

# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ DIGITAL PROCESSING OF SIGNALS AND IMAGES

УДК 004.032.24

**В. Г. Гетманов**<sup>1</sup>, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., e-mail: v.getmanov@gcras.ru,

**Г. И. Борзунов**<sup>2, 3</sup>, д-р техн. наук, проф.,

<sup>1</sup>ФГБУН Геофизический центр РАН, г. Москва

<sup>2</sup>ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", г. Москва

<sup>3</sup>ФГБОУ ВПО Московский государственный университет дизайна и технологий, г. Москва

## Алгоритм параллельных вычислений для задачи спектрально-временного анализа на базисных полигармонических функциях

*Предложен алгоритм параллельных вычислений для задачи спектрально-временного анализа (СВАН) на базисных полигармонических функциях (БПФН). Рассмотрены алгоритм оценивания параметров БПФН, метод задания векторов поисковых частот и последовательный алгоритм СВАН. Оценены временная и емкостная сложности последовательного алгоритма СВАН. Сформирована структура алгоритма параллельных вычислений для СВАН. Приведены результаты вычислительного эксперимента с модельной реализацией параллельного алгоритма для СВАН сигнала с амплитудной и частотной модуляцией.*

**Ключевые слова:** алгоритм параллельных вычислений, спектрально-временной анализ, базисные полигармонические функции, аппроксимация

### Введение

Алгоритмы параллельных вычислений используются в задачах, которые требуют для своего решения больших затрат машинного времени и объемов памяти. Как правило, чтобы применение параллельных вычислений оказалось возможным, исходные задачи должны быть определенным образом преобразованы. Рассматриваемая задача спектрально-временного анализа на базисных полигармонических функциях решается на основе предложенного в работе алгоритма параллельных вычислений.

Реализация традиционного спектрального анализа для наблюдений на локальных (малых) временных интервалах может основываться на их аппроксимации базисными полигармоническими функциями (БПФН). Решения задач спектрально-временного анализа (СВАН) для нестационарных сигналов, наблюдаемых на исходных больших временных интервалах, в ряде случаев можно получить с помощью решений последовательностей задач традиционного спектрального анализа на системах локальных временных интервалов, выделенных на исходных интервалах.

Предлагаемый в данной работе СВАН на БПФН с оптимизацией их амплитудных и частотных параметров [1–3] имеет ряд преимуществ, которые отсутствуют у вариантов обычных СВАН. Так, для

предлагаемого СВАН по сравнению со СВАН, основанным на скользящих дискретных преобразованиях Фурье (ДПФ) [4, 5], достигается улучшение разрешающей способности по частоте благодаря оптимизации частотных параметров для БПФН (для ДПФ оптимизация частотных параметров отсутствует). Кроме того, для предлагаемого СВАН отсутствуют ложные спектрально-временные оценки, тогда как для СВАН, в котором применяются частотно-временные распределения, например Вигнера [6, 7], имеет место в некоторых случаях их появление. По сравнению со СВАН, в котором используется алгоритм Прони [8], предлагаемый СВАН не накладывает ограничений, связанных с числом наблюдений и числом частотных составляющих в БПФН, что устраняет определенные трудности, возникающие при интерпретации спектрально-временных оценок. Отметим, что БПФН без оптимизации [9–11] или с частичной оптимизацией частотных параметров [12, 13] применяются достаточно широко для различных задач типа СВАН. Ввиду изложенного выше исследование возможностей СВАН с использованием указанных БПФН в задачах анализа многочастотных нестационарных сигналов является актуальным.

Данную статью можно подразделить на две части. Первая часть посвящена собственно предложенному

СВАН — разработке алгоритма оценивания параметров БПФН, разработке метода задания векторов поисковых частот и формированию последовательного алгоритма СВАН. Вторая часть посвящена разработке алгоритма параллельных вычислений для предложенного СВАН — оцениванию временной и емкостной сложности последовательного алгоритма СВАН, определению структуры алгоритма параллельных вычислений для СВАН и реализации вычислительного эксперимента с модельным параллельным алгоритмом СВАН.

### 1. Алгоритм оценивания параметров базисных полигармонических функций

Рассмотрим задачу оценивания параметров базисных полигармонических функций для локального интервала с точками  $i = 0, 1, \dots, I_0 - 1$ . Примем, что исходный сигнал является многочастотным и нестационарным. Будем полагать, что БПФН на локальном интервале для такого сигнала может быть представлена в виде модели

$$y_M(c, Ti) = \sum_{l=1}^L (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti), \quad (1)$$

где вектор  $c^T = (a^T, b^T, \omega^T) = (a_1, a_2, \dots, a_L, b_1, b_2, \dots, b_L, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L)$  имеет размерность  $(3L, 1)$  и состоит из векторов амплитудных и частотных параметров;  $Ti$  — текущее время. На линейные амплитудные параметры БПФН ограничения не накладываются:  $-\infty \leq a_l \leq \infty, -\infty \leq b_l \leq \infty, l = 1, 2, \dots, L$ . Примем, что исходный сигнал реализован в ограниченной полосе частот с  $\omega_{\min}, \omega_{\max}$ ; для векторов нелинейных частотных параметров БПФН с учетом их упорядочения, допустимое множество значений параметров выглядит следующим образом:

$$\bar{\Omega}_0^L = \{(\omega_1, \dots, \omega_L) : \omega_{\min} \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_L \leq \omega_{\max}\}, \quad \omega \in \bar{\Omega}_0^L. \quad (2)$$

Задача оценивания параметров базисных полигармонических функций связана с аппроксимацией наблюдений  $Y(Ti)$  исходного сигнала модельной функцией  $y_M(c, Ti)$  (1) и нахождением оптимальных амплитудных и частотных параметров. С этой целью записывается функционал

$$W(a, b, \omega, Y) = \sum_{i=0}^{I_0-1} (Y(Ti) - y_M(c, Ti))^2 = \sum_{i=0}^{I_0-1} \left( Y(Ti) - \sum_{l=1}^L (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti) \right)^2. \quad (3)$$

Вычисление оптимальных параметров БПФН проводится с помощью решения задачи минимизации введенного функционала:

$$(a^\circ, b^\circ, \omega^\circ) = \arg \left\{ \min_{a, b, \omega \in \bar{\Omega}_0^L} W(a, b, \omega, Y) \right\}. \quad (4)$$

Алгоритм оценивания параметров БПФН на локальном интервале базируется на двухэтапной аппроксимации [1–3]. БПФН является линейной функцией по части параметров и представляется в следующем виде:

$$\sum_{l=1}^L (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti) = \beta^T \varphi(\omega, Ti), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где вектор линейных параметров  $\beta^T = (a_1, \dots, a_L, b_1, \dots, b_L)$  имеет размерность  $(2L, 1)$ ,  $\varphi(\omega, Ti)$  — векторная базисная полигармоническая функция,

$$\varphi(\omega, Ti)^T = (\cos(\omega_1 Ti), \dots, \cos(\omega_L Ti), \sin(\omega_1 Ti), \dots, \sin(\omega_L Ti)). \quad (5)$$

Пусть вектор наблюдений  $Y$  имеет размерность  $(N, 1)$ . С использованием  $\varphi(\omega, Ti)$  формируется матрица плана сигнала  $X(\omega)$  размерности  $(N, 2L)$ :

$$Y^T = (y(T \cdot 0), y(T \cdot 1), \dots, y(T(N - 1))), \quad X(\omega) = \begin{pmatrix} \varphi(\omega, T \cdot 0) \\ \varphi(\omega, T \cdot 1) \\ \dots \\ \varphi(\omega, T(N - 1)) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Применяя (6), функционал (3) можно записать в векторно-матричном виде:

$$W(\beta, \omega, Y) = (Y - X(\omega)\beta)^T (Y - X(\omega)\beta).$$

На первом этапе аппроксимации для  $W(\beta, \omega, Y)$  фиксируются нелинейные частотные параметры  $\omega = \text{const}$  с учетом, что  $\omega \in \bar{\Omega}_0^L$ , и определяются частично оптимальные линейные параметры  $\beta^\circ(\omega, Y)$ :

$$\beta^\circ(\omega, Y) = \arg \left\{ \min_{\beta, \omega = \text{const}} W(\beta, \omega, Y) \right\},$$

которые вычисляются на основе решения системы линейных уравнений

$$D(\omega) = X^T(\omega)X(\omega), \quad b(\omega, Y) = X^T(\omega)Y, \quad \beta^\circ(\omega, Y) = D(\omega)^{-1}b(\omega, Y), \quad (7)$$

где квадратная матрица  $D(\omega)$  имеет размерность  $(2L, 2L)$ , а вектор коэффициентов Фурье  $b(\omega, Y)$  — размерность  $(2L, 1)$ . На основе  $\beta^\circ(\omega, Y)$  формируется функционал частичной остаточной суммы, зависящий только от  $\omega$ ,

$$W_0(\omega, Y) = W(\beta^\circ(\omega), \omega, Y) = -\beta^{\circ T}(\omega, Y)b(\omega, Y). \quad (8)$$

На втором этапе аппроксимации для  $W_0(\omega, Y)$  осуществляется минимизация по  $\omega \in \bar{\Omega}_0^L$ . Для БПФН определяются оценки частотных параметров  $\omega^\circ$  и после подстановки  $\omega^\circ$  в последнее уравнение системы уравнений (7), вычисляются оценки ампли-

тудных параметров  $\beta^\circ$  для локального интервала с точками  $i = 0, 1, \dots, I_0 - 1$ :

$$\omega^\circ = \omega^\circ(Y) = \arg\{\min_{\omega \in \Omega_0} W_0(\omega, Y)\},$$

$$\beta^\circ = \beta^\circ(\omega^\circ, Y) = D(\omega^\circ)^{-1}b(\omega^\circ, Y). \quad (9)$$

Алгоритм оценивания параметров БПФН реализуется на основе формул (5, 6), проведении вычислений по формулам (7, 8) и минимизации (9) с учетом упорядоченности (2).

## 2. Метод задания векторов поисковых частот и эффективность частотного поиска

Ввиду того, что функционал  $W_0(\omega, Y)$  зависит от многих переменных и является многоэкстремальным [1, 2], его минимизацию целесообразно проводить на основе поисковой процедуры нулевого порядка. Для указанной минимизации и получения оценок амплитудных параметров  $\beta^\circ$  по формуле (9) реализуется конструктивное перечисление векторов поисковых частот. Пусть значения координат векторов поисковых частот выбираются на сетке дискретных значений  $\omega_k$  в диапазоне  $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ :

$$\Delta\omega = (\omega_{\max} - \omega_{\min}) / (k_f - 1),$$

$$\omega_k = \omega_{\min} + \Delta\omega(k - 1), \quad k = 1, \dots, k_f,$$

где  $k_f$  — число дискретных частот на сетке;  $\Delta\omega$  — шаг дискретности. Частоты  $\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_L}$  назначаются из набора дискретных значений  $\omega_k, k = 1, \dots, k_f$ .

Очевидно, индексы  $k_1, k_2, \dots, k_L$  для этих частот с учетом неравенств (2) должны удовлетворять системе из  $L$  неравенств

$$1 \leq k_1 \leq k_f - L + 1, \quad k_1 + 1 \leq k_2 \leq k_f - L + 2, \dots,$$

$$k_{L-2} + 1 \leq k_{L-1} \leq k_f - 1, \quad k_{L-1} + 1 \leq k_L \leq k_f.$$

Для  $L = 2, 3, 4$  системы неравенств для индексов представляются следующим образом: для  $L = 2$  —  $1 \leq k_1 \leq k_f - 1, k_1 + 1 \leq k_2 \leq k_f$ ; для  $L = 3$  —  $1 \leq k_1 \leq k_f - 2, k_1 + 1 \leq k_2 \leq k_f - 1, k_2 + 1 \leq k_3 \leq k_f$ ; для  $L = 4$  —  $1 \leq k_1 \leq k_f - 3, k_1 + 1 \leq k_2 \leq k_f - 2, k_2 + 1 \leq k_3 \leq$

$\leq k_f - 1, k_3 + 1 \leq k_4 \leq k_f$ . Введенные индексы удобно объединить в векторы:  $k^T = (k_1, k_2, \dots, k_L)$ .

Легко заметить, что в общем случае задача конструктивного перечисления векторов индексов решается на основе известных комбинаторных алгоритмов [14, 15]. Для случая малых значений  $k_f, L$  последовательности векторов индексов  $k^{sT} = (k_1^s, k_2^s, \dots, k_L^s), s = 1, \dots, s_f$ , достаточно просто могут быть сформированы и пронумерованы на основе вложенных циклов. В таблице индексов для  $L = 3, k_f = 7$  приведен пример сформированной по указанной схеме последовательности векторов индексов  $k^{sT} = (k_1^s, k_2^s, k_3^s)$ .

Для данного примера число векторов индексов составляет  $s_f = 35$ .

Метод задания поисковых частот основывается на том, что каждому сформированному вектору индексов  $k^s$  может быть поставлен в соответствие вектор поисковых частот  $\omega^s$ , где  $s$  — номер вектора.

Координаты  $\omega_{k_1}^s, \omega_{k_2}^s, \dots, \omega_{k_L}^s$  для этого вектора частот  $\omega^s$  можно вычислить по следующим формулам:

$$\omega^s = (\omega_{k_1}^s, \omega_{k_2}^s, \dots, \omega_{k_L}^s), \quad \omega_{k_l}^s = \omega_{\min} + \Delta\omega(k_l^s - 1),$$

$$l = 1, 2, \dots, L, \quad s = 1, \dots, s_f. \quad (10)$$

Отыскание оптимальных частотных и амплитудных параметров БПФН на локальном интервале с  $Y$  сводится к последовательным вычислениям:  $\omega^s$  — по формуле (10);  $\varphi(\omega^s, Ti)$  — по формуле (5);  $X(\omega^s)$  — по формуле (6);  $D(\omega^s), b(\omega^s, Y), \beta^\circ(\omega^s, Y)$  — по формуле (7) и  $W_0(\omega^s, Y)$  — по формуле (8),  $s = 1, \dots, s_f$ , и организации перебора

$$s^\circ = \arg\{\min_{s=1, \dots, s_f} W_0(\omega^s, Y)\}, \quad \omega^\circ = \omega^{s^\circ}, \quad \beta^\circ = \beta^\circ(\omega^{s^\circ}). \quad (11)$$

Вычисления по указанным формулам составляют основу последовательного алгоритма, на котором основывается предлагаемый СВАН.

Таблица индексов

$s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$k_1^s$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
$k_2^s$	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6	3	3	3
$k_3^s$	3	4	5	6	7	4	5	6	7	5	6	7	6	7	7	4	5	6
$s$	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
$k_1^s$	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	5	
$k_2^s$	3	4	4	4	5	5	6	4	4	4	5	5	6	5	5	6	6	
$k_3^s$	7	5	6	7	6	7	7	5	6	7	6	7	7	6	7	7	7	

Введение упорядоченности для координат векторов  $\omega$  из  $\bar{\Omega}_0^L$  по (2) существенно снижает количество поисковых вычислений по сравнению с количеством поисковых вычислений без упорядоченности для  $\Omega_0^L = \{(\omega_1, \dots, \omega_L): \omega_{\min} \leq \omega_l \leq \omega_{\max}, l = 1, \dots, L\}$ . В работе [2] приведены вычисления размеров множеств  $\bar{\Omega}_0^L$  и  $\Omega_0^L$  в виде интегралов  $V(\Omega_0^L)$ ,  $V(\bar{\Omega}_0^L)$ :

$$V(\Omega_0^L) = \int_{\omega \in \Omega_0^L} d\omega_1, \dots, d\omega_L,$$

$$V(\bar{\Omega}_0^L) = \int_{\omega \in \bar{\Omega}_0^L} d\omega_1, \dots, d\omega_L.$$

Коэффициент  $\varepsilon(L)$  оценивает относительное уменьшение размеров

$$\varepsilon(L) = V(\bar{\Omega}_0^L)/V(\Omega_0^L).$$

Для  $L = 1, 2, 3, 4$  данный коэффициент принимает значения  $\varepsilon(1) = 1$ ,  $\varepsilon(2) = 0,5$ ,  $\varepsilon(3) = 0,166$ ,  $\varepsilon(4) = 0,002$ , которые свидетельствуют о существенном снижении временных затрат на частотный поиск вследствие учета упорядоченности.

Необходимо отметить, что обеспечение эффективности частотной поисковой минимизации функционала  $W_0(\omega, Y)$  из выражения (9) сопряжено с двумя взаимосвязанными проблемами.

Первая проблема эффективности состоит в обеспечении единственности частотного минимума  $\omega^\circ$  для  $W_0(\omega, Y)$ . Рассмотрим достаточно реалистичное предположение, когда исходный многочастотный нестационарный сигнал представляет собой сумму составляющих узкополосных сигналов и его наблюдения на локальном интервале могут быть приближенно представлены в виде суммы синусоидальных сигналов с аддитивным шумом:

$$y(Ti) = \sum_{l=1}^L (a_{0l} \cos \omega_{0l} Ti + b_{0l} \sin \omega_{0l} Ti) + w(Ti),$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (12)$$

В работах [1, 2, 16] для случая  $L = 1, 2$  и с принятым во внимание указанным предположением, показано, что функционал  $W_0(\omega, Y)$  с наблюдениями (12) и ограниченной дисперсией шума  $\sigma^2$  и локального интервала, на котором умещаются несколько единиц-десятков периодов составляющего узкополосного сигнала с минимальной средней частотой, с учетом упорядоченности частот имеет единственный глубокий глобальный минимум, окруженный системой не очень глубоких локальных минимумов (и максимумов). Подобное заключение, основываясь на работах [1, 2, 16), может быть справедливым и для  $L = 3, 4$ . Вполне очевидно, что при сформулированных предположениях имеет место единствен-

ность минимума  $W_0(\omega, Y)$ , что подтверждается вычислительными экспериментами.

Вторая проблема эффективности состоит в учете погрешностей оценивания частотных и амплитудных параметров моделей БПФН [1, 2, 3, 17]. Примем шаг частотного поиска малым, чтобы не учитывать погрешности от этого фактора. Рассматриваемые погрешности зависят от параметров  $N, T, \sigma^2$ . Поскольку БПФН представляет собой нелинейную функцию и функционал  $W_0(\omega, Y)$  является многоэкстремальным, то рассматриваемые погрешности ведут себя необычным образом: при монотонном увеличении  $\sigma^2$  имеет место скачкообразное нарушение непрерывности функции погрешностей частоты и амплитуд вследствие перемены местами локальных и глобальных экстремумов [16]. Выяснение характера погрешностей оценок частоты и амплитуд будем рассматривать для малых  $\sigma^2$  в целях обеспечения корректной линеаризации функционала  $W_0(\omega, Y)$ . В работе [2] с использованием линеаризации были получены оценки математического ожидания погрешностей, которые оказались равными нулю (оценивание без смещений) и оценки дисперсий погрешностей, которые убывали при увеличении длины локальных интервалов.

### 3. Спектрально-временной анализ на основе базисных полигармонических функций

Традиционный спектральный анализ на основе оценок БПФН для сигнала  $Y(Ti)$  на локальном интервале с точками  $i = 0, 1, \dots, I_0 - 1$  состоит в вычислении одномерных массивов оценок оптимальных частот и амплитуд, полученных на основе формулы (9):

$$(f_1^\circ, f_2^\circ, \dots, f_L^\circ), f_l^\circ = \omega_l^\circ / 2\pi, (A_1^\circ, A_2^\circ, \dots, A_L^\circ),$$

$$A_l^\circ = (a_l^{\circ 2} + b_l^{\circ 2})^{1/2}, l = 1, 2, \dots, L.$$

Значениям частот  $\omega_k$  на сетке и индексам  $k$  могут быть поставлены в соответствие амплитуды  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, k_f$ , где  $A_k = (a_k^{\circ 2} + b_k^{\circ 2})^{1/2}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  и  $k = k_l^\circ$  — координаты оптимального вектора индексов, для остальных индексов  $k \neq k_l^\circ$  будем иметь  $A_k = 0$ .

Результатом традиционного спектрального анализа на локальном интервале является одномерный массив распределений амплитуд  $A_k$  по частоте, где индекс  $k$  определяет распределение по частотам  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, k_f$ .

СВАН на основе БПФН для исходного нестационарного многочастотного сигнала  $Y(Ti)$  на большом временном интервале с точками  $i = 0, 1, \dots, I_{f0} - 1$  реализуется на последовательности скользящих локальных интервалов, содержащих по  $I_0$  точек с граничными точками  $I_{1j}, I_{2j}$ ; эти интервалы рас-

положены внутри исходного интервала,  $j$  — номер скользящего локального интервала,  $j = 1, \dots, m$ . На каждом из скользящих локальных интервалов сигналу  $Y(T_i)$  ставится в соответствие оценка БПФН. Вычисляются двумерные массивы оптимальных амплитуд и частот, полученных на основе решений задач аппроксимации (4) или (9) для последовательности скользящих локальных интервалов

$$(f_{1j}^\circ, f_{2j}^\circ, \dots, f_{Lj}^\circ), f_{lj}^\circ = \omega_{lj}^\circ/2\pi; (A_{1j}^\circ, A_{2j}^\circ, \dots, A_{Lj}^\circ), A_{lj}^\circ = (a_{lj}^{\circ 2} + b_{lj}^{\circ 2})^{1/2}, l = 1, 2, \dots, L, j = 1, \dots, m.$$

Результатом СВАН на основе БПФН для исходного временного интервала будет двумерный массив распределений амплитуд  $A_{k,j}$ , где индекс  $k$  определяет распределение по частотам  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, k_f$ , индекс  $j$  определяет распределение по времени,  $j = 1, \dots, m$ .

#### 4. Оценки временной и емкостной сложности последовательного алгоритма СВАН

Эффективность последовательного алгоритма СВАН (5—8, 10, 11) определяется целым рядом параметров, из которых наиболее важными являются параметры временной и емкостной сложности.

Параметр временной сложности последовательного алгоритма, позволяющий оценить временные затраты, необходимые для получения результата, определяется величиной  $s_f$ , которая может быть вычислена, как число сочетаний из  $k_f$  элементов по  $L$ :  $s_f = C(k_f, L)$  и  $C(k_f, L) = k_f! / (L!(k_f - L)!)$ .

Примем время вычисления, определяемое каждым вектором  $\omega^s$ , за условную временную единицу (базовую операцию). Тогда временная сложность [18] последовательного алгоритма для перебора в (11) может быть принята равной  $T_{f1}(k_f, L) = k_f! / (L!(k_f - L)!)$ . Используя формулу Стирлинга и переходя к асимптотическим оценкам [19], после очевидных упрощений для  $k_f \gg L$ , получим оценку временной сложности в виде функции  $T_{f2}(k_f, L) = O((k_f/L)^L)$ , которая асимптотически ведет себя так же, как и

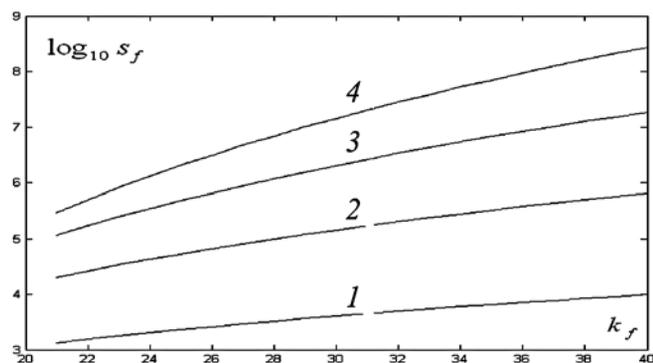


Рис. 1. Графики зависимостей числа частотных векторов  $\log_{10} s_f(k_f, L)$

$T_{f1}(k_f, L)$ . Таким образом, алгоритм, на котором основывается предлагаемый СВАН, имеет экспоненциальную временную сложность. На рис. 1 представлены графики зависимостей числа векторов поисковых частот  $s_f = C(k_f, L)$  в логарифмическом масштабе для параметров  $k_f = 21 \dots 40$ ; параметр  $L$  принимал следующие значения: кривая 1 —  $L = 3$ , кривая 2 —  $L = 5$ ; кривая 3 —  $L = 7$ ; кривая 4 —  $L = 9$ .

Приведенные на рис. 1 графики экспериментально подтверждают приведенные выше результаты анализа: последовательный алгоритм, на котором основывается предлагаемый СВАН, имеет экспоненциальную временную сложность.

Параметр емкостной сложности последовательного алгоритма (5—8, 10, 11), связанный с необходимым количеством данных, которые должны храниться в памяти, может быть приближенно представлен выражением  $V_f = 4(s_f L + s_f L^2) / 10^6$  (Мбайт), где первое слагаемое определяет объем памяти для массива векторов частот, второе слагаемое — объем памяти для квадратных матриц из первого уравнения системы (7). Видно, что предлагаемый последовательный алгоритм СВАН имеет экспоненциальную емкостную сложность.

Можно заключить, что для практического использования предлагаемого СВАН необходима разработка и программная реализация параллельного алгоритма.

#### 5. Структура алгоритма параллельных вычислений для СВАН

Для применения параллельных вычислений требуется, чтобы исходный вариант алгоритма СВАН был определенным образом преобразован.

Структура предлагаемого параллельного алгоритма аналогичная, с определенными допущениями, структуре из работы [20], предполагает наличие главного процесса, связанного посредством интернет-каналов с компьютерными кластерами, расположенными в различных географических точках. В компьютерном кластере реализуется функционирование набора процессов-исполнителей. Главный процесс обеспечивает управление работой параллельного алгоритма. В нем формируются задания для процессов-исполнителей в виде файлов с исполнительными модулями и входными данными. В свою очередь, процессы-исполнители передают результаты своей работы в виде файлов на главный процесс. Будем полагать, что суммарное число процессов-исполнителей составляет величину  $n_f$  и что процессы-исполнители имеют одинаковые производительности и объемы оперативной памяти.

Число процессов-исполнителей  $n_f$  зависит от объема памяти  $V_f$  и объема оперативной памяти для процесса-исполнителя  $V_{f0}$ . Используя значения  $V_f$  из разд. 4, можно сделать приближенную

оценку  $n_f$  для системы параллельных вычислений в зависимости от параметров  $k_f, L, V_{f0}$ :

$$n_f = \frac{V_f}{V_{f0}} = \frac{4(L + L^2)s(k_f L)/10^6}{V_{f0}}$$

Известно, что ускорение и эффективность параллельных алгоритмов в большой степени зависит от их балансировки, т. е. от того, насколько равномерно распределяется вычислительная нагрузка между процессами-исполнителями [21]. Балансировка разработанного параллельного алгоритма для СВАН основывается на разбиении последовательности номеров векторов поисковых частот  $s = 1, \dots, s_f$  на  $n_f$  равных по длине участков. Вводятся параметр  $ds_0 = \text{ent}(s_f/n_f)$  и граничные точки  $s_{1n}, s_{2n}$  для последовательности индексов  $s = 1, \dots, s_f$ , которые могут быть вычислены на основе следующих рекуррентных формул:

$$s_{11} = 1, s_{2n} = s_{1n} + ds_0 - 1, s_{1,n+1} = s_{2n} + 1, \\ n = 1, \dots, n_f - 1, s_{2,n_f} = s_f$$

Таким образом, объем вычислений на каждом процессоре пропорционален значению  $s_f/n_f$ , что свидетельствует о снижении вычислительной сложности.

Введенное разбиение последовательности номеров векторов индексов на равные участки корректно, поскольку:

- не увеличивает количество вычислений и объем памяти, которые требуются для реализации алгоритма СВАН;

- обеспечивает равномерную загрузку вычислительных узлов за счет разбиения последовательности индексов с номерами  $s = 1, \dots, s_f$  на равные участки индексов;

- обеспечивает масштабируемость при увеличении числа вычислительных узлов путем уменьшения длин участков индексов.

Структура алгоритма параллельных вычислений для СВАН основывается на двух шаговых вычислительных процедурах.

1. Выполнение прямых переборов для функционала  $W_0(\omega^s, Y)$  по векторам поисковых частот, которые могут быть сведены к переборам по целым индексам  $s_{1n} \leq s \leq s_{2n}$ . Процессы-исполнители обеспечивают решение задач оптимизации функционалов и нахождения последовательности значений оценок векторов параметров и функционалов  $\omega_n^\circ, \beta_n^\circ, W_{0n}, n = 1, \dots, n_f$ ,

$$s_n^\circ = \arg\left\{ \min_{s_{1n} \leq s \leq s_{2n}} W_0(\omega^s, Y) \right\}, \omega_n^\circ = \omega^{s_n^\circ},$$

$$\beta_n^\circ = \beta^\circ(\omega^{s_n^\circ}), W_{0n} = W_0(\omega^{s_n^\circ}, Y), n = 1, \dots, n_f.$$

2. Осуществление пересылки последовательностей значений оценок  $\omega_n^\circ, \beta_n^\circ, W_{0n}, n = 1, \dots, n_f$ . Главный процесс обеспечивает нахождение опти-

мальных оценок частотных и амплитудных параметров для БПФН

$$n^\circ = \arg\left\{ \min_{1 \leq n \leq n_f} W_{0n} \right\}, \omega^\circ = \omega_{n^\circ}^\circ, \beta^\circ = \beta_{n^\circ}^\circ.$$

## 6. Вычислительный эксперимент с модельным параллельным алгоритмом

Вычислительный эксперимент с модельной реализацией параллельного алгоритма СВАН был проведен на основе комплекса MATLAB. Рассматривался упрощенный пример, для которого были сформированы модельные наблюдения одночастотного зашумленного сигнала  $Y(Ti), i = 0, 1, \dots, I_{f0} - 1$ , с амплитудной и частотной модуляцией:

$$Y(Ti) = E(Ti)\cos(\varphi_1(Ti) + \varphi_2(Ti)) + w(Ti). \quad (13)$$

Амплитудные и фазовые (частотные) модуляционные функции были представлены следующим образом:

$$\varphi_1(Ti) = 2\pi f_0 Ti + \varphi_0, \quad \varphi_2(Ti) = \beta(Ti)^2/2, \\ E(Ti) = E_0 \exp(-\alpha(Ti - N_0 T)^2). \quad (14)$$

В выражении (13)  $w(Ti)$  — случайные нормально-распределенные числа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$  имитировали шум в наблюдениях.

Параметры модели принимали следующие значения:  $I_{f0} = 768, T = 60$  с,  $E_0 = 1,0, f_0 = 0,2 \cdot 10^{-3}$  Гц ( $T_0 = 1/f_0 = 5 \cdot 10^3$  с),  $\varphi_0 = 0,2, \beta = 0,75 \cdot 10^{-8}$  Гц/с,  $\alpha = 1 \cdot 10^{-8}$  с<sup>-2</sup>,  $N_0 = 350$ . Для модели (13, 14) частота сигнала  $f(Ti) = \dot{\varphi}_1(Ti) + \dot{\varphi}_2(Ti) = f_0 + \beta Ti$  изменялась по линейному закону, амплитуда — по гауссовскому закону. Частота модельного сигнала изменялась от значения  $f(T \cdot 0) = 0,2 \cdot 10^{-3}$  Гц до  $f(T \cdot (N_f - 1)) = 0,345 \cdot 10^{-3}$  Гц. Длительность сигнала (13) была равна  $t_f = I_{f0} T = 768 \cdot 60 = 46\,080$  с (12,8 ч). Модельный сигнал для  $\sigma = 0$  изображен на рис. 2.

Локальный интервал принимали состоящим из  $N = 128$  точек и его длительность равнялась  $TI_0 = 7,68 \cdot 10^3$  с (2,13 ч); в среднем, на локальных интервалах умещалось  $\sim 1,5$  периода исходного сиг-

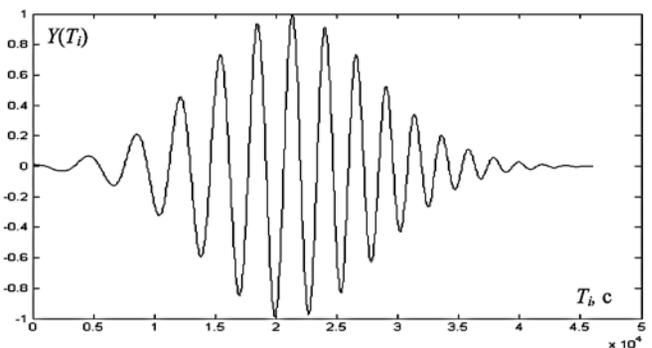


Рис. 2. Модельный одночастотный сигнал с амплитудной и частотной модуляцией

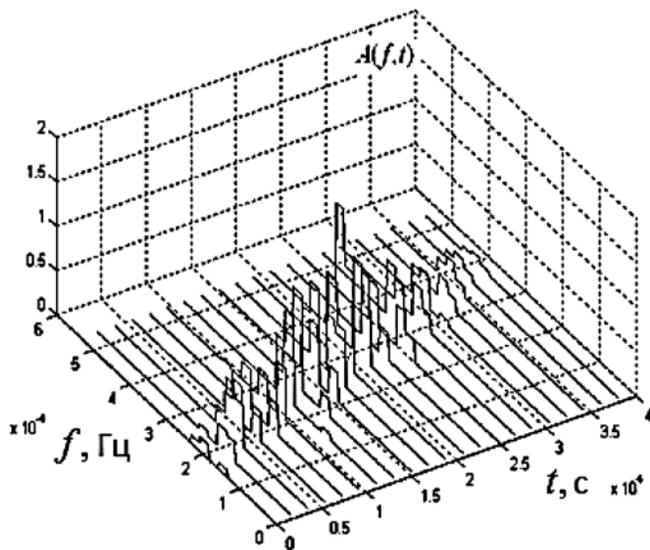


Рис. 3. СВАН-диаграмма модельного одночастотного сигнала с амплитудной и частотной модуляцией

нала. Параметр скольжения выбирали равным  $dI_0 = I_0/4 = 32$ , при этом число локальных интервалов оказывалось равным  $m_f = 21$ . Были заданы следующие параметры для формирования векторов поисковых частот:  $k_f = 21$ ,  $L = 3$ , число векторов составило  $s_f = 165$ . Были назначены границы поискового диапазона по частоте  $f_{\min} = 0,1 \cdot 10^{-3}$  Гц,  $f_{\max} = 0,6 \cdot 10^{-3}$  Гц, шаг дискретности по частоте принимал значение  $\Delta f = 0,25 \cdot 10^{-4}$  Гц. Для вычислительного эксперимента принимали  $n_f = 5$ .

На рис. 3 представлена СВАН-диаграмма значений распределений амплитуд  $A(f, t)$  в зависимости от частоты и времени.

Общая длительность функций-оценок на СВАН-диаграмме составила  $(m_f - 1)TdI_0 = 38\,400$  с. Из представленной СВАН-диаграммы видно, что при данных параметрах сигнала и принятых параметрах алгоритма осуществляется работа алгоритма СВАН с удовлетворительной точностью: оценки частоты сигнала реализуются в виде линейной функции времени, оценки амплитуды — в виде гауссовой кривой.

### Заключение

Предложенный параллельный алгоритм может быть использован в задачах спектрально-временного анализа на базисных полигармонических функциях для многочастотных нестационарных сигналов.

Анализ последовательного алгоритма для СВАН показал, что по временной и емкостной сложности он относится к классу экспоненциальных. Разработанный параллельный алгоритм для СВАН обеспечил снижение временной и емкостной сложности.

Разработанный метод формирования последовательности частотных векторов, учитывающий упо-

рядочность для координат частотных параметров, обеспечил снижение временных затрат на поиск при построении БПФН.

Вычислительный эксперимент, реализованный на модельном сигнале, продемонстрировал работоспособность и возможность обеспечения удовлетворительной точности предложенного параллельного алгоритма СВАН.

Предложенный алгоритм параллельных вычислений может быть обобщен и использован для распараллеливания оптимизационных задач, основанных на поисковых процедурах нулевого порядка — прямых переборах в многомерных параллелепипедах параметров.

*Работа выполнена при поддержке "Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 1 по стратегическим направлениям развития науки на 2014 г. "Фундаментальные проблемы математического моделирования".*

### Список литературы

1. Гетманов В. Г. Об алгоритме поиска по частоте в задаче оценивания параметров моделей полигармонических сигналов // Автометрия. 2009. № 3. С. 83–89.
2. Гетманов В. Г. Цифровая обработка нестационарных колебательных сигналов на основе локальных и сплайновых моделей. М.: Изд-во НИЯУ МИФИ. 2011. 298 с.
3. Гетманов В. Г. Технология спектрально-временного анализа нестационарных сигналов на основе локальных и сплайновых аппроксимационных моделей // Труды 11-й международной конференции "Цифровая обработка сигналов и ее приложения". М.: РНТОРЭС им. А. С. Попова. 2009. Т. 1. С. 144–147.
4. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Бином-Пресс, 2006. 656 с.
5. MATLAB Digital Signal Processing Toolbox./www.mathworks.com.
6. Cohen L. Time-Frequency Analysis. Theory and Application // Prentice Hall Signal Processing Series. 1995. 299 p.
7. Hlawatch F., Auger F. Time-Frequency Analysis: Concepts and Methods. London (UK): ISTE and Wiley, 2008. 440 p.
8. Марпл мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. М.: Мир. 1990. 584 с.
9. Барабанов А. Б. Идентификация параметров полигармонической модели речевого сигнала // Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ—2014). Москва, 16–19.06.2014. С. 3038–3049.
10. Ramos P. M., Silva M. F., Martins R. C., Serra A. C. Simulation and experimental results of multiharmonic least-squares fitting algorithms applied to periodic signals // IEEE Transactions on Instrumentations and Measurements. 2007. V. 56, N 4. P. 1412–1418.
11. Root D. E., Verspecht J., Sharrit D., Wood J. Broad-band poly-harmonic distortion behavioral models from fast automated simulation and large-signal vertical network measurements // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2005. V. 53, Is. 11. P. 3656–3664.
12. Якушев Д. И. Геоинформационное моделирование пространственно-временных геофизических процессов с полигармонической структурой. Автореферат диссертации на соискание уч. степ. д.т.н. / ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина). Санкт-Петербург, 2008.
13. Salinas J. R., Garcia-Lagos F., Joya G., Sandoval F. Sine Fitting Multiharmonic Algorithms Implemented Neural Network // Computational and Ambient Intelligence. Springer. 2007. P. 622–629.
14. Тимашевская Н. Е. О нумерации перестановок и сочетание для организации параллельных вычислений в задачах проектирования управляющих систем // Известия Томского политехнического университета. 2004. Т. 307, № 6. С. 18–20.

15. **Липский В.** Комбинаторика для программистов. М.: Мир. 1988. 200 с.

16. **Гетманов В. Г., Кузнецов П. А., Скворцов О. Б.** Измерение нестационарных амплитуд и частот узкополосных сигналов // *Метрология*. 1997. № 11. С. 30–39.

17. **Гетманов В. Г.** О частотном подпоиске в задаче оценивания параметров кусочно-синусоидальных функций // *Автоматрия*. 1992. № 2. С. 93–98.

18. **Макконел Дж.** Анализ алгоритмов. Вводный курс. М.: Техносфера, 2002. 304 с.

19. **Новиков Ф. А.** Дискретная математика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб.: Питер, 2011. 384 с.

20. **Алешин И. М., Мишин Д. Ю., Жижин М. Н.** и др. Применение распределенных вычислительных систем при определении параметров сейсмической анизотропной коры и верхней мантии // *Геофизические исследования*. 2009. Т. 10, № 4. С. 34–47.

21. **Борзунов Г. И., Петрова Т. В., Сучкова Е. А.** Повышение эффективности масштабирования набора задач при поиске экстремальных разбиений // *Безопасность информационных технологий*. 2011. № 3. С. 116–120.

**V. G. Getmanov**<sup>1, 2</sup>, Professor, Chief Researcher, **G. I. Borzunov**<sup>2, 3</sup>, Professor,

<sup>1</sup>The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup>National Research Nuclear University MPEI (Moscow Engineering Physics Institute)

<sup>3</sup>Moscow state University of design and technology

## The Algorithm of Parallel Calculations for a Problem of the Spectral-Time Analysis on Basic Polyharmonic Functions

*The algorithm of parallel calculations for a problem of the spectral-time analysis (STAN) on basic polyharmonic functions is offered. The analysis of consecutive algorithm for STAN showed that on temporary complexity it belongs to the class of exponential algorithms, it formed the basis for development of parallel algorithm. The method of a task of vectors of search frequencies is created. It is known that the speedup and efficiency of parallel algorithms heavily depends on its balancing, i. e. how evenly distributed computational load between processes executing. Balancing the developed parallel algorithm is based on partitioning the sequence of numbers of the vectors of the search frequencies at equal length sections. Introduced a splitting sequence of vectors of indices into equal parts correctly because: does not increase the amount of computation and memory required for the implementation of the algorithm; ensures uniform loading of the compute nodes by partitioning the sequence of index numbers as equal parts of the index; provides scalability when increasing the number of compute nodes by reducing the lengths of the parts of the index. In the offered parallel algorithm effective frequency search is used. Results of computing experiment with model realization of parallel algorithm for signal STAN with amplitude and frequency modulation are given.*

**Keywords:** parallel calculations, spectral time analysis, polyharmonic functions, approximation, estimation

### References

1. **Getmanov V. G.** Ob algoritme poiska po chastote v zadache ot-senivaniya parametrov modelej poligarmonicheskikh signalov. *Avto-metriya*. 2009. N. 3. P. 83–89.

2. **Getmanov V. G.** *Tsifrovaya obrabotka nestatsionarnykh kole-batel'nykh signalov na osnove lokal'nykh i splajnovykh modelej*. M.: Izd-vo NIYAU MIFI. 2011. 298 p.

3. **Getmanov V. G.** Tekhnologiya spektral'no-vremennogo analiza nestatsionarnykh signalov na osnove lokal'nykh i splajnovykh ap-proksimatbionnykh modelej. *Trudy 11-oy mezhdunarodnoy konferentsii "Tsifrovaya obrabotka signalov i ego prilozheniya"*. M.: RNTOREHS im. A. S. Popova. 2009. Vol. 1. P. 144–147.

4. **Lajons R.** *Tsifrovaya obrabotka signalov*. M.: Binom-Press. 2006. 656 p.

5. **MATLAB** Digital Signal Processing Toolbox. www.math-works.com.

6. **Cohen L.** *Time-Frequency Analysis. Theory and Application*. Prentice Hall Signal Processing Series. 1995. 299 p.

7. **Hlawatch F., Auger F.** *Time-Frequency Analysis: Concepts and Methods*. London (UK): ISTE and Wiley, 2008. 440 p.

8. **Marpl ml. S. L.** *Tsifrovoi spektral'nyi analiz i ego prilozheniya*. Per. s angl. M.: Mir, 1990. 584 p.

9. **Barabanov A. B.** Identifikatsiya parametrov poligarmonicheskoy modeli rechevogo signala. Materialy XII Vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU–2014). Moskva. 16–19.06.2014. P. 3038–3049.

10. **Ramos P. M., Silva M. F., Martins R. C., Serra A. C.** Simulation and experimental results of multiharmonic least-squares fitting algorithms applied to periodic signals. *IEEE Transactions on Instru-mentations and Measurements*. 2007. V. 56, N. 4. P. 1412–1418.

11. **Root D. E., Verspecht J., Sharrit D., Wood J.** Broad-band poly-harmonic distortion behavioral models from fast automated

simulation and large-signal vertical network measurements. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2005. V. 53, Iss. 11. P. 3656–3664.

12. **Iakushev D. I.** *Geoinformacionnoe modelirovanie prostranstven-no-vremennykh geofizicheskikh processov s poligarmonicheskoy strukturoy*. Avtoreferat dissertatsii na soiskanie uch. step. d.t.n. LETI im. V. I. Ulianova (Lenina), Sankt-Peterburg. 2008.

13. **Salinas J. R., Garcia-Lagos F., Joya G., Sandoval F.** *Sine Fitting Multiharmonic Algorithms Implemented Neural Network. Computational and Ambient Intelligence*. Springer. 2007. P. 622–629.

14. **Timashevskaya N. E.** O numeratsii perestанovok i sochetani dlia organizatsii paralelnykh vychisleni v zadachah proektirovaniia upravliaiushchikh sistem. *Izvestiia Tomskogo politehnicheskogo universiteta*. 2004. Vol. 307, N. 6. P. 18–20.

15. **Lipski V.** *Kombinatorika dlia programmistov*. M.: Mir, 1988. 200 p.

16. **Getmanov V. G., Kuznecov P. A., Skvorcov O. B.** Izmerenie nestacionarnykh amplitud i chastot uzkopolosnykh signalov. *Metrologiia*. 1997. N. 11. P. 30–39.

17. **Getmanov V. G.** O chastotnom podpoiske v zadache ocenivaniia parametrov kusochno-sinusoidalnykh funktsii. *Avtometriya*. 1992. N. 2. P. 93–98.

18. **Макконел Дж.** *Анализ алгоритмов. Вводный курс*. М.: Техносфера. 2002. 304 p.

19. **Новиков Ф. А.** *Дискретная математика: Учебник для вузов. Стандарт третьего поколения*. СПб.: Питер. 2011. 384 p.

20. **Алешин И. М., Мишин Д. Ю., Жижин М. Н.** и др. Применение распределенных вычислительных систем при определении параметров сейсмической анизотропной коры и верхней мантии. *Геофизические исследования*. 2009. Т. 10, N. 4. P. 34–47.

21. **Борзунов Г. И., Петрова Т. В., Сучкова Е. А.** Повышение эффективности масштабирования набора задач при поиске экстремальных разбиений. *Безопасность информационных технологий*. 2011. N. 3. P. 116–120.