

**И. В. Мишин**, д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., проф., e-mail: i.v.mishin@mail.ru  
"МАТИ"—Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского

## Численное моделирование однолинейных систем обслуживания

*Построены численные алгоритмы для расчета выходных характеристик систем типа  $GI|GI|1$  в стационарном режиме работы. Алгоритмы реализованы с помощью метода статистических испытаний. Рассматриваются эмпирические распределения времени ожидания запроса в очереди и времени между моментами окончания обслуживания соседних запросов. Вычисляются значения статистических оценок средних и средних квадратических отклонений времени ожидания и времени задержки. Построена автокорреляционная функция реализаций процесса ожидания. Вычислительная программа тестирована путем сравнения эмпирических и теоретических значений средних времени ожидания в случае  $M|E|1$ . Выполнен сравнительный количественный анализ систем  $M|E|1$ ,  $E|E|1$  и  $GI|GI|1$ . Исследованы зависимости длины очереди и радиуса корреляции последовательности интервалов ожидания от нагрузки системы и дисперсии интервалов времени между моментами поступления запросов.*

**Ключевые слова:** однолинейная система обслуживания, запрос, нагрузка, очередь, время ожидания, время обслуживания, время задержки, эмпирическое распределение, статистическая оценка

### Введение

Аналитические методы теории массового обслуживания [1, 2] позволяют рассчитывать выходные характеристики стохастических систем с очередями в предположении о марковских или полумарковских свойствах этих систем. Для имитации работы систем с любыми допустимыми потоками входных запросов и обслуживания необходимо располагать универсальными численными алгоритмами и соответствующим программным обеспечением. В общем случае численные алгоритмы для описания систем обслуживания основываются на известных рекуррентных соотношениях, связанных с последовательностью запросов [1—6] и реализуются с помощью метода статистических испытаний [4, 7]. Некоторые программные средства для расчета систем обслуживания указаны в работах [7, 8]. Наиболее известна среда GPSS Word [8, 9]. Положительным качеством GPSS Word является относительная простота использования. В то же время это приложение не обеспечивает высокую точность вычислений и не позволяет проводить подробные расчеты параметров моделируемых систем. Мощным средством создания вычислительных программ для расчета стохастических систем являются языки программирования высокого уровня. Однако их использование в исследовательских целях является самостоятельной трудоемкой задачей.

Реализация метода статистических испытаний значительно упростилась с появлением специальных вычислительных средств, обладающих датчиками псевдослучайных чисел с заданными законами распределения и приемлемой вычислительной погрешностью. Ниже рассматривается алгоритм численного моделирования стационарного распределения времени пребывания запроса в однолинейной системе общего вида с дисциплиной обслуживания

FIFO. Для реализации алгоритма использовалась вычислительная система MathCAD [10].

В работе используются следующие обозначения:  $n + 1$  — число запросов;  $\{\zeta_i\}_{0, n}$  — моменты поступления запросов в систему;  $\tau_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}$  — время между поступлениями запросов (длительности входных интервалов),  $i = \overline{1, n}$ ;  $a(t)$ ,  $A(t)$ ,  $\bar{\tau}$ ,  $\sigma_\tau$ ,  $c_\tau$  — плотность, функция распределения, среднее, среднее квадратическое отклонение (СКО) и коэффициент вариации длительности входных интервалов;  $v_i$  — время обслуживания  $i$ -го запроса,  $i = \overline{0, n}$ ;  $b(t)$ ,  $B(t)$ ,  $\bar{v}$ ,  $\sigma_v$ ,  $c_v$  — плотность, функция распределения, среднее, СКО и коэффициент вариации времени обслуживания одного запроса;  $w_i$  — время пребывания  $i$ -го запроса в очереди (время ожидания),  $i = \overline{0, n}$ ;  $\bar{w}$  — среднее время ожидания;  $\bar{T}$  — среднее время пребывания запроса в системе (время задержки);  $\{\eta_i\}_{0, n}$  — моменты окончания обслуживания запросов;  $z_j = \eta_{j+1} - \eta_j$  — длительности выходных интервалов,  $j = \overline{0, n-1}$ ;  $\rho = \bar{v}/\bar{\tau}$  — нагрузка. Время поступления первого запроса  $\zeta_0$  — начало отсчета времени. Прочие обозначения вводим по ходу изложения. Реализации случайных последовательностей  $\{\tau_i\}_{1, n}$  и  $\{v_i\}_{0, n}$  генерируются датчиками псевдослучайных чисел с плотностями распределения  $a(t)$  и  $b(t)$  соответственно. Существование стационарного режима функционирования системы обслуживания гарантирует условие  $\rho < 1$ .

### Вычислительный алгоритм

Поскольку первый запрос поступает в пустую систему, полагаем  $w_0 = 0$ . Второй запрос находит

обслуживающее устройство свободным при  $\tau_1 \geq v_0$  и  $w_1 = 0$ . При  $\tau_1 < v_0$  устройство занято, и второй запрос находится в очереди в течение времени  $w_1 = v_0 - \tau_1$ . Таким образом,  $w_1 = \max[v_0 - \tau_1, 0]$ . Следуя [1, Гл. 8], введем величину

$$u_i = v_i - \tau_{i+1}, i = \overline{0, n-1}. \quad (1)$$

Для всех  $i \geq 1$  имеет место рекуррентное соотношение

$$w_{i+1} = \max[w_i + u_i, 0]. \quad (2)$$

Формула (2) с учетом  $w_0 = 0$  определяет процедуру расчета значений  $\{w_j\}_{0, n}$ .

Рассмотрим теперь последовательность моментов окончания обслуживания запросов. Время окончания обслуживания первого запроса наступает в момент  $\eta_0 = v_0$ . Для второго запроса при  $\zeta_1 \geq v_0$  ( $\tau_1 \geq v_0$ ,  $u_0 \geq 0$ ) момент окончания обслуживания определяется равенством  $\eta_1 = \tau_1 + v_1$ . Если же  $\zeta_1 < v_0$ , ( $\tau_1 < v_0$ ,  $u_0 < 0$ ), то  $\eta_1 = v_0 + v_1 = \eta_0 + v_1$ . Объединяя оба случая, получаем  $\eta_1 = \max[\eta_0, \zeta_1] + v_1$ . Для всех  $j \geq 1$  имеем  $\eta_j = \zeta_j + v_j$  при  $\zeta_j \geq \eta_{j-1}$ , и  $\eta_j = \eta_{j-1} + v_j$  при  $\zeta_j < \eta_{j-1}$ . Следовательно,

$$\eta_j = \max[\eta_{j-1}, \zeta_j] + v_j, j \geq 1. \quad (3)$$

Формула (3) с учетом  $\eta_0 = v_0$  определяет моменты выхода запросов из системы. Далее вычисляем длительности выходных интервалов:

$$z_j = \eta_{j+1} - \eta_j, j = \overline{0, n-1}. \quad (4)$$

Формулы (1)–(4) составляют основу расчетного алгоритма. Стационарный режим в системе устанавливается постепенно. Поэтому в расчетах следует исключить из рассмотрения некоторую начальную часть потока запросов — отрезок нестационарности.

Располагая реализациями случайных последовательностей  $\{\tau_j\}_{1, n}$ ,  $\{v_j\}_{0, n}$ ,  $\{w_j\}_{0, n}$ ,  $\{z_j\}_{0, n-1}$ , можно вычислить все числовые характеристики системы обслуживания с точностью, которая определяется числом  $n$  и ошибками округления. Вычислялись следующие параметры и функции:  $\hat{\tau}$ ,  $\hat{\sigma}_\tau$ ,  $\hat{c}_\tau$  (реализации статистических оценок будем обозначать теми же символами) — выборочные среднее, СКО и коэффициент вариации длительности входных интервалов;  $\hat{w}$ ,  $\hat{\sigma}_w$ ,  $\hat{c}_v$  — выборочные среднее, СКО и коэффициент вариации времени ожидания;  $\hat{T}$ ,  $\hat{\sigma}_T$ ,  $\hat{c}_T$  — выборочные среднее, СКО и коэффициент вариации времени задержки;  $N_0, \gamma_0 = N_0/N$  — число и доля запросов с нулевым временем ожидания в стационарной очереди,  $N = n + 1 - n_0$ ,  $n_0$  — длина отрезка нестационарности;  $\{q_j\}_{0, N-N_0}$ ,  $h_q(t)$ ,  $\hat{Q}(t)$  — эмпирическое распределение, гистограмма и функция распределения запросов с ненулевым временем

ожидания;  $h_z(t)$ ,  $\hat{Z}(t)$  — гистограмма и эмпирическая функция распределения длительности выходных интервалов;  $\{R_k\}_{0, M}$  — дискретная автокорреляционная функция (набор коэффициентов корреляции времени ожидания запросов, отстоящих друг от друга на  $k$  номеров),  $M < [N/4]$ .

При выборе числа испытаний  $n$  принимались во внимание следующие соображения. Случайная последовательность  $\{\tau_j\}_{1, n}$  подчиняется закону больших чисел и к ней применима центральная предельная теорема [11]. С уровнем доверия 0,997 можно утверждать, что  $P\{|\hat{\tau} - \bar{\tau}| \leq 3\sigma_\tau/\sqrt{n}\} \approx 0,997$ .

Здесь  $\hat{\tau} = \sum_{i=1}^n x_i$  — значение выборочного среднего,

$\{x_j\}_{1, n}$  — реализация случайной последовательности  $\{\tau_j\}_{1, n}$ . Потребуем, чтобы относительная погрешность  $\delta_\tau = |\hat{\tau} - \bar{\tau}|/\bar{\tau}$  не превосходила определенное значение:  $\delta \leq 0,001$ . Число  $n$  найдем из соотношения  $\delta = 3\sigma_\tau/\bar{\tau}\sqrt{n}$ ;  $n = (3\sigma_\tau/\bar{\tau}\delta)^2$ . С параметрами простейшего входного потока  $\lambda = 1$ ,  $\bar{\tau} = \sigma_\tau = \lambda^{-1} = 1$  и  $\delta = 10^{-3}$  имеем  $n = 9 \cdot 10^6$ . Для последовательности  $\{v_j\}_{1, n}$  в силу неравенства  $\bar{v} < \bar{\tau}$  и при условии  $\sigma_v < \sigma_\tau$  число  $n$  примет меньшее значение. Как показывают численные эксперименты, при заданном  $n$  реальное значение относительной погрешности  $\delta$  оказывается значительно меньше определенного выше. Принимая во внимание это обстоятельство и учитывая ограничение на размеры массивов в системе MathCAD, в расчетах полагаем  $n = 10^6$ .

Для выяснения репрезентативности исходных генераций псевдослучайных чисел эмпирические плотности  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$  и значения случайных величин  $\hat{\tau}$ ,  $\hat{\sigma}_\tau$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{\sigma}_v$  сравнивались с исходными аналитическими плотностями  $a(t)$ ,  $b(t)$  и теоретическими значениями величин  $\bar{\tau}$ ,  $\sigma_\tau$ ,  $\bar{v}$ ,  $\sigma_v$  соответственно. Для получения наиболее объективных статистических оценок проводилось усреднение выборочных характеристик. Например,  $(\hat{\tau})_p = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(p)}$ ,

$(\hat{\sigma}^2)_p = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^{(p)} - \hat{\tau})^2$ , где  $x_i^{(p)}$  — значение случайной величины  $\tau_i$  в  $p$ -м испытании. Число испытаний полагалось равным  $p = 30$ . Аналогично определялись усредненные точечные статистические оценки остальных исследуемых величин. Процедуры

построения гистограмм и эмпирических функций распределения здесь не приводим.

Дискретная функция автокорреляции времени ожидания рассчитывалась по формуле

$$\hat{R}_k = \frac{1}{(L-k)\hat{d}} \sum_{i=0}^{L-k-1} (q_i - \hat{w})(q_{i+k} - \hat{w}), \quad (5)$$

где  $\hat{d}_k = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (q_i - \hat{w})^2$ ,  $k = \overline{0, M}$ ,  $M \ll L < n$ .

Функция (5) приближается экспонентой  $K(y = e^{-\omega y})$  с декрементом затухания  $\omega$ . Тестирование алгоритма проводили путем сравнения значений оценок  $\hat{w}$ ,  $\hat{\sigma}_w$  с теоретическими значениями величин  $\bar{w}$ ,  $\sigma_w$  в системе  $M|E|1$ . Формулы для расчета теоретических значений имеют вид [1]

$$\bar{w} = \frac{\rho \bar{v}(1 + c_v^2)}{2(1 - \rho)}, \quad (6)$$

$$\sigma_w = \sqrt{\bar{w}^2 + \frac{\rho v^3}{3\bar{v}(1 - \rho)}}, \quad (7)$$

где  $v^3 = \int_0^{\infty} t^3 b(t) dt$  — третий начальный момент рас-

пределения времени обслуживания. Нетрудно заметить, что  $\sigma_w > \bar{w}$ . Для эрланговского обслуживания с масштабным параметром  $\mu$  параметром формы  $r$  третий начальный момент равен  $v^3 = \mu^{-3} r(r+1)(r+2)$ .

### Численные расчеты

Расчеты выполнялись для различных вариантов, обозначаемых кодировкой  $GI|GI|1$ . В настоящем анализе ограничимся случаями  $M|E|1$ ,  $E|E|1$ ,  $GI|E|1$ . Время обслуживания задаем распределением Эрланга с масштабным параметром  $\mu = 8$  и параметром формы  $r = 4$ . При этом  $\bar{v} = r\mu^{-1} = 0,5$ ,  $\sigma_v = \sqrt{r} \mu^{-1} = 0,25$ ,  $c_v = 0,5$ ,  $\bar{w} = 5\rho/16(1 - \rho)$ ,  $\sigma_w = \sqrt{\bar{w}(\bar{w} + 1/2)}$ . В случае  $GI|E|1$  длительности входных интервалов задавались распределением Вейбулла—Гнеденко. Значения параметров распределения длительности входных интервалов рассчитывались в зависимости от нагрузки  $\rho$ . Представленные ниже численные результаты получены для значений нагрузки  $\rho = 0,5$  и  $\rho = 0,8$ .

**1<sup>0</sup>.  $M|E|1$ .** Пусть  $\lambda$  — интенсивность простейшего входного потока запросов. Учитывая, что  $\bar{\tau} = \lambda^{-1}$ ,  $\bar{v} = r\mu^{-1} = 0,5$ ,  $\rho = \bar{v}/\bar{\tau}$ , имеем  $\lambda = \rho(\mu/r)$ . Это соотношение при фиксированных  $\mu$ ,  $r$  связывает  $\lambda$  и  $\rho$  линейной зависимостью. При изменении  $\rho$  в интервале  $[0, 1)$  величина  $\lambda$  меняется в интервале  $[0, \bar{v}^{-1}) = [0, \mu/r)$ . Рис. 1, а и б иллюстрирует точность исходных генераций псевдослучайных чисел при  $n = 10^6$ .

В табл. 1 приводятся усредненные выборочные средние  $(\hat{\tau})_p$ ,  $(\hat{v})_p$  и их усредненные погрешности  $(\Delta_{\tau})_p = (|\hat{\tau} - \bar{\tau}|)_p$ ,  $(\delta_{\tau})_p = (\Delta_{\tau}/\bar{\tau})_p$ ,  $(\Delta_v)_p = (|\hat{v} - \bar{v}|)_p$ ,  $(\delta_v)_p = (\Delta_v/\bar{v})_p$ . Усредненные выборочные СКО составили  $(\hat{\sigma}_{\tau})_p = 1,00061$  и  $(\hat{\sigma}_v)_p = 1,0006$ . Усредненные погрешности оценок средних и СКО не превосходят 0,1 %. Поскольку разброс погрешностей лежит в диапазоне  $\sim 10^{-5} \dots 10^{-3}$ , для отдельных генераций погрешность снижается до  $\sim 10^{-5}$ .

На рис. 2 показано время ожидания 25 смежных запросов в стационарной очереди. В расчетах полагалось  $n_0 = 10^3$ .

Как видно на рис. 2, процесс образования очереди время от времени возвращается к состоянию  $w = 0$ , т. е. является регенерирующим. В табл. 2 сравниваются значения теоретических и усредненных выборочных средних времени ожидания  $w$  и времени задержки  $T$ . Усредненные абсолютные и относительные погрешности определяются формулами  $(\Delta_w)_p = (|\hat{w} - \bar{w}|)_p$ ,  $(\delta_w)_p = (\Delta_w/\bar{w})_p$ ,  $(\Delta_T)_p = (|\hat{T} - \bar{T}|)_p$ ,  $(\delta_T)_p = (\Delta_T/\bar{T})_p$ . Так как  $T = w + v$ , то  $\bar{T} = \bar{w} + \bar{v}$ ,  $\hat{T} = \hat{w} + \hat{v}$ . По условию задачи случайная величина  $v$  не зависит от  $w$ . Следовательно,

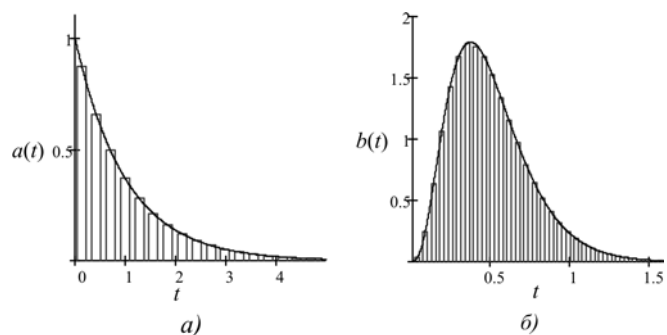


Рис. 1. Гистограмма длительностей входных интервалов простейшего потока (а); огибающая — теоретическая плотность  $a(t)$ ;  $\tau = 1$ ; гистограмма времени обслуживания (б); огибающая — теоретическая плотность  $b(t)$ ;  $\bar{v} = 0,5$

Таблица 1

Усредненные выборочные средние и их погрешности

$(\hat{\tau})_p$	$(\Delta_{\tau})_p$	$(\delta_{\tau})_p$	$(\hat{v})_p$	$(\Delta_v)_p$	$(\delta_v)_p$
1,00021	0,00091	0,00091	0,50001	0,00024	0,00052

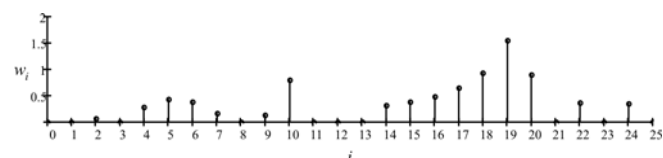


Рис. 2. Время ожидания в зависимости от номера запроса;  $\rho = 0,5$

Теоретические значения среднего времени ожидания и среднего времени задержки и их усредненные статистические оценки для M/E1

$\rho$	$\bar{w}$	$(\hat{w})_p$	$(\Delta_w)_p$	$(\delta_w)_p$	$\bar{T}$	$(\hat{T})_p$	$(\Delta_T)_p$	$(\delta_T)_p$
0,5	0,3125	0,31246	0,00098	0,0028	0,8125	0,81247	0,00111	0,00135
0,8	1,25	1,24624	0,01103	0,0088	1,75	1,74619	0,01113	0,00767

Теоретические значения СКО и коэффициентов вариации времени ожидания и времени задержки и их усредненные статистические оценки для M/E1

$\rho$	$\sigma_w$	$(\hat{\sigma}_w)_p$	$c_w$	$(\hat{c}_w)_p$	$\sigma_T$	$(\hat{\sigma}_T)_p$	$c_T$	$(\hat{c}_T)_p$
0,5	0,50389	0,50362	1,61	1,61	0,5625	0,56265	0,69	0,69
0,8	1,47902	1,47262	1,18	1,18	1,4995	1,49369	0,86	0,86

$\sigma_T = \sqrt{\sigma_w^2 + r\mu^{-2}}$ ,  $\hat{\sigma}_T = \sqrt{\hat{\sigma}_w^2 + \hat{\sigma}_v^2}$ . Для  $\rho = 0,8$  входные параметры имеют следующие значения:  $\lambda = 1,6$ ,  $\bar{\tau} = \sigma_v = \bar{v}/\rho = 0,625$ .

При  $\rho = 0,5$  значения погрешностей из табл. 2 превышают аналогичные значения из табл. 1, но не выходят за пределы  $\sim 10^{-3}$ . При возрастании нагрузки до  $\rho = 0,8$  абсолютная погрешность в среднем возрастает почти на порядок и составляет доли процента, причем относительная погрешность возрастает приблизительно на полпорядка. Среднее число заявок в очереди можно определить по формуле Литтла:  $\bar{m} = \lambda \bar{w}$  ( $\hat{m} = \lambda \hat{w}$ ). При нагрузке  $\rho = 0,5$  и  $\rho = 0,8$  получаем соответственно  $\bar{m} = 0,3125$  и  $\bar{m} = 1,25$ .

В табл. 3 сравниваются значения теоретических и усредненных выборочных СКО и коэффициентов вариации времени ожидания  $w$  и времени задержки  $T$ .

Как следует из табл. 2 и 3 погрешности определения средних величин и СКО приблизительно равны.

На рис. 3 представлена гистограмма ненулевого времени ожидания.

Доля запросов с нулевым временем ожидания связана с нагрузкой линейной зависимостью  $\gamma_0 = 1 - \rho$ .

На рис. 4 приведены графики эмпирической плотности длительности выходных интервалов и аналитических плотностей длительности входных интервалов и времени обслуживания.

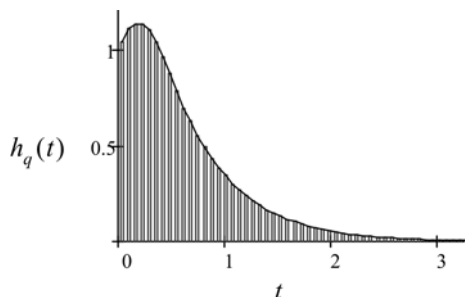


Рис. 3. Гистограмма ненулевого времени ожидания;  $\gamma_0 = 0,5$ ; сплошной линией показана огибающая гистограммы

На рис. 5 приведены графики функций распределения длительности входных и выходных интервалов и времени ожидания в очереди и задержки в системе.

На рис. 6 показана автокорреляционная функция эмпирического распределения времени ожидания и ее аппроксимация.

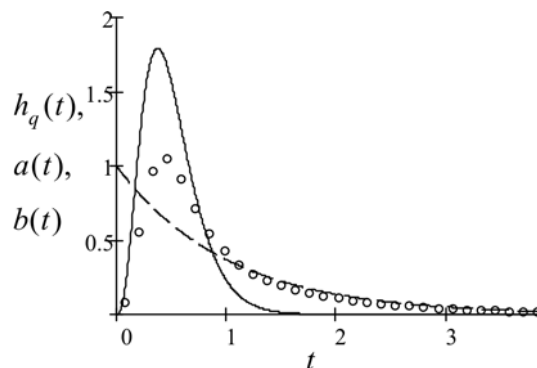


Рис. 4. Эмпирическая плотность длительности выходных интервалов (кружки) и аналитические плотности длительности входных интервалов (штриховая линия) и времени обслуживания (сплошная линия);  $\rho = 0,5$

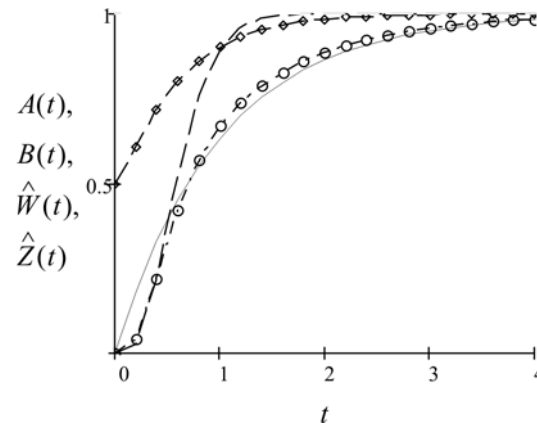


Рис. 5. Функции распределения длительности входных интервалов (сплошная линия), времени обслуживания (штриховая линия), времени ожидания (ромбики) и длительности выходных интервалов (кружки);  $\rho = 0,5$ ,  $\hat{W}(0) = \gamma_0$

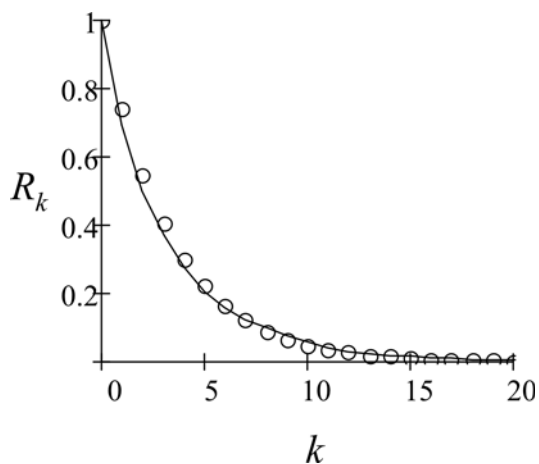


Рис. 6. Эмпирическая функция автокорреляции времени ожидания (кружки) и ее аппроксимация (сплошная линия),  $\rho = 0,5$ ,  $\omega = 0,3$

Отрезок заметной корреляции (радиус корреляции) для каждой реализации определяем равенством  $e^{-\omega y} = 0,1$ , откуда  $y_0 = \omega^{-1} \ln 10$  и  $k_0 = [y_0]$ . В данном примере на отрезке заметной корреляции укладывается  $k_0 = 7$  запросов. При  $\rho = 0,8$  та же величина принимает значение  $k_0 = 57$ , а значение декремента затухания  $\omega = 0,04$ . Автокорреляционная функция сильно зависит от  $\rho$ . При малых  $\rho$  корреляция практически не наблюдается. При  $\rho \rightarrow 1$  радиус корреляции неограниченно возрастает.

Заметим, что последовательность длительностей входных интервалов, интервалов обслуживания и выходных интервалов являются  $\delta$ -коррелированными. При  $r = 1$  система  $M|E|1$  приобретет частный вид  $M|M|1$ . В этом случае для любых  $\rho < 1$  справедлива теорема Берке. Сравнение выходных характеристик системы  $M|E|1$ , рассчитанных аналитически и методом статистических испытаний, тестируют вычислительную программу.

**2<sup>0</sup>.  $E|E|1$ .** Параметры обслуживания оставляем те же. Параметр формы распределения длительности входных интервалов полагаем равным  $\nu = 4$ . При  $\rho = 0,5$  последовательно определяем среднюю длительность входных интервалов  $\bar{\tau} = \bar{v}/\rho = 1$ , масштабный множитель входного потока  $\lambda = \nu \bar{\tau}^{-1} = 4$ , СКО длительностей входных интервалов  $\sigma_{\tau} = \sqrt{\nu} \lambda^{-1} = 0,5$  и коэффициент вариации  $c_{\tau} = \sigma_{\tau}/\bar{\tau} = 0,5$ . При  $\rho = 0,8$  аналогично получаем  $\bar{\tau} = 0,625$ ,  $\lambda = 6,4$ ,  $\sigma_{\tau} = 0,3125$ ,  $c_{\tau} = 0,5$ . В табл. 4 приведены усредненные выборочные значения среднего, СКО и коэффициента вариации времени ожидания и времени задержки.

Значение величины  $\gamma_0$ , радиус корреляции времени ожидания в единицах запросов  $k_0$  и декремент затухания  $\omega$  эмпирической автокорреляционной функции времени ожидания равны соответственно  $\gamma_0 = 0,78$ ,  $k_0 = 3$ ,  $\omega = 0,7$  при  $\rho = 0,5$  и  $\gamma_0 = 0,37$ ,

$k_0 = 20$ ,  $\omega = 0,11$  при  $\rho = 0,8$ . Усреднение по числу генераций эти значения не меняет.

**3<sup>0</sup>.  $GI|E|1$ .** Сохраняем параметры обслуживания п. 1<sup>0</sup>. Длительности входных интервалов подчиняются распределению Вейбулла—Гнеденко с параметром формы  $\alpha$ . В этом случае  $\tau = \bar{v}/\rho = 0,5/\rho$ ,  $\lambda = [\bar{\tau}/\Gamma(\alpha^{-1} + 1)]^{1/\alpha}$  — масштабный множитель,  $\sigma_{\tau} = \lambda^{-1/\alpha} [\Gamma(2\alpha^{-1} + 1) + \Gamma^2(\alpha^{-1} + 1)]^{1/2}$ . В расчетах полагаем  $\alpha = 3$ . В табл. 5 сведены значения оценок  $(\hat{w})_{\rho}$ ,  $(\hat{\sigma}_w)_{\rho}$ ,  $(\hat{T})_{\rho}$ ,  $(\hat{\sigma}_T)_{\rho}$ ,  $\hat{c}_w$ ,  $\hat{c}_T$ . При  $\rho = 0,5$  имеем  $\bar{\tau} = 1$ ,  $\lambda = 0,712$ ,  $\sigma_{\tau} = 0,363$ ,  $\bar{\gamma}_0 = 0,84$ ,  $k_0 = 2$ ,  $\omega = 0,95$ ; при  $\rho = 0,8$ :  $\bar{\tau} = 0,625$ ,  $\lambda = 2,917$ ,  $\sigma_{\tau} = 0,227$ ,  $\bar{\gamma}_0 = 0,43$ ,  $k_0 = 17$ ,  $\omega = 0,13$ .

Из сравнения табл. 3, 4 и 5 можно заключить, что длина очереди сильно зависит от  $\sigma_{\tau}$ . Наибольший разброс длительностей входных интервалов имеет место в простейшем потоке. Двойное снижение  $\sigma_{\tau}$  при переходе от  $M|E|1$  к  $E|E|1$  приводит к уменьшению  $\bar{w}$  в 5 раз при  $\rho = 0,5$  и в 3 раза при

Таблица 4

Усредненные статистические оценки среднего, СКО и коэффициента вариации времени ожидания и времени задержки для  $E|E|1$

$\rho$	$(\hat{w})_{\rho}$	$(\hat{\sigma}_w)_{\rho}$	$(\hat{T})_{\rho}$	$(\hat{\sigma}_T)_{\rho}$	$\hat{c}_w$	$\hat{c}_T$
0,5	0,0649	0,17653	0,56491	0,30603	8,7	0,54
0,8	0,41869	0,59589	0,91874	0,64621	1,42	0,7

Таблица 5

Усредненные статистические оценки среднего, СКО и коэффициента вариации времени ожидания и времени задержки для  $GI|E|1$

$\rho$	$(\hat{w})_{\rho}$	$(\hat{\sigma}_w)_{\rho}$	$(\hat{T})_{\rho}$	$(\hat{\sigma}_T)_{\rho}$	$\hat{c}_w$	$\hat{c}_T$
0,5	0,04158	0,13640	0,54160	0,28479	3,28	0,53
0,8	0,30266	0,46655	0,80279	0,52931	1,54	0,66

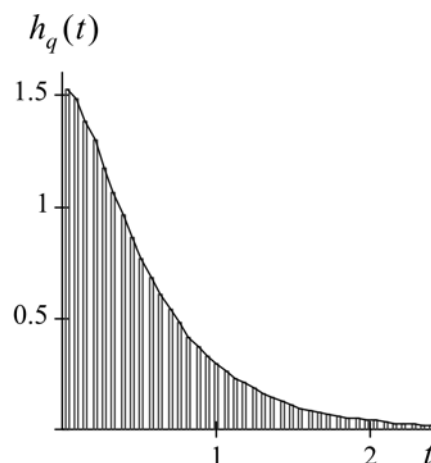


Рис. 7. Гистограмма ненулевого времени ожидания;  $\rho = 0,8$

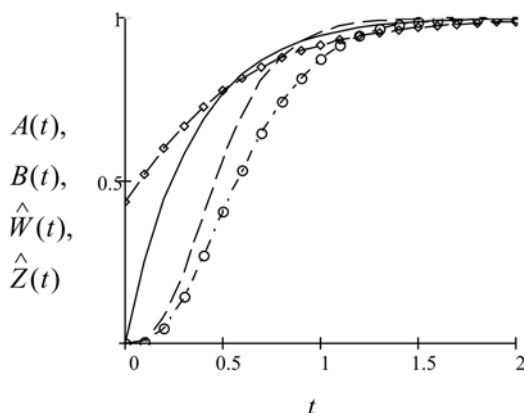


Рис. 8. Функции распределения длительности входных интервалов (сплошная), времени обслуживания (штриховая линия), времени ожидания (ромбики) и длительности выходных интервалов (кружки);  $\rho = 0,8$ ,  $\hat{W}(0) = \gamma_0$

$\rho = 0,8$ . При переходе от  $M|E|1$  к  $GI|E|1$  величина  $\bar{w}$  уменьшается в 7 и 4 раза соответственно.

Форма гистограммы  $h_q(t)$  и форма кривых  $\hat{W}(t)$ ,  $\hat{Z}(t)$  меняются при смене моделей. Иллюстрацией служат рис. 7 и 8.

### Заключение

Статистическое моделирование позволяет построить достаточно универсальную схему для численного исследования однолинейных систем обслужи-

вания. Точность моделирования определяется датчиками псевдослучайных чисел, имитирующих поток входных запросов и время обслуживания. Представленные результаты можно обобщить на многолинейные системы и системы с фазовым обслуживанием. Рассмотренные алгоритмы применимы в задачах с самыми разнообразными последовательностями запросов. Возможен учет временной изменчивости интенсивности входного потока.

### Список литературы

1. Крейпрок Л. М. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.
2. Cohen J. W. The single server queue. Amsterdam [etc.]: North-Holland, 1992.
3. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
4. Лифшиц А. Л., Мальц Э. А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. М.: Сов. Радио, 1978.
5. Калашников В. В., Рачев С. Т. Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. М.: Наука, 1988.
6. Гнененко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
7. Cooper R. B. Introduction to Queueing Theory. London: Edward Arnold, 1981.
8. Крылов В. В., Самохвалова С. С. Теория телетрафика и ее приложения. СПб.: БХВ—Петербург, 2005.
9. Кудрявцев Е. М. GPSS Word. Основы имитационного моделирования различных систем. М.: ДМК Пресс, 2004.
10. Кирьянов Д. В. Mathcad 14. СПб.: БХВ—Петербург, 2007.
11. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.

I. V. Mishin, Professor, e-mail: i.v.mishin@mail.ru,

MATI — Russian State Technological University named after K. E. Tsiolkovsky

## Numerical Modeling of Single-Server Systems

The numerical algorithms for calculation of output characteristics of the  $GI|GI|1$  systems in stationary operation mode have been created. The algorithms have been realized by statistic testing method. Empirical distributions of waiting time of a request in the queue and time intervals between the moments of serving finishing of adjacent requests are considered. Values of the statistic estimations for mean and standard deviations of waiting time and holding time are calculated. The autocorrelation function of waiting process realizations has been created. Computer program has been tested by means of the comparison of the quantities of empirical mean with the theoretical quantities in case  $M|E|1$ . Comparative quantitative analysis of the system  $M|E|1$ ,  $E|E|1$  and  $GI|E|1$  is performed. The dependences of queue length and correlation radius of waiting intervals succession from traffic intensity and dispersion of time intervals between the moments of the arrival of requests are researched.

**Keywords:** single-server system, request, traffic intensity, queue, waiting time, service time, holding time, empirical distribution, statistical estimation

### References

1. Kleinrock L. M. Teorija massovogo obsluzhivaniya. M.: Mashinostroenie, 1979.
2. Cohen J. W. The single server queue. Amsterdam [etc.]: North-Holland, 1992.
3. Klimov G. P. Stokhasticheskie sistemy obsluzhivaniya. M.: Nauka, 1966.
4. Lifshic A. L., Mal'c Je. A. Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya. M.: Sov. Radio, 1978.
5. Kalashnikov V. V., Rachev S. T. Matematicheskie metody postroeniya stokhasticheskikh modelej obsluzhivaniya. M.: Nauka, 1988.
6. Gnedenko B. V., Kovalenko I. N. Vvedenie v teoriyu obsluzhivaniya. M.: Izd-vo LKI, 2007.
7. Cooper R. B. Introduction to Queueing Theory. London: Edward Arnold, 1981.
8. Krylov V. V., Samohvalova S. S. Teorija teletrafika i ee prilozheniya. SPb.: BHV—Peterburg, 2005.
9. Kudrjavcev E. M. GPSS Word. Osnovy imitacionnogo modelirovaniya razlichnykh sistem. M.: DMK Press, 2004.
10. Kir'janov D. V. Mathcad 14. SPb.: BHV—Peterburg, 2007.
11. Sobol' I. M. Chislennyye metody Monte-Karlo. M.: Nauka, 1973.