

Ю. А. Зак, д-р техн. наук, научный эксперт и консультант, Германия, Аахен,
e-mail: yuriy_zack@hotmail.com

Об одной задаче построения допустимых и оптимальных маршрутов доставки грузов

Рассмотрена важная для практических приложений задача построения оптимальных маршрутов движения грузовых транспортных средств (ТС) в условиях ограничений на сроки обслуживания пунктов и на грузоподъемность ТС. В качестве критериев оптимальности рассматриваются суммарные затраты на выполнение графика доставки грузов.

На основе установленных свойств допустимых и оптимальных решений задачи сформулированы правила отсева недопустимых и неоптимальных маршрутов и разработаны алгоритмы решения задачи модифицированными методами динамического программирования и ветвей и границ, которые проиллюстрированы числовым примером. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: грузовые транспортные средства, оптимальные маршруты движения, ограничения на сроки обслуживания, грузоподъемность и объемы грузов, последовательные алгоритмы оптимизации, модифицированный метод ветвей и границ

Введение

Рассматриваются постановки, математические свойства и алгоритмы решения задач построения оптимальных маршрутов движения транспортных средств (ТС), обеспечивающих с наименьшими затратами времени и средств доставку грузов в установленных объемах и в определенные договорными обязательствами сроки. В литературе (см., например, [1–10]) задачи доставки однородного груза от некоторого множества производителей потребителям с использованием транспортного средства ограниченной вместимости, формулировались в виде математических моделей целочисленного линейного и булевого программирования, определения потоков в сетях, а также выбора кратчайшего пути на графе. Суммарные затраты на транспортировку груза между пунктами зависят от времени ТС в пути, объема транспортируемого груза и времени обслуживания пунктов. Сформулировано множество подобных задач, в постановке которых отражаются различные ограничения, диктуемые практикой. Классификация таких задач приведена, например, на сайте [5] и в работах [3, 4, 7]. Были рассмотрены алгоритмы решения сформулированных задач методами математического, динамического программирования или методом ветвей и границ [5, 6], которые не учитывали специфику конкретных математических моделей, либо эвристическими методами [7], позволяющими получить лишь приближенное решение сформулированной проблемы.

В отличие от известных публикаций автор рассматривает постановки задачи доставки однородных грузов, в которых предусмотрены ограничения на сроки доставки и загрузки груза, а также на ограниченную грузоподъемность ТС. Существенное отличие от других публикаций (см., например [5, 6]) заключается в наличии ограничений на допустимые времена обслуживания пунктов и в том, что при построении маршрутов для задач данного класса, если не ограничивать объемы грузов, которые нужно доставить или забрать в отдельных пунктах, необходимо учитывать, что в некоторые пункты ТС может заходить более одного раза, и следовательно, оптимальное решение задачи не может быть построено в виде циклического маршрута и замкнутого гамильтонового цикла. В работе приведены постановки задач, важных для практических приложений, исследуются их математические особенности. На основе установленных свойств допустимых и оптимальных маршрутов предлагаются эффективные алгоритмы их решения последовательными алгоритмами оптимизации, учитывающие специфику каждой конкретной задачи. Основное отличие предложенных в работе алгоритмов от рассматриваемых в публикациях [4–10] заключается в применении их к решению оригинальной, достаточно важной и сложной прикладной задачи. Автору не известны постановки и методы решения задачи теории расписаний в условиях одновременно действующих ограничений и на грузоподъемность транспортных средств (ТС), и на допустимые времена обслуживания пунктов, а также при необходимости из не-

которых пунктов забирать, а в некоторые пункты доставлять груз. В отличие от известной задачи коммивояжера, в общем случае, не существует решения задачи в виде замкнутого гамильтонова маршрута, так как ТС придется заезжать в некоторые пункты более, чем по одному разу. Также в некоторых случаях необходимы простои ТС до нижней границы допустимого времени обслуживания пункта. Для каждой вершины дерева существует только некоторое допустимое подмножество возможных продолжений, которое должно быть выделено. Все это потребовало разработки оригинальных методов вычисления оценок, стратегий ветвления, а также (на основе "оптимистических" оценок возможности выполнения ограничений) разработать правила отсева недопустимых продолжений. Приведенные алгоритмы решения иллюстрируются числовыми примерами. Анализируются результаты вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи

Рассматриваются следующие задачи транспортной логистики.

Задача 1. Транспортное средство (ТС) должно доставить груз от нескольких производителей и складов дистрибьютеров некоторому подмножеству потребителей. Общее число пунктов загрузки и разгрузки ТС равно $n - \tilde{I} = \{i = 0, 1, \dots, n\}$. Грузоподъемность ТС ограничена и равна G . ТС в начальный момент времени находится на базе ($i = 0$), на которую должно вернуться по окончании всех перевозок. Пусть задана матрица объемов грузов, которые необходимо доставить или забрать в различных пунктах $Q = \|q_i\|, i = 0, 1, \dots, n$. Причем, если груз необходимо доставить в пункт i , то значение q_i задано со знаком "+", а если забрать из пункта i , то — со знаком "-". Могут возникнуть ситуации, когда для некоторых пунктов $i \in \tilde{I}$ значения $|q_i| > G$. Тогда в этот пункт придется заезжать несколько раз. Заданы матрицы размерностью $(n + 1 - C = \|c_{ij}\|$ и $A = \|a_{ij}\|, i, j = 0, 1, \dots, n$, соответственно стоимости и времени переезда ТС между пунктами. При этом временем и стоимостью разгрузки и погрузки будем пренебрегать либо считать не зависящими от объемов и вида перевозимого груза и учтенных в значениях c_{ij} и a_{ij} . Кроме того заданы промежутки времени $H_i \in [h_i^1, h_i^2]$, в течение которых груз необходимо доставить или забрать из пункта i . При этом могут возникнуть ситуации, когда для выполнения заданных сроков доставки грузов ТС должно некоторое время простаивать в пути или в некотором пункте. Пусть стоимость единицы времени простоя равна λ . Эти затраты также необходимо учитывать в критерии оптимальности задачи. Надо определить замкнутый маршрут движения ТС, начинающийся

и заканчивающийся в начальном пункте $i = 0$, обеспечивающий доставку и перевозку всех видов грузов в установленные заданиями сроки, а также минимальные затраты на перевозки.

Рассматриваемые ниже задачи являются частным случаем сформулированной задачи 1.

Задача 2. Ограничения на сроки обслуживания пунктов отсутствуют.

Задача 3. Объемы груза $\|q_i\|$, которые необходимо забрать или доставить в каждый из пунктов, не превышают грузоподъемности ТС, т. е. $|q_i| \leq G, i = 0, 1, \dots, n$.

Задача 4. Отправление груза осуществляется только из одного начального пункта $i = 0$, а во все остальные пункты $i = 1, \dots, n$ должен быть доставлен груз.

Аналогично [2—7] могут быть предложены математические модели рассматриваемых задач в виде моделей линейного и нелинейного булевого программирования большого размера, алгоритмы решения которых не учитывают свойства допустимых и оптимальных решений и требуют больших объемов вычислений.

2. Свойства допустимых и оптимальных маршрутов

В следующих разделах работы рассматриваются математические свойства и алгоритмы решения частного случая задач 1—3 в условиях, когда ТС ограниченной грузоподъемности G должно осуществить доставку и прием совместимых или одного вида грузов (соответственно в количествах q_i^+ и q_i^-) во множество пунктов $\tilde{I} = \{i = 0, 1, \dots, n\}$.

Заданы допустимые времена начала и завершения обслуживания каждого из пунктов $H_i \in [h_i^1, h_i^2]$, $i \in \tilde{I}$, а также матрицы времен $A = \|a_{ij}\|$ и стоимостных затрат $C = \|c_{ij}\|$, связанных с переездом из пункта i в пункт j , а также единичные затраты λ , связанные с простоем ТС в ожидании допустимого времени обслуживания. Необходимо построить маршрут движения ТС, начинающийся и завершающийся в пункте $i = 0$, удовлетворяющий всем ограничениям на времена обслуживания пунктов и не допускающий наличия груза на ТС в любой точке маршрута, большего значения G , который минимизировал бы суммарные затраты на выполнение расписаний.

Пусть маршрут движения ТС имеет вид $\tilde{W} = \{w_0, w_1, \dots, w_{\vartheta}, \dots, w_{\Lambda}, w_0\}$, где $\Lambda \geq n$, (так как в некоторые пункты ТС может заходить несколько раз) — суммарное число пунктов (не включая пункт $i = 0$), куда заходило ТС, и $\bar{\tau}$ — суммарное время простоя ТС в ожидании времени обслуживания. Обозначим $(w_{\vartheta-1}, w_{\vartheta}) \in \tilde{W}, \vartheta = 1, \dots, \Lambda$, — путь между этими двумя пунктами. Тогда функция цели задачи имеет вид

$$F(\tilde{W}) = c_{(w_0, w_1)} + \sum_{(w_{\vartheta-1}, w_{\vartheta}) \in \tilde{W}} c_{(w_{\vartheta-1}, w_{\vartheta})} + c_{(w_{\Lambda}, w_0)} + \lambda \bar{\tau}.$$

Обозначим $T(w_i^1 | \tilde{W})$, $T(w_i^2 | \tilde{W})$ — соответственно время первого и последнего посещения i -го пункта маршрута \tilde{W} . Тогда ограничения на выполнение сроков обслуживания пунктов могут быть представлены в виде

$$T(w_i^1 | \tilde{W}) \geq h_i^1; T(w_i^2 | \tilde{W}) \leq h_i^2.$$

Ниже исследуются свойства допустимых и оптимальных маршрутов и алгоритмы решения этих задач.

Назовем $\tilde{U}^s = \{0, i_1^s, i_2^s, \dots, i_l^s, \dots, i_p^s\}$ — некоторый частичный маршрут движения ТС; $\tilde{J}^{s,+}$ и $\hat{J}^{s,-}$ — соответственно подмножество пунктов, для которых выполнены все задания и которые необходимо еще посетить, реализуя частичный маршрут (план) \tilde{U}^s , включающий подмножество пунктов $i_l^s \in \tilde{J}^{s,+}$; $\hat{J}^{s,-}$, куда необходимо зайти на s -м шаге вычислений; l^s — последний пункт частичного плана \tilde{U}^s ; $\theta(\tilde{U}^s)$ — время завершения всех заданий в конечном пункте l^s в маршруте \tilde{U}^s , который должен быть продолжен дальше из этого пункта; $|q_j^s|$ — абсолютное значение объема грузов, которое еще необходимо доставить или забрать из пунктов $j \in \hat{J}^{s,-}$, развивая маршрут \tilde{U}^s ; G^s — объем груза, содержащегося в ТС при выезде из пункта l^s в маршруте \tilde{U}^s ; G — грузоподъемность транспортного средства. Обозначим соответственно $\tilde{I}^{s,+}$ и $\tilde{I}^{s,-}$ — подмножество пунктов, куда необходимо доставить и откуда забрать груз, и наличие груза в ТС и(или) возможность дозагрузки его предоставляют такие возможности,

$$\tilde{I}^{s,+} = \{i \in \hat{J}^{s,-} | q_i^s > 0\}, \tilde{I}^{s,-} = \{i \in \hat{J}^{s,-} | q_i^s < 0\}. (1)$$

В начале итеративного процесса $\hat{J}^{0,-} = \tilde{I} = \{0, 1, \dots, n\}$. Движение, как и в задаче 1, начинается и должно завершиться в начальном пункте $i = 0$. Определим

$$\omega_i = \min_{j \in \hat{J}^{s,-}} a_{ij}, \vartheta_{ij} = a_{ij} - \omega_j, i \in \hat{J}^{s,-}; (2)$$

$$\beta_j = \min_{i \in \hat{J}^{s,-}} \vartheta_{ij}, i \in \hat{J}^{s,-}; (3)$$

$$\bar{a}_j = \omega_j + \beta_j, i \in \hat{J}^{s,-}. (4)$$

В каждой строке и каждом столбце преобразованной матрицы $\hat{A} = \|\hat{a}_{ij}\|$, где $\hat{a}_{ij} = \vartheta_{ij} - \beta_j$, $i, j \in \hat{J}^{s,-}$, содержится по крайней мере по одному нулевому элементу.

Утверждение 1. Если найдется хотя бы один пункт $j \in \hat{J}^{s,-}$, для которого справедливо неравенство

$$\theta(\tilde{U}^s) + \bar{a}_j > \min_{1 \leq p \leq P} \{h_{jp}^2 | |q_{jp}^s| > 0\}, j \in \hat{J}^{s,-}, (5)$$

где P — число различных видов грузов (в данном случае $P = 1$), то развиваемый маршрут \tilde{U}^s не содержит допустимых маршрутов и может быть отброшен как неперспективный.

Упорядочим все пункты подмножества $j \in \hat{J}^{s,-}$ в последовательность

$$\tilde{W}^s = \{j_1^s, j_2^s, \dots, j_r^s, \dots, j_R^s | h_{j_r}^{2,s} \leq h_{j_{r+1}}^{2,s}; j_r^s \in \hat{J}^{s,-}\}. (6)$$

Утверждение 2. Если найдется хотя бы один пункт $j \in \hat{J}^{s,-}$, для которого не выполняется хотя бы одно из системы неравенств

$$\theta(\tilde{U}^s) + \sum_{\rho=1}^r \bar{a}_{j_\rho} \leq h_{j_r}^{2,s}, j_r \in \tilde{W}^s, r = 1, 2, \dots, R, (7)$$

где $h_{j_r}^{2,s}$ — допустимое наиболее позднее время доставки или приема грузов в пункте j_r ; r и ρ — бегущие индексы, R — число подлежащих обслуживанию пунктов в подмножестве $\hat{J}^{s,-}$, то развиваемый маршрут \tilde{U}^s не содержит допустимых планов движения и может быть отброшен как неперспективный.

Доказательства утверждения 2 приведены в книге автора [3].

3. Обслуживание пунктов

При продолжении некоторого частичного маршрута \tilde{U}^m в маршрут \tilde{U}^s с конечным пунктом $k = l^s$, вектор значений объемов грузов во всех пунктах q_j^s , $j \in \hat{J}^{s,-}$, и объем груза, оставшегося в ТС, определяются по формулам

$$q_j^s = \begin{cases} q_j^m, & \text{если } j \neq k, j \in \hat{J}^{s,-}, \\ q_k^m - \min(G^s, q_k^m), & \text{если } q_k^m > 0, \\ q_k^m + \min(G - G^s, |q_k^m|), & \text{если } q_k^m < 0; \end{cases} (8)$$

$$G^s = \begin{cases} G^m - (q_k^m - q_k^s), & \text{если } q_k^m < 0. \\ G - G^m + (|q_k^m| - |q_k^s|), & \text{если } q_k^m < 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Если $G^s = 0$, а $q_{jp}^s > 0$, либо $G - G^s = 0$, а $q_j^s < 0$, то маршрут из конечного пункта l^s в пункты j является нецелесообразным и не может рассматриваться в оптимальном маршруте ТС.

Правило отсева 1.

Если для параметров двух рассматриваемых частичных маршрутов \tilde{U}^s и \tilde{U}^m с функциями цели (время или стоимость выполнения маршрута) соответственно f^s и f^m , которые заканчиваются в одном

и том же пункте $l^s = l^m$, справедлива следующая система неравенств:

$$f^s \leq f^m, \quad (9)$$

$$G^s \leq G^m \text{ и } q_j^s \leq G^s, j \in \tilde{I}^{s,+}$$

$$\text{или } G^s \geq G^m, |q_j^s| \leq G - G^s, j \in \tilde{I}^{s,-}, \quad (10)$$

и если хотя бы одно из этих неравенств выполняется как строгое неравенство, то частичный план \tilde{U}^s является более перспективным, чем частичный план \tilde{U}^m , и последний может быть отброшен из рассмотрения как неперспективный.

Преобразование 1.

Выполняем следующие преобразования матрицы $\bar{C}^s = \|\bar{c}_{ij}^s\|$:

1. Если при продолжении маршрута \tilde{U}^m с конечным пунктом l^m в пункт l^s построен новый маршрут \tilde{U}^s , для которого $q_{l^m}^m = 0$, то вычеркиваем l^m -ю строку в матрице \bar{C}^m .

Если справедливо одно из условий $q_{l^s}^m \leq G^m \forall j \in \tilde{I}^{s,+}$ или $|q_{l^s}^m| \leq G - G^m \forall j \in \tilde{I}^{s,-}$, то вычеркиваем l^s -й столбец в матрице \bar{C}^m . В данном случае элемент $\bar{c}_{l^s l^m}^m$ матрицы \bar{C}^m полагаем равным ∞ . Преобразованную матрицу обозначим \bar{C}^s .

2. Если $\theta(\tilde{U}^s) + a_{l^s j} > h_j^2$, то полагаем $\bar{c}_{l^s j}^s = \infty$.

3. Выполняем следующие вычисления для всех строк $i \in \hat{J}^{s,-}$:

$$\bar{\delta}_i^s = \min_{j \in \hat{J}^{s,-}} \bar{c}_{ij}^s, \bar{\lambda}_{ij}^s = \bar{c}_{ij}^s - \bar{\delta}_i^s, i \in \hat{J}^{s,-}. \quad (11)$$

4. Для каждого из столбцов $i \in \hat{J}^{s,-}$ преобразуем элементы матрицы следующим образом:

$$L^s = \|\bar{\lambda}_{ij}^s\|, i, j \in \hat{J}^{s,-}. \quad (12)$$

Обозначим $\bar{c}_{ij}^s = \bar{\lambda}_{ij}^s - \bar{\gamma}_j^s, j \in \hat{J}^{s,-}; \bar{\gamma}_j^s = \min_{i \in \hat{J}^{s,-}} \bar{\lambda}_{ij}^s$.

5. Вычислим сумму приведенных констант

$$D^s = \sum_{i \in \hat{J}^{s,-}} \bar{\delta}_i^s + \sum_{i \in \hat{J}^{s,-}} \bar{\gamma}_j^s. \quad (13)$$

В начале процесса полагаем $C^0 = C$ и вычисленная сумма приводящих констант равна D^0 .

Утверждение 4. ТС, развивая маршрут \tilde{U}^s , должен зайти в каждый из пунктов $j \in \hat{J}^{s,-}$ не менее, чем y_j^s раз, где

$$y_j^s = 1 + \left\lfloor \frac{q_j^s - G^s}{G} \right\rfloor \forall j \in \tilde{I}^{s,+}$$

$$\text{или } y_j^s = 1 + \left\lfloor \frac{-q_j^s - (G - G^s)}{G} \right\rfloor \forall j \in \tilde{I}^{s,-}. \quad (14)$$

Здесь $\left\lfloor \frac{q_j^s - G^s}{G} \right\rfloor$ и $\left\lfloor \frac{-q_j^s - (G - G^s)}{G} \right\rfloor$ — наибольшие

целые числа частных от деления соответствующих величин.

Утверждение 5. Нижняя граница суммарных затрат вычисляется по формуле

$$\xi(\tilde{U}^0) = \sum_{j \in \tilde{I}} y_j^0 (\bar{\delta}_j^0 + \bar{\gamma}_j^0). \quad (15)$$

Утверждение 6. Если продолжением некоторого маршрута \tilde{U}^m в пункт l^s получен частичный маршрут \tilde{U}^s , то нижняя граница суммарных затрат вычисляется по формуле

$$\xi(\tilde{U}^s) = \xi(\tilde{U}^m) + D^s + \sum_{j \in \hat{J}^{s,-}} (\bar{\delta}_j^0 + \bar{\gamma}_j^0) \cdot \max[0; (y_j^s - y_j^m)] + \lambda \tau^s, \quad (16)$$

где $\tau^s = \max(0, h_1^s \theta(U^s))$.

4. Алгоритм решения задачи методом динамического программирования и последовательного анализа вариантов

В процессе решения задачи выполняется построение, анализ различных допустимых и конкурирующих маршрутов \tilde{U}^s движения ТС, начиная с начального пункта $i = 0$, и развитие перспективных маршрутов до получения наиболее эффективного решения. В процессе построения проводится отсев недопустимых и неперспективных продолжений. Каждая итерация алгоритма ($s = 0, 1, 2, \dots, S$) состоит из нескольких шагов. Развивается перспективный s^* -й план с наименьшим значением функции цели, ($f^{s^*} = \min_{s=1, \dots, S} f^s$), который продолжается во все допустимые пункты его продолжения. Проводится отсев всех неперспективных частичных планов. Первый допустимый план перевозок, значение критерия оптимальности которого меньше или равно значению суммарных затрат любого из конкурирующих и не продолженных до конца частичных планов, является решением задачи. На основе установленных выше свойств допустимых решений задачи и системы оценок нижних границ значений функции цели на ранних стадиях построения альтернативных маршрутов движения анализируется возможность выполнения системы ограничений и проводится отсев недопустимых продолжений.

Приведенные выше правила сравнения альтернативных частичных планов позволяют отсеять строящиеся маршруты, не содержащие оптимальных решений. Тот факт, что на каждой итерации развивается только частичный план (строящийся маршрут) с наилучшим значением функции цели, позволяет исключить анализ заведомо неоптимальных маршрутов.

Метка каждого развивающегося частичного плана \tilde{U}^s включает следующие параметры:

$$\tilde{U}^s = \{0, i_1^s, i_2^s, \dots, i_\lambda^s, \dots, i_l^s\}; l^s, \theta(\tilde{U}^s); \bar{J}^{s,+} \text{ и } \hat{J}^{s,-};$$

$$q_{ip}^s, i = 0, 1, \dots, n; p \in \tilde{P} = \{1, \dots, P\}; G^{s,+} = \|g_p^{s,+}\|,$$

где $g_p^{s,+}$ — количество p -го вида груза, находящегося в ТС; $f^s = \infty$; $F(Z^s)$, где Z^s — построенный допустимый маршрут движения ТС, а $F(Z^s)$ — значение функции цели для построенного допустимого маршрута; $\psi(\tilde{U}^s)$ — параметр, определяющий, продолжен ли этот маршрут во все допустимые пункты: если да, то $\psi(\tilde{U}^s) = 1$, если нет, то $\psi(\tilde{U}^s) = 0$, при $\psi(\tilde{U}^s) = 2$ маршрут исключен из дальнейшего рассмотрения как недопустимый, а при $\psi(\tilde{U}^s) = 3$ — как неоптимальный.

Пусть на некотором этапе решения задачи получено $Z^t, t = 1, \dots, T$, допустимых маршрутов решения задачи, функции цели которых соответственно равны $F(Z^t)$, среди которых $F(\bar{Z}^T) = \min_{1 \leq t \leq T} F(Z^t)$ — наилучшее среди всех полученных на данный момент решений задачи.

В начале процесса решения ($s = 0$) формируем для частичного маршрута \tilde{U}^0 следующие параметры начальной метки:

$$\tilde{U}^0 = \{0\}; l^0 = 0; \theta(\tilde{U}^0) = 0; \bar{J}^{0,+} = \tilde{I} = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

$$\hat{J}^{0,-} = \emptyset; q_i^0 = q_i, i = 0, 1, \dots, n; G^0 = 0; f^0 = 0;$$

$$F(\bar{Z}^T) = \infty; \psi(\tilde{U}^0) = 0.$$

На каждой итерации алгоритма выполняем следующий объем вычислений.

Шаг 1. Среди всех частичных планов ($s = 0, 1, 2, \dots, S$) выбираем некоторый частичный план \tilde{U}^n , для которого $f^n = \min_{0 \leq s \leq S} \{f^s | \psi(\tilde{U}^s) = 0\}$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Рассматриваем частичный план \tilde{U}^n , конечный пункт маршрута которого l^n . Из пунктов $j \in \hat{J}^{n,-}$ находим такие, для которых выполняется неравенство

$$\theta(\tilde{U}^n) + a_{l^n j} \leq \begin{cases} h_j^2, & \text{если } q_j^n > 0 \text{ \& } G^n > 0, \\ h_j^2, & \text{если } q_j^n < 0 \text{ \& } (G - G^n) > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Пусть это будет подмножество пунктов $j \in \hat{J}_1^{n,-} \subseteq \hat{J}^{n,-}$.

А. Если $\hat{J}_1^{n,-} = \emptyset$, т. е. таких пунктов не существует, то частичный план \tilde{U}^n не содержит допустимых решений, и он исключается из дальнейшего рассмотрения. В этом случае полагаем $\psi(\tilde{U}^n) = 2$, выполняем переиндексацию всех рассматриваемых частичных планов и вновь переходим к шагу 1.

Б. Если $\hat{J}_1^{n,-} \neq \emptyset$, то для каждого из пунктов $j \in (\hat{J}_1^{n,-} / l^n)$ определяем

$$\theta(j | \tilde{U}^n) = \max \{ h_j^1; \theta(\tilde{U}^n) + a_{l^n j} \}, j \in (\hat{J}_1^{n,-} / l^n). \quad (18)$$

$$\tilde{V}^n = \{j_1^n, j_2^n, \dots, j_{k-1}^n, j_k^n, \dots, j_{K(n)}^n | j_k^n \in (\hat{J}_1^{n,-} / l^n);$$

$$h_{j_{k-1}}^2 \leq h_{j_k}^2, k = 2, \dots, K\}. \quad (19)$$

Проверяем выполнение следующей системы неравенств для индексов, упорядоченных в последовательность (19):

$$\theta(\mathcal{Q} | \tilde{U}^n) + a_{l^n \mathcal{Q}} + \sum_{\delta=1}^k \bar{a}_{j_\delta^n} - \bar{a}_{\mathcal{Q}} \leq h_{j_k^n}^2, i_k^n \in (\tilde{V}^n / \mathcal{Q}). \quad (20)$$

Если для некоторого пункта j_k^n не выполняется хотя бы одно из системы неравенств (20), то в допустимых продолжениях частичного плана \tilde{U}^n маршрут из пункта l^n в \mathcal{Q} является недопустимым.

В. Обозначим \tilde{M}^n подмножество пунктов $\mathcal{Q} \in (\hat{J}_1^{n,-} / l^n)$, для которых справедливы все неравенства (18)–(20). Если таких пунктов не существует, т. е. $\tilde{M}^n = \emptyset$, то \tilde{U}^n исключается из дальнейшего рассмотрения, полагаем $\psi(\tilde{U}^n) = 1$, проводим переиндексацию всех рассматриваемых частичных планов и переходим к шагу 1. Если $\tilde{M}^n \neq \emptyset$, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Продолжаем частичный план \tilde{U}^n во все пункты подмножества $\xi_r \in \tilde{M}^n$.

При этом метка каждого из продолженных путей формируется следующим образом:

$$\bar{V}^{S+r} = \{0, i_1^n, i_2^n, \dots, i_\lambda^n, \dots, i_l^n, i_{\xi_r}^{S+r}\}; l^{S+r};$$

$$\bar{J}^{(S+r),+} = (\bar{J}^{n,+} \cup \xi_r); \bar{J}^{(S+r),-} = (\bar{J}^{n,-} / \xi_r);$$

$$\theta(\tilde{U}^{S+r}) =$$

$$= \begin{cases} \theta(\tilde{U}^n) + a_{l^n \xi_r}, & \text{если } \theta(\tilde{U}^n) + a_{l^n \xi_r} \geq h_{\xi_r}^1, \\ h_{\xi_r}^1, & \text{если } \theta(\tilde{U}^n) + a_{l^n \xi_r} < h_{\xi_r}^1; \end{cases} \quad (21)$$

$$q_i^{(S+r)} = q_i^n, i \in (\bar{J}^{n,-} / \xi_r).$$

Значения $q_{\xi_r}^{(S+r)}$ и $G^{(S+r)}$ вычисляются по формулам (8):

$$q_{\xi_r}^{(S+r)} = \begin{cases} q_{\xi_r}^n - \min(G^n, q_{\xi_r}^n), & \text{если } q_{\xi_r}^n > 0, \\ q_{\xi_r}^n + \max(G - G^n, |q_{\xi_r}^n|), & \text{если } q_{\xi_r}^n < 0; \end{cases} \quad (22)$$

$$G^{(S+r)} = \begin{cases} G^n - (q_k^{(S+r)} - q_{\xi_r}^s), & \text{если } q_k^n < 0, \\ G - G^n + (|q_{\xi_r}^{(S+r)}| - |q_{\xi_r}^s|), & \text{если } q_k^n < 0. \end{cases} \quad (23)$$

$$f(\tilde{U}^{(S+r)}) =$$

$$= \begin{cases} f(\tilde{U}^n) + c_{l_{\eta_{\xi_r}}}, & \text{если } h_{\xi_r}^1 \leq (\theta(\tilde{U}^n) + a_{l_{\eta_{\xi_r}}}), \\ f(\tilde{U}^n) + c_{l_{\eta_{\xi_r}}} + \lambda[h_{\xi_r}^1 - \theta(\tilde{U}^n) - a_{l_{\eta_{\xi_r}}}], & \\ \text{если } h_{\xi_r}^1 > (\theta(\tilde{U}^n) + a_{l_{\eta_{\xi_r}}}). \end{cases} \quad (24)$$

Полагаем $\psi(\tilde{U}^n) = 1$, $\psi(\tilde{U}^{(S+r)}) = 0$, $r = 1, \dots, R$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Исключаем из дальнейшего рассмотрения все продолженные на этой итерации маршруты $\tilde{U}^{(S+r)}$, для которых справедливо неравенство $F(\tilde{U}^{(S+r)}) \geq F(\bar{Z}^T)$, положив для них $\psi(\tilde{U}^{(S+r)}) = 3$.

А. Если для какого-то вновь образованного маршрута $\tilde{U}^{(S+r)}$ выполняются условия $\hat{J}_1^{(S+r),-} = \emptyset$, $l^{(S+r)} = 0$; $q_j^{(S+r)} = 0, j \in \tilde{I}$; $G^{(S+r)} = 0$, то получено допустимое решение задачи, значение функции цели которого (время или стоимость выполнения маршрута) равно $F(\tilde{U}^{(S+r)})$. Определяем для этого маршрута $\psi(\tilde{U}^{(S+r)}) = 1$, $T := (T + 1)$.

Если $F(\tilde{U}^{(S+r)}) < F(\bar{Z}^T)$, то полагаем $Z^T = \tilde{U}^{(S+r)}$, $F(\bar{Z}^T) = F(\tilde{U}^{(S+r)})$.

Если выполняются условия $F(\bar{Z}^T) \leq \{f(\tilde{U}^\tau) | \psi(\tilde{U}^\tau) = 0\}$ для всех $\tau = 0, 1, 2, \dots, S, (S+1), \dots, (S+R)$, то этот маршрут со значением функции цели, равным $F(\bar{Z}^T)$, является решением задачи, и алгоритм завершает работу.

Б. Для каждого из вновь образованных маршрутов, положив $\tilde{U}^m = \tilde{U}^{(S+r)}$ проверяем выполнение условий правила отсева 1, сравнивая каждый из них со всеми частичными планами \tilde{U}^s , у которых признак $\psi(\tilde{U}^s) = 0$. Если выполняются все условия правила отсева 1, то $\tilde{U}^m = \tilde{U}^{(S+r)}$ является неперспективным, полагаем $\psi(\tilde{U}^{(S+r)}) = 3$, исключаем его из дальнейшего рассмотрения. Если для некоторой

пары индексов s и $(S+r)$ условия правила отсева 1 выполняются в условиях обозначений $\tilde{U}^s = \tilde{U}^{(S+r)}$, а $\tilde{U}^m = \tilde{U}^s$, ранее построенный частичный план \tilde{U}^s является неперспективным, полагаем $\psi(\tilde{U}^s) = 3$, и исключаем его рассмотрения.

Переходим к следующей итерации, возвратившись к шагу 1.

Через некоторое число итераций алгоритма либо будет оптимальное решение задачи, либо будет установлен факт, что исходная система ограничений задачи является несовместной.

4. Алгоритм решения задачи модифицированным методом ветвей и границ

Метка каждого развивающегося частичного плана \tilde{U}^s включает следующие параметры: $\tilde{U}^s = \{0, i_1^s, i_2^s, \dots, i_\lambda^s, \dots, i_l^s\}; l^s, \theta(\tilde{U}^s); \bar{J}^{s,+}$ и $\bar{J}^{s,-}; q_i^s, i = 0, 1, \dots, n; G^s; f^s; \psi(\tilde{U}^s)$ — параметр, определяющий, продолжен ли этот маршрут во все допустимые пункты: если да — $\psi(\tilde{U}^s) = 1$, если нет — $\psi(\tilde{U}^s) = 0$. При $\psi(\tilde{U}^s) = 2$ маршрут недопустимый, а при $\psi(\tilde{U}^s) = 3$ — неоптимальный.

На начальном этапе решения ($s = 0$), когда $G^0 = 0$, выполним следующие преобразования и вычисления:

- в 0-й строке матриц C^0 и A^0 полагаем значения $c_{0j} = a_{0j} = \infty$ в тех столбцах этой строки, для которых справедливы соотношения $q_j < 0$, а $q_0 = G$;
- рассмотрим последовательность пунктов

$$\tilde{W}^0 = \{i_1, i_2, \dots, i_r, \dots, i_r | h_{i_r}^2 \leq h_{i_{r+1}}^2; i_r, i_{r+1} \in \tilde{I}\}; \quad (25)$$

проверяем выполнение следующей системы неравенств:

$$\sum_{p=1}^r \bar{a}_{i_p} > h_{i_r}^2, i_r \in \tilde{W}^0, r = 1, 2, \dots, R; \quad (26)$$

если справедливо неравенство (26) хотя бы для одного индекса $i_r \in \tilde{W}^0, r = 1, 2, \dots, R$, то система ограничений задачи является несовместной, и алгоритм завершает свою работу;

в) в противном случае вычислим значения $\bar{a}_i, i \in \tilde{I}$, по формулам (3)—(5), а также значения \bar{y}_j^0, \bar{y}_j^0 соответственно по формулам (11), (12), (14) и значение нижней границы функции цели $\xi(\tilde{U}^0)$ по формуле (15);

г) положив $s = 0, C^0 = C = \|c_{ij}\|$, выполним преобразование 1 матрицы C^0 . Преобразованную по пра-

вину 1 матрицу C^s , $s = 0, 1, \dots, S$, в дальнейшем будем обозначать $\bar{C}^s = \|\bar{c}_{ij}^s\|$, $i, j \in \hat{J}^{s,-}$; полагаем $F(\bar{Z}^0) = \infty$.

Сформируем метку начальной вершины дерева различных вариантов:

$$\tilde{U}^{s=0} = \{0\}, l^0 = 0; \theta(\tilde{U}^0) = 0; \bar{J}^{s,+} = \{0\}, \hat{J}^{s,-} = \tilde{I},$$

где \tilde{I} — множество пунктов, подлежащих обслуживанию в соответствии с условиями задачи;

$$f^0 = F(\bar{Z}^0) = \infty;$$

$$q_0^0 = \begin{cases} q_0, & \text{если } q_0 < 0 \text{ \& } G^0 = 0, \\ q_0 - \min(q_0, G^0), & \text{если } q_0 < 0 \text{ \& } G^0 > 0; \end{cases}$$

$$G^0 = G - q_0^0; \xi(Z^0); \psi(\tilde{U}^0) = 0.$$

Пусть на некотором этапе решения получено $s = 1, \dots, S$ различных частичных и требующих дальнейшего развития маршрутов движения ТС (вершин дерева рассматриваемых вариантов) \tilde{U}^s , вид метки которых приведен выше. Кроме того, получено некоторое подмножество допустимых решений (альтернативных маршрутов), значение суммарных приведенных затрат для лучшего из которых равно $F(\bar{Z}^s)$. Алгоритм решения задачи предусматривает выполнение следующих шагов.

Шаг 1. Для всех вершин (меток) дерева, для которых $\psi(\tilde{U}^s) = 0$, если $\xi(Z^s) \geq F(\bar{Z}^s)$, полагаем $\psi(\tilde{U}^s) = 3$. Находим метку с индексом $\bar{s} = \arg\{\min_{0 \leq s \leq S} \xi(Z^s) | \psi(\tilde{U}^s) = 0\}$.

Определяем для этой вершины дерева подмножества $\bar{J}^{\bar{s},+}$, $\bar{J}^{\bar{s},-}$, пункт $k = l^{\bar{s}}$, матрицы $\bar{C}^{\bar{s}} = \|\bar{c}_{ij}^{\bar{s}}\|$, $i, j \in \hat{J}^{\bar{s},-}$, а также значение $\bar{G}^{\bar{s}}$ и вектор $\bar{q}_j^{\bar{s}}, j \in \hat{J}^{\bar{s},-}$. В k -й строке матриц $C^{\bar{s}}$ и $A^{\bar{s}}$ полагаем значения $c_{kj}^{\bar{s}} = a_{kj}^{\bar{s}} = \infty$ в тех столбцах этой k -й строки, для которых справедливы соотношения $q_j^{\bar{s}} \leq 0$, а $G - \bar{G}^{\bar{s}} = 0$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем значения суммы приводящих констант для каждого пункта $\bar{a}_k^{\bar{s}} = \min_{j \in \hat{J}^{\bar{s},-}} \bar{a}_{kj}^{\bar{s}}$, $k \in \hat{J}^{\bar{s},-}$. Упорядочим все пункты подмножества $j \in \hat{J}^{\bar{s},-}$ в последовательность $\tilde{W}^{\bar{s}}$ в соответствии с выражением (6). Проверяем выполнение системы неравенств (7). Если не выполняется хотя бы одно из неравенств (7), то этот маршрут не содержит допустимых продолжений, полагаем $\psi(\tilde{U}^{\bar{s}}) = 2$, и переходим к шагу 1. В противном случае выполняем

преобразование 1 матрицы $\bar{C}^{\bar{s}} = \|\bar{c}_{ij}^{\bar{s}}\|$, $i, j \in \hat{J}^{\bar{s},-}$, вычисляем сумму приводящих констант и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Продолжаем путь $\tilde{U}^{\bar{s}}$ (развиваем \bar{s} -ю вершину дерева), продолжив путь из вершины $k = l^{\bar{s}}$ во все вершины с индексом, значение соответствующего элемента которого в этой k -й строке равно 0 — $\{j_1 \in \hat{J}^{\bar{s},-} | \bar{c}_{kj_1}^{\bar{s}} \neq \infty\}$.

Для вновь образованных η вершин $\rho = (S + 1), (S + 2), \dots, (S + \eta)$, метка формируется следующим образом:

$$\tilde{U}^{\rho} = \{0, i_1^{\bar{s}}, i_2^{\bar{s}}, \dots, i_{\lambda}^{\bar{s}}, \dots, l_{\bar{s}} = k, j_1(\rho)\}, l^{\rho} = j_1(\rho), (27)$$

$$\theta(\tilde{U}^{\rho}) =$$

$$= \begin{cases} \theta(\tilde{U}^s) + a_{k,j_1(\rho)}, & \text{если } \theta(\tilde{U}^s) + a_{k,j_1(\rho)} \geq h_{j_1(\rho)}^1, \\ h_{j_1(\rho)}^1, & \text{если } \theta(\tilde{U}^s) + a_{k,j_1(\rho)} < h_{j_1(\rho)}^1; \end{cases} (28)$$

$$\bar{J}^{\rho,+} = \bar{J}^{\bar{s},+} \cup j_1(\rho); \hat{J}^{\rho,-} = \{\hat{J}^{\bar{s},-} / j_1(\rho)\}. (29)$$

Значения q_i^{ρ} , $i \in \hat{J}^{\rho,-}$ и G^{ρ} определяются в соответствии с алгоритмом обслуживания пунктов по формулам (22), (23).

Другие показатели метки для вновь образованных частичных маршрутов определяются по формулам

$$\xi(Z^{\rho}) = \xi(Z^{\bar{s}}) + \sum_{j \in \hat{J}^{\bar{s},-}} d_j \cdot \psi_j^{\bar{s}} + \bar{c}_{k,j_1(\rho)}^{\bar{s}} + b \cdot \max[0; h_j^1 - \theta(\tilde{U}^{\bar{s}}) - a_{k,j_1(\rho)}]; (30)$$

$$f^{\rho} = \begin{cases} \xi(Z^{\rho}), & \text{если } \hat{J}^{\rho,-} = \emptyset, \\ \infty, & \text{если } \hat{J}^{\rho,-} \neq \emptyset; \end{cases} \psi(\tilde{U}^{\rho}) = \begin{cases} 1, & \text{если } f^{\rho} < \infty, \\ 0, & \text{если } f^{\rho} = \infty. \end{cases} (31)$$

Для \bar{s} -го частичного маршрута полагаем $\psi(\tilde{U}^{\bar{s}}) = 1$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Для вновь образованных вершин $\rho = (S + 1), (S + 2), \dots, (S + \eta)$ определяем $\bar{f} = \min_{(S+1) \leq \rho \leq (S+\eta)} f^{\rho}$. Если $\bar{f} < \infty$ и $\bar{f} < F(\bar{Z}^s)$, то полагаем $\bar{f} < F(\bar{Z}^s)$. Если $F(\bar{Z}^s) \leq \min_{1 \leq s \leq (S+\eta)} \xi(Z^s)$, т. е. значение целевой функции полученного допустимого решения меньше или равно, чем нижняя граница функции цели всех висячих и подлежащих развитию вершин дерева, то получено решение задачи и алгоритм завершает работу. В противном случае переходим к шагу 1.

Через некоторое число больших итераций алгоритма либо будет получено оптимальное решение задачи, либо будет установлен факт несовместности исходной системы ограничений.

5. Иллюстративные примеры

Таблица 1

Иллюстративный пример 1.

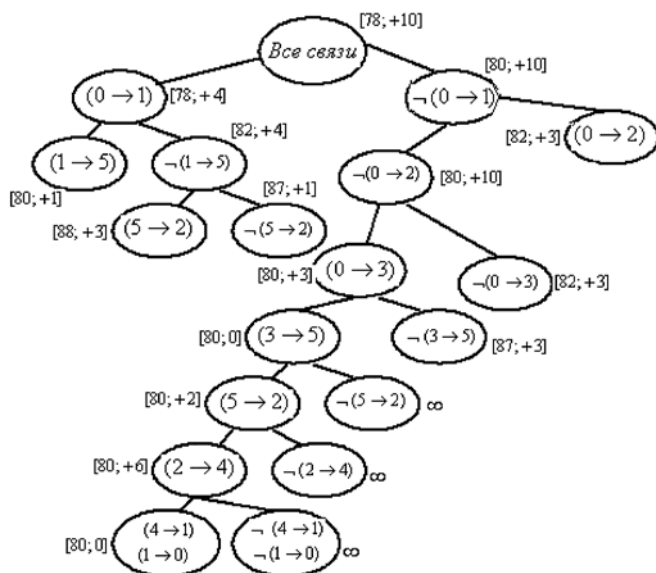
ТС должно осуществить доставку и получение грузов из шести пунктов. Грузоподъемность транспортного средства — не более 12 т. Маршрут движения должен начинаться и заканчиваться в начальном пункте $i = 0$. Расстояния (время проезда или стоимости проезда из одного пункта в другой) приведены в табл. 1. Объемы грузов, которые необходимо доставить или забрать в различных пунктах $i = 0, 1, \dots, 5$, приведены в табл. 2. Необходимо найти допустимый маршрут движения транспортного средства, обеспечивающий минимум затрат.

Дерево решений задачи представлено на рисунке. В табл. 3 дана приведенная матрица расстояний в процессе назначения и запрещения отдельных связей на главной ветви дерева в процессе решения задачи.

Следовательно, оптимальным решением задачи является маршрут движения $(0 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 0)$, длина (стоимость) которого составляет $14 + 15 + 10 + 17 + 13 + 11 = 80$ км (тыс.руб).

Иллюстративный пример 2.

ТС должно осуществить доставку и получение грузов из семи пунктов. Грузоподъемность транспортного средства не более 11 т. Маршрут движения должен начинаться и заканчиваться в начальном пункте $i = 0$. Время проезда или стоимости проезда из одного пункта в другой приведены в табл. 4, а стоимость перевозок — в табл. 5. Каждая единица времени простоя ТС связана с затратами, значения которых равны 1. Объемы грузов, которые необходимо доставить или забрать в различных пунктах $i = 0, 1, \dots, 6$, приведены в табл. 6 (со знаком "+" заданы объемы грузов, которые нужно забрать в различных пунктах, а со знаком "-" объемы, которые



Дерево решений задачи

Матрица расстояний между пунктами

№ пунктов	Расстояния (стоимости проезда) между пунктами					
	0	1	2	3	4	5
0	∞	10	12	14	15	20
1	11	∞	13	20	19	13
2	12	15	∞	18	17	14
3	13	18	20	∞	27	15
4	16	13	15	25	∞	20
5	17	12	10	12	22	∞

Таблица 2

Объемы грузов, которые необходимо доставить или забрать в различных пунктах

Объемы грузов (в тоннах), поставляемых и забираемых из пунктов						
0	1	2	3	4	5	
+10	-6	+2	-7	+4	-3	

Таблица 3

Приведенная матрица расстояний между пунктами

№ пунктов	Расстояния (стоимости проезда) между пунктами					
	0	1	2	3	4	5
0	∞	0	2	2	∞	8
1	0	∞	2	7	3	0
2	0	3	∞	4	0	0
3	0	5	7	∞	9	0
4	3	0	2	10	∞	5
5	7	2	0	0	7	∞

Таблица 4

Время проезда между пунктами

№ пунктов	Время проезда между пунктами						
	0	1	2	3	4	5	6
0	∞	20	15	25	17	27	12
1	20	∞	30	10	16	23	25
2	15	30	∞	32	18	25	16
3	25	10	32	∞	20	24	35
4	17	16	18	20	∞	18	22
5	27	23	25	24	18	∞	18
6	12	25	16	35	22	18	∞

Таблица 5

Стоимость проезда между пунктами

№ пунктов	Стоимость проезда между пунктами						
	0	1	2	3	4	5	6
0	∞	27	22	35	24	38	18
1	27	∞	42	14	23	32	34
2	22	42	∞	45	25	35	23
3	35	14	45	∞	27	32	48
4	24	23	25	27	∞	25	30
5	38	32	35	32	25	∞	24
6	18	34	23	48	30	24	∞

необходимо доставить. Граничные времена обслуживания каждого из пунктов приведены в табл. 7. Грузоподъемность ТС — 11 т. Необходимо найти допустимый маршрут движения транспортного средства, обеспечивающий обслуживание каждого из пунктов в заданные ограничениями сроки и минимум затрат, связанных с выполнением всех заданий.

Выполнив приведение 1 матриц A и C , вычислим сумму приводящих констант для каждого из индексов матрицы A , которые соответственно равны $\bar{a} = (12, 15, 17, 10, 16, 20, 12)$, а также по формуле (16) нижнюю границу функции цели в оптимальном решении, которая равна 162.

Процесс решения задачи описанным выше модифицированным алгоритмом последовательного анализа вариантов приведен ниже в приложении (табл. П.1). Номера частичных маршрутов, отмеченных курсивом, определяют оптимальное решение задачи. Результаты решения задачи сведены в табл. 8.

Оптимальным решением задачи является маршрут движения $(0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 0)$, значение критерия оптимальности для которого равно 220.

6. Вычислительные эксперименты

Автором были проведены вычислительные эксперименты анализа эффективности предлагаемых алгоритмов. Решались задачи, включающие до 20 пунктов. Следует заметить, что при решении практических задач построения маршрута движения одной машины редко можно встретить задачи большей размерности. Выбирались достаточно жесткие ограничения на сроки доставки грузов и обслуживания объектов. Время решения всех задач на персональном компьютере с процессором Core i-5 Intel® Core™ i5-4200U 4-й модификации (до 2,60 ГГц было не более 2,5 мин). Наибольшее число анализируемых вариантов и соответственно наибольший объем вычислений было в задачах без ограничений с небольшими отличиями во временах и стоимости перевозки грузов из одного пункта в другой. Наличие жесткой системы ограничений и большие разбросы во временах и стоимости доставки грузов позволяют уже на первых итерациях алгоритма исключить маршруты, не содержащие допустимых и оптимальных планов, и существенно сокращают число анализируемых маршрутов. В задачах большой размерности при несущественных ограничениях на сроки доставки грузов и небольших отличиях в значениях элементов матриц C и A объемы вычислений увеличиваются. Здесь алгоритмы метода ветвей и границ, как правило, являются более эффективными, так как происходит интенсивный отсев подмножеств маршрутов, не удовлетворяющих всей системе ограничений. При этом существенно сокращается число вершин и ветвей в дереве решений задачи и, следовательно, объем вычислений. Могут быть использованы приближенные методы решения задачи, использующие приближенные правила отсева неэффективных частичных планов. Кроме того, некоторый определенный на первых итерациях допустимый и эффективный маршрут может быть доведен до конца, не обращая внимание, что существуют маршруты, включающие меньшее число пунктов с лучшим значением критерия эффективности.

Таблица 6

Объемы грузов, которые необходимо доставить или забрать в различных пунктах

Объемы грузов (в тоннах), поставляемых и забираемых из пунктов						
0	1	2	3	4	5	6
8	-3	-6	5	-12	3	5

Таблица 7

Граничные времена обслуживания пунктов

	Граничные времена обслуживания пунктов						
	0	1	2	3	4	5	6
h_i^1	0	40	20	50	0	10	60
h_i^2	300	85	70	250	150	60	135

Таблица 8

Результаты решения иллюстративного примера 2

№ пунктов $i = l^s$	Параметры частичных маршрутов \tilde{U}^s				
	s	$\theta(\tilde{U}^s)$	q_i^s	G^s	$f^s = f(\tilde{U}^s)$
0	0	0	0	8	0
2	2	20	0	2	22
5	9	45	0	5	67
3	21	69	0	10	99
1	45	79	0	7	113
4	66	95	-5	0	136
6	72	117	0	5	166
4	77	139	0	0	196
0	81	156	0	0	220

Заключение

Рассмотрены задачи построения оптимальных маршрутов движения грузовых транспортных средств (ТС) в условиях наличия ограничений на сроки доставки и загрузки груза и на грузоподъемность ТС. В качестве критериев оптимальности рассмотрены суммарные затраты времени или в стоимостном выражении на выполнение графика доставки грузов.

Исследованы свойства допустимых и оптимальных маршрутов, на основе которых сформулированы правила отсева недопустимых и неоптимальных маршрутов уже на ранних этапах решения задачи, а также определены оценки нижней границы оп-

тимального решения для любого из строящихся в процессе решения маршрута.

На основе установленных свойств допустимых и оптимальных маршрутов предложены алгоритмы решения задачи модифицированными методами динамического программирования и последовательного анализа вариантов, которые иллюстрированы числовыми примерами.

Приведенные вычислительные эксперименты показали, что наличие жесткой системы ограничений на времена обслуживания пунктов зачастую позволяет существенно сократить число конкурирующих альтернативных маршрутов и уже на ранних этапах решения исключить недопустимые и неоптимальные варианты, а также установить несовместность сформулированной системы ограничений.

В отличие от известных методов "ветвей и границ", применяемых для решения широкого класса задач, в предлагаемых алгоритмах для висячих вершин дерева проводится также отсев неперспективных продолжений на основе сформулированных правил доминирования. Это позволяет осуществить отсев некоторого числа вершин дерева, хотя нижняя граница функции цели их лучше, чем у развиваемого подмножества вариантов, что сокращает объем вычислений.

Оригинальность предлагаемого метода динамического программирования заключается в сформулированных правилах доминирования и отсева, а также в том, что на каждом шаге развиваются не все варианты, а только тот вариант, значение функции цели которого минимально среди всех подлежащих развитию частичных планов. Это также существенно сокращает объем вычислений.

Список литературы

1. **Dantzig G. B., Ramser R. H.** The Truck Dispatching Problem // Management Science. 1959. N. 6. P. 80–91.
2. **Зак Ю. А.** Обобщенная задача коммивояжера и ее прикладные аспекты // Автоматика и телемеханика. 1976. № 10. С. 120–132.
3. **Зак Ю. А.** Прикладные задачи теории расписаний и маршрутизации перевозок. М.: URSS, Libroком, 2012. 393 с.
4. **Бронштейн Е. М., Заико Т. А.** Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 133–147.
5. **Vehicle Routing Problem.** URL: <http://neo.lcc.uma.es/vrp/vehicle-routing-problem>. Solution Methods for VRP. URL: <http://neo.lcc.uma.es/vrp/solution-methods/>.
6. **Бронштейн Е. М., Давлетбаев А.** Нестационарная задача управления маршрутом транспортного средства // Проблемы управления. 2014. № 3. С. 23–28.
7. **Malandraky C., Daskin M. S.** Time Dependent Vehicle Routing Problems Formulations, Properties and Heuristic Algorithms // Transportation Science. 1992. Vol. 26. P. 185–200.
8. **Crevier B., Cordeau J.-F., Laporte G.** The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes // European Journal of Operational Research. 2007. Vol. 176. P. 756–773.
9. **Stegers E.** A Solution Method for Vehicle Routing problems with Time-Dependent Travel Times. Delft: Delft University of Technology, 2009. 83 p.
10. **Ralphs T. K., Kopman L., Pulleyblank W. R., Trotter L. E.** On the Capacitated Vehicle Routing Problem // Math. Program. Ser. B. 2003. Vol. 94. P. 343–359.

Таблица П.1.1

Приведенная матрица расстояний между пунктами (запрещены связи (0 → 1) (0 → 2))

№ пунктов	Расстояния (стоимости проезда) между пунктами					
	0	1	2	3	4	5
0	∞	∞	∞	0	∞	6
1	0	∞	2	7	3	0
2	0	3	∞	4	0	0
3	0	5	7	∞	9	0
4	3	0	2	10	∞	5
5	7	2	0	0	7	∞

Таблица П.1.2

Приведенная матрица расстояний между пунктами (установлена связь (0 → 3))

№ пунктов	Расстояния (стоимости проезда) между пунктами				
	0	1	2	4	5
1	0	∞	2	3	0
2	0	3	∞	0	0
3	∞	5	7	9	0
4	3	0	2	∞	5
5	7	2	0	7	∞

Таблица П.1.3

Приведенная матрица расстояний между пунктами (установлены связи (0 → 3) и (3 → 5))

№ пунктов	Матрица расстояний между пунктами			
	0	1	2	4
1	0	∞	2	3
2	0	3	∞	0
4	3	0	2	∞
5	∞	2	0	7

Таблица П.1.4

Приведенная матрица расстояний между пунктами (установлены связи (0 → 3), (3 → 5) и (5 → 2))

№ пунктов	Матрица расстояний между пунктами		
	0	1	4
1	0	∞	3
2	∞	∞	0
4	3	0	∞

Таблица П.1.5

Приведенная матрица расстояний между пунктами (установлены связи (0 → 3), (3 → 5), (5 → 2) и (2 → 4))

№ пунктов	Матрица расстояний между пунктами	
	0	1
1	0	∞
4	∞	0

Процесс решения иллюстративного примера 2

№	\tilde{U}^s	l^s	$\theta(\tilde{U}^s)$	$\hat{J}^{s,-}$	Объемы грузов в пунктах $g_i(\tilde{U}^s)$						G^s	$f(\tilde{U}^s)$	$\psi(\tilde{U}^s)$	
					0	1	2	3	4	5				6
0	0	0	0	\tilde{I}	0	-3	-6	5	-12	3	5	8	0	1
1	(0,1)	1	40	$(\tilde{I}/1)$	0	0	-6	5	-12	3	5	5	47	2
2	(0,2)	2	20	\tilde{I}	0	-3	0	5	-12	3	5	2	32	1
3	(0,3)	3	50	$(\tilde{I}/3)$	0	-3	-6	2	-12	3	11	3	50	2
4	(0,4)	4	17	\tilde{I}	0	-3	-6	5	-4	3	5	0	24	1
5	(0,5)	5	27	$(\tilde{I}/5)$	0	-3	-6	5	-12	0	5	11	38	1
6	(0,6)	6	60	$(\tilde{I}/6)$	0	-3	-6	5	-12	3	2	11	60	2
7	(0,2,1)	1	50	$(\tilde{I}/1)$	0	-1	0	5	-12	3	5	0	50	2
8	(0,2,3)	3	52	$(\tilde{I}/3)$	0	-3	0	0	-12	3	5	7	78	2
9	(0,2,5)	5	45	$(\tilde{I}/5)$	0	-3	0	5	-12	0	5	5	67	1
10	(0,2,6)	6	36	$(\tilde{I}/1)$	0	-3	0	5	-12	3	0	7	55	1
10	(0,4,3)	3	37	$(\tilde{I}/3)$	0	-3	-6	0	-4	3	5	5	51	2
10	(0,4,5)	5	35	$(\tilde{I}/5)$	0	-3	-6	5	-4	0	5	3	49	1
11	(0,4,6)	6	60	$(\tilde{I}/6)$	0	-3	-6	5	-9	3	0	6	75	2
12	(0,5,1)	1	50	$(\tilde{I}/(1,5))$	0	0	-6	5	-12	3	5	8	56	1
13	(0,5,2)	2	52	$(\tilde{I}/(2,5))$	0	-3	0	5	-12	0	5	5	73	1
14	(0,5,4)	4	45	$(\tilde{I}/5)$	0	-3	-6	5	-1	0	5	0	63	1
16	(0,5,6)	6	46	$(\tilde{I}/(5,6))$	0	-3	-6	5	-12	0	0	0	62	2
17	(0,2,4,3)	3	58	(0,1,4,5,6)	0	-3	0	0	-10	3	5	5	84	2
18	(0,2,4,5)	5	56	(0,1,3,4,6)	0	-3	0	5	-10	0	5	3	82	2
19	(0,2,4,6)	6	60	(0,1,3,4,5)	0	-3	0	5	-10	0	0	5	87	2
20	(0,2,5,1)	1	68	(0,3,4,6)	0	0	0	5	-12	0	0	2	99	1
21	(0,2,5,3)	3	69	(0,3,4,6)	0	-3	0	0	-12	0	5	10	99	1
22	(0,2,5,4)	4	63	(0,1,3,4,6)	0	-3	0	5	-7	0	5	0	90	1
23	(0,2,5,6)	6	63	(0,1,3,4)	0	-3	0	5	-12	0	0	10	91	1
24	(0,2,6,1)	1	61	$(\tilde{I}/(1,6))$	0	0	0	5	-12	3	0	10	89	2
25	(0,2,6,3)	3	71	$(\tilde{I}/(3,6))$	0	-3	0	1	-12	3	0	11	103	2
26	(0,2,6,4)	4	58	$(\tilde{I}/(4,6))$	0	-3	0	5	-12	3	0	11	85	2
27	(0,2,6,5)	5	54	$(\tilde{I}/(5,6))$	0	-3	0	5	-12	0	0	10	79	1
28	(0,4,5,1)	1	56	(0,2,3,4,6)	0	0	-6	5	-4	0	5	0	70	2
29	(0,4,5,2)	2	70	(0,1,3,4,6)	0	-3	0	5	-4	0	5	9	91	2
30	(0,4,5,3)	3	59	(0,1,2,4,6)	0	-3	-6	0	-4	0	5	8	88	2
31	(0,4,5,4)	4	53	0,1,2,3,4,6	0	-3	-6	5	-1	0	5	0	81	2
32	(0,4,5,6)	6	53	0,1,2,3,4,6	0	-3	-6	5	-4	0	0	8	80	2
33	(0,4,6,1)	1	61	0,2,3,4,5	0	0	-6	5	-4	3	0	8	88	2
34	(0,4,6,2)	2	55	0,1,2,3,4,5	0	-3	-1	5	-4	3	0	0	87	2
35	(0,4,6,3)	3	74	0,1,2,4,5	0	-3	-6	0	-4	3	0	10	102	2
36	(0,4,6,4)	4	61	0,1,2,3,4,5	0	-3	-6	5	0	3	0	1	84	2
37	(0,4,6,5)	5	57	0,1,2,3,4	0	-3	-6	5	-4	0	0	8	78	2
38	(0,6,2,1)	1	58	0,3,4,5,6	0	0	0	5	-12	3	2	8	88	2
39	(0,6,2,3)	3	60	0,1,4,5,6	0	-3	0	0	-12	3	2	10	86	2
40	(0,6,2,4)	4	46	0,1,4,5,6	0	-3	0	5	-7	3	2	0	66	2
41	(0,6,2,5)	5	53	0,1,3,4,6	0	-3	0	5	-12	0	2	8	76	1
42	(0,6,2,6)	6	44	0,1,3,4,5	0	-3	0	5	-12	3	0	7	64	2
43	(0,25,1,3)	3	78	(0,4,6)	0	0	0	0	-12	0	5	7	113	1
44	(0,2,5,1,4)	4	84	(0,3,4,6)	0	0	0	5	-12	0	5	0	122	1
45	(0,2,5,3,1)	1	79	(0,4,6)	0	0	0	5	-12	0	5	7	113	1
46	(0,2,5,3,4)	4	89	(0,1,4,6)	0	-3	0	0	-2	0	3	0	126	2
47	(0,2,5,3,6)	6	104	(0,1,4,6)	0	-3	0	0	-12	0	4	11	147	2
48	(0,2,5,4,3)	3	83	(0,1,4,6)	0	-3	0	0	-7	0	5	5	117	2
49	(0,2,5,4,6)	6	85	(0,1,3,4)	0	-3	0	5	-7	0	0	5	120	2
50	(0,2,5,6,1)	1	88	(0,3,4)	0	0	0	5	-12	0	0	7	125	1
51	(0,2,5,6,3)	3	98	(0,1,3,4)	0	-3	0	4	-12	0	0	11	139	2
52	(0,2,5,6,4)	4	83	(0,1,3,4)	0	-3	0	5	-2	0	0	0	118	2
53	(0,2,6,5,1)	1	77	(0,3,4)	0	0	0	5	-12	0	0	7	111	1
54	(0,2,6,5,3)	3	78	(0,1,3,4)	0	-3	0	4	-12	0	0	11	111	2
55	(0,2,6,5,4)	4	72	(0,1,3,4)	0	-3	0	5	-2	0	0	0	104	2
56	(0,4,5,6,1)	1	78	(0,2,3,4)	0	0	-6	5	-4	0	0	5	114	2
57	(0,4,5,6,2)	2	68	(0,1,3,4)	0	-3	0	5	-4	0	0	2	103	2
58	(0,4,5,6,3)	3	88	(0,1,2,3,4)	0	-3	-6	2	-4	0	0	11	128	2

№	\tilde{U}^s	l^s	$\theta(\tilde{U}^s)$	$\hat{j}^{s,-}$	Объемы грузов в пунктах $g_k(\tilde{U}^s)$						G^s	$f(\tilde{U}^s)$	$\psi(\tilde{U}^s)$	
					0	1	2	3	4	5				6
59	(0,4,5,6,4)	4	75	(0,1,2,3)	0	-3	-6	5	0	0	0	4	110	2
60	(0,25,1,3,4)	4	98	(0,4,6)	0	0	0	0	-5	0	5	0	140	1
61	(0,25,1,3,6)	6	113	(0,4,6)	0	0	0	0	-12	0	1	11	161	3
62	(0,25,1,4,3)	3	104	(0,4,6)	0	0	0	0	-10	0	5	5	149	3
63	(0,25,1,4,6)	6	106	(0,3,4)	0	0	0	5	-10	0	0	5	143	1
64	(0,25,1,6,3)	3	127	(0,3,4)	0	0	0	0	-10	0	5	11	181	3
65	(0,25,1,6,4)	4	115	(0,4,6)	0	0	0	5	-5	0	0	0	173	3
66	(0,25,3,1,4)	4	95	(0,4,6)	0	0	0	0	-5	0	5	0	136	1
67	(0,25,3,1,6)	6	104	(0,4,6)	0	0	0	0	-12	0	1	11	147	1
68	(0,2,5,6,1,3)	3	98	(0,3,4)	0	0	0	1	-12	0	0	11	139	1
69	(0,2,5,6,1,4)	4	104	(0,3,4)	0	0	0	5	-5	0	0	0	150	1
70	(0,2,5,6,1,3,6)	6	120	(0,4)	0	0	0	0	-5	0	0	5	170	3
71	(0,2,5,1,4,6,3)	3	128	(0,4)	0	0	0	0	-10	0	0	10	173	3
72	(0,2,5,3,1,4,6)	6	117	(0,4)	0	0	0	0	-5	0	0	5	166	1
73	(0,2,5,3,1,6,4)	4	126	(0,3,4)	0	0	0	0	-1	0	1	0	177	1
74	(0,2,5,6,1,3,4)	4	118	(0,3,4)	0	0	0	1	-1	0	0	0	166	1
75	(0,25,6,1,4,3)	3	124	(0,4)	0	0	0	0	-5	0	0	5	177	1
76	(0,2,5,1,4,6,3,4)	4	148	(0)	0	0	0	0	0	0	0	0	200	3
77	(0,2,5,3,1,4,6,4)	4	139	(0)	0	0	0	0	0	0	0	0	196	1
78	(0,2,5,3,1,6,4,6)	6	148	(0,4)	0	0	0	0	-1	0	0	1	207	3
79	(0,25,6,1,3,4,3)	3	138	(0,4)	0	0	0	0	-1	0	0	1	193	1
80	(0,25,6,1,4,3,4)	4	144	(0,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	204	3
81	(0,2,5,3,1,4,6,4,0)	0	156	(0)	0	0	0	0	0	0	0	0	220	1
81	(0,2,5,3,1,6,4,6,4)	4	170	(0)	0	0	0	0	0	0	0	0	247	3
82	(0,25,6,1,3,4,3,4)	4	156	(0)	0	0	0	0	0	0	0	0	220	3

Yu. A. Zack, Dokt-Ing. Deutschlang, Aahen, Deutschland, e-mail: yuri_zack@hotmail.com

A Problem of Constructing Admissible and Optimal Routes of Delivery

The problem of creation of optimum routes of the movement of cargo vehicles, important for practical applications, in the conditions of restrictions on terms of service of points and on their loading capacity is considered. As criteria of an optimality total costs of implementation of the schedule of cargo delivery are considered. On the basis of the established properties of admissible and optimum solutions of a task rules of elimination of inadmissible and nonoptimal routes are formulated. Algorithms of the solution of a task are developed by the modified methods of dynamic programming and branches and borders which are illustrated with a numerical example. Results of computing experiments are given.

Keywords: cargo vehicles, optimum routes of the movement, restrictions on the terms of service, loading capacity and volumes of freights, consecutive algorithms of optimization, sequential optimization algorithms, the modified branch and bound method

References

1. Dantzig G. B., Ramser R. H. The Truck Dispatching Problem. *Management Science*. 1959. N. 6. P. 80–91.
2. Zack Yu. A. Obochennaja zadacha kommivojazhera i jeje prikladnije aspekti. *Avtomatika i telemekhanika*. 1976. N. 10. P. 120–132.
3. Zack Yu. A. Prikladnije zadachi teorii raspisanij i marchrutizacii perevosok. M.: URSS, Librokom, 2012. 393 p.
4. Bronshtein E. M., Zaiko T. A. Determinirovannije optimisazionnije zadachi transportnoi logistiki. *Avtomatika i telemekhanika*. 2010. N. 10. P. 133–147.
5. Vehicle Routing Problem. URL: <http://neo.lcc.uma.es/vrp/vehicle-routing-problem>. Solution Methods for VRP. URL: <http://neo.lcc.uma.es/vrp/solution-methods/>.
6. Bronshtein E. M., Davletov A. Nestazionarnaja zadacha upravlenija marchrutom transportnogo sredstva. *Problemi upravlenija*. 2014. N. 3. P. 23–28.
7. Malandraky C., Daskin M. S. Time Dependent Vehicle Routing Problems Formulations, Properties and Heuristic Algorithms. *Transportation Science*. 1992. Vol. 26. P. 185–200.
8. Crevier B., Cordeau J.-F., Laporte G. The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 176. P. 756–773.
9. Stegers E. A Solution Method for Vehicle Routing problems with Time-Dependent Travel Times. Delft: Delft University of Technology, 2009. 83 p.
10. Ralphs T. K., Kopman L., Pulleyblank W. R., Trotter L. E. On the Capacitated Vehicle Routing Problem. *Math. Program. Ser. B*. 2003. Vol. 94. P. 343–359.