УДК 004.023 + 519.163

Э. Ю. Орехов, канд. физ.-мат. наук, доцент, e-mail: orekhov@bk.ru
ФГБОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа

Способ генерации примеров для тестирования эвристических алгоритмов решения целочисленных задач

Предложен способ равновероятной генерации индивидуальных задач целочисленной массовой задачи, основанный на использовании равномерного генератора для непрерывного аналога этой задачи в сочетании с методом отбора-отказа. Определен критерий эффективности предложенного способа, сформулированы условия, при выполнении которых применение данного способа целесообразно. Приведен пример применения предложенного способа для равновероятной генерации индивидуальных задач целочисленной массовой задачи линейного раскроя-упаковки.

Ключевые слова: *случайная равновероятная генерация, непрерывный аналог, метод отбора-отказа, критерий эффективности, целочисленная задача линейного раскроя-упаковки*

Введение

Практическое решение NP-трудных задач предполагает широкое использование эвристических алгоритмов, базирующихся на общих и специфических эвристиках, а также эффектах их взаимодействия [1]. Поэтому весьма актуальной становится проблема оценки эффективности этих алгоритмов с точки зрения некоторой характеристики качества. В работе [2] предложена характеристика качества данного эвристического алгоритма на данной конечной массовой задаче, интерпретируемая как функция распределения некоторой случайной величины, что позволяет сформулировать задачу ее статистического оценивания и решить эту задачу на основе *равновероятной* генерации точек области параметрического пространства данной массовой задачи, взаимно однозначно соответствующих индивидуальным задачам этой массовой задачи.

Как показывает практика, разработка эффективных генераторов задач значительно легче осуществляется в случаях, когда массовая задача задается набором непрерывных параметров. Если же параметры массовой задачи принимают дискретные значения, то существенные проблемы возникают как на стадии разработки равновероятного генератора, так и на стадии его использования вследствие больших вычислительных затрат на реализацию каждой индивидуальной задачи.

В настоящей работе предложен способ равновероятной генерации индивидуальных задач целочисленной массовой задачи, основанный на подходе [3], предполагающем использование равномерного генератора для непрерывного аналога целочисленной массовой задачи с последующим применением метода отбора-отказа, который впервые был предложен фон Нейманом [4] и развит в более поздних работах [5—8].

1. Постановка задачи и алгоритм решения

Пусть массовая задача Π определена вектором целочисленных параметров $x = (x_1, ..., x_n)$ с областью возможных значений $D = \{x^1, ..., x^N\}$, N — натуральное число. Пусть $x' = \{x'_1, ..., x'_n\}$ — вектор действительных параметров с областью возможных значений

$$D' = \bigcup_{x^i \in D} \left\{ x' = (x'_1, ..., x'_n):\ x_1^i - \frac{1}{2} \leqslant x'_1 + \frac{1}{2}, ..., \right.$$
$$\left. ..., x_n^i - \frac{1}{2} \leqslant x'_n < x_n^i + \frac{1}{2} \right\}. \qquad (1)$$

Очевидно, $D \subset D'$, и множество целочисленных точек D' совпадает с D.

Например, для массовой задачи Π, определенной вектором целочисленных параметров $x = (x_1, x_2)$ с областью возможных значений $D = \{x^1 = (1, 1),$ $x^2 = (3, 2)$, $x^3 = (4, 2)$, $x^4 = (3, 3)$, $x^5 = (5, 2)\}$, область

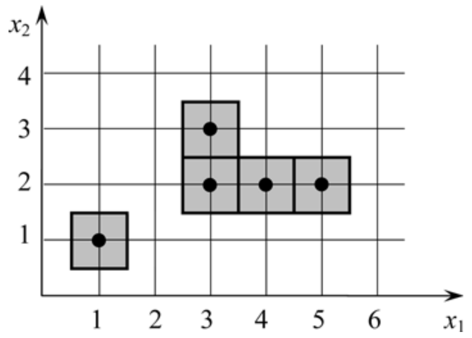

Рис. 1. Пример определения области D'

D' представлена на рис. 1 в виде объединения квадратов со стороной 1, выделенных серым цветом.

Для произвольного действительного числа a определим величину $\langle a\rangle = [a + 0{,}5]$ — округление a до ближайшего целого числа.

Имеет место следующее.

Утверждение 1. Пусть $X' = (X_1', ..., X_n')$ — система непрерывных случайных величин, подчиненная равномерному в D' закону распределения. Тогда система дискретных случайных величин $X = (X_1, ..., X_n)$, $X_j = \langle X_j'\rangle, j = 1, ..., n$, равновероятно распределена в D.

Доказательство. Определим область $d_i' =$

$$= \left\{x' = (x_1', ..., x_n'): x_1^i - \frac{1}{2} \leqslant x_1' < x_1^i + \frac{1}{2}, ..., x_n^i - \frac{1}{2} \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant x_n' < x_n^i + \frac{1}{2}\right\},$$ и пусть v_i' — объем области d_i', а V' — объем области D'. Из определения областей d_i', D' имеем $v_i' = 1$ для $i = 1, ..., N$, а $V' = N$. Так как события $\{X' \in d_i'\}$, $\{X = x^i\}$ эквивалентны в силу определения системы X, то их вероятности равны, т. е. $P\{X = x^i\} = P\{X' \in d_i'\} = \dfrac{v_i'}{V'} = \dfrac{1}{N}$ для всех $i = 1, ..., N$ вследствие того, что система X' подчиняется равномерному в D' закону распределения.

Утверждение доказано.

Таким образом, имея способ генерации реализаций $x' = (x_1', ..., x_n')$ равномерно распределенной в D' системы непрерывных случайных величин X', можно получить реализации $x = (\langle x_1'\rangle, ..., \langle x_n'\rangle)$ системы дискретных случайных величин X, равновероятно распределенной в D.

Пусть D_c — такая область параметрического пространства, что $D' \subset D_c$. Пусть $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ — система непрерывных случайных величин, равномерно распределенных в D_c, с заданным способом генерации ее реализаций.

Рассмотрим следующий алгоритм генерации целочисленных точек области D.

Алгоритм RNDM(D)

Шаг 1. Используя заданный способ равномерной генерации реализаций системы случайных величин Y в области D_c, получить реализацию $y = (y_1, ..., y_n)$ этой системы.

Шаг 2. Положить $\tilde{x} = (\langle y_1\rangle, ..., \langle y_k\rangle)$.

Шаг 3. Если $\tilde{x} \notin D$, то перейти к шагу 1, иначе положить $x^0 = \tilde{x}$; конец работы алгоритма.

Утверждение 2. Результат работы алгоритма $RNDM(D)$ — x^0 — есть реализация системы дискретных случайных величин X, равновероятно распределенной в области D.

Доказательство. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — система дискретных случайных величин с областью возможных значений D — будущий результат работы алгоритма $RNDM(D)$.

Пусть $x^0 \in D$ и

$$d^0 = \left\{x = (x_1, ..., x_n): x_1^0 - \frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + \frac{1}{2}, ..., \right.$$

$$\left. ..., x_n^0 - \frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant x_n^0 + \frac{1}{2}\right\} -$$

гиперкуб единичного объема с центром в точке x^0.

Пусть Y^i — будущая реализация системы случайных величин Y на i-й итерации алгоритма $RNDM(D)$ ($i = 1, 2, ...$). Заметим, что Y^i ($i = 1, 2, ...$) — независимые системы случайных величин, каждая из которых подчиняется тому же закону распределения, что и система Y.

Введем в рассмотрение следующие события:

$$A = \{X = x^0\};$$

$$B_1 = \{Y^1 \in d^0\};$$

$$B_i = \bigcap_{j=1}^{i-1}\{Y^j \notin d^0\} \cap \{Y^i \in d^0\},\ i = 2, 3, ...$$

Отметим, что все события B_i, $i = 1, 2, ...$, несовместны, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, поэтому

$$P(X = x^0) = P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P\{Y^1 \in d^0\} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} P\left\{\bigcap_{j=1}^{i-1}(Y^j \notin d^0) \cap (Y^i \in d^0)\right\}. \qquad (2)$$

Положим $p = \dfrac{|D'|}{|D_c|} = \dfrac{N}{|D_c|}$. Тогда, так как $P\{Y^j \in d^0\} = \dfrac{1}{|D_c|}, j = 1, 2, ...,$ то $P(Y^j \notin d^0) = \dfrac{|D_c| - |D'|}{|D_c|} =$
$= 1 - p,\ j = 1, 2, ...$

Так как все Y^j, $j = 1, 2, ...$, независимы, то (2) можно записать в виде

$$P(X = x^0) = \frac{1}{|D_c|} + \sum_{i=2}^{\infty} (1 - p)^{i-1} \frac{1}{|D_c|}$$

или

$$P(X = x^0) = \frac{1}{|D_c|} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i. \quad (3)$$

Далее, так как $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i$ есть сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $(1 - p)$, то получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p} = \frac{|D_c|}{N}. \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в (3), имеем

$$P(X = x^0) = \frac{1}{N}.$$

Так как x^0 — произвольная точка области D, то $P(X = x) = \frac{1}{N}$ для любого $x \in D$, т. е. X — система дискретных случайных величин, равновероятно распределенная в области D.

2. Оценка эффективности алгоритма *RNDM(D)*

Для оценки эффективности алгоритма *RNDM*(D) введем в рассмотрение случайную величину K — число итераций алгоритма *RNDM*(D), необходимое для получения одной реализации системы случайных величин X, — подчиняющуюся закону распределения

$$P(K = k) = p(1 - p)^{k-1},\ k = 1, 2, ...$$

Математическое ожидание этой случайной величины

$$M[K] = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1 - p)^{k-1} \quad (5)$$

примем в качестве критерия эффективности алгоритма *RNDM*(D).

Так как (5) можно представить в виде

$$M[K] = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1}, \quad (6)$$

и кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k \right)'_{(1-p)},$$

то с учетом (4) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{1 - (1 - p)} \right)'_{(1-p)} = \frac{1}{(1 - (1 - p))^2} = \frac{1}{p^2}. \quad (7)$$

Подстановка формулы (7) в (6) дает

$$M[K] = \frac{1}{p},$$

или, принимая во внимание определение величины p,

$$M[K] = \frac{|D_c|}{|D'|}. \quad (8)$$

Из соотношения (8) следует, что эффективность алгоритма *RNDM*(D) тем выше, чем "ближе" D_c к D' (и следовательно, к D). Таким образом, наиболее эффективным (с точки зрения рассматриваемого критерия) является выбор "наименьшей" области D_c, "подобной" D, при условии, что $D_c \supset D'$ и наличии способа равномерной генерации точек области D_c.

Так как объем области D' есть N, а отыскание величины N, как правило, затруднительно, то при наличии области $D'' \subset D_c$ с легко определяемой величиной $|D''|$, содержащей все точки D и "близкой" к D, можно, в силу "близости" D' к D, использовать следующую оценку для $M[K]$:

$$M[K] \approx \frac{|D_c|}{|D''|}. \quad (9)$$

Пусть, например, D — множество точек с целочисленными координатами, лежащими внутри круга радиуса R с центром в начале координат. Пусть область D' определена в соответствии с (1) для $n = 2$, а D_c — круг радиуса $(R + 1)$ с центром в начале координат (рис. 2).

Покажем, что $D' \subset D_c$. Пусть $x' = (x_1', x_2')$ — произвольная точка D', тогда из выражения (1) получим

$$\left. \begin{aligned} |x_1' - x_1| \leqslant \frac{1}{2} \\ |x_2' - x_2| \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

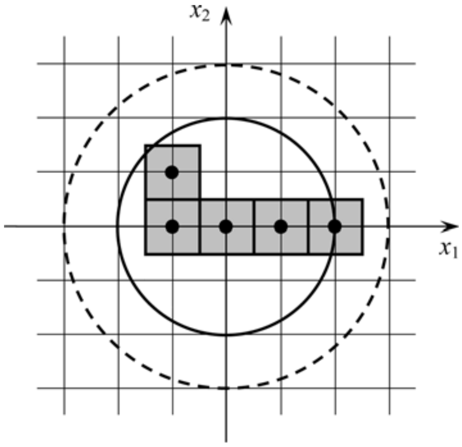

Рис. 2. Пример определения области D_c

где $x = (x_1, x_2)$ — произвольная точка D. Так как (10) легко преобразуется в

$$\left.\begin{aligned} x_1'^2 &\leqslant \left(|x_1| + \frac{1}{2}\right)^2 \\ x_2'^2 &\leqslant \left(|x_2| + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\},$$

то получим

$$x_1'^2 + x_2'^2 \leqslant \left(|x_1| + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(|x_2| + \frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + |x_1| + |x_2| + \frac{1}{2}.$$

Так как $x \in D$, то

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\leqslant R^2 \\ |x_1| &\leqslant R \\ |x_2| &\leqslant R \end{aligned}\right\},$$

поэтому

$$x_1'^2 + x_2'^2 \leqslant R^2 + 2R + \frac{1}{2} < R^2 + 2R + 1 = (R + 1)^2,$$

т. е. $x' \in D_c$. Так как x' — произвольная точка D', то заключаем, что $D' \subset D_c$.

Равномерная генерация точек в круге данного радиуса легко проводится с использованием полярных координат [9]. Поэтому возможно применение алгоритма $RNDM(D)$ (для $n = 2$ и данной области D с использованием "подобной" области D_c) для равновероятной генерации целочисленных точек области D. Выберем в качестве D'' круг радиуса R с центром в начале координат. Тогда в соответствии с оценкой (9) эффективность алгоритма в данном случае оценивается величиной

$$\frac{|D_c|}{|D''|} = \frac{\pi(R+1)^2}{\pi R^2} = \left(1 + \frac{1}{R}\right)^2,$$

которая стремится к 1 при увеличении R.

3. Применение данного способа для генерации индивидуальных задач целочисленной массовой задачи линейного раскроя-упаковки

Массовую целочисленную задачу одномерного раскроя-упаковки рассмотрим в следующей постановке.

Имеются одинаковые заготовки (отрезки) длины L (L — натуральное число), в которые нужно упаковать без перекрытия набор отрезков целочисленной длины $x_1, ..., x_n$ ($1 \leqslant x_i \leqslant L$; $i = 1, ..., n$) так, чтобы количество использованных заготовок оказалось наименьшим.

При заданных L, n индивидуальная задача определяется заданием длин отрезков x_i, $i = 1, ..., n$.

Так как любая перестановка чисел $x_1, ..., x_n$ соответствует одной и той же индивидуальной задаче, то множество всех индивидуальных задач рассматриваемой массовой задачи ставится во взаимно однозначное соответствие точкам области D, определяемой следующей системой ограничений:

$$D = \{x = (x_1, ..., x_n): x_i = 1, 2, ...; i = 1, ..., n; \quad 1 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant L\}. \tag{11}$$

Таким образом, задача сводится к равновероятной генерации точек области D.

Определим область D' в соответствии с выражением (1); при этом множество целочисленных точек области D' совпадает с D. Определим далее область D_c действительных точек $y = (y_1, ..., y_n)$ как

$$D_c = \{y{:}0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 + 1 \leqslant ... \leqslant y_n + (n - 1) \leqslant L + n\}, \tag{12}$$

и покажем, что $D' \subset D_c$.

Пусть $x' = (x_1', ..., x_n')$ — произвольная точка области D', которую представим в виде

$$x' = (x_1 + \varepsilon_1, ..., x_n + \varepsilon_n), \tag{13}$$

где $x = (x_1, ..., x_n) \in D$, $|\varepsilon_i| \leqslant 1/2$, $i = 1, ..., n$. Так как $1 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant L$, $1 - \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i \geqslant 0$ для $i = 2, ..., n$, то

$$1 + \varepsilon_1 \leqslant x_1 + \varepsilon_1 \leqslant ... \leqslant x_n + \varepsilon_1 \leqslant L + \varepsilon_1,$$

откуда

$$0 \leqslant x_1 + \varepsilon_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n + \varepsilon_1 \leqslant L + \varepsilon_1;$$

$$0 \leqslant x_1 + \varepsilon_1 \leqslant x_2 + \varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant x_n + \varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leqslant L + \varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

откуда

$$0 \leqslant x_1 + \varepsilon_1 \leqslant x_2 + \varepsilon_2 + 1 \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant x_n + \varepsilon_2 + 1 \leqslant L + \varepsilon_2 + 1.$$

Продолжая аналогичные преобразования далее, получим

$$0 \leqslant x_1 + \varepsilon_1 \leqslant x_2 + \varepsilon_2 + 1 \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant x_n + \varepsilon_n + (n - 1) \leqslant L + \varepsilon_n + (n - 1),$$

а так как $\varepsilon_n \leqslant 1/2$, то окончательно запишем

$$0 \leqslant x_1 + \varepsilon_1 \leqslant x_2 + \varepsilon_2 + 1 \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant x_n + \varepsilon_n + (n - 1) \leqslant \mathrm{L} + n,$$

или, в силу (13),

$$0 \leqslant x_1' \leqslant x_2' + 1 \leqslant \ldots \leqslant x_n' + (n - 1) \leqslant L + n,$$

т. е. $x' \in D_c$.

Таким образом, $D' \subset D_c$. Поэтому, определив для любого действительного a

$$\langle a \rangle = \begin{cases} [a], \ a < [a] + 1/2, \\ [a] + 1, \ a \geqslant [a] + 1/2, \end{cases}$$

для равновероятной генерации точек области D можно использовать алгоритм $RNDM(D)$.

Для работы алгоритма необходимо иметь способ получения реализаций системы случайных величин $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, равномерно распределенной в D_c. Решение этой задачи приведено в работе [10]. Там же показано, что

$$|D_c| = \frac{(L+n)^n}{n!},$$

а в работе [11] показано, что число целочисленных точек D'

$$N = \frac{L(L+1)\ldots(L+n-1)}{n!}.$$

Поэтому для рассматриваемой задачи получаем

$$M[K] = \frac{(L+n)^n}{L(L+1)\ldots(L+n-1)}.$$

Полученное выражение для критерия эффективности предложенного способа показывает, что эффективность способа тем выше, чем больше L и чем меньше n, и стремится к 1 при $L \to \infty$ и фиксированном значении числа упаковываемых отрезков n.

Заключение

Предложенный способ позволяет осуществить эффективную равновероятную генерацию целочисленных точек заданной области D, представляющую исходную массовую задачу, при следующих условиях:

- если возможно определить область D_c, покрывающую область D', полученную из D в соответствии с предлагаемым методом и такую, что D_c и D' близки друг другу;
- имеется способ равномерной генерации точек области D_c.

Список литературы

1. **Норенков И. П.** Эвристики и их комбинации в генетических методах дискретной оптимизации // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 2—7.
2. **Орехов Э. Ю., Орехов Ю. В.** Об оценке качества эвристического алгоритма на конечной массовой задаче. // Информационные технологии. 2011. № 7. С. 28—33.
3. **Orekhov E., Orekhov Yu.** A Method for Equiprobable Generation of Instances of an Integer Problem. Proc. of the 9th International Workshop on Computer Science and Information Technologies. Krasnousolsk—Ufa, Russia, September 13—16. 2007. Vol. 2. P. 189—191.
4. **Von Neumann J.** Various techniques used in connection with random digits. Monte Carlo method // Nat. Bur. Stand. Appl. Math. series, 1951. N. 2. P. 36—38.
5. **Butler J. M.** Machine sampling from given probability distributions // Sympos. on Monte Carlo Methods / ed. H. A. Meyer. Wiley, 1956. P. 249—264.
6. **Михайлов Г. А.** О моделировании случайных величин для одного класса законов распределения // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 4. С. 749—751.
7. **Романовский И. В.** О методах моделирования непрерывных случайных величин из величин с равномерным распределением // Методы вычислений (сб.). Изд. ЛГУ, 1966, № 3. С. 113—121.
8. **Ермаков С. М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1971. 328 с.
9. **Соболь И. М.** Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 311 с.
10. **Орехов Э. Ю., Орехов Ю. В.** Способ равновероятной генерации индивидуальных задач целочисленной массовой задачи линейного раскроя-упаковки. // Принятие решений в условиях неопределенности: Межвуз. науч. сб. Вып. 5. Уфа: УГАТУ, 2009. С. 156—160.
11. **Orekhov E. Yu., Orekhov Yu. V.** Equiprobable Generation of the Integer One-Dimensional Cutting-Packing Problem // Proc. of the 5th International Workshop on Computer Science and Information Technologies. — Ufa, Russia, September 16—18, 2003. Vol. 2. P. 41—42.

E. Yu. Orekhov, Associated Professor, e-mail: orekhov@bk.ru
Ufa State Aviation Technical University

A Method of Generating Instances to Test the Heuristic Algorithms for Integer Problems

We suggest a method of equiprobable generation of instances for an integer-valued problem. The method is based on the uniform generator for the continuous analog of the problem in combination with the acceptance-rejection method. The efficiency criterion of the method is defined. The conditions of the method being worth while are stated. We also give an example of applying the method to equiprobable generation of instances for an integer cutting-packing problem.

***Keywords:** random equiprobable generation, continuous analog, acceptance-rejection method, efficiency criterion, integer cutting-packing problem*

References

1. **Norenkov I. P.** Jevristiki i ih kombinacii v geneticheskih metodah diskretnoj optimizacii. *Informacionnye tehnologii.* 1999. N. 1. P. 2—7.
2. **Orekhov E. Yu., Orekhov Yu. V.** Ob ocenke kachestva jevristicheskogo algoritma na konechnoj massovoj zadache. *Informacionnye tehnologii.* 2011. N. 7. P. 28—33.
3. **Orekhov E., Orekhov Yu.** Method for Equiprobable Generation of Instances of an Integer Problem. Proceedings of the 9th International Workshop on Computer Science and Information Technologies. — Krasnousolsk—Ufa, Russia, September 13—16. 2007. Vol. 2. P. 189—191.
4. **Von Neumann J.** Various techniques used in connection with random digits. // Monte Carlo method, Nat. Bur. Stand. Appl. Math. series. 1951, N. 12. P. 36—38.
5. **Butler J. M.** Machine sampling from given probability distributions. // Sympos. on Monte Carlo Methods / ed. H. A. Meyer. Wiley, 1956. P. 249—264.
6. **Mihajlov G. A.** O modelirovanii sluchajnyh velichin dlja odnogo klassa zakonov raspredelenija. *Teorija verojatnostej i ee primenenija.* 1965. V. 10, N. 4. P. 749—751.
7. **Romanovskij I. V.** O metodah modelirovanija nepreryvnyh sluchajnyh velichin iz velichin s ravnomernym raspredeleniem. *Metody vychislenij* (sb.). — Izd. LGU. 1966, N. 3. P. 113—121.
8. **Ermakov S. M.** Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy. M.: Nauka, 1971. 328 p.
9. **Sobol' I. M.** Chislennye metody Monte-Karlo. M.: Nauka, 1973. 311 p.
10. **Orekhov E. Yu., Orekhov Yu. V.** Sposob ravnoverojatnoj generacii individual'nyh zadach celochislennoj massovoj zadachi linejnogo raskroja-upakovki. *Prinjatie reshenij v uslovijah neopredelennosti: Mezhvuz. nauch. sb.* V. 5. Ufa: UGATU, 2009. P. 156—160.
11. **Orekhov E. Yu., Orekhov Yu. V.** Equiprobable Generation of the Integer One-Dimensional Cutting-Packing Problem. // Proc. of the 5th International Workshop on Computer Science and Information Technologies. — Ufa, Russia, September 16—18, 2003. Vol. 2. P. 41—42.

УДК 519.17, 519.8

Л. Ф. Комоско, стажер-исследователь, e-mail: lkomosko@hse.ru,
М. В. Бацын, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., e-mail: mbatsyn@hse.ru
Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур,
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Нижний Новгород

Эффективная раскраска графа с помощью битовых операций*

Представлен новый эффективный эвристический алгоритм для решения задачи о раскраске графа. Предложенный алгоритм строит ту же раскраску графа, что и широко используемый жадный последовательный алгоритм раскраски, в котором на каждом шаге текущая вершина красится в минимальный допустимый цвет. Вычислительные эксперименты показывают, что представленный алгоритм выполняет раскраску графа гораздо быстрее чем стандартный жадный алгоритм. Ускорение для графов библиотеки DIMACS достигает 5,6 раз.

***Ключевые слова:** раскраска графа, эвристика, битовые операции, жадный алгоритм, последовательная раскраска*

Введение

Задача о раскраске графа является известной задачей комбинаторной оптимизации. Это одна из двадцати одной *NP*-полной задачи Ричарда Карпа [1]. Данный класс задач известен тем, что нельзя найти точного решения за разумное время, так как пространство поиска решений увеличивается в экспоненциальной зависимости от входных данных.

* Работа поддержана грантом РНФ 14-41-00039.