (рис. 1, см. вторую сторону обложки) выделяются в результате применения метода полиномиальных регрессий [2]. Каждый кластер соответствует определенному "посадочному" паттерну или маршруту. Распределение числа траекторий по кластерам следующее: 16 траекторий в розовом кластере; 13 — в зеленом, 3, 37 и 38 — в синем, черном и красном кластерах соответственно.

На рис. 2 (см. вторую сторону обложки) показаны проекции траекторий в анализируемых кластерах (см. рис. 1) на координатные оси x, y и z в соответствии с последовательностью моментов времени k регистрации радаром. Линии тренда, полученные в работе [2] методом полиномиальных регрессий и выделенные жирными линиями, представляют обобщенную форму траекторий в каждом кластере. Сходство траекторий движения самолетов в кластерах обусловлено существованием нескольких типичных маршрутов посадки ("посадочных" паттернов).

В работе [3] при использовании модели линейных динамических систем при анализе однородности кластеров в четырех из пяти рассматриваемых кластеров выделялась их тонкая (неоднородная) структура. Эти модели позволяют значительно сократить размерность анализируемого пространства, поэтому неоднородная структура кластеров выявляется при рассмотрении проекций траекторий каждого кластера на координатные оси x, y, z.

Выявление неоднородности в кластере (розовом на рис. 1 и 2, см. вторую сторону обложки) с помощью метода нелинейных динамических систем демонстрируется на рис. 3 (см. вторую сторону обложки). Как видно на рис. 3, после определения скрытых состояний *1* и *2* (жирные линии красного и синего цвета, соответственно) для проекции на ось x траекторий розового кластера (см. рис. 2), этот кластер проекций траекторий разделяется на два подкластера: красный и синий. Приписывание траекторий к каждому из подкластеров 1 и 2 выполняется в соответствии с мерой косинуса между компонентами скрытого состояния $[x_i[k], k = \overline{1, N}]$, $i = \overline{1, p}$, и компонентами проекции наблюдений (траекторий) $[y_j[k], k = \overline{1, N}]$, $j = \overline{1, q}$,

$$R = \left(\sum_{k=1}^{N} x_i[k]y_j[k]\right) \Bigg/ \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x_i[k])^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (y_j[k])^2},$$

которая учитывает отличие в направлении векторов в пространстве состояний (безотносительно Евклидова расстояния между ними).

Сходство результатов анализа структуры кластеров траекторий, полученных в работе [3] с помощью линейной модели динамической системы и в настоящей статье с помощью нелинейной модели динамической системы, является обоснованием возможности применения в работе [3] линейной модели динамической системы к анализу кластеров траекторий движения воздушных судов, маршруты которых не вполне детерминированы.

Заключение

В работе [3] применение метода линейных динамических систем к анализу структуры кластеров посадочных траекторий самолетов основано на предположении о переходном характере проекций этих траекторий. В настоящей работе правомерность применения метода линейных динамических систем к анализу структуры кластеров посадочных траекторий самолетов подтверждается подобием кластеров, полученных с помощью общих моделей нелинейных динамических систем, для тех же посадочных траекторий.

Список литературы

1. **Gaffney S., Smyth P.** Joint probabilistic curve clustering and alignment // Proc. of Neural Information Processing Systems (NIPS 2004). Advances in Neural Information Processing Systems / Eds. Saul L., Weiss Y., Bottou L. V. 17. Cambridge, MA: MIT Press. 2005. P. 473—480.
2. **Кухаренко Б. Г., Солнцева М. О.** Кластеризация управляемых объектов на основе сходства их многомерных траекторий // Информационные технологии. 2014. № 5. С.3—7.
3. **Кухаренко Б. Г., Солнцева М. О.** Анализ результатов кластеризации многомерных траекторий посредством моделей линейных динамических систем // Информационные технологии. 2015. Т. 21, № 2. С. 104—109.
4. **Shumway R. H., Stoffer D. S.** Time Series Analysis and Its Applications. New York: Springer, 2011.
5. **Roweis S., Ghahramani Z.** Learning nonlinear dynamical systems using the Expectation-Maximization algorithm / Ed. Haykin S. // Kalman Filtering and Neural Networks. John Wiley & Sons, 2001. P. 175—220.
6. **Simon D.** Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2006.
7. **Einicke G. A.** Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future. Rijeka (Croatia): Intech. 2012.
8. **Ghahramani Z., Roweis S.** Learning nonlinear dynamical systems using an EM algorithm // Advances in Neural Information Processing Systems / Eds. Kearns M. S., Solla S. A., Cohn D. A. V. 11. Cambridge, MA: The MIT Press, 1999. P. 599—605.
9. **Kukharenko B. G.** Use of the Prony method for modal identification of slow-evolutionary linear structures // Journal of Structural Control. 2000. V. 7, N. 2. P. 203—218.
10. **Moody J., Darken C.** Fast learning in networks of locally-tuned processing units // Neural Computation. 1989. V. 1. P. 281—294.
11. **Broomhead D. S., Lowe D.** Multivariable functional interpolation and adaptive networks // Complex Systems. 1988. V. 2. P. 321—355.
12. **Roweis S., Ghahramani Z.** A unifying review of linear Gaussian models // Neural Computation. 1999. V. 11, N. 2. P. 305—345.

B. G. Kukharenko[1], **M. O. Solntseva-Chalei**[2]

[1]Learding Research Scientist, Blagonravov Institute of Engineering Science of RAS,
e-mail: kukharenkobg@hotmail.com,

[2]Post-Graduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (SU),
e-mail; solnceva.chalei@gmail.com

Applying Nonlinear Dynamical System Models for Analysis of Multidimensional Trajectory Clustering Results

Problem of clustering trajectories is pre-conditioned by a need to organize motion of objects under control. Upon advisement the motion trajectories in three dimensional space, it is more naturally to select these into clusters according to the trajectory characteristic form. The polynomial regression method is the best approach to trajectory cluster selection, which estimates a form of general trajectory of each cluster. In present paper the analysis of trajectory clusters obtained by polynomial regression method is performed by means of adaptive nonlinear Kalman filter. In discrete time nonlinear Kalman filter, a nonlinear dynamical system describes state evolution on one time-step and current causality of state and observation. To estimate the nonlinear dynamical system unknown parameter and hidden states simultaneously, the Expectation maximization algorithm is applied, which use radial basis function approximation to express nonlinear dynamics of system state vector. Extracted components of system state vector gives an opportunity to elicit cluster fine structure in accordance with cosine measure.

Keywords: *data mining, multi-dimensional trajectories, clustering, polynomial regression, Kalman filter, Rauch smoother, nonlinear dynamical systems, radial basis function, Expectation-Maximization algorithm*

References

1. **Gaffney S., Smyth P.** Joint probabilistic curve clustering and alignment / Eds. Saul L., Weiss Y., Bottou L. *Proc. Neural Information Processing Systems (NIPS 2004)*. December 13—18, 2004. Vancouver, British Columbia, Canada. *Advances in Neural Information Processing Systems*. V. 17. Cambridge, MA: MIT Press. 2005. P. 473—480.
2. **Kukharenko B. G., Solntseva M. O.** Klasterizacia upravlyaemyh objektov na osnove shodstva ih mnogomernyh trajektoryi. *Informacionnye tehnologii*. 2014. N. 5. P. 3—7.
3. **Kukharenko B. G., Solntseva M. O.** Analiz resultatov klasterizacii mnogomernyh trajektoryi posredstvom modelei lineinyh dinamlcheskih sistem. *Informacionnye tehnologii*. 2015. V. 21, N. 2. P. 104—109.
4. **Shumway R. H., Stoffer D. S.** *Time Series Analysis and Its Applications*. New York: Springer, 2011.
5. **Roweis S., Ghahramani Z.** Learning nonlinear dynamical systems using the Expectation-Maximization algorithm / Haykin S., ed. *Kalman Filtering and Neural Networks*. John Wiley & Sons. 2001. P. 175—220.
6. **Simon D.** *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2006.
7. **Einicke G. A.** Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future. Rijeka (Croatia): Intech. 2012.
8. **Ghahramani Z., Roweis S.** Learning nonlinear dynamical systems using an EM algorithm / Eds. Kearns M. S., Solla S. A., Cohn D. A. *Advances in Neural Information Processing Systems*. V. 11. Cambridge, MA: The MIT Press, 1999. P. 599—605.
9. **Kukharenko B. G.** Use of the Prony method for modal identification of slow-evolutionary linear structures. *Journal of Structural Control*. 2000. V. 7, N. 2. P. 203—218.
10. **Moody J., Darken C.** Fast learning in networks of locally-tuned processing units. *Neural Computation*. 1989. V. 1. P. 281—294.
11. **Broomhead D. S., Lowe D.** Multivariable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems*. 1988. V. 2. P. 321—355.
12. **Roweis S., Ghahramani Z.** A unifying review of linear Gaussian models. *Neural Computation*. 1999. V. 11, N. 2. P. 305—345.