

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 10 (103)

октябрь

2009

Редакционный совет:

КУЗНЕЦОВ Н. А.
МАКАРОВ И. М.
МАТВЕЕНКО А. М.
ПЕШЕХОНОВ В. Г.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М.
ФЕДОРОВ И. Б.

Главный редактор:

ТЕРЯЕВ Е. Д.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В.
ПУТОВ В. В.
ЮЩЕНКО А. С.

Выпускающий редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б.

Ответственный секретарь:

ПЕТРИН К. В.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М.
БОГАЧЕВ Ю. П.
БУКОВ В. Н.
ВОСТРИКОВ А. С.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г.
ГОЛУБЯТНИКОВ И. В.
ИВЧЕНКО В. Д.
ИЛЬЯСОВ Б. Г.
КАЛЯЕВ И. А.
КОЛОСОВ О. С.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г.
КУЗЬМИН Н. Н.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.
ЛЕОНОВ Г. А.
ЛЁВИН Б. А.
ЛОХИН В. М.
НОРЕНКОВ И. П.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е.
РАПОПОРТ Э. Я.
РАССАДКИН Ю. И.
РАЧКОВ М. Ю.
РЕЗЧИКОВ А. Ф.
СЕБРЯКОВ Г. Г.
СИГОВ А. С.
СИРОТКИН О. С.
СОЙФЕР В. А.
ТИМОФЕЕВ А. В.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф.
ФУРСОВ В. А.
ХИМЕНКО В. И.
ЮРЕВИЧ Е. И.
ЮСУПОВ Р. М.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧУГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Фуртат И. Б.** Модифицированный алгоритм робастного обхода интегратора 2
Макаров Н. Н., Владимиров К. И. Предельные отклонения в кусочно-линейных системах управления 8
Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М. Оптимизация управления в многоточечных задачах о встрече движений 14

РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Егоров О. Д., Батунова В. А.** Определение погрешности позиционирования робота с учетом первичных ошибок и погрешностей обобщенных координат 19
Горитов А. Н. Построение плана траектории промышленного робота в условиях неполной информации о внешней среде 25
Головин В. Ф., Архипов М. В., Журавлев В. В. Метод силового обучения при планировании траекторий робота для восстановительной медицины 29

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ
В ОТРАСЛЕВЫХ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМАХ**

- Стебулянин М. М.** Комбинаторный метод синтеза закона управления многосвязными мехатронными системами в режиме динамического позиционирования 31
Анисимов А. А., Тарарыкин С. В. Формирование критерия оптимальности в задачах синтеза регуляторов состояния электромеханических систем 36
Кочетков В. П., Подборский П. Э., Коловский А. В. Оптимизация динамики электромеханической системы с помощью систем с переменной структурой 42
Буканова Т. С., Стешина Л. А., Савиных А. Б. Оптимизационная концепция построения системы управления электрической машиной 48
Анисимов В. М., Высоцкий В. Е., Кауров С. Ю., Репин А. С. Применение встроенного микроконтроллера для системы управления стартер-генераторной установки 50
Гоппе Г. Г. Математические модели технологического комплекса электропривод—турбокомпрессор—трубопроводная магистраль. Часть 1. Математические модели статистических режимов при двух способах управления производительностью 56

**Журнал в журнале
"УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА
В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"**

- Волков А. Б., Каретников В. В., Сикарев И. А.** Алгоритмы определения дальности и радиуса зоны действия автоматической информационной системы, работающей в условиях сложной помеховой обстановки 62
Челноков Ю. Н., Логинов М. Ю. Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой бесплатформенной инерциальной навигационной системы, функционирующей в нормальной географической системе координат 64
Заведеев А. И., Архипов Р. А. Особенности применения малоизбыточных кратных гиросилловых систем управления ориентацией космических аппаратов 73
Contents 79

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 519.7

И. Б. Фуртат, канд. техн. наук, доц.,
Астраханский государственный
технический университет
cainenash@mail.ru

Модифицированный алгоритм робастного обхода интегратора

Предлагается алгоритм робастного управления стационарным параметрически и функционально неопределенным линейным объектом, который обеспечивает слежение выхода объекта за эталонным сигналом с заданной точностью и за конечное время. Предполагается, что измерению доступен только скалярный выход объекта. Приведены численные примеры и результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемой схемы.

Ключевые слова: робастное управление, априорно и функционально неопределенный объект, обратный обход интегратора, наблюдатель, сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение, функция Ляпунова.

Введение

Проблема управления параметрически и функционально неопределенными объектами была и остается одной из актуальных задач в теории управления. Это связано с тем, что в реальных ситуациях большинство объектов подвержены воздействию внешних и внутренних возмущений, измерение которых невозможно в силу технологических особенностей или отсутствия соответствующих измерительных устройств.

На сегодняшний день предложено много методов и подходов к построению адаптивных и робастных алгоритмов управления неопределенными объектами. Из всего множества предложенных методов можно выделить три классических подхода: метод расширенной ошибки, алгоритмы адаптации высокого порядка и итеративные процедуры синтеза (известные также под названиями адаптивный или робастный обход интегратора). Замечательный обзор по основным методам расширенной ошибки приведен в [1]. Основная идея данного метода состоит во введении генератора расширения сигнала ошибки слежения в целях получения строго положительной вещественной функции без использования наблюдателей производных [2]. Реализация регуляторов, построенных на базе данного метода, проста и не требует сложных аналитических расчетов. Вместе с тем, этот метод не всегда обеспечивает желаемое качество переходных процессов в замкнутой

системе управления [3]. Алгоритмы адаптации высокого порядка [3, 4] основаны на использовании оценки производных от вектора настраиваемых параметров и вектора регрессии. Данный метод обеспечивает лучшие показатели качества переходных процессов в системе управления, чем предыдущий подход, но требует больше аналитических расчетов и более сложную техническую реализацию [3]. Особое внимание хотелось бы уделить итеративным процедурам синтеза. Основное достоинство, по сравнению с предыдущими двумя методами, — высокое качество переходных процессов без увеличения амплитуды управления и невысокий динамический порядок замкнутой системы [3]. Впервые этот метод был предложен в [5] для создания адаптивного управления нелинейными объектами по выходу. Его использование позволило обеспечить в системе управления параметрическую робастность [6, 7] и возможность учета априорной информации о значениях параметров объекта управления. Использование последнего свойства наглядно продемонстрировано в работе [8], где рассматривался нелинейный параметрически неопределенный объект с измеряемым скалярным выходом. Для формирования управляющего воздействия сначала предлагалось использовать диффеоморфизм, позволяющий сконцентрировать неопределенности линейной составляющей исходного объекта в новом коэффициенте перед управляющим сигналом в преобразованной системе. Это позволило упростить структуру и расчет регулятора. В [3] рассматривалось создание адаптивного и робастного регуляторов для управления линейными системами по выходу. Данные подходы основаны на особой параметризации уравнения объекта, позволяющей получить производную его выходной переменной. В робастном алгоритме в [3], в отличие от [5–8], не использовалась идентификация неизвестных параметров объекта. Компенсация параметрических и функциональных возмущений осуществлялась с помощью нелинейных обратных связей.

Всем вышеперечисленным подходам, основанным на итеративных процедурах синтеза, присущи два основных недостатка, которые подробно описаны в [3], — сложность аналитического расчета системы управления и проблемы, связанные с ее технической реализацией. Сложность аналитических расчетов заключается в громоздкости вычислений полной производной по времени от стабилизирующих сигналов управления. Трудности, возникающие при технической реализации, связаны с большим числом параметров в законе управления и

фильтров состояния, необходимых для формирования закона управления. Например, в алгоритмах в работе [3] при построении закона управления линейными объектами используются $(2n - \gamma + 1)$ фильтров размерности n каждый, где n — порядок объекта управления, γ — его относительная степень. В работе [8] используются три фильтра размерности n , но здесь условия, накладываемые на неопределенности объекта, более слабые, чем в [3]. Алгоритм управления для рассматриваемых в [8] объектов управления с неопределенностями из [3], будет содержать $(2n - \gamma + 2)$ фильтров размерности n . Однако число фильтров может быть уменьшено при наличии априорной информации [3].

В настоящей статье предложен робастный закон управления параметрически и функционально неопределенными объектами по выходу, разработанный с применением метода итеративных процедур синтеза. Показано, что в системе управления реализуется всего один фильтр размерности n , а для вычисления производных стабилизирующих сигналов управления используются реальные дифференцирующие звенья. Это позволяет существенно упростить аналитический расчет настраиваемых параметров и техническую реализацию системы управления. При этом в замкнутой системе обеспечены требуемые динамическая точность и время переходного процесса.

Постановка задачи

Рассмотрим линейный объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением

$$Q(p)y(t) = R(p)[u(t) + f(t)], p^i y(0) = y_i, i = \overline{0, n-1}, (1)$$

где $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$ — скалярные вход, выход и возмущающее воздействие соответственно; $Q(p) = p^n + q_{n-1}p^{n-1} + \dots + q_1p + q_0$, $R(p) = r_m p^m + r_{m-1}p^{m-1} + \dots + r_1p + r_0$ — линейные стационарные дифференциальные операторы; $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; y_i — неизвестные начальные условия.

Качество процессов по выходу (1) определим эталонной моделью

$$Q_m(p)y_m(t) = k_m r(t). (2)$$

Здесь $y_m(t)$ — выход эталонной модели, $r(t)$ — задающее воздействие, $k_m > 0$, $Q_m(p)$ — известный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Требуется для объекта (1) получить систему управления, обеспечивающую выполнение целевого условия

$$|e(t)| = |y(t) - y_m(t)| < \delta (3)$$

за требуемое время T и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе, где $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Предположения

1. Коэффициенты полиномов $Q(p)$ и $R(p)$ — неизвестные числа.

2. Известно множество Ξ возможных значений коэффициентов многочленов $Q(p)$, $R(p)$, их порядки $\deg Q(p) = n$, $\deg R(p) = m$, относительная степень $\gamma = n - m > 1$ и знак коэффициента r_m (пусть $r_m > 0$).

3. Полиномы $R(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$ — гурвицевы, где λ — комплексная переменная в преобразовании Лапласа; $\deg Q_m(p) = \gamma$.

4. Задающее $r(t)$ и возмущающее $f(t)$ воздействия — ограниченные функции.

5. В системе управления не доступны измерению производные сигналов $y(t)$, $u(t)$ и $r(t)$.

Вышеприведенные предположения соответствуют классическим в теории адаптивного и робастного управления [1–8].

Метод решения

Воспользуемся параметризацией, предложенной в [3], и преобразуем уравнение (1) к виду

$$\dot{y}(t) = \beta_1(t) + v^T(t)\psi + \bar{f}(t) + \zeta(t), (4)$$

где $\psi^T = [r_i|_{i=\overline{0,m}}, q_i|_{i=\overline{0,n-1}}]$ — вектор, составленный

из коэффициентов полиномов $R(p)$ и $Q(p)$ соответственно; $\bar{f}(t)$ — ограниченная функция, зависящая от $f(t)$; $\zeta(t)$ — экспоненциально затухающая функция времени, зависящая от ненулевых начальных условий (1); $\beta_1(t) = -k_1 \xi_{n,1}(t) + \xi_{n,2}(t) + k_1 y(t)$; $v(t) = [-k_1 v_{m-i,1}(t) + v_{m-i,2}(t)|_{i=\overline{0,m}}, -k_1 \xi_{n-1,1}(t) + \xi_{n-1,2}(t) + y(t), -k_1 \xi_{n-i,1}(t) + \xi_{n-i,2}(t)|_{i=\overline{2,n}}]^T$ — вектор регрессии. В состав функций $\beta_1(t)$ и $v(t)$ входят переменные, полученные из фильтров состояния:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) &= A_0 \xi_n(t) + k y(t); \\ \dot{\xi}_i(t) &= A_0 \xi_i(t) + e_{n-i} y(t), i = \overline{0, n-1}; \\ \dot{v}_i(t) &= A_0 v_i(t) + e_{n-i} u(t), i = \overline{0, m}. \end{aligned} (5)$$

$$\text{Здесь } \xi_i(t) \in R^n; v_i(t) \in R^n; A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & I_{n-1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -k_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$I_{n-1} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ — единичная матрица, $k = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T$, e_i — вектор с нулевыми коэффициентами кроме i -го, который равен 1.

Как отмечалось во введении, в работах [3, 5–8] для решения задачи робастного управления неопределенным объектом предлагались нелинейные алгоритмы управления, основанные на методе итеративных процедур синтеза. В отличие от [3, 5–8] в дан-

ной статье будет предложен линейный робастный закон управления. Согласно методу обратного обхода интегратора построение системы управления разобьем на γ шагов. На первых i -х шагах ($i = \overline{1, \gamma-1}$) создаются вспомогательные управления $U_i(t)$ для стабилизации соответствующих подсистем. На последнем шаге γ формируется закон управления $u(t)$.

Шаг 1. Введем ошибку слежения $e_1(t) = y(t) - y_m(t)$ и продифференцируем ее по времени с учетом уравнений (2) и (4):

$$\dot{e}_1(t) = \beta_1(t) + v_0^T(t)\psi + r_m(-k_1 v_{m,1}(t) + v_{m,2}(t)) - \dot{y}_m(t) + \bar{f}(t) + \zeta(t). \quad (6)$$

В (6) $v_0(t) = [0, -k_1 v_{i,1}(t) + v_{i,2}(t)]_{i=\overline{1,m}}, -k_1 \zeta_{n-1,1}(t) + \xi_{n-1,2}(t) + y(t), -k_1 \xi_{j,1}(t) + \xi_{j,2}(t)]_{j=\overline{0,n-2}}^T$.

Предположим, что $v_{m,2}(t)$ является сигналом управления в (6) и определим $v_{m,2}(t)$ в виде $v_{m,2}(t) = U_1(t)$, где

$$U_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + k_1 v_{m,1}(t). \quad (7)$$

В последнем уравнении $U_1(t)$ — функция, стабилизирующая (6), c_1 и μ — положительные числа, выбираемые разработчиком. Подставим (7) в (6). В результате получим

$$\dot{e}_1(t) = -r_m c_1 \mu^{-1} e_1(t) + \varphi(t), \quad (8)$$

$\varphi(t) = \beta_1(t) + v_0^T(t)\psi - \dot{y}_m(t) + \bar{f}(t) + \zeta(t)$. В отличие от ранее существующих робастных и адаптивных алгоритмов (например [3, 5–8]) стабилизирующий закон управления (7) кроме слагаемого $-c_1 \mu^{-1} e_1(t)$, необходимого для обеспечения робастности замкнутой системы, содержит только функцию $v_{m,1}(t)$, которую можно непосредственно скомпенсировать. Функция $\beta_1(t)$ и слагаемые $v_0^T(t)\psi, \dot{y}_m(t), \bar{f}(t), \zeta(t)$, недоступные измерению, объединены в функцию $\varphi(t)$, которая в дальнейшем будет скомпенсирована. Как будет показано ниже, в отличие от [3, 5–8] формирование стабилизирующих законов и основного закона управления по такому принципу позволит существенно упростить реализацию системы управления и использовать только один фильтр состояния в (5) по переменной $v_m(t)$.

Шаг 2. Поскольку функция $v_{m,2}(t)$ не является истинным законом управления, то рассмотрим сигнал $e_2(t) = v_{m,2}(t) - U_1(t)$. Принимая во внимание (7) и последнее уравнение (5), продифференцируем $e_2(t)$ по времени:

$$\dot{e}_2(t) = -k_2 v_{m,1}(t) + v_{m,3}(t) - \dot{U}_1(t). \quad (9)$$

Пусть сигнал $v_{m,3}(t)$ является управлением в (9). Положим, что $v_{m,3}(t) = U_2(t)$ и выберем $U_2(t)$ в виде

$$U_2(t) = -c_2 e_2(t) + k_2 v_{m,1}(t) + \bar{U}_1(t), \quad (10)$$

где $c_2 > 0$, $\bar{U}_1(t)$ — оценка сигнала $\dot{U}_1(t)$. Подставив (10) в (9), получим

$$\dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) - \eta_1(t). \quad (11)$$

Здесь $\eta_1(t) = \dot{U}_1(t) - \bar{U}_1(t)$ — ошибка оценки сигнала $\dot{U}_1(t)$.

Шаг i ($3 \leq i < \gamma$). По аналогии с первым и вторым шагами введем функцию $e_i(t) = v_{m,i}(t) - U_{i-1}(t)$. Продифференцируем ее по времени с учетом последнего уравнения (5):

$$\dot{e}_i(t) = -k_i v_{m,1}(t) + v_{m,i+1}(t) - \dot{U}_{i-1}(t). \quad (12)$$

Допустим, что $v_{m,i+1}(t)$ является управлением в (12). Примем $v_{m,i+1}(t) = U_i(t)$ и определим $U_i(t)$ в виде

$$U_i(t) = -c_i e_i(t) + k_i v_{m,1}(t) + \bar{U}_{i-1}(t), \quad (13)$$

$c_i > 0$, $\bar{U}_{i-1}(t)$ — оценка сигнала $\dot{U}_{i-1}(t)$. Если подставить (13) в (12), то получим

$$\dot{e}_i(t) = -c_i e_i(t) - \eta_{i-1}(t), \quad (14)$$

где $\eta_{i-1}(t) = \dot{U}_{i-1}(t) - \bar{U}_{i-1}(t)$ — ошибка оценки сигнала $\dot{U}_{i-1}(t)$.

Шаг γ . Рассмотрим сигнал $e_\gamma(t) = v_{m,\gamma}(t) - U_{\gamma-1}(t)$. Принимая во внимание (5), имеем

$$\dot{e}_\gamma(t) = -k_\gamma v_{m,1}(t) + u(t) - \dot{U}_{\gamma-1}(t). \quad (15)$$

Видно, что уравнение (15) содержит истинный закон управления $u(t)$. По аналогии формирования стабилизирующих сигналов $U_i(t)$, $i = \overline{2, \gamma}$, $u(t)$ зададим в виде

$$u(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) + k_\gamma v_{m,1}(t) + \bar{U}_{\gamma-1}(t). \quad (16)$$

В последнем уравнении $c_\gamma > 0$ и $\bar{U}_{\gamma-1}(t)$ — оценка сигнала $\dot{U}_{\gamma-1}(t)$. С учетом (16) перепишем (15) в виде

$$\dot{e}_\gamma(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) - \eta_{\gamma-1}(t), \quad (17)$$

$\eta_{\gamma-1}(t) = \dot{U}_{\gamma-1}(t) - \bar{U}_{\gamma-1}(t)$ — ошибка оценки сигнала $\dot{U}_{\gamma-1}(t)$.

В силу предположения 5, приведенного в постановке задачи, сформировать сигналы $\dot{U}_{i-1}(t)$, $i = \overline{2, \gamma}$, невозможно. Поэтому на каждом шаге вводились оценки этих сигналов в виде функций $\bar{U}_{i-1}(t)$. Для реализации оценок производных сигналов $U_{i-1}(t)$ воспользуемся наблюдателями

$$\dot{\bar{U}}_{i-1}(t) = -\mu^{-1} \bar{U}_{i-1}(t) + \mu^{-1} \dot{U}_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, \gamma}. \quad (18)$$

Наблюдатели (18) можно реализовать с помощью реальных дифференцирующих звеньев, т. е.

$$\bar{U}_{i-1}(t) = \frac{p}{\mu p + 1} U_{i-1}(t).$$

Выпишем полученную систему управления:

$$\begin{aligned} \dot{v}_m(t) &= A_0 v_m(t) + e_{n-m} u(t); \\ U_1(t) &= -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + k_1 v_{m,1}; \\ U_i(t) &= -c_i e_i(t) + k_i v_{m,i} + \bar{U}_{i-1}(t); \\ \dot{\bar{U}}_{i-1}(t) &= -\mu^{-1} \bar{U}_{i-1}(t) + \mu^{-1} \dot{U}_{i-1}(t); \\ \dot{e}_1(t) &= -kc_1 \mu^{-1} e_1(t) + \varphi(t); \\ \dot{e}_i(t) &= -c_i e_i(t) - \eta_{i-1}(t); \\ u(t) &= -c_\gamma e_\gamma(t) + k_\gamma v_{m,\gamma} + \bar{U}_{\gamma-1}(t); \\ \eta_{i-1}(t) &= \dot{U}_{i-1}(t) - \bar{U}_{i-1}(t), i = \overline{2, \gamma}. \end{aligned} \quad (19)$$

В результате система (19) содержит только измеряемые сигналы, а значит, она реализуема.

Очевидно, что система управления (19) существенно проще, чем в [3, 5–8]. Как отмечалось ранее, это достигнуто за счет того, что стабилизирующие $U_{i-1}(t)$ и основной законы управления $u(t)$ содержат только известные сигналы, используемые в системе управления. В [3, 5–8] для компенсации неопределенностей вводились дополнительные нелинейные слагаемые в $U_{i-1}(t)$ и $u(t)$. В данной статье для компенсации неизвестных функций используется аппарат сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений. Введение реальных дифференцирующих звеньев для реализации производных от $U_{i-1}(t)$, $i = \overline{2, \gamma}$, позволило существенно сократить расчет и реализацию алгоритма управления.

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений. Тогда существуют числа $c_i > 0$, $i = \overline{1, \gamma}$, и $\mu_0 > 0$, такие, что при $\mu \leq \mu_0$ алгоритм управления (19) обеспечивает выполнение целевого условия (3).

Доказательство. Принимая во внимание (19), составим уравнения для ошибок рассогласования $\eta_{i-1}(t)$:

$$\dot{\eta}_{i-1}(t) = -\mu^{-1} \eta_{i-1}(t) + \ddot{U}_{i-1}(t), i = \overline{2, \gamma}. \quad (20)$$

Перепишем (8), (11), (12), (15) и (20) в виде

$$\begin{aligned} \mu_1 \dot{e}_1(t) &= -kc_1 e_1(t) + \mu_2 \varphi(t); \\ \dot{e}_i(t) &= -c_i e_i(t) - \eta_{i-1}(t); \\ \mu_1 \dot{\eta}_{i-1}(t) &= -\eta_{i-1}(t) + \mu_2 \ddot{U}_{i-1}(t), i = \overline{2, \gamma}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Воспользуемся первой леммой [9] и рассмотрим сначала систему (21) при $\mu_2 = 0$. Выберем функцию Ляпунова

$$V(t) = 0,5 e_1^2(t) + 0,5 \sum_{i=2}^{\gamma} [e_i^2(t) + \eta_{i-1}^2(t)] \quad (22)$$

и продифференцируем ее по времени с учетом уравнений (21):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -kc_1 \mu_1^{-1} e_1^2(t) + \\ &+ \sum_{i=2}^{\gamma} [-c_i e_i^2(t) - e_i(t) \eta_{i-1}(t) - \mu_1^{-1} \eta_{i-1}^2(t)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Воспользуемся оценкой $-e_i(t) \eta_{i-1}(t) \leq \mu_0^{-1} e_i^2(t) + \mu_0 \eta_{i-1}^2(t)$, $i = \overline{2, \gamma}$, и подставим ее в (23):

$$\dot{V}(t) \leq -kc_1 \mu_1^{-1} e_1^2(t) - \sum_{i=2}^{\gamma} [\bar{c}_i e_i^2(t) + \bar{d} \eta_{i-1}^2(t)], \quad (24)$$

где коэффициенты $\bar{c}_i = c_i - \mu_0^{-1}$, $\bar{d} = \mu_1^{-1} - \mu_0$. Очевидно, что можно выбрать числа c_i , $i = \overline{1, \gamma}$, μ_1 и μ_0 так, чтобы было выполнено $\bar{c}_i > 0$, $i = \overline{1, \gamma}$, $\bar{d} > 0$. Значит, система (21) будет асимптотически устойчива при $\mu_2 = 0$. Следовательно [9], переменные $\varphi(t)$ и $\ddot{U}_{i-1}(t)$, $i = \overline{2, \gamma}$, ограничены, т. е. $|\varphi(t)| \leq \chi$ и $|\ddot{U}_{i-1}(t)| \leq \chi_{i-1}$. Покажем теперь ограниченность остальных сигналов в замкнутой системе.

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \beta_1(t) + v_0^T(t) \psi - \dot{y}_m(t) + \bar{f}(t) + \zeta(t)$. Из предположения 4 следует, что функции $\dot{y}_m(t)$, $\bar{f}(t)$ — ограничены. Сигнал $\zeta(t)$ является экспоненциально затухающим [3]. Поскольку $V(t) \geq 0$ и $\dot{V}(t) \leq 0$, то $|e_1(t)| = |y(t) - y_m(t)| < \infty$, следовательно $|y(t)| < \infty$. Значит, из гурвицевости матрицы A_0 и уравнений (5): $|\xi_i(t)| < \infty$, $i = \overline{0, n}$. Тогда и $|\beta_1(t)| = |-k_1 \xi_{n,1}(t) + \xi_{n,2}(t) + k_1 y(t)| < \infty$.

Рассмотрим вектор $v_0(t)$, представленный в виде

$$\begin{aligned} v_0^T(t) &= \left[0, \frac{p}{K(p)} [p^{m-1}, \dots, p, 1] u(t), \right. \\ &\quad \left. \frac{p}{K(p)} [p^{n-1}, \dots, p, 1] y(t) \right] = \\ &= \frac{p}{K(p)} \left[0, [p^{m-1}, \dots, p, 1] \frac{Q(p)}{R(p)} y(t) - f(t), \right. \\ &\quad \left. [p^{n-1}, \dots, p, 1] y(t) \right], \end{aligned}$$

где $K(p)$ — характеристический полином матрицы A_0 в фильтрах (5). В силу гурвицевости многочлена $R(\lambda)$ (предположение 3), ограниченности сигналов $f(t)$ (предположение 4) и $y(t)$ следует ограниченность вектора $v_0(t)$. Значит, $|v_m(t)| < \infty$. Тогда из последнего уравнения в (5) $|u(t)| < \infty$.

В соответствии с леммой [9] существует $\mu_0 > 0$, такое, что при $\mu_1 \leq \mu_0$ и $\mu_2 \leq \mu_0$ область диссипативности (21) остается той же, что и при $\mu_2 = 0$. Однако

система (21) уже не будет асимптотически устойчивой, а будет иметь некоторую область притяжения. Для определения этой области вычислим полную производную от функции (22) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ на траекториях системы (21), принимая во внимание (24). В результате получим

$$\dot{V}(t) \leq -kc_1\mu_0^{-1}e_1^2(t) + e_1(t)\varphi(t) - \sum_{i=2}^{\gamma} [\bar{c}_i e_i^2(t) + \bar{d} \eta_{i-1}^2(t) - \eta_{i-1}(t) \ddot{U}_{i-1}(t)]. \quad (25)$$

Воспользовавшись оценками $-\eta_{i-1}(t) \ddot{U}_{i-1}(t) \leq |\eta_{i-1}(t)|\chi_{i-1} \leq 0,5\mu_0^{-1}\eta_{i-1}^2(t) + 2\mu_0\chi_{i-1}^2$; $e_1(t)\varphi(t) \leq |e_1(t)|\|\varphi(t)\| \leq \mu_0^{-1}e_1^2(t) + \mu_0\chi^2$, перепишем (25) в виде:

$$\dot{V}(t) \leq -k\bar{c}_1 e_1^2(t) - \sum_{i=2}^{\gamma} [\bar{c}_i e_i^2(t) + \bar{d} \eta_{i-1}^2(t)] + \mu_0\tilde{\varphi}, \quad (26)$$

где $\tilde{d} = \bar{d} - 0,5\mu_0^{-1}$, $\tilde{\varphi} = \chi^2 + 2 \sum_{i=2}^{\gamma} \chi_{i-1}^2$. Очевидно, что $\tilde{d} < 0$ при $\mu_0 \in (0; \sqrt{2})$. С учетом (22) преобразуем (26) к виду

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha_0 V(t) + \mu_0\tilde{\varphi}.$$

Здесь $\alpha_0 = 2\min\{kc\mu_0^{-1}, \bar{c}_i|_{i=\overline{2,\gamma}}, \tilde{d}\}$. Решим последнее дифференциальное неравенство. В результате получим $V(t) \leq e^{-\alpha_0 t} V(0) + \mu_0\tilde{\varphi} \alpha_1^{-1}$. Поскольку $e_1^2(t) \leq 2V(t) \leq 2e^{-\alpha_0 t} V(0) + 2\mu_0\tilde{\varphi} \alpha_1^{-1}$, то подставив требуемое значение T из целевого условия (3) и приравняв правую часть последнего неравенства к величине δ^2 , получим оценку для μ_0 :

$$\mu_0 = 0,5\alpha_1\tilde{\varphi}^{-1}[\delta^2 - 2e^{-\alpha_0 T} V(0)].$$

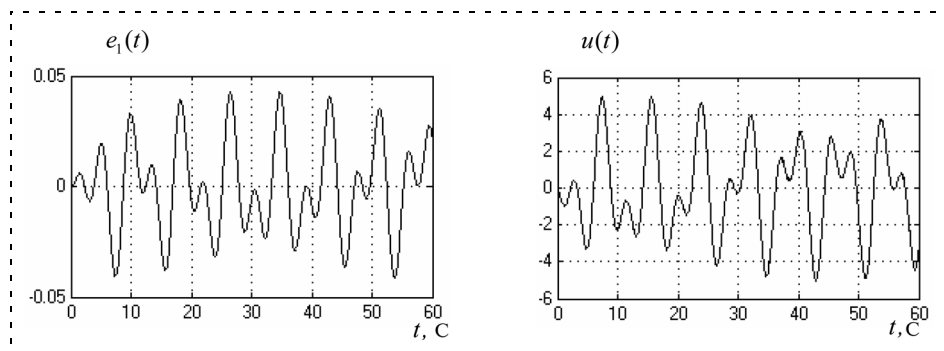


Рис. 1. Результаты моделирования по ошибке слежения и управлению

Следует отметить, что из-за грубых оценок, применяемых при доказательстве утверждения, получилась довольно грубая оценка μ_0 .

Для иллюстрации работоспособности системы управления (19) приведем числовые примеры.

Пример

Рассмотрим линейный стационарный объект управления в виде

$$(p^3 + q_2 p^2 + q_1 p + q_0)y(t) = r_0[u(t) + f(t)],$$

где $q_i, i = \overline{0,2}$, r_0 и $f(t)$ — неизвестные параметры и внешнее возмущение. Известен класс неопределенности, заданный неравенствами: $|q_i| \leq 30, 1 \leq r_0 \leq 30, |f(t)| \leq 30$. Порядки числителя m и знаменателя n передаточной функции объекта соответственно равны 0 и 3. Относительная степень $\gamma = 3$. Эталонную модель (2) зададим уравнением $(p + 1)^3 y_m(t) = r(t)$.

Система управления (19) состоит из следующих устройств:

- последний фильтр состояния (5), заданный системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{0,1}(t) \\ \dot{v}_{0,2}(t) \\ \dot{v}_{0,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,1}(t) \\ v_{0,2}(t) \\ v_{0,3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

где $k_1 = 6, k_2 = 12$ и $k_3 = 8$;

- стабилизирующие $U_1(t)$ и $U_2(t)$ и основное $u(t)$ управления:

$$U_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + k_1 v_{0,1};$$

$$U_2(t) = -c_2 e_2(t) + k_2 v_{0,1} + \bar{U}_1(t);$$

$$u(t) = -c_3 e_3(t) + k_3 v_{0,1} + \bar{U}_2(t).$$

В последних уравнениях $e_1(t) = y(t) - y_m(t)$, $e_2(t) = v_{0,2}(t) - U_1(t)$, $e_3(t) = v_{0,3}(t) - U_2(t)$. Выберем $c_1 = 0,1, c_2 = c_3 = 10$ и $\mu = 0,01$;

- наблюдатели (18):

$$\bar{U}_1(t) = \frac{p}{\mu p + 1} U_1(t); \quad \bar{U}_2(t) = \frac{p}{\mu p + 1} U_2(t).$$

Все начальные условия в системе управления примем нулевыми.

На рис. 1 приведены результаты моделирования по ошибке слежения $e_1(t)$ и управлению $u(t)$ при следующих исходных данных в объекте управления: $q_2 = 2, q_1 = -1, q_0 = 0, r_0 = 2,5, f(t) = 2 \sin 1,5t$ и эталонной модели: $r(t) = 2,5 \sin 0,8t$. Корни характеристического уравнения такого объекта равны 3,3028, 0 и 0,3028.

Рассмотрим объект управления и эталонную модель с параметрами: $q_2 = -3$, $q_1 = 7$, $q_0 = -5$, $r_0 = 2,5$, $f(t) = 5 + 5\sin 1,5t + P_1(t)$ и $r(t) = 1 + 2,5\sin 0,8t + P_2(t)$; $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — прямоугольные импульсы с амплитудами 2 и 1, периодами 0,5 и 2 с и длительностью импульсов 0,25 и 1 с, соответственно. Корнями знаменателя передаточной функции такого объекта являются 1 и $1 \pm 2j$ (j — мнимая единица). На рис. 2 (а, б) приведены переходные процессы по ошибке слежения

при $\mu = 0,01$ и $\mu = 0,001$ соответственно. Остальные параметры в замкнутой системе остаются теми же.

В первом примере (при $\mu = 0,01$) рассмотрен объект и эталонная модель, параметры которых аналогичны параметрам в [3]. Коэффициенты k_i в фильтрах и c_i в сигналах управления, $i = \overline{1, 3}$, те же что и в [3]. Легко видеть, что в представленном здесь примере ошибка $e_1(t)$ принимает значения, примерно в 4 раза меньшие, чем в [3], при том же уровне сигнала управления $u(t)$.

Во втором примере (при $\mu = 0,001$) рассмотрен объект управления с более "плохими" параметрами, чем в первом. В первом случае параметры замкнутой системы остались прежними. Во втором случае значение коэффициента μ уменьшено в 10 раз, при этом значение ошибки $e_1(t)$ также уменьшилось примерно в 10 раз. Численное моделирование показало, что чем меньше μ и больше c_i , тем меньше диаметр множества притяжения, что подтверждает результаты аналитических выводов.

Заключение

В статье предложен алгоритм линейного робастного управления, основанный на методе обратного обхода интегратора. Рассмотрено управление параметрически и функционально неопределенными линейными объектами с измеряемым скалярным выходом.

В отличие от ранее известных методов, основанных на итеративных процедурах синтеза, здесь предложена система управления, использующая всего лишь один вектор состояния по переменной $u(t)$ размерности n . К тому же производные стабилизирующих сигналов управления не вычисляются, а оцениваются с помощью реальных дифференцирующих звеньев. Все это позволяет существ-

венно упростить аналитический расчет параметров замкнутой системы и ее техническую реализацию.

Очевидно, что применяя в работе параметризацию [3], можно, как и в [3, 5–8], использовать априорную информацию о параметрах объекта. Это позволит еще больше упростить реализацию системы и улучшить показатели качества переходных процессов.

Аналитически доказано, что ошибка слежения входит в заданную зону δ за конечное время T , причем с уменьшением μ и увеличением c_i можно добиться сколь угодно малого значения δ . Теоретические расчеты подтверждены результатами численного моделирования.

Список литературы

1. Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой // А и Т. 1994. № 9. С. 3–22.
2. Monopoli R. V. Model reference adaptive control with an augmented signal // IEEE Trans. Automat. Control. 1974. Vol. 19. N 5. P. 474–484.
3. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000, 549 с.
4. Morse A. S. High-order parameter tuners for adaptive control on nonlinear system // Isidori A., Tarn T. I. (eds). Systems, Models and Feedback: Theory and Applications. Birkhanser. 1992. P. 339–364.
5. Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V., Morse A. S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // IEEE Trans. On Automat. Control. 1991. Vol. 36. P. 1241–1253.
6. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Passivity and parametric robustness of new class of adaptive systems // Automatica. 1994. Vol. 30. P. 1703–1716.
7. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems // IEEE Trans. On Automat. Control. 1994. Vol. 39. N 4. P. 738–751.
8. Zheng Y., Yang Y. Adaptive output feedback control for class of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients signs // Adaptive control and signal processing. 2007. Vol. 21. N 1. P. 77–89.
9. Брусил В. А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // А и Т. 1995. № 4. С. 119–127.

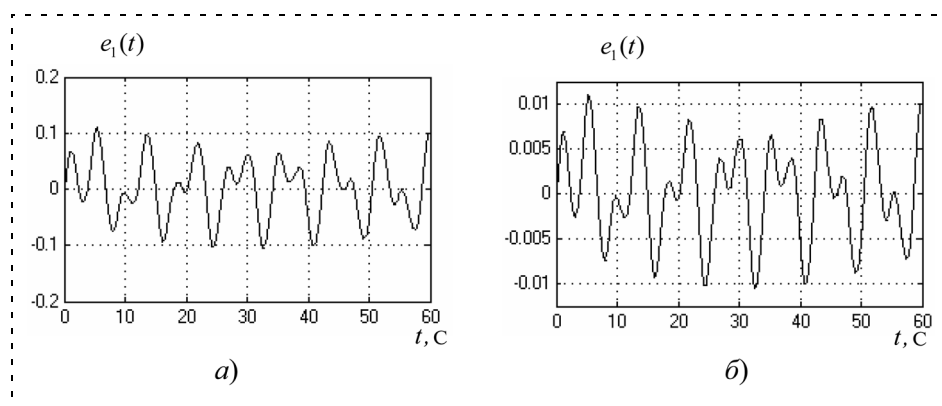


Рис. 2. Переходные процессы по ошибке слежения

Н. Н. Макаров, д-р техн. наук, проф.,
К. И. Владимиров, аспирант,
 Тульский государственный университет
 nnm@sau.tsu.tula.ru

Предельные отклонения в кусочно-линейных системах управления

Вводится класс дискретных кусочно-линейных систем, для которых решается задача о накоплении возмущений. Используется метод динамического программирования. Предложен итерационный алгоритм, позволяющий эффективно получать численное решение.

Ключевые слова: кусочно-линейная система, типы кусочно-линейных систем, накопление возмущений, предельное отклонение, динамическое программирование, вычислительный алгоритм.

Поиск предельных отклонений систем управления исторически известен как задача о накоплении возмущений. Эта задача систематически исследуется в теории управления с 1946-го года, и основные результаты связаны с линейными непрерывными системами [1]. Эти исследования послужили основой метода гарантированной точности, развиваемого, в частности, в [2, 3]. Данная статья расширяет класс систем, для которых применим метод гарантированной точности.

Кусочно-линейные системы представляют собой обширный и практически важный класс систем автоматического управления. К ним относятся, в частности, системы с сухим трением, с ограничениями на фазовые координаты, с ограничителями разнообразной физической природы (в том числе механическими упорами), системы с переменной структурой (в англоязычной литературе — switching systems), релейные системы.

Описание класса исследуемых систем

По определению кусочно-линейной будет называться система, динамика которой в каждый момент времени ее функционирования описывается линейными соотношениями. Но от момента к моменту эти соотношения могут изменяться. Причинами такого изменения могут быть:

- внешние (логические) причины. Переключение зенитной установки из режима поиска цели в режим автосопровождения или переключение электропневмоклапана для изменения динамики газовой системы — все это изменение системы снаружи, оператором, т. е. управляемое изменение, возможное в любой момент времени. Каждое такое управляемое переключение переводит систему в другую **логическую конфигурацию**.

Число логических конфигураций будем обозначать N_L ;

- внутренние (физические) причины. Достижение одной из фазовых координат ограничителя или насыщения, изменение коэффициента усиления в зависимости от уровня входного сигнала — все это изменения, происходящие в зависимости от состояния системы, независимо от того, желательны ли они для целей ее работы.

Предположим, что для некоторой логической конфигурации i можно построить хотя бы одно разбиение фазового пространства на односвязные области с кусочно-гладкими границами. Из всех таких разбиений, при которых в каждой получившейся области динамика системы описывается линейными соотношениями, выберем минимальное по числу областей. Изменение структуры будет вызываться переходом из одной такой области в другую, и структуру системы в каждой из этих областей будем называть **физической конфигурацией**.

Число физических конфигураций внутри i -й логической будем обозначать N_i .

Конфигурацией системы будем называть совокупность ее логической и физической конфигураций. Общее число различных линейных соотношений, которые необходимо задать для описания системы, соответствует числу ее конфигураций:

$$N_K = \sum_{i=1}^{N_L} N_i.$$

Непрерывная кусочно-линейная система описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{i,j}x + B_{i,j}u + X_{i,j}; \\ j &= \varphi(i, x), \quad i = 1, \dots, N_L; \\ x(t^* + 0) &= d_{i,j}(x(t^* - 0)), \end{aligned} \quad (1)$$

где x — вектор состояния, $x \in \mathbb{R}^n$; u — вектор управления, $u \in \mathbb{R}^m$; i, j — индексы логической и физической конфигураций соответственно; $A_{i,j}$ — постоянные $(n \times n)$ -мерные матрицы; $B_{i,j}$ — постоянные $(n \times m)$ -мерные матрицы; $X_{i,j}$ — постоянные n -мерные векторы; $\varphi(i, x)$ — функция, задающая номер физической конфигурации в зависимости от текущего вектора состояния x и номера логической конфигурации i ; t^* — момент смены конфигурации; $d_{i,j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — функции разрыва.

Первое уравнение в (1) описывает динамику системы для j -й физической конфигурации при i -й логической. Физическая конфигурация определяется логической конфигурацией и состоянием системы, что определяется функцией $\varphi(i, x)$ в (1).

При смене конфигурации фазовые координаты могут терпеть разрывы. Этот факт отражает третье соотношение в (1), где t^* обозначен момент перехода. Для простоты положим, что величина разрыва определяется только конечной конфигурацией, в которую переходит система, и состоянием в момент перехода t^* и не зависит ни от управления u , ни от того, из какой конфигурации произошел переход.

Будем полагать, что все разрывы происходят по линейным зависимостям $d_{i,j}(x) = D_{i,j}x$, где $D_{i,j}$ — постоянные $(n \times n)$ -мерные матрицы. Естественно допустить, что применение функции разрыва никогда не приводит к изменению физической конфигурации. Будем дополнительно предполагать, что при каждой логической конфигурации i физические конфигурации отделяются друг от друга в пространстве системой кусочно-линейных границ.

Дискретная аппроксимация непрерывной кусочно-линейной системы выполняется следующим образом: строится точная дискретная аппроксимация каждой ее линейной конфигурации, после чего полученные дискретные линейные системы сшиваются в том же порядке, что и их линейные оригиналы (1), т. е. функции $\varphi(i, x)$ и $d_{i,j}(x)$ остаются без изменений. Введем матрицу $\tilde{D}_{i,j}(t_k)$, которая в моменты разрывов равна $D_{i,j}$, в остальные моменты — единичной матрице.

Тогда итоговая дискретная система описывается соотношениями

$$x(t_{k+1}) = \tilde{D}_{i,j}(t_k)(\Phi_{i,j}x(t_k) + \Gamma_{i,j}u(t_k) + \Upsilon_{i,j}); \quad (2)$$

$$j = \varphi(i, x(t_k)),$$

где t_k — дискретное время; $\Phi_{i,j}$, $\Gamma_{i,j}$ — постоянные матрицы тех же размерностей, что и $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ соответственно; $\Upsilon_{i,j}$ — постоянные векторы той же размерности, что и $X_{i,j}$.

Определим класс систем Ξ как множество всех систем вида (1), для которых дискретные аппроксимации (2) равномерно сходятся с уменьшением шага дискретизации времени.

Рассмотрим интервал дискретного времени $T = [t_1 \dots t_N]$. Ему соответствуют две группы динамических процессов, образующие в совокупности то, что далее будет называться многошаговым процессом в системе (2) на интервале T : процессы управления $[u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{N-1})]$ и **макроуправления** $[i(t_1), i(t_2), \dots, i(t_{N-1})]$. Управление $u(t) \in U^*$ на каждом шаге произвольно выбирается из фиксированной допустимой области $U^* \subseteq \mathbb{R}^m$. Макроуправление выбирается переводом системы в одну из ее логических конфигураций $i \in [1 \dots N_L]$.

Этим процессам соответствуют фазовая траектория, т. е. процесс изменения фазовых координат $[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)]$, и **макротраектория**, т. е. процесс изменения физической конфигурации системы $[j(t_1), j(t_2), \dots, j(t_{N-1})]$.

Исследование оптимальных процессов в кусочно-линейных дискретных системах недостаточно освещено в существующей литературе. В этой статье предлагается эффективный алгоритм численного решения задачи о накоплении возмущений в системах, относящихся к введенному классу.

Решение задачи о накоплении возмущений в случае управляемых переходов

Систему, каждая логическая конфигурация которой содержит только одну физическую конфигурацию, назовем чистой логико-динамической системой. Класс чистых логико-динамических систем (ЛДС) $\Xi_{\text{ЛД}}$ является подмножеством Ξ . В матрицах $\Phi_{i,j}$, $\Gamma_{i,j}$, $\Upsilon_{i,j}$ таких систем второй индекс всегда единица, и далее он будет опускаться.

Постановка задачи

Пусть задана замкнутая ограниченная область $U^* \subseteq \mathbb{R}^m$, задающая ограничение на выбор управления. Необходимо выбрать управление $[u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{N-1})]$ и макроуправление $[i(t_1), i(t_2), \dots, i(t_{N-1})]$, максимизирующие функционал

$$J = C^T x(t_N);$$

$$J \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

на траекториях заданной системы $P \in \Xi_{\text{ЛД}}$. Поскольку смысл функционала (3) — это максимизация предельного отклонения, в дальнейшем будем также называть его функционалом предельного отклонения.

Решение задачи

методом динамического программирования

Функциональное уравнение Беллмана для системы (2) с функционалом качества (3) задается [4, 5] рекуррентными соотношениями

$$F(t_N, x) = C^T x(t_N);$$

$$F(t_k, x) = \max_{u, i} F(t_{k+1}, x), 0 \leq k < N, \quad (4)$$

где $F(\cdot)$ — функция Беллмана [6]. Рассмотрение здесь ведется в "обратном времени", т. е. от конца процесса к его началу.

В частности, на шаге $k = N - 1$ соотношения (4) принимают вид

$$F(t_{N-1}, x) =$$

$$= \max_{u, i} (C^T \tilde{D}_i(t_{N-1})(\Phi_i x(t_{N-1}) + \Gamma_i u + \Upsilon_i)). \quad (4a)$$

Чтобы в дальнейшем избежать длинных цепочек из матриц $\tilde{D}_i(t_k)$, условимся обозначать

$$C^T \tilde{D}_{i(t_{N-1})}(t_{N-1}) \Phi_{i(t_{N-1})} \dots C^T \tilde{D}_{i(t_k)}(t_k) \Phi_{i(t_k)} =$$

$$= \tilde{C}_{t_k}(\Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_k)}).$$

Если каким-то образом определить оптимальное управление и макроуправление $u(t_{N-1})$, $i(t_{N-1})$, то

на следующем шаге $k = N - 2$ функция Беллмана задается соотношением

$$F(t_{N-2}) = \max_{u, i} (\tilde{C}_{t_{N-2}} (\Phi_{i(t_{N-1})} \Phi_i x(t_{N-2}) + \Phi_{i(t_{N-1})} \Gamma_i u(t_{N-2}) + \Phi_{i(t_{N-1})} \Upsilon_i)) + \tilde{C}_{t_{N-2}} (\Gamma_{i(t_{N-1})} u(t_{N-1}) + \Upsilon_{i(t_{N-1})}). \quad (4б)$$

В функции Беллмана можно выделить две части:

1) постоянную часть, не зависящую от текущего управления и макроуправления на текущем шаге, $F'(t_k) = \text{const}$;

2) переменную часть $\tilde{F}(t_k) = \tilde{F}(u(t_k), i)$, по которой и берется максимум.

На произвольном шаге k функция Беллмана имеет вид

$$F(t_k) = F'(t_k) + \max_{u, i} \tilde{F}(t_k);$$

$$F'(t_k) = \tilde{C}_{t_k} (\Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_{k+2})} \Gamma_{i(t_{k+1})} u(t_{k+1}) + \Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_{k+2})} \Upsilon_{i(t_{k+1})} + \dots + \Gamma_{i(t_{N-1})} u(t_{N-1}) + \Upsilon_{i(t_{N-1})}); \quad (4в)$$

$$\tilde{F}(t_k) = \tilde{C}_{t_k} (\Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_{k+1})} \Phi_i x(t_k) + \Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_{k+1})} \Gamma_i u(t_k) + \Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_{k+1})} \Upsilon_i).$$

Таким образом, метод динамического программирования дает решение задачи в виде

$$[u(t_k), i(t_k)] = \arg \max_{u, i} \tilde{F}(t_k). \quad (5)$$

Главная трудность здесь состоит в том, что $\tilde{F}$ зависит от значения фазового вектора $x(t_k)$, которое является частью оптимального процесса и не может быть выяснено до определения оптимального управления в целом. Стандартный подход к решению таких задач описан в [4], но он подвержен "проклятию размерности", что делает решение затруднительным уже для систем третьего-четвертого порядка.

Алгоритм численного решения

Предлагаемый алгоритм численного решения является итерационным с гарантированной сходимостью на заданном классе систем. Первый проход — вычисление функции Беллмана в обратном времени. Поскольку отсутствие информации о фазовом векторе мешает, принимается гипотеза о независимости от фазового вектора, т. е. принимается (5) в виде

$$[u^1(t_k), i^1(t_k)] = \arg \max_{u, i} (\tilde{C}_{t_k} (\Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_{k+1})} \Gamma_i u(t_k) + \Phi_{i(t_{N-1})} \dots \Phi_{i(t_{k+1})} \Upsilon_i)). \quad (5а)$$

В память записываются приближения по управлению $u^1(t_k)$ и макротраектории, а также стек матриц

$$M = [\tilde{C}_{t_2} (\Phi_{i(t_{N-1})} \Phi_{i(t_{N-2})} \dots \Phi_2), \tilde{C}_{t_3} (\Phi_{i(t_{N-1})} \Phi_{i(t_{N-2})} \dots \Phi_3), \dots, \tilde{C}_{t_{N-1}} (\Phi_{i(t_{N-1})}), E],$$

дающий возможность вычислить переменную часть функции Беллмана (5) на каждом шаге через соотношение

$$\tilde{F}(t_k) = M(k) \Phi_i x(t_k) + M(k) \Gamma_i u(t_k) + M(k) X_i. \quad (5б)$$

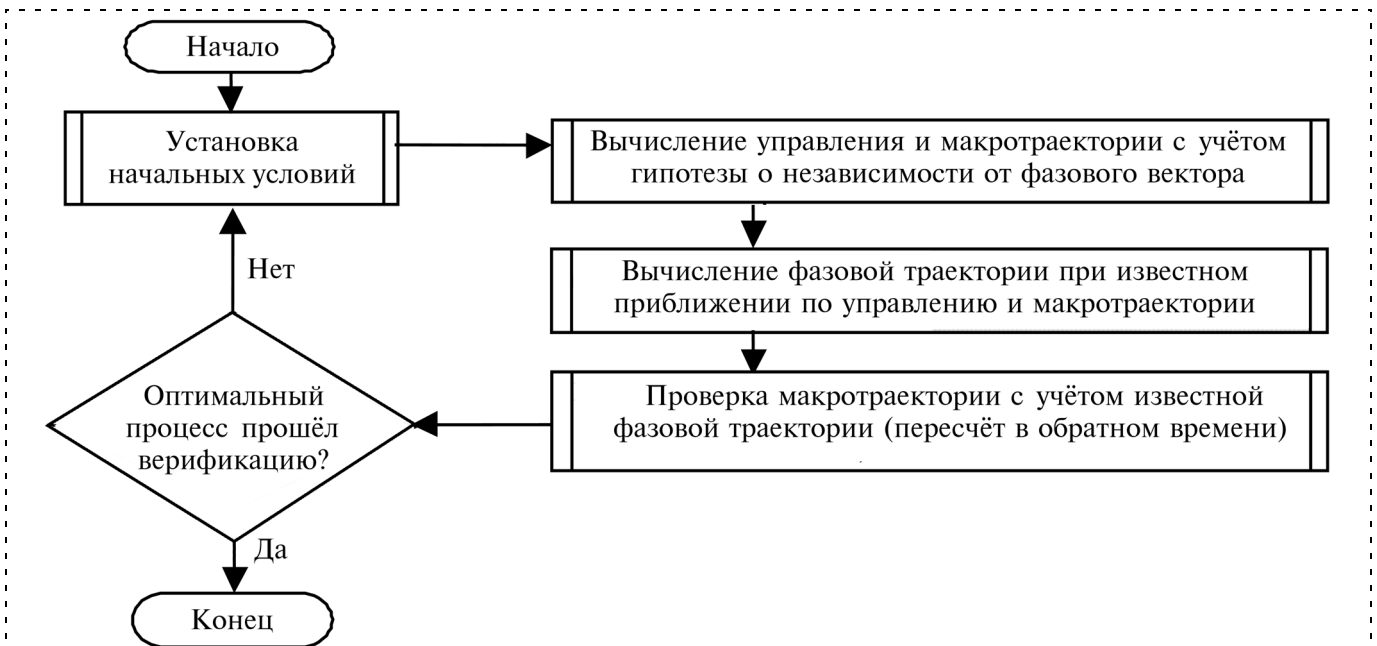


Рис. 1. Малый цикл верификации

Далее осуществляется переход в прямое время. Используя приближения по управлению и макроуправлению, из (5а) можно вычислить первое приближение по фазовой траектории $x^1(t_k)$. Зафиксировав его, далее следует (вновь в обратном времени) по полной формуле (5) построить приближение макроуправления $i^2(t_k)$.

Если макроуправления i^1 и i^2 совпали, то процесс завершен и оптимальное управление найдено, если же нет, то ищется первый момент времени t_k , в который они не совпали. Траектория считается **верифицированной** до момента t_k и пересчитывается от этого момента времени. Также изменения с учетом нового приближения $x^2(t_k)$ вносятся в стек матриц.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока на некотором шаге l приближения i^l и i^{l+1} не совпадут, т. е. вся траектория не окажется верифицирована.

Этот алгоритм, блок-схема которого приведена на рис. 1, будем называть малым циклом верификации.

Этот алгоритм сходится. Действительно, для одношагового процесса сходимость очевидна. В предположении, что алгоритм сходится для N -шагового процесса, рассмотрим $(N + 1)$ -шаговый процесс. Вследствие принципа оптимальности Беллмана управление на шагах $[1...N]$ должно быть выбрано оптимальным относительно управления на $(N + 1)$ -м шаге. Этот выбор возможен для каждого управления, выбранного на $(N + 1)$ -м шаге, причем исходя из индукционного предположения он возможен за конечное время. Поскольку выбор управления на $(N + 1)$ -м шаге осуществляется как $u = \operatorname{argmax}_i \tilde{F}(t_k)$, существует конечное число вариантов такого выбора, в худшем случае каждый из которых, а в лучшем случае — единственный будет опробован на очередном цикле верификации. Таким образом, малый цикл верификации для $(N + 1)$ -шагового процесса сходится в худшем случае за вдвое большее время, чем для N -шагового процесса, в лучшем случае — за один шаг, но в любом случае — сходится.

Решение задачи о накоплении возмущений в общем случае

В общем случае каждая логическая конфигурация может содержать произвольное число физических конфигураций, переключение между которыми зависит от фазового вектора.

Постановка задачи

Пусть задана замкнутая ограниченная область $U^* \subseteq \mathbb{R}^m$, задающая ограничение на выбор управления. Необходимо выбрать управление $[u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{N-1})]$ и макроуправление $[i(t_1), i(t_2), \dots, i(t_{N-1})]$

такие, чтобы максимизировать функционал предельного отклонения (3) на траекториях заданной системы $P \in \Xi$.

Решение задачи методом динамического программирования

Функциональное уравнение Беллмана для системы (2) с функционалом качества (3) задается рекуррентными соотношениями (4).

На шаге $k = N - 1$ они принимают вид

$$F(t_{N-1}, x) = \max_{u, i} (C \tilde{D}_i(t_{N-1})(\Phi_{i,j} x(t_{N-1}) + \Gamma_{i,j} u(t_{N-1}) + \Upsilon_{i,j})); \quad (6a)$$

$$j_k = \varphi(i, x(t_k)).$$

Несмотря на внешнюю схожесть с (4а), соотношения (6а) принципиально отличаются — на этот раз физическая конфигурация системы зависит от фазового вектора и задействованы оба нижних индекса.

Соотношения для j далее будем для краткости опускать, имея в виду, что j зависит от текущих логической конфигурации и фазового вектора.

Если каким-то образом определить оптимальное управление и макроуправление $u(t_{N-1}), i(t_{N-1})$, то на шаге $k = N - 2$ функция Беллмана задается соотношением

$$F(t_{N-2}) = \max_{u, i} (\tilde{C}_{t_{N-2}} (\Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \Phi_{ij} x(t_{N-2}) + \Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \Gamma_{ij} u(t_{N-2}) + \Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \Upsilon_{ij})) + \tilde{C}_{t_{N-2}} (\Gamma_{i_{N-1}, j_{N-1}} u(t_{N-1}) + \Upsilon_{i_{N-1}, j_{N-1}}). \quad (6b)$$

В функции Беллмана можно, как и в (4в), выделить две части:

1) постоянную часть, не зависящую от текущего управления и макросостояния на текущем шаге, $F'(t_k) = \text{const}$;

2) переменную часть $\tilde{F}(t_k) = \tilde{F}(u(t_k), i)$.

На произвольном шаге k функция Беллмана имеет вид

$$F(t_k) = F'(t_k) + \max_{u, i} \tilde{F}(t_k);$$

$$F'(t_k) = \tilde{C}_{t_k} (\Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \dots \Phi_{i_{k+2}, j_{k+2}} \Gamma_{i_{k+1}, j_{k+1}} u(t_{k+1}) + \Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \dots \Phi_{i_{k+2}, j_{k+2}} \Upsilon_{i_{k+1}, j_{k+1}} + \dots + \Gamma_{i_{N-1}, j_{N-1}} u(t_{N-1}) + \Upsilon_{i_{N-1}, j_{N-1}}); \quad (6b)$$

$$\tilde{F}(t_k) = \tilde{C}_{t_k} (\Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \dots \Phi_{i_{k+1}, j_{k+1}} \Phi_{ij} x(t_k) + \Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \dots \Phi_{i_{k+1}, j_{k+1}} \Gamma_{ij} u(t_k) + \Phi_{i_{N-1}, j_{N-1}} \dots \Phi_{i_{k+1}, j_{k+1}} \Upsilon_{ij}).$$

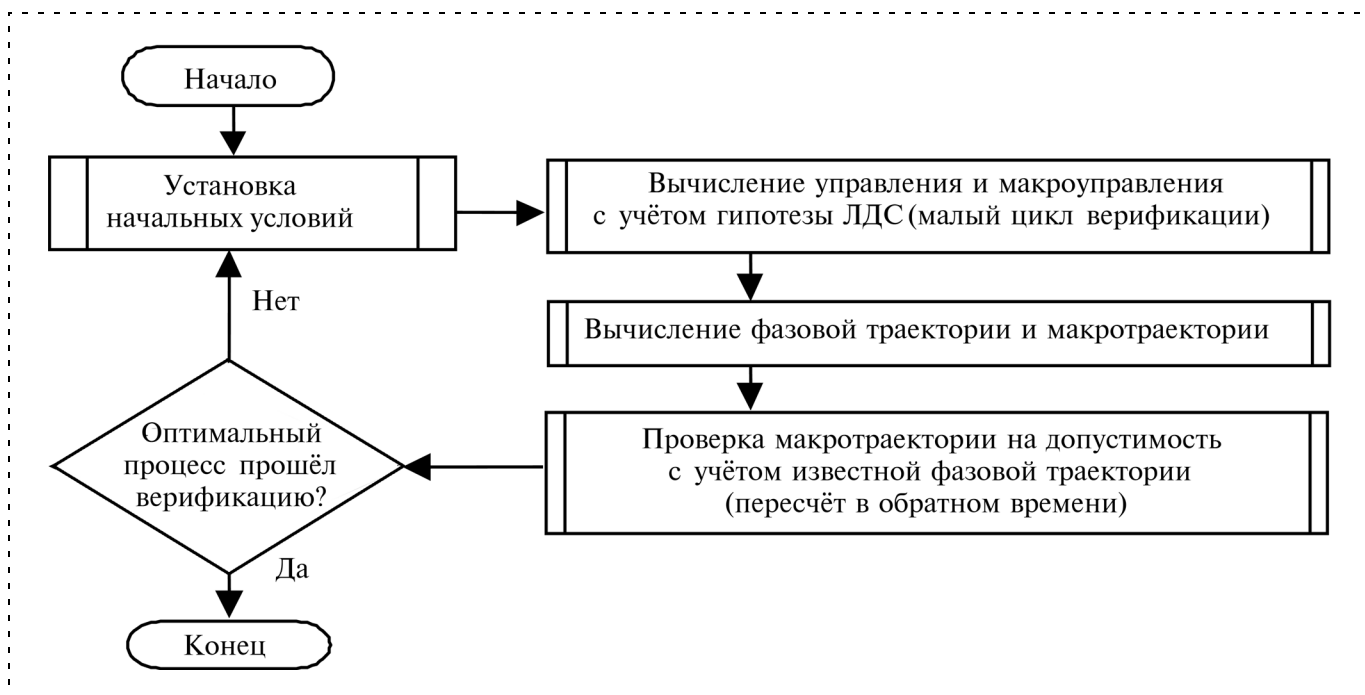


Рис. 2. Большой цикл верификации

Таким образом, метод динамического программирования, как и в (5), дает решение задачи в виде

$$[u(t_k), i(t_k)] = \arg \max_{u, i} \tilde{F}(t_k), \quad (7)$$

только с совершенно другим видом $\tilde{F}(\cdot)$.

Далее предлагается эффективный алгоритм для нахождения численного решения этой задачи.

Алгоритм численного решения

Предлагаемый алгоритм численного решения также является итерационным с гарантированной сходимостью на заданном классе систем и во многом схож с малым циклом верификации, включая его как один из своих шагов. Первый проход — вычисление функции Беллмана в обратном времени. Поскольку отсутствие информации о текущей физической конфигурации обусловлено отсутствием информации о текущем фазовом векторе, принимается гипотеза о том, что исследуемая система является чистой логико-динамической, и физические конфигурации в пределах данной логической тоже задаются макроуправлением, т. е. (7) принимается в виде

$$[u(t_k), i(t_k), j(t_k)] = \arg \max_{u, i, j} \tilde{F}(t_k). \quad (7a)$$

Эта задача уже была решена выше и (с точностью до обозначений) представляет собой малый цикл верификации. После того, как подпрограмма малого цикла отработает, в памяти останутся приближения по управлению и макротраектории $[u^i(t_k), i^i(t_k), j^i(t_k)]$,

а также стек матриц M , который будет записан на последнем шаге малого цикла верификации.

После этого система моделируется в прямом времени и ищется следующее приближение по оптимальному процессу. Далее, с учетом этого приближения и найденного приближения по управлению, проводится моделирование в обратном времени, при котором проверяется допустимость макротраектории на каждом шаге по выражению (7).

Получившаяся допустимая макротраектория $i'(t_k), j'(t_k)$ сравнивается с $i^i(t_k), j^i(t_k)$. Если они совпали, то процесс завершен и оптимальное управление найдено, если же нет, то ищется первый момент времени, в который они не совпали. Траектория пересчитывается от этого момента времени. Также изменения с учетом нового приближения $x^2(t_k)$ вносятся в стек матриц.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока приближения $i'(t_k), j'(t_k)$ и $i^i(t_k), j^i(t_k)$ не совпадут, т. е. траектория не окажется верифицирована.

Этот алгоритм, блок-схема которого приведена на рис. 2, будем называть большим циклом верификации.

Алгоритм завершает работу за конечное время. Обоснование этого аналогично обоснованию конечности времени работы малого цикла верификации.

Пример.

Звено второго порядка с переменным коэффициентом

Переменный коэффициент усиления часто появляется в технических системах либо как искусственно введенный для улучшения качества переходных

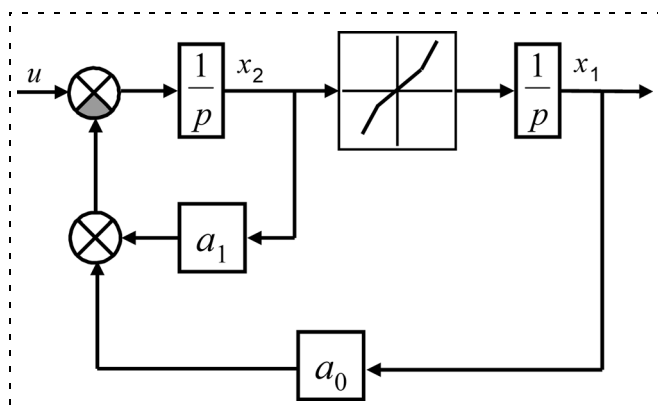


Рис. 3. Звено второго порядка с неуправляемым переменным коэффициентом

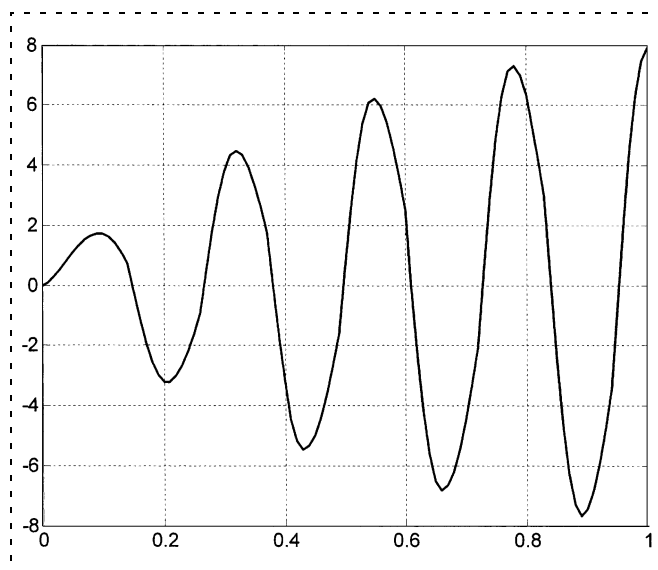


Рис. 4. Процесс накопления возмущений при управляемом коэффициенте усиления

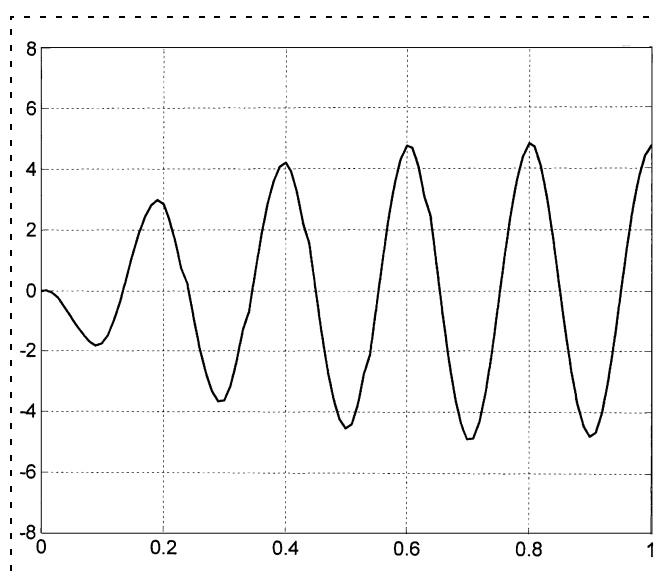


Рис. 5. Процесс накопления возмущений при неуправляемом коэффициенте усиления

процессов элемент, либо в виде аппроксимации реально присутствующих в системе физических нелинейностей.

Математическое описание:

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} k_p x_2 + X_p, & x > x^*; \\ kx_2 + X; & \\ k_m x_2 + X_m, & x < -x^*; \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = bu - a_0 x_1 - a_1 x_2.$$

Параметры системы:

$T = 1$, $N = 100$, $k = 5$, $k_m = k_p = 10$, $X = 0$, $X_m = 5$, $X_p = -5$, $x^* = 1$, $a_0 = 100$, $a_1 = 10$, $b = 1$, $|u| \leq 100$.

Физически такая система допускает две возможности: либо мы можем управлять коэффициентом усиления, переключая его с k на k_p или k_m , либо его наличие там продиктовано техническими причинами. Структурная схема для второго случая приведена на рис. 3.

В первом случае система является чистой логико-динамической, и оптимальные процессы в ней представлены на рис. 4. Во втором случае используется большой цикл верификации, результат которой представлен на рис. 5. Хорошо видно, что при возможности управлять коэффициентом усиления критерий достигает большего значения.

Если $k_m = k_p = k$, $X = X_m = X_p$ (т. е. система линейна), то и малый и большой циклы верификации сходятся за один шаг, и оптимальный процесс в точности совпадает с оптимальным процессом в линейной системе, рассчитанным по формуле Булгакова [1].

Таким образом, введен класс дискретных кусочно-линейных систем и исследовано решение задачи о накоплении возмущений на этом классе систем. Предложенные алгоритмы численного решения сходятся, не подвержены проклятию размерности и могут быть легко формализованы и использованы для решения конкретных технических задач.

Список литературы

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными коэффициентами // Доклады АН СССР. 1946. Т. 51. Вып. 5.
2. Макаров Н. Н., Макарова Н. Н. Синтез регулятора методом гарантированной точности // Известия ТулГУ. Т. 2. Вып. 3. Управление. 2000. С. 41—51.
3. Макаров Н. Н. Метод гарантированной точности следящих систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 11. С. 24—30.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1963.
5. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1964.
6. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. пособие для ВУЗов / М.: Высшая школа. 2003. 614 с.

В. И. Миронов, д-р техн. наук, вед. науч. сотр.,
Ю. В. Миронов, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.,
Р. М. Юсупов, чл.-корр. РАН, директор,
 Санкт-Петербургский институт
 информатики и автоматизации РАН
 mironuv@yandex.ru

Оптимизация управления в многоточечных задачах о встрече движений

Рассматривается задача оптимального управления движением активного объекта при его последовательной встрече с системой подвижных целевых объектов. Определяются необходимые условия оптимальности управления с учетом ограничений.

Ключевые слова: оптимальное управление, система подвижных объектов, необходимые условия оптимальности.

Задача оптимизации управления активным объектом (АО) при его последовательном сближении с группой подвижных целевых объектов (ЦО) относится к сложному и сравнительно мало изученному классу нелинейных многоточечных вариационных задач и, кроме того, связана с большим объемом вычислений. Задача такого рода рассматривалась, в частности, в [1, 2] для импульсной постановки применительно к условиям космического полета к астероидам, где определялся оптимальный маршрут облета нескольких небесных тел. Аналогичные задачи возникают и при маневрировании космических аппаратов в околоземном пространстве.

Особенно трудоемкими являются многоточечные задачи оптимального управления с конечным управлением, и поэтому для них особенно обостряется проблема разработки высокоточных, надежных (устойчивых) и экономичных методов численного решения, пригодных для использования в контурах оперативного управления.

В данной статье рассматриваются некоторые пути решения этих вопросов при заданном маршруте обхода ЦО.

Разработку таких методов принципиально можно вести на основе двух известных подходов — прямого и вариационного.

Прямые методы позволяют строить достаточно надежные вычислительные схемы решения сложных оптимизационных задач. Однако они весьма громоздки и требуют большого объема вычислений. Кроме того, в рамках прямого подхода трудно определить оптимальную структуру управления и оценить близость получаемых решений к строго оптимальным [3].

По этой причине в большинстве известных работ, посвященных оптимизационным двухточечным задачам встречи на орбите, используется вариационный подход, базирующийся на применении принципа максимума Л. С. Понтрягина [4]. Принцип максимума выражает необходимые условия первого порядка сильного локального минимума функционала. Он сводит исходную континуальную проблему к соответствующей краевой задаче для сопряженной П-системы.

Важным моментом при разработке методов решения многоточечных задач перехвата является формализация соответствующих необходимых условий оптимальности.

В теории оптимального управления рассматривались, в основном, такие многоточечные задачи последовательного типа, как задачи с промежуточными граничными условиями. Наиболее общие результаты в этой области получены в [5, 6]. Однако сформулированные задачи и полученные в этих работах необходимые условия оптимальности не учитывают главной особенности многоточечной задачи о встрече движений, в которой граничные условия формируются на решениях соответствующих систем нелинейных дифференциальных уравнений. Это обстоятельство обосновывает необходимость специального рассмотрения вопросов конкретизации необходимых условий оптимальности для данного класса задач.

Постановка задачи. Пусть динамика АО на интервале $t \in [t_0, T]$ описывается системой уравнений

$$\dot{x} = \varphi(x, u, c, t), \quad (1)$$

а движение группы из N ЦО — системами

$$\dot{y}_i = f_i(y_i, t); \quad t \in [t_0, T_i]; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где x — вектор состояния АО; y_i — вектор состояния i -го ЦО; u, c — векторы управления и параметров сближения; φ, f_i — нелинейные функции.

В начальный момент времени t_0 исходное положение каждого i -го ЦО определяется как

$$y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

а начальное $x(t_0)$ и конечное $x(T)$ положения управляемого объекта связаны зависимостями

$$z = z[x(t_0), t_0, x(T), T] = 0. \quad (4)$$

Требуется найти траекторию $x(t)$, управление и параметры сближения

$$u(t) \in \Omega_u, \quad t_0, t_1, \dots, t_N, T, c,$$

обеспечивающие в моменты времени t_i выполнение заданных условий встречи с каждым i -м ЦО:

$$\psi = \psi[x(t_i), y_i(t_i)] = 0, \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < T,$$

и минимизацию функционала

$$I = g[x(t_0), t_0, x(T), T] + \int_{t_0}^T \varphi_0(x, u, t) dt,$$

т. е. $\{u(t), t_0, t_1, \dots, t_N, T, c\} \rightarrow \min_{u \in \Omega_{u^c}} I$.

Необходимые условия оптимальности. Для определения необходимых условий оптимальности управления можно применить различные известные методы. В данной статье этот вопрос решается на основе методического подхода, принятого в работе В. А. Троицкого [6]. Полагается, что введенные функции дифференцируемы по соответствующим аргументам.

Разобьем весь интервал $t \in [t_0, T]$ точками t_i , $i = 1, 2, \dots, N$, на $N + 1$ участков. Следуя общим правилам [6], составим функционал J , с помощью которого определяются необходимые условия стационарности функционала I :

$$J = \gamma + \sum_{i=1}^N \left\{ \vartheta_i^T \psi[x(t_i), y_i(t_i)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} L_i dt \right\} + \int_{t_N}^T L_{N+1} dt, \quad (6)$$

где

$$\gamma = g[x(t_0), t_0, x(T), T] + \rho^T z[x(t_0), t_0, x(T), T];$$

$$L_i = \lambda_i^T \dot{x}_i - H_{\lambda_i};$$

$$L_{N+1} = \lambda_{N+1}^T \dot{x}_{N+1} - H_{\lambda_{N+1}};$$

$$H_{\lambda_i} = -\varphi_{0i} + \lambda_i^T \varphi_i;$$

$$H_{\lambda_{N+1}} = -\varphi_{0N+1} + \lambda_{N+1}^T \varphi_{N+1},$$

а $\lambda_i(t)$, $\lambda_{N+1}(t)$, ρ , ϑ_i — подлежащие вычислению неопределенные множители Лагранжа.

Условие стационарности получается в результате приравнивания нулю первой вариации функционала J и имеет вид

$$\Delta J = 0. \quad (7)$$

Составим эту вариацию:

$$\Delta J = \Delta \gamma + \sum_{i=1}^N \left\{ \vartheta_i^T \Delta \psi[x(t_i), y_i(t_i)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\lambda_i^T \delta \dot{x}_i - H_{\lambda_i}) dt \right\} + \int_{t_N}^T [\lambda_{N+1}^T \delta \dot{x}_{N+1} - \delta H_{\lambda_{N+1}}] dt. \quad (8)$$

Интегрируя (8) по частям, вычислим интеграл от членов, содержащих вариации $\delta \dot{x}_i$, $\delta \dot{x}_{N+1}$:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_i^T \delta \dot{x}_i dt = \lambda_i^T \delta x_i \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\lambda}_i^T \delta x_i dt; \quad (9)$$

$$\int_{t_N}^T \lambda_{N+1}^T \delta \dot{x}_{N+1} dt = \lambda_{N+1}^T \delta x_{N+1} \Big|_{t_N}^T - \int_{t_N}^T \dot{\lambda}_{N+1}^T \delta x_{N+1} dt. \quad (10)$$

Определим далее вариации соответствующих членов в (8):

$$\Delta \gamma = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x(t_0)} - \lambda^T(t_0) \right] \Delta x(t_0) + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x(T)} + \lambda^T(T) \right] \Delta x(T) + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t_0} + (H_{\lambda})_{t_0} \right] \delta t_0 + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial T} - (H_{\lambda})_T \right] \delta T; \quad (11)$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x(t_i)} \Delta x(t_i) + \frac{\partial \psi}{\partial x(t_i)} \dot{x}(t_i) \delta t_i + \frac{\partial \psi}{\partial y_i(t_i)} \dot{y}_i(t_i) \delta t_i; \quad (12)$$

$$\delta H_{\lambda_i} = \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial u_i} \delta u_i; \quad (13)$$

$$\delta H_{\lambda_{N+1}} = \frac{\partial H_{\lambda_{N+1}}}{\partial x_{N+1}} \delta x_{N+1}. \quad (14)$$

После подстановки выражений (9)–(14) в (8) и группирования соответствующих членов получим следующее выражение для вариации ΔJ :

$$\begin{aligned} \Delta J = & \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x(t_0)} - \lambda^T(t_0) \right] \Delta x(t_0) + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x(T)} + \lambda^T(T) \right] \Delta x(T) + \\ & + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t_0} + (H_{\lambda})_{t_0} \right] \delta t_0 + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial T} - (H_{\lambda})_T \right] \delta T + \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\lambda_{i+1}(t_i) - \lambda_i(t_i) + \frac{\partial \psi_i^T}{\partial x(t_i)} \vartheta_i \right]^T \Delta x(t_i) + \\ & + \sum_{i=1}^N \left\{ H_{\lambda_{i+1}} - H_{\lambda_i} + \vartheta_i^T \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x(t_i)} \varphi(t_i) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i(t_i)} f(t_i) \right] \right\} \delta t_i - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\left(\dot{\lambda}_i^T + \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial x_i} \right) \delta x_i - \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial u_i} \delta u_i \right] dt - \\ & - \int_{t_N}^T \left[\left(\dot{\lambda}_{N+1}^T + \frac{\partial H_{\lambda_{N+1}}}{\partial x_{N+1}} \right) \delta x_{N+1} - \frac{\partial H_{\lambda_{N+1}}}{\partial u_{N+1}} \delta u_{N+1} \right] dt. \quad (15) \end{aligned}$$

Вариация (15) должна быть равна нулю, поэтому будут равны нулю коэффициенты при всех независимых вариациях переменных. Соответствующие коэффициенты при зависимых вариациях переменных можно обратить в нуль за счет выбора

лагранжевых множителей. После этих операций получаем следующие системы уравнений:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N+1; \quad (16)$$

соотношения:

$$\frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial u} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N+1; \quad (17)$$

условия трансверсальности:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x(t_0)} - \lambda(t_0) = 0; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x(T)} - \lambda(T) = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_0} + (H_{\lambda})_{t_0} = 0; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial T} - (H_{\lambda})_T = 0 \quad (19)$$

и условия Эрдмана-Вейерштрасса:

$$\lambda_{i+1}(t_i) - \lambda_i(t_i) + \frac{\partial \psi_i^T}{\partial x(t_i)} \vartheta_i = 0; \quad (20)$$

$$H_{i+1}(t_i) - H_i(t_i) + \vartheta_i^T \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x(t_i)} \varphi(t_i) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i(t_i)} f(t_i) \right] = 0; \\ i = 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

При решении задачи оптимизации нужно использовать еще уравнения (1)–(5) и условия непрерывности фазовых координат

$$x_{i+1}(t_i) = x(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

Совокупность условий (16)–(22) и (1)–(5) и представляет систему необходимых условий оптимальности процесса управления в рассматриваемой многоточечной вариационной задаче.

Здесь уравнения (16) определяют динамику сопряженного вектора $\lambda(t)$, а равенства (18) и (20) задают граничные условия, которым должна удовлетворять оптимальная функция $\lambda(t)$ при $t \in [t_0, T]$ в моменты $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, T$. Как видим, поиск оптимального управления сводится к решению многоточечной краевой задачи. Из (20) следует, что в точках встречи t_i сопряженный вектор терпит разрыв.

Условия (4), (18) и (19) позволяют определить параметры начальной и конечной точек динамического процесса, а условия (21) служат для определения оптимальных моментов встречи $t_i, i = 1, 2, \dots, N$.

В целом, для решения поставленной задачи оптимизации необходимо определить вектор-функции x_i, λ_i, u_i , векторы параметров ρ, ϑ_i и величины $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, T$. Нетрудно видеть, что приведенная система условий содержит достаточное число связей для вычисления всей совокупности неизвестных.

Рассмотрим вопрос учета ограничений на вектор управления $u(t) \in \Omega_u$. Для этого, следуя [6], можно использовать известные приемы перехода от замкнутой области изменения управлений к от-

крытой области и принцип Вейерштрасса. Запишем необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала I

$$E \geq 0, \quad (23)$$

в котором E есть функция Вейерштрасса, составленная по формуле

$$E = L(x, \dot{x}, \tilde{u}, \lambda, t) - L(x, \dot{x}, u, \lambda, t) - (\dot{x} - \dot{x}) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \quad (24)$$

Здесь x и u — функции, сообщающие минимум функционалу J , а $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ — любые допускаемые функции, удовлетворяющие уравнениям задачи.

Подставим в (24) выражение L , тогда из (23) следует неравенство

$$H_{\lambda}(x, u, \lambda, t) \geq H_{\lambda}(\tilde{x}, \tilde{u}, \lambda, t). \quad (25)$$

Это означает, что на оптимальной по управлению траектории при $u \in \Omega_u$ функция $H_{\lambda}(x, u, \lambda, t)$ принимает максимальное значение.

Можно показать, что если в правые части уравнений движения активного объекта входит вектор параметров c :

$$\dot{x} = \varphi(x, u, c, t),$$

то при совместной оптимизации управляющей функции $u(t)$ и вектора c система необходимых условий оптимальности дополняется условием [4]

$$\dot{\mu} = \int_{t_0}^T \frac{\partial H}{\partial c} dt = 0. \quad (26)$$

Сформулируем полученные выше результаты в форме принципа максимума для случая, когда $T = t_N$.

Теорема. Для оптимальности $u(t), c, t_N$ и $x(t)$ необходимо выполнение следующих условий:

1) векторы $x(t)$ и $\lambda(t)$ удовлетворяют сопряженной системе

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, u, \lambda, c, t)}{\partial \lambda}; \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H(x, u, \lambda, c, t)}{\partial x}; \quad (27)$$

2) вектор управления обеспечивает максимум гамильтониану:

$$u(t) \rightarrow \max_{u \in \Omega_u} \{H(x, u, \lambda, c, t) = \lambda^T \varphi(x, u, t) - \varphi_0(x, u, t)\}, \\ t_0 \leq t \leq T; \quad (28)$$

3) выполняются условия трансверсальности для $x(t_0), \lambda(t_0), x(T), \lambda(T)$:

$$\left[\frac{\partial \gamma}{\partial x(t_0)} \right] - \lambda(t_0) = 0; \quad \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x(T)} \right] - \lambda(T) = 0; \quad (29)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_0} + (H_{\lambda})_{t_0} = 0; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial T} - (H_{\lambda})_T = 0, \quad (30)$$

где

$$\gamma = g[x(t_0), t_0, x(T), T] + \rho^T z[x(t_0), t_0, x(T), T];$$

$$H_\lambda = -\varphi_0(x, u, t) + \lambda^T \varphi(x, u, t);$$

4) при $t = t_i$ выполняются условия Эрдмана-Вейерштрасса

$$\lambda_{i+1}(t_i) - \lambda_i(t_i) + \vartheta_i^T \frac{\partial \psi_i}{\partial x(t_i)} = 0; \quad (31)$$

$$H_{i+1}(t_i) - H_i(t_i) + \vartheta_i^T \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i(t_i)} \varphi(t_i) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i(t_i)} f(y_i, t_i) \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (32)$$

где $\lambda(t)$, ρ , ϑ_i — неопределенные множители Лагранжа;

5) вектор c удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^T \frac{\partial H}{\partial c} dt = 0. \quad (33)$$

Как видно из условий, сопряженные переменные имеют скачки в моменты времени t_i , что является особенностью данного класса задач, которую необходимо учитывать при решении. Уравнения (2)—(5) с условиями (27)—(33) и условиями непрерывности вектора $x(t)$ дают достаточное число условий для определения всех неизвестных параметров и функций.

Из теоремы вытекают ряд важных в прикладном отношении следствий, конкретизирующих необходимые условия оптимальности для разных типов функционалов и для различных условий встречи.

Пример. Рассмотрим частный вариант краевых условий для задачи жесткого сближения космического аппарата при последовательном обходе целевых объектов. Для этого конкретизируем исходную постановку задачи.

Будем полагать, что движение объектов происходит в нормальном гравитационном поле, учитывающем полярное сжатие Земли. Движение управляемого объекта будем рассматривать в абсолютной геоцентрической экваториальной системе отсчета и опишем следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{r} = v; \quad \dot{v} = \varphi(r, t) + u(t); \quad \dot{m} = -\beta, \quad (34)$$

где

$$\varphi_x = ax; \quad \varphi_y = ay; \quad \varphi_z = (2bc + a)z;$$

$$a = -b[\alpha_{00} + c(d - 1)]; \quad b = R_0 r^{-3};$$

$$c = 1,5\alpha_{20} R_0^2 r^{-2}; \quad d = 5z^2 r^{-2};$$

$$\alpha_{00} = 62564951 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$\alpha_{20} = -67889,273 \text{ м}^2/\text{с}^2; \quad R_0 = 6371 \text{ км};$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2};$$

$$u(t) = u(t)\alpha(t); \quad u(t) = \frac{W\beta(t)}{m(t)};$$

$$\beta(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m_0}; \quad 0 \leq \beta \leq \beta_{\max};$$

$$\alpha(t) = [\cos v(t)\cos \psi(t), \sin v(t)\cos \psi(t), \sin \psi(t)]^T,$$

W — скорость истечения газов; β , m — относительные секундный расход топлива и масса; v , ψ — углы тангажа и рыскания.

Движение N пассивных ЦО описываются системами уравнений

$$\dot{r}_i = v_i; \quad \dot{v}_i = f(r_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (35)$$

где $f(r_i, t)$ — правые части уравнений движения пассивных ЦО, имеющие структуру, аналогичную $\varphi(r, t)$.

Требуется найти программу управления, доставляющую минимум функционалу

$$I = \int_0^T \varphi_0(x, u, t) dt,$$

при заданных ограничениях (14), где $x = [r, v]$.

Если минимизируются энергетические затраты, то

$$\varphi_0 = \beta(t),$$

а в случае минимизации времени сближения

$$\varphi_0 = 1,$$

при этом должны учитываться ограничения по имеющимся энергетическим запасам.

Решение при $\varphi_0 = \beta(t)$ сводится к соответствующей многоточечной краевой задаче, которая формулируется условиями оптимальности управления:

$$\alpha = -\frac{\lambda_v}{\|\lambda_v\|}; \quad \beta = \begin{cases} \beta_{\max}, & \text{при } \Delta_\Pi \geq 0; \\ 0, & \text{при } \Delta_\Pi < 0; \end{cases}$$

$$\Delta_\Pi = -\|\lambda_v\| \frac{m(t)}{W} - \lambda_m - 1,$$

где Δ_Π — функция переключения; системами дифференциальных уравнений движения (34) и (35); сопряженной системой

$$\dot{\lambda}_r = \frac{\pi_0}{r^3} \left[\lambda_v - \frac{3}{r^2} (\lambda_v^T r) r \right]; \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_r; \quad \dot{\lambda}_m = \frac{W\beta}{m^2} \lambda_v^T \alpha,$$

а также краевыми и промежуточными условиями:

$$x(t_0) = x_0; \quad y_i(t_0) = y_{i0};$$

$$\psi_i = r(t_i) - r_i(t_i) = 0;$$

$$\lambda_{r,i+1}(t_i) - \lambda_{r,i}(t_i) + \vartheta_{r,i} = 0;$$

$$\lambda_{v,i+1}(t_i) - \lambda_{v,i}(t_i) = 0; \quad \lambda_{v,N}(t_N) = 0; \quad \lambda_m(T) = 0;$$

$$R_i = H_{i+1}(t_i) - H_i(t_i) + \vartheta_{r,i}^T [v(t_i) - v_i(t_i)] = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

При заданном T и $t_N = T$ неизвестными являются векторы параметров:

$$q = [p_\lambda, t_N]^T;$$

$p_\lambda = [\lambda_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{N-1}]^T$; $t_N = [t_1, t_2, \dots, t_{N-1}]^T$, где λ_0 — начальный вектор сопряженных переменных; ϑ_i — векторы множителей Лагранжа; t_N — вектор неизвестных моментов встречи.

Оптимальные значения вектора параметров управления $q = [p_\lambda, t_N]^T$ являются решением краевого уравнения

$$s(q) = 0;$$

$$s = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, R, \lambda_{vN}(T), \lambda_m(T)]^T;$$

$$R = [R_1, R_2, \dots, R_N]^T,$$

которое при подходящем выборе начального приближения можно получить известными численными методами [3].

Список литературы

1. Жирнов В. А., Лидов М. Л. К задаче сближения с несколькими астероидами // Космические исследования. Т. XXVII. 1989. № 1. С. 3—8.
2. Жирнов В. А., Лидов М. Л. Решение задачи сближения с несколькими астероидами алгоритмом оптимальной коррекции // Космические исследования. Т. XXVI. 1988. № 4. С. 508—518.
3. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1969. 369 с.
5. Величенко В. В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями значений координат // ДАН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1011—1013.
6. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат // ДАН СССР. Т. 149. № 5. 1963. С. 268—271.

С 16 по 18 марта 2010 г. в Санкт-Петербурге
в ГНЦ РФ ЦНИИ "Электронприбор" состоится

XII конференция молодых ученых "Навигация и управление движением" (ХІІКМУ2010)

Председатель конференции — академик РАН В. Г. Пешехонов

ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ

- Гироскопические системы
- Спутниковые навигационные системы
- Интегрированные системы навигации
- Теория и системы управления
- Обработка информации в навигационных системах
- Электронные и электромеханические устройства систем навигации и управления
- Чувствительные элементы систем навигации и управления
- Информационные технологии на предприятиях навигационного приборостроения
- Микромеханические датчики, системы и технологии
- Навигация и управление движением

Конференция будет проходить **в три этапа**:

- ♦ первый этап (**март 2010 г.**) — выступление с докладами в ЦНИИ "Электронприбор"
- ♦ второй этап (**июнь—сентябрь 2010 г.**) — обсуждение докладов в Интернете
- ♦ третий этап (**сентябрь—октябрь 2010 г.**) — подведение итогов Интернет-форума и подготовка докладов для публикации в сборнике.

Адрес и контактные телефоны Организационного комитета конференции:

ГНЦ РФ-ЦНИИ "Электронприбор"

Ул. Малая Посадская, 30

197046, Россия, Санкт-Петербург

Тел.: (812) 499-82-10; Факс: (812) 232-33-76

E-mail: kmu@eprib.hi office@eprib.ru

<http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/kmu12/rindex.html>

УДК 621.865.8.001

О. Д. Егоров, канд. техн. наук, доц.,

В. А. Батунова,

Московский государственный
технологический университет "СТАНКИН"
chetty@gmail.ru

Определение погрешности позиционирования робота с учетом первичных ошибок и погрешностей обобщенных координат

Рассматривается задача определения погрешности позиционирования робота с учетом погрешностей длин и угловых параметров звеньев, смещений центров кинематических пар, погрешностей, вызванных системой управления и двигателями, погрешностей преобразователей движения и функциональных звеньев, вызванных их упругими деформациями, а также с учетом кинематических ошибок и мертвых ходов.

Ключевые слова: робот, погрешность, параметры, степень подвижности, обобщенная координата.

Введение

Создание автоматизированных производств, манипуляционных мехатронных комплексов и систем возможно благодаря применению многофункциональных машин, имитирующих действия человека, — роботов. Их применяют в технологических производственных процессах, медицине, военном деле, космосе, под водой и т. д. Внимание ученых, конструкторов, инженеров сосредоточено на создании роботов, отвечающих современным требованиям качества, надежности и безопасности.

Основным показателем качества робота является точность, которую оценивают погрешностью позиционирования — отклонением характеристической рабочей точки C рабочего органа робота от значения, задаваемого управляющей программой.

В зависимости от назначения робота в одних случаях требуется только точное позиционирование, т. е. точное приведение транспортируемого объекта в заданное положение в пространстве, в других необходимо обеспечить точное отслеживание заданной траектории или точное выполнение законов изменения во времени координат объекта.

Решить эти проблемы можно при использовании высокоэффективных технологий изготовления, современных методов расчетов и конструирования как отдельных механизмов, так и всего робота в целом.

Вопросами, связанными с определением точности работы робота занимались А. А. Игнатьев, А. А. Коб-

ринский, М. З. Коловский [3, 4, 5] и др. Их работы посвящены определению погрешности позиционирования робота с учетом только отклонений длин звеньев исполнительного механизма от их номинальных значений и погрешностей, вызванных неточностью работы системы управления.

В данной статье рассматривается n -звенный механизм с более широким кругом факторов, влияющих на погрешность позиционирования робота, что позволяет определить ее более точно. Эти факторы можно объединить в две группы: первичные ошибки и погрешности обобщенных координат.

Расчет первичных ошибок

Первичные ошибки представляют собой отклонения линейных Δl и Δc и угловых $\Delta \alpha$ параметров исполнительного механизма, возникающие при изготовлении звеньев и его сборке (технологические первичные ошибки), а также при эксплуатации (температурные, силовые и износные) (рис. 1). В результате наличия этих ошибок фактические размеры звеньев и их ориентация, определяющие положение рабочего органа в пространстве, отличаются от расчетных. Основную роль в образовании первичных ошибок играют технологические первичные ошибки. Только их мы будем учитывать в дальнейших расчетах.

Вектор первичных ошибок исполнительного механизма можно представить в виде [2]

$$\Delta W = W_d - W_p = \Delta W(\Delta l \Delta \alpha \Delta c),$$

где $W_d = W_d(l_d \alpha_d c_d)$; $W_p = W_p(l_p \alpha_p c_p)$; W_d и W_p — векторы действительных и расчетных (номинальных) параметров i -го звена соответственно; l_d и l_p — векторы действительных и расчетных линейных параметров (длин) звеньев; α_d и α_p — векторы действительных и расчетных угловых параметров звеньев соответственно; c_d и c_p — векторы действительных и расчетных положений центров кинематических пар соответственно; $\Delta l = [\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_m]^T$ — вектор погрешностей линейных параметров звеньев; Δl_i — погрешность длины i -го звена, $i = \overline{1, M}$, M — число звеньев; $\Delta \alpha = [\Delta \alpha_{1x}, \Delta \alpha_{1y}, \Delta \alpha_{1z}, \Delta \alpha_{2x}, \Delta \alpha_{2y}, \Delta \alpha_{2z}, \dots, \Delta \alpha_{Mx}, \Delta \alpha_{My}, \Delta \alpha_{Mz}]^T$ — вектор погрешностей угловых параметров звеньев; $\Delta \alpha_{ix}, \Delta \alpha_{iy}, \Delta \alpha_{iz}$ — погрешности угловых параметров i -го звена относительно осей x, y, z соответственно; $\Delta c = [\Delta c_{1x}, \Delta c_{1y}, \Delta c_{1z}, \Delta c_{2x}, \Delta c_{2y}, \Delta c_{2z}, \dots, \Delta c_{Mx}, \Delta c_{My}, \Delta c_{Mz}]^T$ — вектор погрешностей положений центров кинематических пар; $\Delta c_{ix}, \Delta c_{iy}, \Delta c_{iz}$ — погрешности положения центра i -й кинематической пары вдоль осей x, y, z соответственно.

Определение погрешностей обобщенных координат

Для формализации погрешности обобщенных координат будем использовать следующие обозначения: Δq — погрешность обобщенных координат; $\Delta q_{дв}$ — погрешность работы системы управления и двигателей; $\Delta q_{пр}$ — погрешность обобщенных координат, вызванная податливостью преобразователей движения; δ — кинематическая погрешность; J — мертвый ход; $\Delta\varphi$ — погрешность обобщенных координат, вызванная упругими свойствами звеньев исполнительного механизма; n — число степеней подвижности.

Погрешности Δq_j обобщенных координат (рис. 1) представляют собой отклонения линейных и угловых параметров звеньев исполнительного механизма от значений, заданных управляющей программой. Они возникают в результате погрешностей ввода обобщенных координат (погрешностей работы системы управления и двигателей $\Delta q_{дв}$), кинематических погрешностей δ_Σ и мертвого хода J_Σ преобразователей движения, податливостей E элементов передач и упругих свойств звеньев $E_{зв}$ исполнительного механизма [1].

Вектор погрешностей ввода обобщенных координат, приведенных к выходным звеньям преобразователей движения степеней подвижности, имеет вид

$$\Delta q_{дв} = \Phi \epsilon_z, \quad (1)$$

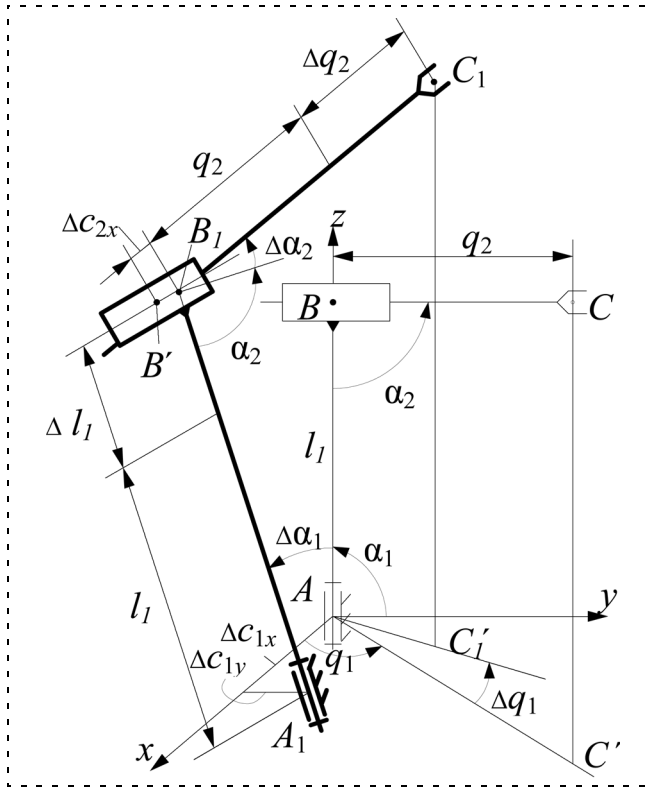


Рис. 1. Кинематическая схема исполнительного механизма робота с некоторыми первичными ошибками и погрешностями обобщенных координат

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{дв1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta\varphi_{дв2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta\varphi_{двn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

— матрица погрешностей работы системы управления и двигателей; $\Delta\varphi_{двj}$ — погрешность работы системы управления и двигателя j -й степени подвижности;

$$\epsilon_{пр} = [\epsilon_{1z}, \epsilon_{2z}, \dots, \epsilon_{nz}]^T \quad (3)$$

— вектор передаточных коэффициентов преобразователей движения степеней подвижности исполнительного устройства; $\epsilon_{прj} = \frac{1}{u_{прj}}$ — передаточный

коэффициент преобразователя движения j -й степени подвижности; $u_{прj}$ — передаточное отношение преобразователя движения j -й степени подвижности.

Кинематическая погрешность может быть выражена как алгебраическая разность между погрешностями положений выходного звена преобразователя движения, вызванными погрешностями его изготовления и сборки.

Вектор суммарных кинематических погрешностей степеней подвижности исполнительного механизма для многоступенчатых преобразователей движения имеет вид

$$\delta_\Sigma = \Delta \epsilon, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \dots & \delta_{nm} \end{bmatrix} \quad (5)$$

— матрица кинематических погрешностей преобразователей движения степеней подвижности; δ_{ij} — кинематическая погрешность i -й передачи j -й степени подвижности. Методика ее расчета приведена в работах [1, 2]; m — число передач в j -й степени подвижности; n — число степеней подвижности;

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \dots & \epsilon_{1n} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \dots & \epsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \epsilon_{m1} & \epsilon_{m2} & \dots & \epsilon_{mn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

— матрица передаточных коэффициентов преобразователей движения степеней подвижности:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{n} \prod_{k=i+1}^n u_{kj}$$

передачи j -й степени подвижности; u_{kj} — передаточное отношение k -й передачи j -го преобразователя движения.

При подстановке матриц (5) и (6) в формулу (4) и их перемножении произведение элементов с разными индексами равно нулю, так как эти элементы принадлежат разным степеням подвижности и передачам.

Мертвый ход представляет собой алгебраическую разность между погрешностями положений ведомого звена при его обратном и прямом ходах.

Вектор суммарного мертвого хода степеней подвижности исполнительного механизма, состоящих из многоступенчатых преобразователей движения, записывают в виде

$$\mathbf{J}_\Sigma = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} & \dots & J_{n1} \\ J_{12} & J_{22} & \dots & J_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{1m} & J_{2m} & \dots & J_{nm} \end{bmatrix} \quad (8)$$

— матрица мертвых ходов преобразователей движения степеней подвижности: J_{ij} — мертвый ход i -й передачи j -й степени подвижности. Методика его расчета приведена в работах [1, 2].

Погрешности обобщенных координат, вызванные податливостью преобразователей движения, возникают из-за того, что их элементы не являются абсолютно жесткими. Под действием нагрузок они деформируются. В этом случае вектор погрешностей обобщенных координат можно представить в виде

$$\Delta \mathbf{q}' = \mathbf{E}\mathbf{F}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{mx} & e_{my} & e_{mz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

— матрица податливостей преобразователей движения степеней подвижности; e_{jx} , e_{jy} , e_{jz} — приведенные податливости в j -й степени подвижности относительно осей x , y , z соответственно:

$$e_{jx} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ikj} \frac{\partial x_C}{\partial q_j}; \quad e_{jy} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ikj} \frac{\partial y_C}{\partial q_j};$$

$$e_{jz} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ikj} \frac{\partial z_C}{\partial q_j}; \quad (11)$$

e_{ikj} — приведенная податливость i -го элемента k -й группы одноименных элементов j -й степени подвижности; m — число групп одноименных элементов

(только валов, только зубчатых зацеплений и т. д.); n — число элементов в k -й группе одноименных элементов; x_C , y_C , z_C — проекции характеристической рабочей точки C рабочего органа на оси x , y , z соответственно; q_j — j -я обобщенная координата; $\mathbf{F} = [F_x, F_y, F_z]^T$ — вектор внешней силы, приложенной к рабочему органу; F_x , F_y , F_z — проекции вектора $\mathbf{F}$ внешней силы на координатные оси x , y , z .

Погрешности обобщенных координат, вызванные упругими свойствами звеньев исполнительного механизма, возникают при приложении к рабочему органу внешней силы. При этом звенья деформируются, и вектор погрешности рабочего органа имеет вид:

$$\Delta \Phi = \mathbf{E}_{3B}\mathbf{M}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{E}_{3B} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & e_m \end{bmatrix}; \quad (13)$$

— матрица податливостей звеньев; e_i — податливость i -го звена:

при изгибе

$$e_i = \int_0^{l_i} \frac{dz_i}{E_i J_i}; \quad (14)$$

при кручении

$$e_i = \frac{l_i}{G_i J_{pi}}; \quad (15)$$

l_i — длина i -го звена; E_i — модуль упругости Юнга материала i -го звена; J_i — осевой момент инерции поперечного сечения i -го звена; G_i — модуль упругости второго рода материала i -го звена; J_{pi} — полярный момент инерции поперечного сечения i -го звена; $\mathbf{M} = [M_1, M_2, \dots, M_m]^T$ — вектор эквивалентных моментов; M_i — эквивалентный момент на i -м звене:

$$M_i = \frac{M_{Fi} M_{1i}}{l_i}; \quad (16)$$

M_{Fi} — изгибающий или крутящий момент на i -м звене от действия внешней силы F ; M_{1i} — изгибающий или крутящий момент на i -м звене от действия внешней единичной силы.

Погрешность позиционирования робота

Вектор погрешности позиционирования характеристической рабочей точки C рабочего органа робота можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{r}_C = \mathbf{J}(l)\Delta l + \mathbf{J}(\alpha)\Delta \alpha + \mathbf{J}(c)\Delta c + \mathbf{J}(q)\Delta q, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{J}(\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial l_1} & \frac{\partial x_C}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial x_C}{\partial l_m} \\ \frac{\partial y_C}{\partial l_1} & \frac{\partial y_C}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial y_C}{\partial l_m} \\ \frac{\partial z_C}{\partial l_1} & \frac{\partial z_C}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial z_C}{\partial l_m} \end{bmatrix}$$

— матрица Якоби для положений по вектору длин $\mathbf{l}$ звеньев исполнительного механизма;

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_m} \\ \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_m} \\ \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{1x}} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{1y}} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{1z}} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{2x}} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{2y}} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{2z}} & \dots & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{mx}} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{my}} & \frac{\partial x_C}{\partial \alpha_{mz}} \\ \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{1x}} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{1y}} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{1z}} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{2x}} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{2y}} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{2z}} & \dots & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{mx}} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{my}} & \frac{\partial y_C}{\partial \alpha_{mz}} \\ \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{1x}} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{1y}} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{1z}} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{2x}} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{2y}} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{2z}} & \dots & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{mx}} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{my}} & \frac{\partial z_C}{\partial \alpha_{mz}} \end{bmatrix}$$

— матрица Якоби для положений по вектору угловых параметров $\boldsymbol{\alpha}$;

$$\boldsymbol{\alpha}_i = [\alpha_{ix}, \alpha_{iy}, \alpha_{iz}]^T$$

— вектор угловых параметров i -го звена; $\alpha_{ix}, \alpha_{iy}, \alpha_{iz}$ — угловые параметры i -го звена;

$$\mathbf{J}(\mathbf{c}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial c_{1x}} & \frac{\partial x_C}{\partial c_{1y}} & \frac{\partial x_C}{\partial c_{1z}} & \frac{\partial x_C}{\partial c_{2x}} & \frac{\partial x_C}{\partial c_{2y}} & \frac{\partial x_C}{\partial c_{2z}} & \dots & \frac{\partial x_C}{\partial c_{mx}} & \frac{\partial x_C}{\partial c_{my}} & \frac{\partial x_C}{\partial c_{mz}} \\ \frac{\partial y_C}{\partial c_{1x}} & \frac{\partial y_C}{\partial c_{1y}} & \frac{\partial y_C}{\partial c_{1z}} & \frac{\partial y_C}{\partial c_{2x}} & \frac{\partial y_C}{\partial c_{2y}} & \frac{\partial y_C}{\partial c_{2z}} & \dots & \frac{\partial y_C}{\partial c_{mx}} & \frac{\partial y_C}{\partial c_{my}} & \frac{\partial y_C}{\partial c_{mz}} \\ \frac{\partial z_C}{\partial c_{1x}} & \frac{\partial z_C}{\partial c_{1y}} & \frac{\partial z_C}{\partial c_{1z}} & \frac{\partial z_C}{\partial c_{2x}} & \frac{\partial z_C}{\partial c_{2y}} & \frac{\partial z_C}{\partial c_{2z}} & \dots & \frac{\partial z_C}{\partial c_{mx}} & \frac{\partial z_C}{\partial c_{my}} & \frac{\partial z_C}{\partial c_{mz}} \end{bmatrix}$$

— матрица Якоби для положения по вектору смещения центров $\mathbf{c}$ кинематических пар;

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial q_1} & \frac{\partial x_C}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_C}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_C}{\partial q_1} & \frac{\partial y_C}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y_C}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_C}{\partial q_1} & \frac{\partial z_C}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z_C}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

— матрица Якоби для положений по вектору обобщенных координат $\mathbf{q}$; q_j — j -я обобщенная координата; $\Delta \mathbf{q}$ — вектор погрешностей обобщенных координат:

$$\Delta \mathbf{q} = [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n]^T = [\Delta \mathbf{q}_{\text{дв}} + \boldsymbol{\delta}_{\Sigma} + \mathbf{J}_{\Sigma} + \Delta \mathbf{q}' + \Delta \Phi], \quad (18)$$

Δq_j — погрешность j -й обобщенной координаты.

Определим погрешность позиционирования исполнительного устройства робота, изображенного на рис. 2. Заданы: длины звеньев $l_1 = 2$ м, $l_2 = 0,9$ м, $l_3 = 0,6$ м; обобщенные координаты $q_1 = 45^\circ$, $q_2 = 0,6$ м, $q_3 = 40^\circ$; угловые параметры звеньев $\alpha_{1x} = 90^\circ$, $\alpha_{1y} = 90^\circ$, $\alpha_{1z} = 0$, $\alpha_{2x} = 0$, $\alpha_{2y} = 270^\circ$, $\alpha_{2z} = 0$, $\alpha_{3x} = 0$, $\alpha_{3y} = 0$, $\alpha_{3z} = 0$; положения кинематических пар $c_{1x} = c_{1y} = c_{1z} = c_{2x} = c_{2y} = c_{2z} = c_{3x} = c_{3y} = c_{3z} = 0$; погрешности линейных параметров звеньев $\Delta l_1 = 0,17 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta l_2 = 0,15 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta l_3 = 0,09 \cdot 10^{-3}$ м; погрешности угловых параметров звеньев $\Delta \alpha_{1x} = 0,12 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{1y} = 0,1 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{1z} = 0,12 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{2x} = 0,1 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{2y} = 0,11 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{2z} = 0,11 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{3x} = 0,18 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{3y} = 0,15 \cdot 10^{-3}$ рад, $\Delta \alpha_{3z} = 0,18 \cdot 10^{-3}$ рад; погрешность положения кинематических пар $\Delta c_{1x} = 0,12 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{1y} = 0,14 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{1z} = 0,12 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{2x} = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{2y} = 0,15 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{2z} = 0,11 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{3x} = 0,18 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{3y} = 0,11 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta c_{3z} = 0,13 \cdot 10^{-3}$ м.

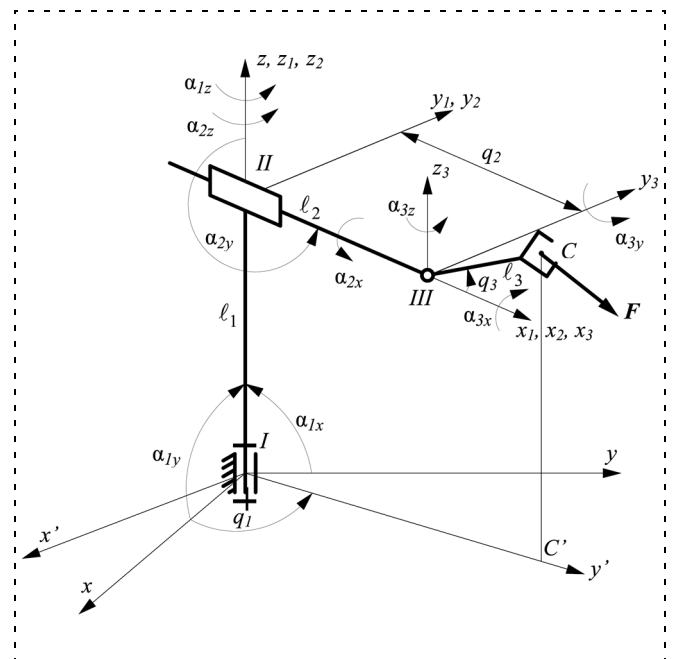


Рис. 2. Кинематическая схема робота

Механический преобразователь движения привода

- I степени подвижности состоит из трех зубчатых передач (цилиндрической, конической и червячной с податливостями $e_{11} = 3,505 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м, $e_{21} = 0,926 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м, $e_{31} = 1,342 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м и передаточными отношениями $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 42$ соответственно), погрешность работы системы управления $\Delta\varphi_{дв1} = 2,04 \cdot 10^{-3}$;
- II степени подвижности состоит из двух зубчатых передач (цилиндрической, реечной с податливостями $e_{12} = 2,238 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м, $e_{22} = 1,263 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м и передаточными отношениями $u_1 = 3$, $u_2 = 55$ соответственно), имеющих $\Delta\varphi_{дв2} = 1,75 \cdot 10^{-3}$;
- III степени подвижности состоит из трех зубчатых передач (цилиндрической, червячной, конической с $e_{13} = 3,241 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м, $e_{23} = 1,326 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м, $e_{33} = 0,849 \cdot 10^{-5}$ рад/Н·м и передаточными отношениями $u_1 = 3$, $u_2 = 12,5$, $u_3 = 2$ соответственно) с $\Delta\varphi_{дв3} = 1,45 \cdot 10^{-3}$.

Кинематические погрешности и мертвые хода для каждой передачи в преобразователях движения находятся по известным методикам [1, 2] и равны: $\delta_{11} = 0,053$ м, $\delta_{21} = 0,00626$ м, $\delta_{31} = 0,000151$ м, $\delta_{12} = 0,895 \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_{22} = 47,25 \cdot 10^{-6}$ м, $\delta_{13} = 0,00575$ м, $\delta_{23} = 0,00061$ м, $\delta_{33} = 0,00108$ м, $J_{11} = 0,0358$ м,

$J_{21} = 0,0175$ м, $J_{31} = 0,0011$ м, $J_{12} = 0,678 \cdot 10^{-3}$ м, $J_{22} = 0,174 \cdot 10^{-3}$ м, $J_{13} = 0,0105$ м, $J_{23} = 0,0024$ м, $J_{33} = 0,0023$ м. К характеристической рабочей точке C приложен вектор внешней силы $F = [0 \ 0 \ 100]^T$ Н.

Составляем уравнения проекций рабочей точки C на оси базовой системы координат:

$$x_C = c_{1x} + l_1 \cos \alpha_{1x} + c_{2x} \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) \times \\ \times \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) - c_{2y} \cos \alpha_{2x} \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) + \\ + l_2 \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) + \\ + c_{3x} \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y}) \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z}) - \\ - c_{3y} \cos(\alpha_{2x} + \alpha_{3x}) \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z}) + \\ + l_3 \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y} + q_3) \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z});$$

$$y_C = c_{1y} + l_1 \cos \alpha_{1x} + c_{2x} \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) \times \\ \times \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) - c_{2y} \cos \alpha_{2x} \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) + \\ + l_2 \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) + \\ + c_{3x} \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y}) \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z}) - \\ - c_{3y} \cos(\alpha_{2x} + \alpha_{3x}) \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z}) + \\ + l_3 \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y} + q_3) \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z});$$

$$z_C = c_{1z} + l_1 \sin \alpha_{1x} + c_{2z} + c_{2x} \sin(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) + \\ + l_2 \sin(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) + c_{3z} \cos(\alpha_{2x} + \alpha_{3x}) + \\ + c_{3x} \sin(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) + l_3 \sin(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y} + q_3).$$

Находим частные производные по длинам звеньев l и составляем матрицу Якоби:

$$J(l) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1x} & \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) & \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y} + q_3) \cos(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z}) \\ \cos \alpha_{1x} & \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z}) & \cos(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y} + q_3) \sin(q_1 + \alpha_{1z} + \alpha_{2z} + \alpha_{3z}) \\ \sin \alpha_{1x} & \sin(\alpha_{1x} + \alpha_{2y}) & \sin(\alpha_{1x} + \alpha_{2y} + \alpha_{3y} + q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,7071 & -0,5417 \\ 0 & -0,7071 & -0,5417 \\ 1 & 0 & -0,6428 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находим частные производные по угловым параметрам, положению кинематических пар, обобщенным координатам и составляем матрицы Якоби $J(\alpha)$, $J(c)$, $J(q)$:

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} -0,3701 & 0 & 0,9614 & 0 & 0,2727 & 0,9614 & 0 & 0,2727 & 0,3250 \\ -0,4933 & 0 & -0,9614 & 0 & 0,2727 & -0,9614 & 0 & 0,2727 & -0,3250 \\ -1,3596 & 0 & 0 & 0 & -1,3596 & 0 & 0 & -0,4596 & 0 \end{bmatrix};$$

$$J(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,7071 & 0 & 0 & -0,7071 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,7071 & 0 & 0 & -0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} 0,9614 & -0,7071 & 0,2727 \\ -0,9614 & -0,7071 & 0,2727 \\ 0 & 0 & -0,4596 \end{bmatrix}.$$

Определяем вектор погрешности ввода обобщенных координат $\Delta q_{дв}$. Находим передаточные

коэффициенты для каждого преобразователя движения:

$$\varepsilon_{пр1} = \frac{1}{u_{пр1}} = \frac{1}{u_1} \frac{1}{u_2} \frac{1}{u_3} = \frac{1}{336} = 2,976 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_{пр2} = \frac{1}{u_{пр2}} = \frac{1}{u_1} \frac{1}{u_2} = \frac{1}{167} = 5,99 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_{пр3} = \frac{1}{u_{пр3}} = \frac{1}{u_1} \frac{1}{u_2} \frac{1}{u_3} = \frac{1}{75} = 13,33 \cdot 10^{-3}.$$

Используя формулы (1), (2) и (3), находим вектор погрешности ввода обобщенных координат

$$\Delta q_{дв} = \begin{bmatrix} 2,04 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1,75 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1,45 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,976 \cdot 10^{-3} \\ 5,99 \cdot 10^{-3} \\ 13,33 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0,0061 \cdot 10^{-3} \\ 0,0042 \cdot 10^{-3} \\ 0,0193 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Определяем суммарную кинематическую погрешность δ_Σ . Для i -й передачи j -й степени подвижности находим передаточные коэффициенты:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{u_2 u_3} = 0,00595; \varepsilon_{21} = \frac{1}{u_3} = 0,0238; \varepsilon_{31} = 1.$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{u_2} = 0,0182; \varepsilon_{22} = 1.$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{u_2 u_3} = 0,04; \varepsilon_{23} = \frac{1}{u_3} = 0,5; \varepsilon_{33} = 1.$$

По формулам (5) и (6) составляем матрицы кинематических погрешностей Δ и передаточных коэффициентов преобразователей движения ε . Подставляем их в формулу (4) и получаем:

$$\begin{aligned} \delta_\Sigma &= \\ &= \begin{bmatrix} 0,053 & 0,00626 & 0,000151 \\ 0,895 \cdot 10^{-3} & 47,25 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0,00575 & 0,00061 & 0,00108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00595 & 0,0182 & 0,04 \\ 0,0238 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,615 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 63,54 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1,610 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из элементов полученной матрицы составляем вектор суммарной кинематической погрешности:

$$\delta_\Sigma = [0,615 \cdot 10^{-3} \ 63,54 \cdot 10^{-6} \ 1,610 \cdot 10^{-3}]^T.$$

Определяем мертвый ход J_Σ , используя формулы (6), (7) и (8):

$$\begin{aligned} J_\Sigma &= \\ &= \begin{bmatrix} 0,0358 & 0,0175 & 0,0011 \\ 0,678 \cdot 10^{-3} & 0,174 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0,0105 & 0,0024 & 0,0023 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00595 & 0,0182 & 0,04 \\ 0,0238 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1,716 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 185,94 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 3,745 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из элементов полученной матрицы составляем вектор суммарного мертвого хода:

$$J_\Sigma = [1,716 \cdot 10^{-3} \ 185,94 \cdot 10^{-6} \ 3,945 \cdot 10^{-3}]^T.$$

Определяем погрешности обобщенных координат, вызванные податливостью преобразователей движения $\Delta q_{пр}$. Для этого задаем приведенные податливости степеней подвижности: $e_{1x} = 0,0337 \cdot 10^{-3}$ рад/Н, $e_{1y} = 0,0089 \cdot 10^{-3}$ рад/Н, $e_{1z} = 0,0129 \cdot 10^{-3}$ рад/Н, $e_{2x} = 0,0185 \cdot 10^{-3}$ рад/Н, $e_{2y} = 0,0168 \cdot 10^{-3}$ рад/Н, $e_{2z} = 0,0165 \cdot 10^{-3}$ рад/Н, $e_{3x} = 0,0117 \cdot 10^{-3}$ рад/Н, $e_{3y} = 0,0252 \cdot 10^{-3}$ рад/Н,

$e_{3z} = 0,0124 \cdot 10^{-3}$ рад/Н. Подставляя значения вектора внешней силы F и значения приведенных податливостей в формулы (9) и (10), получим

$$\begin{aligned} \Delta q_{пр} &= \begin{bmatrix} 0,0337 \cdot 10^{-3} & 0,0089 \cdot 10^{-3} & 0,0129 \cdot 10^{-3} \\ 0,0185 \cdot 10^{-3} & 0,0168 \cdot 10^{-3} & 0,0165 \cdot 10^{-3} \\ 0,0117 \cdot 10^{-3} & 0,0252 \cdot 10^{-3} & 0,0124 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20,682 \\ 20,682 \\ -33,794 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,445 \cdot 10^{-3} \\ 0,172 \cdot 10^{-3} \\ 0,344 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определяем погрешности обобщенных координат, вызванные упругими свойствами звеньев $\Delta \Phi$. По формулам (14) и (15) находим податливости звеньев: $e_1 = 1,19 \cdot 10^{-5}$ 1/Н, $e_2 = 2,02 \cdot 10^{-6}$ 1/Н, $e_3 = 7,77 \cdot 10^{-7}$ 1/Н. Вектор эквивалентных моментов, найденный с использованием формулы (16), имеет вид: $M = [135,96 \ 135,96 \ 45,96]^T$. В формулу (12) подставляем матрицу податливости, найденную по формуле (13), и вектор моментов:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \begin{bmatrix} 1,19 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 2,02 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 7,77 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 135,96 \\ 135,96 \\ 45,96 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1,62 \cdot 10^{-3} \\ 0,275 \cdot 10^{-3} \\ 0,04 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В формулу (18) подставляем найденные ранее векторы погрешностей обобщенных координат, вызванные податливостью преобразователей движения и упругими свойствами функциональных звеньев, систем управления, кинематической погрешности и мертвых ходов:

$$\begin{aligned} \Delta q &= \begin{bmatrix} 0,0061 \cdot 10^{-3} \\ 0,0042 \cdot 10^{-3} \\ 0,0193 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,615 \cdot 10^{-3} \\ 63,54 \cdot 10^{-6} \\ 1,610 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,716 \cdot 10^{-3} \\ 185,94 \cdot 10^{-6} \\ 3,945 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0,445 \cdot 10^{-3} \\ 0,172 \cdot 10^{-3} \\ 0,344 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,62 \cdot 10^{-3} \\ 0,275 \cdot 10^{-3} \\ 0,04 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,402 \cdot 10^{-3} \\ 0,701 \cdot 10^{-3} \\ 5,958 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляем все найденные матрицы и векторы в уравнение (17) и находим вектор погрешности позиционирования робота:

$$\Delta r_C = \begin{bmatrix} 3,923 \cdot 10^{-3} \\ -2,738 \cdot 10^{-3} \\ -3,135 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Заключение

Таким образом, предложенная методика позволяет для различных конструктивных схем исполнительных устройств роботов и различных конструкций многоступенчатых преобразователей движения степеней подвижности определять погрешность позиционирования, что необходимо знать при проектировании новых роботов, а также при эксплуатации существующих в промышленных и непромышленных сферах для выполнения конкретных задач.

Расчет погрешности позиционирования робота необходимо выполнять в следующей последовательности:

1) составить уравнения проекций характеристической рабочей точки на оси базовой системы координат;

2) найти первичные ошибки и погрешности обобщенных координат;

3) определить вектор погрешности позиционирования робота $\Delta \mathbf{r}_C$.

Список литературы

1. Егоров О. Д. Механика и конструирование роботов. М.: Изд-во "Станкин", 1997. 515 с.
2. Егоров О. Д. Механика роботов: Учеб. пособ. М.: Изд-во МГАВТ, 2007. 236 с.
3. Игнатьев А. А. Исследование погрешности позиционирования автоматических манипуляторов портального типа // Изв. вузов. Машиностроение. 1983. № 3. С. 50—54.
4. Кобринский А. А., Кобринский Л. А. Мобильность и точность манипулятора. Машиноведение. 1976. № 3. С. 3—9.
5. Коловский М. З. О точности механизмов промышленных роботов // Известия вузов. Технология легкой промышленности. 1986. № 1. С. 109—114.

УДК 681.5.001:57.621

А. Н. Горитов, д-р техн. наук, проф.,
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
angort@rambler.ru

Построение плана траектории промышленного робота в условиях неполной информации о внешней среде¹

Предлагается алгоритм, обеспечивающий построение плана траектории перемещения рабочего инструмента промышленного робота в среде с неизвестным расположением препятствий. Приводятся эвристические функции, позволяющие сокращать объем вычислений при построении плана траектории, оптимального по энергозатратам или по времени перехода в целевое состояние.

Ключевые слова: промышленный робот, планирование траектории.

Введение

Задача управления промышленным роботом (ПР) в произвольных внешних средах является одной из ключевых задач робототехники. Несмотря на большое число работ, посвященных этой задаче ([1—4] и т. д.), она остается актуальной и в настоящее время [5].

Наличие избыточных степеней подвижности исполнительного механизма позволяет определить закон движения ПР таким образом, чтобы движение было оптимальным в некотором смысле. Напри-

мер, управление может быть оптимальным в смысле быстродействия (времени отработки соответствующей координаты) или с точки зрения минимальных энергозатрат на перемещение рабочего органа из начального положения в целевое. При этом в разных условиях могут быть востребованы различные критерии оптимальности.

Планирование траектории можно выполнять как в кинематическом (при невысоких скоростях), так и в динамическом режимах [6].

Таким образом, возникает задача построения оптимального плана траектории движения кинематически избыточного манипулятора в произвольной внешней среде с неизвестным расположением препятствий в кинематическом режиме.

Постановка задачи

ПР — это многомерный, нелинейный и нестационарный объект. Функционирование этого объекта осуществляется на основе некоторого допустимого управления, удовлетворяющего *физическим, геометрическим, кинематическим, сенсорным и информационным ограничениям*.

Внешняя среда может быть без препятствий, с частично известным расположением препятствий и с неизвестным расположением препятствий. Построение плана траектории будет выполняться в предположении, что информация о препятствиях, находящихся во внешней среде, априори неизвестна системе управления ПР и алгоритму построения плана траектории. В соответствии с этим, алгоритм построения плана траектории обеспечивает обследование внешней среды, что позволяет пополнить информацию о препятствиях. Обследование внешней среды выполняется на основе модели внешней

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-07-99029-р_офи).

среды и модели манипулятора. При анализе внешней среды используется тактильная информация, поступающая от модели ПР. Все столкновения модели с внешними объектами фиксируются и выдаются соответствующие сообщения. Это возможно, если все объекты внешней среды, включая ПР, будут представлены объемными моделями. Применение объемных моделей для ПР позволяет получить более точную информацию, в отличие от использования упрощенной модели, в которой звенья ПР представлены отрезками прямых линий.

Построение плана траектории в условиях неполной информации о внешней среде

Исполнительные механизмы ПР, как правило, строятся из кинематических пар 5-го порядка [7]. В случае использования кинематических узлов с большим числом подвижности такие узлы всегда можно представить последовательностью кинематических узлов 5-го порядка.

Относительное смещение звеньев в i -й кинематической паре будем обозначать обобщенной переменной q_i . Для каждой кинематической пары q_i изменяется от $q_{i\min}$ до $q_{i\max}$. Для построения плана траектории будем считать, что q_i принимает фиксированные значения $q_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m_i$) из заданного

диапазона возможных значений $q_i^{(k)} \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$. Таким образом, манипулятор, состоящий из n звеньев, будет иметь $m_1 m_2 \dots m_n$ состояний. Переход из одного состояния в другое выполняется путем изменения значения одной или нескольких обобщенных переменных. Переход в соседние положения выполняется путем изменения обобщенных переменных не более, чем на один шаг.

Каждое пошаговое перемещение рабочего органа из начального состояния в целевое анализируется на отсутствие соударений как между звеньями механизма, так и с препятствиями [8, 9].

Движение манипулятора к намеченной цели строится как последовательная смена состояний манипулятора. Последовательность состояний, которые принимает ПР, при переходе из начального состояния в конечное, в конечном итоге определяет эффективность траектории перемещения рабочего органа манипулятора.

Переход ПР из одного состояния в другое можно описать с помощью графа $G = (S, P, W)$, где S — множество состояний ПР; P — множество связей между состояниями ПР; W — весовой коэффициент, определяющий стоимость смены состояний ПР. Определим стоимость смены состояний ПР как работу, выполняемую при переходе ПР из $(j-1)$ -го состояния в j -е состояние. Таким образом, выполняя поиск по графу, можно найти последователь-

ность смены состояний от начального состояния ПР до целевого, которая позволит выполнить запланированное перемещение при минимальной выполненной работе. Для реализации необходимо:

- явно построить граф переходов;
- осуществить перебор всех возможных путей, идущих из начального состояния, в целях поиска оптимального.

Для того чтобы избежать полного перебора всех путей графа и при этом построить план траектории, оптимальный по затратам, введем в употребление эвристическую информацию [10]. Использование эвристической информации обычно связано с употреблением оценочной функции. Оценочная функция должна обеспечивать возможность ранжирования вершин с тем, чтобы выделить ту вершину, которая с наибольшей вероятностью находится на лучшем пути к цели. Каждое состояние ПР будем оценивать функцией $\hat{f}(i) = \hat{g}(i) + \hat{h}(i)$, где $\hat{g}(i)$ — оценка затрат, которые потребуются выполнить при переходе из начального состояния в i -е состояние; $\hat{h}(i)$ — оценка затрат, которые предстоит выполнить при переходе из i -го состояния в конечное.

Наличие избыточных степеней подвижности исполнительного механизма позволяет определить закон движения ПР таким образом, чтобы движение было оптимальным в некотором смысле. В рассматриваемом алгоритме нахождение оптимальной траектории обеспечивается эвристическими оценками состояния ПР, которые позволяют построить траектории по различным критериям оптимальности: минимуму выполненной работы, минимуму пройденного рабочим инструментом пути, минимуму времени, затраченного на перемещение.

Рассмотрим построение эвристической оценки состояния ПР, обеспечивающей минимум выполненной работы при перемещении рабочего органа. В этом случае $\hat{g}(i)$ будет оценкой работы, которую потребуются выполнить при переходе из начального состояния в i -е состояние, а $\hat{h}(i)$ будет оценкой работы, которую предстоит выполнить при переходе из i -го состояния в конечное. Работа, которая будет выполнена при переходе из начального состояния в i -е состояние, можно оценить по формуле

$$\hat{g}(i) = A(i-1) + A(i-1, i),$$

где $A(i-1)$ — работа, выполненная при переходе из начального состояния в $(i-1)$ -е состояние; $A(i-1, i)$ — работа, выполняемая при переходе из $(i-1)$ -го состояния в i -е состояние. Работу, которую предстоит выполнить при переходе из i -го в конечное состояние, можно оценить по формуле

$$\hat{h}(i) = A_{\min}(i) + \delta(i),$$

где $A_{\min}(i)$ — минимальная работа, которую требуется выполнить при переходе из $(i - 1)$ -го состояния в целевое положение; $\delta(i) = \infty$, если i -е состояние является запрещенным, и $\delta(i) = 0$ в противном случае. Состояние является запрещенным, если при переходе в это состояние возникает соударение звеньев манипулятора между собой или с объектами внешней среды ПР, или состояние не может быть достигнуто в силу ограничений на перемещения в кинематических парах исполнительного механизма, т. е. переход в это состояние связан с бесконечной работой. Таким образом, оценочная функция примет вид

$$\widehat{f}(i) = A(i - 1) + A(i - 1, i) + A_{\min}(i) + \delta(i), \quad (1)$$

где $A(i - 1)$ — работа, выполняемая при переходе из начального состояния в $(n - 1)$ -е. Работа, выполняемая при переходе из $(i - 1)$ -го в i -е состояние $A(i - 1, i)$ оценивается как

$$A(i - 1, i) = \sum_{k=1}^m A_k(i - 1, i),$$

где $A_k(i - 1, i)$ — работа, выполняемая k -м приводом при переходе из $(i - 1)$ -го в i -е состояние; m — число приводов исполнительного механизма ПР. При линейном перемещении в k -м кинематическом узле работа оценивается по формуле $\Delta q_k(i) F_k$, где $\Delta q_k(i)$ — перемещение, выполненное k -м приводом при переходе из $(i - 1)$ -го в i -е состояние; F_k — сила k -го привода, затрачиваемая на единицу перемещения. При вращении работа в k -м приводе оценивается по формуле $\Delta \varphi_k M_k^{(z)}$, где $\Delta \varphi_k$ — угол поворота в k -м приводе при переходе из $(i - 1)$ -го состояния в i -е состояние; $\Delta \varphi_k M_k^{(z)}$ — момент силы, развиваемый k -м приводом в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

В качестве оценки минимальной работы при переходе из i -го состояния в целевое примем оценочную функцию в виде

$$f(i) = R_1(i) F_{\min} + \delta(i),$$

где $R_1(i)$ — расстояние от рабочего инструмента ПР, находящегося в i -м состоянии, до целевой точки по прямой; $F_{\min}$ — минимальная сила, развиваемая приводами ПР на единицу измерения; $\delta(n) = \infty$, если i -е состояние является запрещенным, и $\delta(n) = 0$ в противном случае.

Полученная оценочная функция позволяет реализовать эффективный способ нахождения последовательности состояний, обеспечивающих минимальную работу при переходе из начального состояния в целевое.

Так как никакую работу по переходу в начальное состояние выполнять не требуется, то начальное состояние получает оценку, равную $\widehat{h}(0)$. Затем оценим каждое состояние, в которое можно перейти непосредственно из начального состояния: $\widehat{f}(1), \widehat{f}(2), \dots$. По этим оценкам выбираем состояние с минимальной оценкой: $\widehat{f}(j)$. Для выбранного состояния j строится множество состояний, в которые можно перейти непосредственно из j -го состояния. Каждое из новых состояний также оценивается. Выбор нового состояния делается из всех неиспользованных состояний.

Вычислительная сложность рассмотренного алгоритма оценивается величиной $WHm_{\max}^n$, где W — число шагов, выполненных алгоритмом для достижения целевой точки; H — число операций, которые потребуются выполнить при проверке на соударение звеньев между собой и с препятствиями; $m_{\max} = \max(m_1, m_2, \dots, m_n)$; m_i — число фиксированных положений i -го кинематического узла; n — число звеньев манипулятора. Для сравнения отметим, что алгоритм полного перебора потребует примерно $Hm_{\max}^{Wn}$ операций. Как видно, вычислительные затраты рассмотренного алгоритма оцениваются меньшей величиной, чем алгоритм полного перебора.

Рассмотренный алгоритм:

1) обладает свойствами достижимости и универсальности, т. е. его можно использовать в рабочих средах без препятствия, с частично известным расположением препятствий и в средах с неизвестным расположением препятствий;

2) последовательность состояний от начального к целевому состоянию обеспечит минимум выполненной работы при перемещении ПР;

3) не требует до начала построения плана траектории формировать граф всех состояний ПР. Вершины графа формируются по мере необходимости;

4) обеспечивает формирование новых траекторий на основе оценочных функций.

Аналогично можно построить оценочную функцию, обеспечивающую построение оптимальной по времени траектории перемещения рабочего органа ПР

$$\widehat{f}(i) = T(i) + R_1(i)/V_{\min} + \delta(i), \quad (2)$$

где $T(i)$ — время, затрачиваемое при переходе из начального состояния в i -е; $R_1(i)$ — расстояние от рабочего инструмента ПР до целевой точки из i -го состояния по прямой; $V_{\min}$ — минимальная скорость линейного перемещения, возникающая в кинематических узлах ПР; $\delta(i) = \infty$, если i -е состояние

является запрещенным, и $\delta(i) = 0$ в противном случае.

В ряде случаев удобно использовать упрощенные оценочные функции, которые, в свою очередь, обеспечивают сокращение вычислительных затрат, требуемых при планировании траектории перемещения рабочего инструмента ПР. Так, оценочная функция без учета работы будет иметь вид

$$\hat{f}(i) = R(i) + R_1(i) + \delta(i), \quad (3)$$

а без учета работы и без контроля возможных столкновений с препятствиями

$$\hat{f}(i) = R(i) + R_1(i). \quad (4)$$

Здесь $R(i)$ — расстояние, пройденное до i -го состояния. Последняя оценочная функция может использоваться для проведения пробных расчетов.

Так же, как и для оценочной функции (1), рассмотрим упрощенный вариант функции (4). Оценочная функция

$$\hat{f}(i) = T(i) + R_1(i)/V_{\min} \quad (5)$$

позволяет построить более быстрый вычислительный алгоритм, который можно использовать при планировании траектории во внешней среде, заведомо не имеющей препятствий или для проведения оценочных расчетов в произвольных внешних средах.

Если предположить, что все звенья движутся с одинаковой скоростью, то для построения плана траектории можно воспользоваться следующим вариантом оценочной функции (2):

$$\hat{f}(i) = T(i) + T_1(i) + \delta(i), \quad (6)$$

где $T_1(i) = R_1(i)/V$, $V = V_1 = \dots = V_N$, N — число звеньев манипулятора.

Одной из характеристик оценочной функции является понятие целенаправленности. Под коэффициентом целенаправленности будем понимать отношение длины пройденного пути до цели L к числу раскрытых вершин P . Эта характеристика оценивает отношение числа вершин, которые составляют путь от цели, к числу проанализированных вершин графа при построении пути. Целенаправленность перебора позволяет узнать, в какой мере перебор идет в направлении цели, а не ведется по нежелательным направлениям. Соотношение L/P показывает, насколько дерево, построенное в процессе планирования траектории перемещения рабочего органа ПР, вытянуто, а не "кустисто".

Для проведения численных экспериментов преобразуем оценочную функцию

$$\hat{f}(i) = \hat{g}(i) + \hat{h}(i)$$

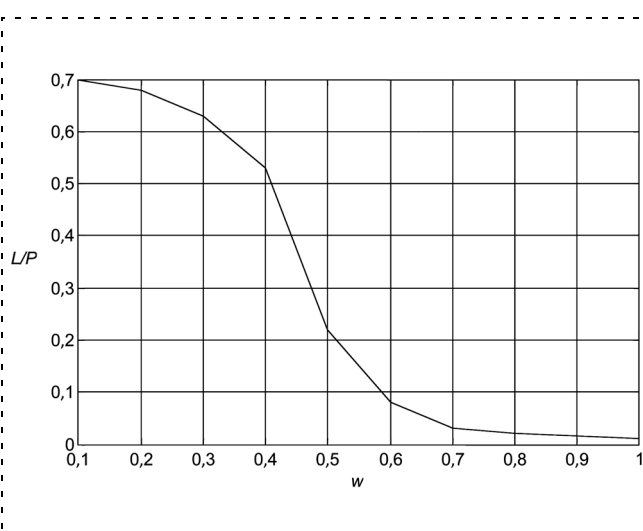


График изменения коэффициента целенаправленности как функции от w

к виду

$$\hat{f}(i) = w \hat{g}(i) + (1 - w) \hat{h}(i),$$

где w — произвольное положительное число, меньшее единицы. Коэффициент w позволяет регулировать вклад каждой из двух частей в оценку i -й конфигурации ПР. При уменьшении w оценка предстоящих затрат для достижения целевой точки будет играть преобладающую роль. Если w задавать ближе к единице, ведущую роль приобретает оценка пройденного пути. В этом случае основное внимание будет уделено поиску наилучшего решения. Оценочная функция (1) в этом случае примет вид

$$\hat{f}(i) = w \left(A(i-1) + \sum_{k=1}^m \Delta q_k(i) F_k \right) + (1 - w) R_1(i) F_{\min} + \delta(i). \quad (7)$$

Результаты численных экспериментов по исследованию коэффициента целенаправленности применительно к оценочной функции (7) показаны на рисунке. Анализ результатов показывает, что при $w < 0.5$ значительно снижаются вычислительные затраты на построение плана траектории. Повышение эвристической силы алгоритма за счет отказа от построения оптимальной траектории позволяет значительно снизить вычислительные затраты на планирование траектории перемещения рабочего инструмента ПР.

Численные эксперименты с оценочной функцией (7) показывают, что при $w < 0.5$ значительно снижаются вычислительные затраты на построение плана траектории.

Заключение

Применение средств автоматизированного моделирования позволяет оценить различные характеристики функционирования ПР еще на этапе проектирования технологических операций и анализировать различные варианты размещения технологического оборудования. Разработанные алгоритмы позволяют строить планы траектории перемещения рабочего органа ПР в произвольных внешних средах с неизвестным расположением препятствий. Эвристические оценки состояний ПР обеспечивают сокращение вычислительных затрат при построении оптимальных планов траектории перемещения рабочего органа ПР, оптимальных по энергозатратам или по времени перехода в целевое состояние в произвольных внешних средах.

Список литературы

1. Кобринский А. А., Кобринский А. Е. К построению движений манипуляционных систем // Доклады АН СССР. 1975. 224. № 6. С. 1030—1033.

2. Верещагин А. Ф., Генерозов В. Л. Планирование траектории исполнительного органа манипуляционного робота // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 2. С. 76—87.
3. Аксенов Г. С., Воронцов Д. К., Фомин В. Н. Построение программных движений манипулятора при помощи ЭВМ // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 4. С. 50—55.
4. Малышев В. А., Тимофеев А. В. Алгоритмы построения программных движений манипуляторов с учетом конструктивных ограничений и препятствий // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 64—72.
5. Лопатин П. К. Компьютерная имитация управления манипуляционными роботами в неизвестной среде на основе точного и упрощенного алгоритмов // Мехатроника, автоматизация, управление. № 8. 2006. Приложение. С. 7—14.
6. Юревич Е. И. Управление роботами и робототехническими системами. С.-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 2001. 168 с.
7. Левитский Н. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1979. 570 с.
8. Горитов А. Н. Геометрический анализ механизмов и управляемых механических систем // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2000. № 10. С. 19—22.
9. Горитов А. Н., Алферов С. М. Определение столкновений в задаче математического моделирования управляемых механических систем // Информационные системы и мониторинг окружающей среды. Вып. 2. Томск: Изд. Томского государственного ун-та систем управления и радиоэлектроники. 2003. С. 99—105.
10. Нильсон Н. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1973. 270 с.

УДК 681.5

В. Ф. Головин, канд. техн. наук,
М. В. Архипов, В. В. Журавлев,
Московский государственный
индустриальный университет
medicalrobot@mail.ru

Метод силового обучения при планировании траекторий робота для восстановительной медицины

Рассматривается метод силового обучения, отличный от общепринятого позиционного обучения, необходимый для позиционно-силового управления роботами для манипуляций на мягких тканях. Оцениваются ошибки позиционно-силового управления в алгоритмах с использованием силового обучения.

Ключевые слова: силовое обучение, позиционно-силовое управление, восстановительная медицина, мягкие ткани.

В восстановительной медицине, связанной с манипуляциями на мягких тканях и суставах, актуальной проблемой является дозирование механотерапевтического воздействия [1]. Необходим контроль усилий, и часто управление сводится к двум задачам. Первая — задача силового управления — достичь в заданной точке необходимого усилия при нажатии на мягкую ткань или оттягивании мягкой ткани: $F \rightarrow F_0$, где F и F_0 — текущее и заданное значения усилия. Вторая — задача позиционно-

силового управления — на заданной траектории выдерживать необходимые значения усилия взаимодействия руки с мягкой тканью: $X(t) \rightarrow X_0(t)$ и $F(t) \rightarrow F_0(t)$. Здесь $X(t)$ и $X_0(t)$ — текущее и заданное значение траектории. Эти задачи решает врач и может автоматически решать манипуляционный робот. Врач пользуется своими проприоцептивными и тактильными ощущениями, чтобы обеспечить необходимые усилия. Задача робота — воспроизвести восприятие и движения врача в соответствии с алгоритмами позиционно-силового управления. Подобные задачи управления встречаются в машиностроительных технологиях: сборке вставлением, финишной обработке, срезании заусенцев. Вопрос состоит в том, можно ли использовать известные алгоритмы для управления манипуляциями на мягких тканях?

Во всех упомянутых выше задачах в машиностроительных технологиях робот взаимодействует с твердыми телами, используя их как связи. Мягкие ткани не могут моделироваться связями, так как сильно деформируются [2]. Для них невозможно указать заранее программную траекторию, чтобы поддерживать на ней заданное усилие. Аксиома позиционно-силового управления [3] состоит в том, что в неизвестной упруго-вязкой среде невозможно на заданной траектории $X_0(t)$ обеспечить усилия $F_0(t)$, причем $F_0(t) = f[X_0(t)]$. Этого можно достичь разделением управления на силовое и позиционное по времени или по приводам, т. е. или приоритетно

обеспечивая заданную траекторию $X(t) \rightarrow X_0(t)$ или обеспечивая заданные усилия $F(t) \rightarrow F_0(t)$ [4].

Для управления манипуляциями на мягких тканях можно использовать образ программного движения $X_1(t)$ вблизи $X_0(t)$, наметив ряд точек $x_{1i} \in X_0(t)$, в которых достигается необходимое усилие $F_0(t)$. В дальнейшем будем рассматривать $F_0(t)$ как постоянное усилие нажатия на мягкую ткань в направлении, которое задают координаты ориентации точки x_{1i} . Создание точек x_{1i} напоминает процедуру обучения точек в программировании позиционного движения. Однако, если при обычном обучении геометрические координаты точки запоминаются в момент контакта с твердым телом (или вблизи контакта), то при силовом обучении (так его назовем) в контакте с мягкой тканью образуется точка с координатами положения (x_0, y_0, z_0) , координатами ориентации (o, a, t) и координатой усилия взаимодействия инструмента робота с мягкой тканью F_0 . Примерно так поступает слепой массажист перед процедурой, ощупывая мягкие ткани пациента на отдельных участках, изучая рельеф и упругости тела.

Далее точки, полученные в результате обучения с усилием, могут быть использованы в следующих алгоритмах.

В первом алгоритме рассчитывается интерполированная кривая $X_1(t)$, проходящая через полученные в результате обучения точки, которая отслеживается позиционным роботом. В робототехнике позиционная задача чаще решается как задача планирования, например, с помощью сплайнов, в обобщенных координатах $q(t)$:

$$q(t) = F^{-1}[X(t)].$$

Спланированная траектория $q(t)$ отслеживается приводами робота. Но эта траектория отличается от той, на которой достигаются заданные усилия. Поэтому только в полученных в результате обучения точках усилия гарантируются, но между точками могут сильно отличаться от заданных.

Другой алгоритм позволяет использовать определенную обучением траекторию как направляющую при постоянном контроле усилий, что значительно уменьшает ошибки силового слежения. Таким образом, оба алгоритма представляются тремя основными блоками: блоком силового обучения точек, блоком интерполяции и блоком отслеживания интерполированной траектории.

На рисунке представлена схема системы позиционно-силового управления приводами робота, манипулирующего на мягких тканях, реализующая рассмотренные алгоритмы.

В линейной модели привод описывается передаточной функцией $\Phi(p)$, мягкая ткань — коэффициентом упругости K_M , пропорциональный регулятор усилия — коэффициентом K_P .

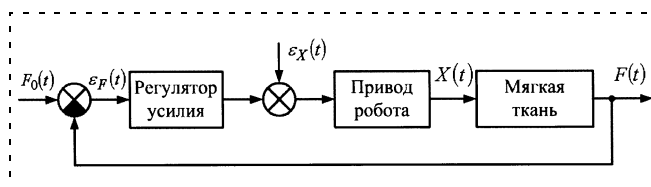


Схема системы позиционно-силового управления приводами робота

Система с разомкнутой обратной связью по усилию реализует первый алгоритм, и ошибка силового слежения системы вычисляется как

$$\varepsilon_{1F}(p) = \varepsilon_X(p)\Phi(p)K_M.$$

Для второго алгоритма позиционно-силового управления

$$\varepsilon_{2F}(p) = \varepsilon_X(p) \frac{\Phi(p)K_M}{1 + \Phi(p)K_M K_P}.$$

Для оценки ошибок слежения сделаем следующие допущения. В низкочастотной области у замкнутых следящих позиционных приводов $\Phi(p) \approx 1$. Тогда при больших значениях K_P

$$\varepsilon_{1F}(t) = \varepsilon_X(t)K_M;$$

$$\varepsilon_{2F}(t) = \varepsilon_X(t)K_M \frac{1}{K_M K_P}.$$

Таким образом, приблизительно ошибка силового слежения меньше ошибки позиционного слежения в $K_M K_P$ раз.

Приведенные выше алгоритмы используются для позиционно-силового управления в задачах манипуляций на мягких тканях с роботом РМ-01 [1]. Практика показала работоспособность этих алгоритмов, но в условиях замкнутости операционной системы ARPS второй алгоритм силового слежения применялся в ограниченном числе задач — при малых скоростях движения и при планировании траектории в относительных системах координат. Для роботов с более широкими возможностями управления, например, KR5SixxR850, реализация второго алгоритма более эффективна.

Статья написана при поддержке гранта РФФИ № 09-08-00261-а.

Список литературы

1. Головин В. Ф., Архипов М. В., Журавлев В. В. Проблемы развития робототехники в восстановительной медицине // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 9. С. 49—53.
2. Головин В. Ф. Мехатронная система для манипуляции на мягких тканях // Мехатроника, автоматизация, управление. 2002. № 7. С. 31—42.
3. Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. М.: Мир, 1989.
4. Гориневский Д. Н., Формальский А. М., Шнейдер А. Ю. Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях. М.: Физматлит, 1994. 368 с.

УДК 531.31; 531.36; 621.865.8-5

М. М. Стебулянин, канд. техн. наук, доц.,
МГТУ "Станкин"
mmsteb@rambler.ru

Комбинационный метод синтеза закона управления многосвязными мехатронными системами в режиме динамического позиционирования

Излагается подход к построению закона управления мехатронной системой со многими переменными состояниями в режиме стабилизации заданного неподвижного положения. Подход основан на рассмотрении исходной "большой" системы с m переменными как комбинации систем с двумя переменными, для которых на основе модульного принципа единообразно применяется прямой метод Ляпунова, что позволяет довести уровень синтеза системы до инженерной методики.

Ключевые слова: механическое движение, многосвязная система, управление, устойчивость, функция Ляпунова.

Введение

В уравнениях динамики многосвязных механических объектов, как правило, присутствуют произведения обобщенных скоростей, а также нелинейные функции координат движения (например, тригонометрические). В силу этого многосвязная система управления механическим движением является существенно нелинейной. (Конкретный пример — различного типа роботы с вращательными кинематическими парами.)

Из-за сложности выбора частных критериев синтеза многосвязных нелинейных систем распространен общий подход как комплекс действий по разработке законов стабилизации заданных (программных) движений объекта управления, часто именуемых стабилизирующими управлениями [1]. При этом первичным становится требование устойчивости программного движения (программной траектории).

Одним из основных инструментов исследования устойчивости нелинейных систем является прямой метод Ляпунова. Однако здесь отсутствие общих рекомендаций выдвигает высокие требования к искусству исследователя. Из-за этого эффективность применения метода падает при увеличении размерности системы. Как следствие, не удается выйти на инженерный уровень синтеза законов

управления нелинейными многокоординатными системами (например, в робототехнике).

В настоящее время можно выделить две схожие платформы решения проблемы. Первая основана на принципе декомпозиции системы [2, 3], вторая — на децентрализации координированного управления [4, 5]. И в том, и в другом случаях регуляторы системы строятся на основе локальной информации, но в целях достижения общей цели управления.

В данной статье предлагается метод, при котором регуляторы в системе строятся на основе глобальной информации, но получаемой при локальном анализе. Метод основан на рассмотрении исходной "большой" системы как комбинации систем меньших размерностей, выделяемых из нее. В силу этого он обоснованно может называться комбинационным.

Доказывается утверждение: построить управление лагранжевой системой с $n > 2$ переменными состояниями можно, ограничиваясь применением прямого метода Ляпунова для систем *всего с двумя* переменными. Обоснование проведено для режима динамического позиционирования системы (режим стабилизации заданного неподвижного положения).

Постановка задачи

Рассмотрим класс управляемых механических систем с голономными связями с вектором обобщенных координат $y \in R^{n \times 1}$. Каждой обобщенной координате y_i , $i = 1, \dots, n$, сопоставлена обобщенная сила Q_i , которую можно представить в виде:

$$Q_i = Q_i^a(y, \dot{y}, t) + Q_i^e(t) + Q_i^p(y) + Q_i^d(\dot{y}),$$

где Q_i^a — i -я обобщенная сила привода движения системы; Q_i^e — i -я обобщенная внешняя сила; Q_i^p — i -я потенциальная обобщенная сила; Q_i^d — i -я диссипативная сила; t — время. (При отсутствии гироскопических сил этим достаточно полно описывается "состав" обобщенных сил системы.)

Обобщенные силы Q_i^a строятся как нестационарные функции пространства переменных размерности $2n$ в зависимости от заданного закона движения системы, являясь ее управляющими воздействиями (управлениями).

Неявная форма уравнений Лагранжа 2-го рода динамики механической системы имеет вид [6]:

$$\sum_{i=1}^n A_{si} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [i, j; s] x_i x_j = Q_s, \quad s = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь $x_i = \dot{y}_i$ — обобщенные скорости; $A_{si} = A_{si}(y)$ — коэффициенты симметричной матрицы $A(y)$ квадратичной формы кинетической энергии K системы, $2K = x^T A(y)x$; $[i, j; s] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{si}}{\partial y_j} + \frac{\partial A_{sj}}{\partial y_i} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial y_s} \right)$ — символы Кристоффеля 1-го рода.

Примем обозначение: $e_s = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0] \in R^{1 \times n}$ — вектор-строка с единицей на s -й позиции (остальные элементы — нули).

Вводя матрицу диссипативных коэффициентов системы $D(y) \in R^{n \times n}$, разрешим (1) относительно переменных $\dot{x}_i$. В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= x_s; \\ \dot{x}_s &= -x^T Z_s(y)x + L_s(y)x + C_s(y) + P_s(x, y, t); \\ P_s(x, y, t) &= \sum_{k=1}^n A_{ks}^{-1}(y) U_k(x, y, t); \\ U_k(x, y, t) &= Q_k^a(x, y, t) + Q_k^e(t); \\ Z_s &= [z_{ij}^s] \in R^{n \times n}, \quad z_{ij}^s = \sum_{k=1}^n A_{ks}^{-1} [i, j; k]; \\ L_s(y) &= e_s A^{-1}(y) D(y), \quad C_s(y) = e_s A^{-1}(y) Q^p(y), \\ s &= 1, \dots, n; \\ Q^p &= \text{colon}(Q_1^p, \dots, Q_n^p) \in R^{n \times 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Величины $P_s(x, y, t)$ назовем приведенными управлениями.

Представим $U_k = U_{0k} + U_{vk}$, $k = 1, \dots, n$, и пусть им соответствуют приведенные управления P_{0k} , P_{vk} , так что $P_k = P_{0k} + P_{vk}$.

В силу равенства $[i, j; k] = [j, i; k]$ каждая матрица Z_s симметрична, поэтому уравнения возмущенного движения системы (2) в переменных $x_v = x - x_0$, $y_v = y - y_0$; $x_v, x_0, y_v, y_0 \in R^{n \times 1}$, где $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$ — программные движения, представим в виде:

$$\begin{aligned} \dot{y}_v &= x_v; \\ \dot{x}_{vs} &= -x_v^T Z_s(y)x_v - 2x_v^T Z_s(y)x_0 + L_s(y)x_0 - \\ &- x_0^T Z_s(y)x_0 - \dot{x}_{0s} + L_s(y)x_v + C_s(y) + P_{0s}(x, y, t) + \\ &+ P_{vs}(x, y), \quad s = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь P_{0s} , P_{vs} , $s = 1, \dots, n$, — соответственно приведенные управления в программном и стабилизирующем режимах (программные и стабилизирующие приведенные управления).

Будем рассматривать программное движение системы, описываемое следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{0s} &= -x_0^T Z_s(y)x_0 - 2x_v^T Z_s(y)x_0 + \\ &+ L_s(y)x_0 + C_s(y) + P_{0s}(x, y, t); \\ \dot{y}_0 &= x_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть заданное неподвижное положение системы описывается вектором координат $Y_0 = \text{const}$. Выберем закон движения в программном режиме в виде

$$x_0(t) = Y_0 - y(t). \quad (5)$$

В самом деле, в этом случае будем иметь: $x_0 = x - x_v = \dot{y} - x_v = Y_0 - y$, и если обеспечена асимптотическая устойчивость тривиального решения $x_v = 0$, то решение последнего уравнения стремится, причем асимптотически, к решению уравнения $\dot{y} + y = Y_0$, имеющего положение равновесия $y(\infty) = Y_0$. Если дополнительно для программного режима потребовать $\dot{x}_0 = 0$, то получим выражения для соответствующих этому приведенных программных управлений:

$$\begin{aligned} P_{0s}(x, y, t) &= -C_s(y) + 2x_v^T Z_s(y)(Y_0 - y) - \\ &- L_s(y)(Y_0 - y) + Y_0^T Z_s(y)Y_0 - 2Y_0^T Z_s(y)y + y^T Z_s(y)y, \end{aligned} \quad (6)$$

а уравнения возмущенного движения системы запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_v &= x_v; \\ \dot{x}_{vs} &= -x_v^T Z_s(y)x_v + L_s(y)x_v + P_{vs}(x_v, y); \\ s &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом цель стабилизирующих приведенных управлений $P_{vs}(x_v, y)$ — обеспечить асимптотическую устойчивость решения $x_v = 0$.

Будем данные управления искать в виде полиномов по степеням аргументов x_{vs} , $s = 1, \dots, n$. Тогда трудоемкость вычисления каждой величины $P_{vs}(x_v, y)$ определится (помимо степени полиномов) набором их ненулевых коэффициентов.

Среди них выделим две группы. Первая состоит только из каких-либо коэффициентов уравнений (7), а вторая включает *синтезируемые* параметры, которые будем называть свободными. Свободные параметры либо вычисляются, либо настраиваются, при этом понятно стремление уменьшить их число.

Поставим следующую задачу. Считая $Z_s \in R^{n \times n}$, $L_s \in R^{1 \times n}$ в (7) ограниченными, построить стабилизирующие приведенные управления $P_{vs}(x_v, y)$ в классе полиномов степени не выше третьей, при этом использовать для каждой величины $P_{vs}(x_v, y)$ не более $n + 1$ параметров при числе свободных параметров не более двух. (Напомним, что число только квадратичных членов уравнений динамики (2) составляет $\frac{(n+1)n^2}{2}$).

При решении такой задачи применим следующий подход.

Теорема о частных системах

Поскольку при выборе приведенных программных управлений в виде (6) для решения задачи динамического позиционирования достаточно обеспечить асимптотическую устойчивость решения $x_v = 0$, введем положительно определенную форму

$V_0(x_v) = \|x_v\|^2$, которую назовем нормальной функцией Ляпунова для системы (3).

Назовем k -частной 1-го порядка системой (7) систему, получающуюся при "замораживании" в уравнениях (7) координаты $x_{vk} = 0$. Такая система описывается уравнениями (далее обозначено $x_{vs} = \varsigma_s$):

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_s &= \varsigma_s; \\ \dot{\varsigma}_s &= \varsigma_s^T Z_s^k \varsigma_k + L_{s;k} \varsigma_k + P_{vs}^k, \\ s &= 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n,\end{aligned}\quad (8)$$

где $\varsigma_k = \text{colon}(\varsigma_1 \dots \varsigma_{k-1} \varsigma_{k+1} \dots \varsigma_n)$; Z_s^k — матрица, получаемая из $Z_s = [z_{ij}^s]$ вычеркиванием k -го столбца и k -й строки; $L_{s;k}$ — строка, получаемая из L_s вычеркиванием ее элемента $l_{k,s}^s$; $P_{vs}^k = P_{vs}(\varsigma)|(\varsigma_k = 0)$.

Функцию V_0 для системы (7) при $\varsigma_k = 0$ обозначим V_{0k} . Для полученных таким образом n функций V_{0k} функцию V_0 назовем охватывающей.

Справедлива следующая **теорема о частных системах**: пусть для каждой системы (8) функция $V_{0k} = \sum_{i \neq k} \varsigma_i^2 = \|\varsigma\|_k^2$ имеет отрицательную производную в области $N_k(\varsigma)$: $0 < \|\varsigma\|_k < R_0$ независимо от u при следующем приведенном стабилизирующем управлении в (7):

$$P_{vs} = - \sum_{i \neq s} (p_s \varsigma_s + z_{ii}^s) \varsigma_i^2 - q_s \varsigma_s, \quad s = 1, \dots, n, \quad (9)$$

для всех $p_s \in (p_s^*, \infty)$, $q_s \in (q_s^*, \infty)$, где p_s^* , $q_s^* > 0$ — некоторые постоянные. Тогда существуют такие $\infty > p_{s0} \geq p_s^*$, $\infty > q_{s0} \geq q_s^*$, что при каждом $p_s > p_{s0}$, $q_s > q_{s0}$, $s = 1, \dots, n$, тривиальное решение системы (7) асимптотически устойчиво в n -мерном шаре $\|\varsigma\| < R_0$.

Доказательство данного утверждения приведено в Приложении.

Комбинационный метод

Сделаем обобщение. Аналогично понятию k -частной системы введем в общем случае понятие $(k_1, \dots, k_h)$ -частной системы, получающейся "замораживанием" координат $\varsigma_{k_1} = 0, \dots, \varsigma_{k_h} = 0$ в уравнениях (7). Обозначив перестановку $\{k_1, \dots, k_h\}$ через $\{h\}$, будем такую систему называть частной h -порядка системой (7). Обозначим также перестановку $\{r_1, \dots, r_H\}$, дополняющую $\{h\}$ до $\{1, 2, \dots, n\}$, через $\{H\}$, так что $H = n - h$.

Уравнения каждой частной системы h -порядка имеют функционально аналогичный (7) вид:

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_s &= \varsigma_s; \\ \dot{\varsigma}_s &= \varsigma_{\{H\}}^T Y_{\{h\}\varsigma_{\{H\}}} + L_{\{h\}s} \varsigma_{\{H\}} + P_s^{\{h\}},\end{aligned}$$

где $\varsigma_{\{H\}} = \text{colon}(\varsigma_{r_1}, \dots, \varsigma_{r_H})$, $s \in \{H\}$; $Y_{\{h\}} = Z_s^{k_1, \dots, k_h}$ — матрица, получаемая из Z_s вычеркиванием соответствующих строк и столбцов; $L_{\{h\}s}$ — строка, получаемая из $L_{\{h-1\}s}$ вычеркиванием ее элемента $l_{k_h}^s$.

Но тогда, рассматривая для частных систем h - и $(h+1)$ -порядков формы

$$V_{0\{h\}} = V_0(\varsigma_{k_1} = \dots = \varsigma_{k_h} = 0);$$

$$V_{0\{h+1\}} = V_0(\varsigma_{k_1} = \dots = \varsigma_{k_h} = \varsigma_{k_{h+1}} = 0)$$

в виде: $V_{0\{h+1\}} = V_{0\{h\}}/\varsigma_{k_{h+1}} = 0$, т. е. рассматривая $\{h+1\}$ -частную систему как k_{h+1} -частную систему от $\{h\}$ -частной системы (7), можно распространить утверждение данной теоремы на случай частных систем h - и $(h+1)$ -порядков.

Допустим теперь, что в классе приведенного управления (9) для каждой из частных систем (7) порядка $n-2$, представляющих собой все двусвязные системы, которые можно выделить из состава исходной n -связной системы, существуют нормальные функции Ляпунова V_{0j} , $j \in [1, C_n^2]$, имеющие независимо от u отрицательные производные в некоторой области $N(\varsigma)$: $0 < \|\varsigma\| < R_0$. Тогда в силу доказанной теоремы существуют охватывающие V_{0j} функции Ляпунова вида $V_{0k} = V_{0\{n-3\}}$, $j \in [1, C_n^3]$. В результате аналогичных рассуждений получаем, что существуют функции $V_{0s} = V_{0\{n-4\}}$, $s \in [1, C_n^4]$ и т. д. В итоге имеем, что нормальная функция Ляпунова существует в указанной области для исходной системы (7).

Таким образом, установлено, что приведенные управления (9) обеспечат устойчивость тривиального решения системы (7) по переменной $\varsigma \in R^{n \times 1}$, если они обеспечивают существование нормальных функций Ляпунова, имеющих отрицательно определенную производную, для каждой из двусвязных систем в составе исходной системы (7) в области $N(\varsigma)$: $0 < \|\varsigma\| < R_0$, причем независимо от u . Покажем, что данные управления решают такую задачу.

Уравнения возмущенного движения двусвязной системы с переменными состояниями ς_i, ς_j в классе приведенного управления (9) имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_i &= l_i^i \varsigma_i + l_j^i \varsigma_j + \alpha_{ii} \varsigma_i^2 + \alpha_{ij} \varsigma_i \varsigma_j + \alpha_{jj} \varsigma_j^2 + P_i(\varsigma_i, \varsigma_j); \\ \dot{\varsigma}_j &= l_i^j \varsigma_i + l_j^j \varsigma_j + \beta_{ii} \varsigma_i^2 + \beta_{ij} \varsigma_i \varsigma_j + \beta_{jj} \varsigma_j^2 + P_j(\varsigma_i, \varsigma_j).\end{aligned}\quad (10)$$

Коэффициенты этих уравнений есть функции u .

Функции $P_{i,j}$ при этом в силу (9) выражаются зависимостями:

$$\begin{aligned}P_i(\varsigma_i, \varsigma_j) &= -p_i \varsigma_i \varsigma_j^2 - \alpha_{jj} \varsigma_j^2 - q_i \varsigma_i; \\ P_j(\varsigma_i, \varsigma_j) &= -p_j \varsigma_j \varsigma_i^2 - \alpha_{ii} \varsigma_i^2 - q_j \varsigma_j.\end{aligned}\quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_i &= l_j^i \varsigma_j + \alpha_{ii} \varsigma_i^2 + \alpha_{ij} \varsigma_i \varsigma_j - p_i \varsigma_i \varsigma_j^2 - q_i^* \varsigma_i, \\ q_i^* &= q_i - l_i^i; \\ \dot{\varsigma}_j &= l_i^j \varsigma_i + \beta_{jj} \varsigma_j^2 + \beta_{ij} \varsigma_i \varsigma_j - p_j \varsigma_j^2 \varsigma_i - q_j^* \varsigma_j, \\ q_j^* &= q_j - l_j^j.\end{aligned}\quad (12)$$

Тогда производную нормальной функции Ляпунова для системы (10) можно записать в виде

$$\dot{V}(\varsigma_i, \varsigma_j) = -A_i \varsigma_i^2 + l \varsigma_i \varsigma_j - A_j \varsigma_j^2,$$

где $A_i = p_i \varsigma_j^2 - \alpha_{ij} \varsigma_j - \alpha_{ii} \varsigma_i + q_i^*$, $A_j = p_j \varsigma_i^2 - \beta_{ij} \varsigma_i - \beta_{jj} \varsigma_j + q_j^*$, $l = l_j^i + l_i^j$.

По критерию Сильвестра для отрицательной определенности $\dot{V}(\varsigma_i, \varsigma_j)$ достаточно выполнения системы неравенств:

$$A_i > 0, A_j > 0, A_i A_j - \frac{l^2}{4} > 0. \quad (13)$$

В силу ограниченности величин Z_s, L_s в уравнениях (7) существуют максимальные значения модулей коэффициентов $\alpha_{ii}, \alpha_{ij}, \beta_{ii}, \beta_{ij}, l_j^i, l_i^j, l_i^i, l_j^j$.

Нетрудно видеть, что тогда неравенства (13) имеют следующие решения:

$$\begin{aligned}q_i &> R_0(|\alpha_{ij}|_{\max} + |\alpha_{ii}|_{\max}) + 1 + \frac{|l|_{\max}}{2} + |l_i^i|_{\max}; \\ q_j &> R_0(|\beta_{ij}|_{\max} + |\beta_{ii}|_{\max}) + 1 + \frac{|l|_{\max}}{2} + |l_j^j|_{\max}; \\ p_i &> \frac{|\alpha_{ij}|_{\max}^2}{4}; p_j > \frac{|\beta_{ij}|_{\max}^2}{4},\end{aligned}\quad (14)$$

независимые от y .

Отсюда следует, что настройка привода движения может быть проведена в структурах комбинируемых двусвязных систем в составе исходной многосвязной системы, а сам алгоритм настройки заключается только в независимом увеличении свободных параметров управления.

В этом заключается суть рассматриваемого здесь комбинационного метода.

Выводы

1. Устойчивость тривиального решения системы (7) достигается в классе приведенного управления (9), при котором проводится коррекция только центральных членов уравнений динамики в явной форме (2), а настройка в каждом из сепаратных каналов зависит лишь от двух свободных параметров.

2. Возможные расчетные формулы параметров привода системы следующие:

$$\begin{aligned}q_i &> \max_j [R_0(|\alpha_{ij}|_{\max} + |\alpha_{ii}|_{\max}) + 1 + \frac{|l|_{\max}}{2} + |l_i^i|_{\max}]; \\ p_i &> \max_j \frac{|\alpha_{ij}|_{\max}^2}{4}, i, j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

3. Выигрыш в действиях при синтезе параметров управления многокоординатной системы объясняется возможностью настраивать на основе модульного принципа модель *двусвязного* привода (например, в графическом пакете Simulink среды моделирования Matlab), в том числе при учете специфики конкретных двигателей исполнительных системы. Это является серьезной основой для разработки автоматизированного метода синтеза системы управления в целом.

Приложение

Доказательство теоремы

Форма V_0 характеризует систему (7), а V_{0k} — систему (8), при этом справедливо функциональное равенство

$$V_{0k}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_{k-1}, \varsigma_{k+1}, \dots, \varsigma_n) \stackrel{f}{=} V_0(\varsigma)|_{\varsigma_k=0}.$$

Запишем выражение полной производной по времени функции V_{0k} :

$$\dot{V}_{0k} = \sum_{s \neq k} \frac{\partial V_{0k}}{\partial \varsigma_s} \dot{\varsigma}_s' = 2 \sum_{s \neq k} \varsigma_s \dot{\varsigma}_s', \quad (П0)$$

где $\dot{\varsigma}_s'$ — производные переменных состояния системы в процессе, описываемом уравнениями (8).

Сравнивая (7) и (8) при одном и том же значении y , получаем:

$$\dot{\varsigma}_s' \stackrel{f}{=} \dot{\varsigma}_s - 2 \sum_{s \neq k} z_{ik}^s \varsigma_i \varsigma_k - z_{kk}^s \varsigma_k^2 - l_k^s \varsigma_k - P_s^k, \quad (П1)$$

где $P_s^k \stackrel{f}{=} P_{vs} - P_{vs}^k$.

Подставляя (П1) в (П0), имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}_{0k}}{2} &\stackrel{f}{=} \sum_{s \neq k} \varsigma_s \dot{\varsigma}_s - 2 \varsigma_k \sum_{s \neq k} \varsigma_s \sum_{i \neq k} z_{ik}^s \varsigma_i - \\ &- \varsigma_k^2 \sum_{s \neq k} z_{kk}^s \varsigma_s - l_k^s \varsigma_k \sum_{s \neq k} \varsigma_s - \sum_{s \neq k} \varsigma_s P_s^k = \\ &= \sum_{s \neq k} \varsigma_s \dot{\varsigma}_s - \sum_{s \neq k} \varsigma_s (G_{sk} + P_s^k),\end{aligned}\quad (П2)$$

где $G_{sk} = \varsigma_k (2 \sum_{i \neq k} z_{ik}^s \varsigma_i + z_{kk}^s \varsigma_k + l_k^s) = \varsigma_k \tilde{G}_{sk}$.

Прибавим к левой и правой частям (П2) функцию $\frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial \varsigma_k} \dot{\varsigma}_k$. Тогда

$$\frac{1}{2} \dot{V}_{0k} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial \varsigma_k} \dot{\varsigma}_k \stackrel{f}{=} \frac{\dot{V}_0}{2} - \sum_{s \neq k} \varsigma_s (G_{sk} + P_s^k). \quad (П3)$$

Просуммируем (П3) по k , учитывая, что по условию теоремы выполняется условие: $P_s^k = -p_s \varsigma_s \varsigma_k^2 - \dot{z}_{kk}^s \varsigma_k^2$. Получим:

$$\frac{1}{2} \sum_k \dot{V}_{0k} \stackrel{f}{=} \frac{1}{2} (n-1) \dot{V}_0 + \sum_s \mathfrak{I}_k,$$

где $\mathfrak{I}_k = \varsigma_k^2 \sum_{s \neq k} p_s \varsigma_s^2 - \varsigma_k \sum_{s \neq k} \varsigma_s \tilde{G}_{sk}^*$; $\tilde{G}_{sk}^* = \tilde{G}_{sk} - \dot{z}_{kk}^s \varsigma_k = 2 \sum_{i \neq k} \dot{z}_{ik}^s \varsigma_i + l_k^s$.

Поскольку $\tilde{G}_{sk}^*$ от ς_k уже не зависит, получаем, что минимум по ς_k величины $\mathfrak{I}_k$ составит:

$$\min \mathfrak{I}_k = - \frac{\left(\sum_{s \neq k} \varsigma_s \tilde{G}_{sk}^* \right)^2}{4 \sum_{s \neq k} p_s \varsigma_s^2}. \text{ Но вследствие неравенст-}$$

ва Коши-Буняковского [7] выполняется условие

$$\begin{aligned} (\sum_s \tilde{G}_{sk}^*)^2 &\leq (\sum_s |\varsigma_s| |\tilde{G}_{sk}^*|)^2 \leq \\ &\leq \sum_s |\tilde{G}_{sk}^*| (\sum_s |\tilde{G}_{sk}^*| \varsigma_s^2) < 4 \sum_s p_s \varsigma_s^2, \end{aligned}$$

если

$$p_s > \frac{1}{4} |\tilde{G}_{sk}^*| |\sum_s |\tilde{G}_{sk}^*|. \quad (\text{П4})$$

Следовательно, при выполнении (П4)

$$|\min \mathfrak{I}_k| < 1. \quad (\text{П5})$$

Запишем выражение $\dot{V}_{0k}$ при некотором k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{V}_{0k} &= \sum_{s \neq k} \varsigma_s (\varsigma_k^T Z_s^k \varsigma_k - \sum_{r \neq s, k} \dot{z}_{rr}^s \varsigma_r^2) + \\ &+ \sum_{s \neq k} \varsigma_s L_{s;k} \varsigma_k - \sum_{s \neq k} (p_s \varsigma_s^2 \sum_{r \neq s, k} \varsigma_r^2 + q_s \varsigma_s^2) \end{aligned}$$

и проведем сравнение: $\frac{1}{2} |\dot{V}_{0k}| \wedge |\min \mathfrak{I}_k|$.

Для этого рассмотрим скалярную функцию $\Phi(\varsigma) = \varphi(\varsigma) - \eta g(\varsigma_k)$ в сплошной области $N_k(\varsigma)$: $0 < \|\varsigma\| < R$, в которой $\varphi(\varsigma)$ — ограниченная, а $g(\varsigma)$ — положительно-определенная по ς_k функции. При любом $1 < \delta < \infty$ можно выбрать такое $\eta^* > 0$, что везде в $N_k(\varsigma)$ при $\eta > \eta^*$ будет выполняться: $\varphi(\varsigma) - \eta g(\varsigma) < -\delta$. Действительно, для этого достаточно выбрать:

$$\max \left(0, \max_{N(\varsigma)} \frac{\delta + \varphi(\varsigma)}{g(\varsigma)} \right) < \eta^* < \infty. \quad (\text{П6})$$

Можем положить:

$$\varphi(\varsigma) = \sum_{s \neq k} \varsigma_s (\varsigma_k^T Z_s^{(k)} \varsigma_k - \sum_{r \neq s, k} \dot{z}_{rr}^s \varsigma_r^2) + \sum_{s \neq k} \varsigma_s L_{s;k} \varsigma_k;$$

$$g(\varsigma_k) = \sum_{s \neq k} (\varsigma_s^2 \sum_{r \neq s, k} \varsigma_r^2 + \varsigma_s^2).$$

В этом случае решение (П6) существует везде в $N_k(\varsigma)$. Выбирая

$$\begin{aligned} p_s &= p_s^k > \max \left(\max_{N_k} \frac{1}{4} |\tilde{G}_{sk}^*| |\sum_s |\tilde{G}_{sk}^*|, \eta^*, p_s^* \right), \\ q_s &> \max(q_s^*, \eta^*), \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

получим с учетом (П5)

$$\frac{1}{2} |\dot{V}_{0k}| > |\min \mathfrak{I}_k|, \forall \varsigma_k \in N_k(\varsigma). \quad (\text{П8})$$

Отсюда, поскольку $\dot{V}_{0k} < 0$ везде в $N_k(\varsigma)$, получаем функцию $\frac{1}{2} \dot{V}_{0k} - \mathfrak{I}_k$ знакоотрицательной при $\|\varsigma_k\| < R_0$. Следовательно, выбирая окончательно

$$p_s = \max_k p_s^k; s, k = 1, \dots, n; k \neq s,$$

в силу функционального равенства

$$\sum_s \left(\frac{1}{2} \dot{V}_{0k} - \mathfrak{I}_k \right) \stackrel{f}{=} \frac{1}{2} (n-1) \dot{V}_0 \quad (\text{П9})$$

получаем $\dot{V}_0$ знакоотрицательной в n -мерном шаре $\|\varsigma\| < R_0$, причем независимо от u .

Отсюда, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости тривиальное решение (7) в области $\|\varsigma\| < R_0$ на любой траектории $y(t)$ является асимптотически устойчивым [8]. Теорема доказана.

Список литературы

1. Смирнов Е. Я., Павликов В. Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В. Управление движениями механических систем. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985. 312 с.
2. Пятницкий Е. С. Принцип декомпозиции в управлении механическими и электромеханическими системами // Известия АН. Техническая кибернетика. 1990. № 6. С. 4—15.
3. Баранов В. В. Координация движения звеньев манипулятора в режиме декомпозиции // Известия АН. Техническая кибернетика. 1990. № 6. С. 36—45.
4. Шаршеналиев Ж. Ш., Миркин Б. М., Лыченко Н. М. Проектирование децентрализованного координированного управления нелинейными системами с интервальными неопределенностями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 12. С. 21—27.
5. Миркин Б. М. Декомпозиционно-координационная оптимизация динамических систем с адаптацией критерия // Автоматика и телемеханика. 2001. № 7. С. 148—157.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 1. Арифметика и алгебра. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 455 с.
8. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

А. А. Анисимов, канд. техн. наук, доц.

С. В. Тарарыкин, д-р техн. наук, проф.,

Ивановский государственный

энергетический университет им. В. И. Ленина

tsv@ispu.ru

Формирование критерия оптимальности в задачах синтеза регуляторов состояния электромеханических систем

Рассматривается проблема формирования критерия оптимальности в задачах параметрического синтеза регуляторов состояний электромеханических систем (ЭМС). Предлагается применение комплексного критерия оптимальности, содержащего показатели точности и быстродействия, а также параметрической грубости системы и энергетических затрат на управление, нормированные по шкале Харрингтона. На примере синтеза двухмассовой ЭМС с полиномиальным регулятором показано, что предлагаемый подход позволяет эффективно решать задачи параметрической оптимизации систем управления.

Ключевые слова: электромеханическая система, регулятор состояния, полиномиальный регулятор, критерий оптимальности, показатели качества системы управления, параметрическая грубость.

Введение

Перспективным направлением повышения качества управления современными электромеханическими системами (ЭМС) является применение управляющих устройств повышенной сложности в виде регуляторов состояния (РС) различного типа — как безынерционных, так и динамических [1, 2]. Наиболее универсальными и сложными РС оказываются динамические полиномиальные регуляторы (ПР), формирующие управляющее воздействие по выходной координате объекта и ее производным и содержащие наибольшее число настраиваемых параметров.

Обычно процедуры синтеза РС, в том числе полиномиальных, выполняются в два этапа, предполагающих формирование структуры и определение параметров регулятора. Структурный синтез является творческим, трудноформализуемым этапом в силу большого числа влияющих факторов и реализуется преимущественно эвристическими методами. Параметрический синтез в рамках выбранной структуры РС является более конкретизированным и выполняется аналитическими или численными методами, реализуемыми на ЭВМ. При этом могут использоваться методы синтеза по заданным показателям качества (обычно — модальное управление) [3, 4] или поисковые методы параметрической оптимизации на основе выбранного критерия (оптимальное управление) [3, 5].

Применительно к ПР структурный синтез [2] основывается на формировании исходной модели линейаризованного объекта управления (ОУ) в виде передаточной функции (ПФ)

$$H_{OY}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}, \quad (1)$$

где $B(s)$ — полином воздействия степени m ; $A(s)$ — характеристический полином степени n ; s — комплексная переменная Лапласа. Структурный синтез состоит в определении степеней полиномов числителя $R(s)$ и знаменателя $C(s)$ искомой ПФ аналогового прототипа регулятора вида

$$H_{ПР}(s) = \frac{R(s)}{C(s)} = \frac{r_0 + r_1s + \dots + r_{n-1+v}s^{n-1+v}}{c_0 + c_1s + \dots + c_{m+l}s^{m+l}}, \quad (2)$$

где v — заданная степень астатизма системы; l — степень, определяющая дополнительные фильтрующие свойства ПР.

Параметрический синтез ПР выполняется обычно методами модального управления (МУ) [3, 4] и состоит в расчете параметров аналогового прототипа регулятора путем решения полиномиального уравнения синтеза

$$A(s)C(s) + B(s)R(s) = A_{\text{ж}}(s), \quad (3)$$

где $A_{\text{ж}}(s)$ — желаемый характеристический полином, отражающий (в определенной степени) требуемое качество управления.

Получение цифровой формы регулятора может осуществляться либо подстановкой в ПФ (2) так называемых z -форм [6], соответствующих той или иной схеме численного интегрирования, либо изначальным выполнением всех процедур синтеза в полиномиальных z -формах на основе предварительной дискретизации модели (1) ОУ.

Значения параметров РС, полученные методом МУ, как правило, не являются оптимальными, поскольку определяются на основе упрощенного формирования требований к САУ видом полинома $A_{\text{ж}}(s)$, выбираемым обычно из ряда стандартных (Ньютона, Бесселя, Баттерворта и др.), что существенно ограничивает возможности разработчиков.

Более полный учет всего комплекса требований, предъявляемых к САУ, и, как следствие, более эффективное решение задачи синтеза позволяют обеспечить поисковые методы параметрической оптимизации регуляторов. Однако они могут и не привести к решению поставленной задачи при ее некорректной постановке (формализации) или неудачной организации процедуры поиска оптимального решения.

Важнейшим этапом параметрической оптимизации, в значительной мере определяющим успех всей поисковой процедуры, является формирование эффективного критерия оптимальности, который не только всесторонне отражает желаемый ко-

нечный результат, но и способствует надежной сходимости поиска глобального экстремума.

В настоящее время в решении задач оптимального управления широкое распространение получили косвенные критерии оптимальности, наиболее характерными из которых являются квадратичные функционалы качества. Однако они в большей мере ориентированы на обеспечение аналитической процедуры синтеза и устойчивости оптимизационных процедур, нежели на реальные показатели качества САУ, понятные проектировщикам. Как следствие, возникает проблема задания весовых коэффициентов при формировании комплексного критерия оптимальности, не имеющих явных связей с прямыми показателями качества САУ.

В условиях повышения сложности синтезируемых ЭМС и значительного роста возможностей современных вычислительных средств, используемых как в расчетном режиме, так и в управляющем режиме реального времени, перспективным направлением параметрической оптимизации и настройки систем можно считать переход от косвенных критериев оптимальности к прямым. Это позволяет сделать акцент исключительно на численных процедурах поиска экстремума и одновременно обеспечить более полный компромисс между основными техническими требованиями к САУ с учетом специфических особенностей системы, а также осознанное управление таким компромиссом со стороны проектировщика.

1. Принципы формирования критерия оптимальности ЭМС

Для параметрической оптимизации одноканальных САУ с регуляторами "входа—выхода" наиболее часто применяют [6, 7] квадратичный критерий вида

$$J = \sum_{j=1}^N (he_j^2 + gu_j^2), \quad (4)$$

где $N = t_n/T_0$; t_n — относительное и абсолютное время переходного процесса; T_0 — шаг квантования времени; j — номер отсчета; $e_j = y_j - y_3$ — значения ошибки управления выходной координатой y относительно заданной величины y_3 ; u_j — значения управляющего воздействия на объект; h и g — весовые коэффициенты.

Основным достоинством такого критерия является его направленность на достижение наиболее важного компромисса между результатом управления и соответствующими энергетическими затратами.

Однако неопределенность в выборе весовых коэффициентов h , g и неявная связь с прямыми показателями качества синтезируемой САУ являются существенными недостатками критерия, затрудняющими его применение.

Исключить эти недостатки при системном проектировании линейных РС можно путем применения обобщенного нормированного критерия [8]

$$\bar{q} = 1 - \sqrt{\bar{q}_1 \bar{q}_2}, \quad (5)$$

основанного на использовании прямых (нормированных) показателей быстродействия ($\bar{q}_1$) и точности ($\bar{q}_2$). При этом в качестве показателя быстродействия q_1 здесь принимается время нарастания переходной характеристики t_n , а в качестве показателя точности q_2 — средний модуль относительного отклонения выходной координаты за время $t_n < t < t_n$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{N-T} \sum_{j=T}^N \left| \frac{y_j - y_3}{y_3} \right| \cdot 100 \%, \quad (6)$$

где $T = t_n/T_0$ — относительное время нарастания. Нормирование показателей качества осуществляется с использованием функции предпочтительности Харрингтона

$$\bar{q}_i = \exp(-\exp(-z_i)), \quad (7)$$

где $z_i = b_{0i}q_i$; $b_{0i} = z_i^{\text{хор}} - b_{1i}q_i^{\text{хор}}$; $b_{1i} = (z_i^{\text{хор}} - z_i^{\text{пл}})/(q_i^{\text{хор}} - q_i^{\text{пл}})$; z_i , $\bar{q}_i$ — кодированное и нормированное значения критерия; $z_i^{\text{хор}}$, $q_i^{\text{хор}}$ и $z_i^{\text{пл}}$, $q_i^{\text{пл}}$ — значения критериев, соответствующие хорошему и плохому качеству системы.

Разделение переходной характеристики на два участка анализа и применение прямых показателей качества (6), (7) позволяют обеспечить [9] более наглядный компромисс между быстродействием и точностью линейных САУ в условиях влияния неучтенных факторов в виде малых постоянных времени ОУ.

Однако более детальные исследования синтезируемых ЭМС показывают, что использование критерия (5) может приводить к формированию систем с близкими переходными характеристиками при существенно различных параметрах регулятора. В качестве иллюстрации на рис. 1, а приведены переходные характеристики двухмассовой ЭМС [10] (рис. 2) с указанными в табл. 1 значениями параметров, полученных для двух существенно различных ПР вида 2/0 ($\deg R(s) = 2$, $\deg C(s) = 0$) при $C(s) = 1$ и следующих значениях коэффициентов полинома $R(s)$: $r_0 = 44,8$; $r_1 = 7,5$; $r_2 = 0,66$ (кривая 1) и $r_0 = 4,43$; $r_1 = 0,88$; $r_2 = 0,15$ (кривая 2).

Данный пример наглядно показывает, что анализ одной лишь переходной характеристики САУ по ее выходной координате является неполным, а проводимая на его основе оптимизация, очевидно, не учитывает других, достаточно существенных показателей качества системы.

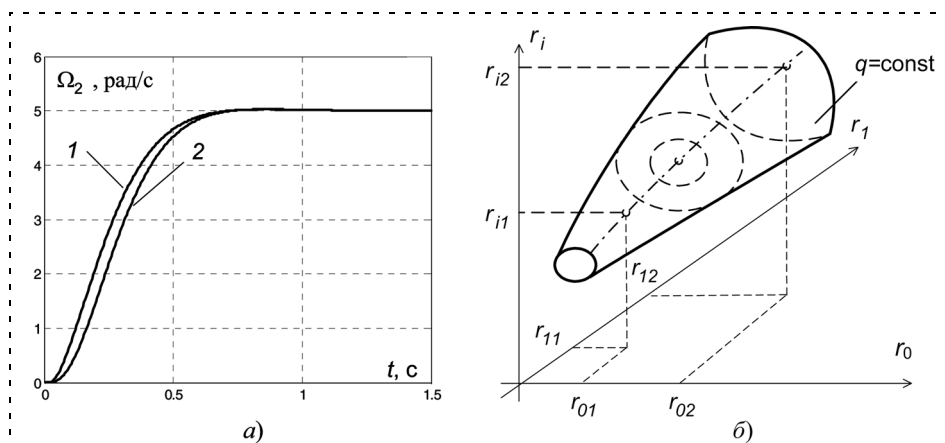


Рис. 1. Переходные характеристики ЭМС с различными параметрами ПР (а) и вид изоповерхности критерия оптимальности $\bar{q}$ (б)

Как следствие, изоповерхность функционала (5) приобретает вид вытянутой расширяющейся "трубки" (рис. 1, б), что свидетельствует о плохой обусловленности задачи оптимизации. Изменения параметров РС на поверхности такой "трубки" мало влияют на характер переходного процесса по выходной координате САУ. Однако глубина отрицательной обратной связи при этом существенно меняется, что вызывает значительные вариации таких физических свойств системы, как робастность, помехоустойчивость, и требует различных энергетических затрат на управление объектом. Вариант САУ с более глубокой обратной связью ($r_{02}, r_{12}, \dots, r_{k2}$) в сравнении с вариантом ($r_{01}, r_{11}, \dots, r_{k1}$) имеет меньшую параметрическую чувствительность, что подтверждается расширением "трубки" изоповерхности $\bar{q} = \text{const}$, но предполагает более высокие значения управляющих воздействий на ОУ.

В связи с этим требуется сформировать новый вид обобщенного критерия качества, который бы совмещал достоинства рассмотренных выше критериев (4), (5) и исключал бы их недостатки. Для этого предлагается расширить критерий вида (5) введением в него показателей робастности q_3 и энергетических затрат на управление q_4 , нормированных по шкале Харрингтона. В этом случае обобщенный критерий оптимальности синтезируемых САУ принимает следующий вид:

$$\bar{q}_m = 1 - \left(\prod_{i=1}^4 q_i \right)^{1/4}. \quad (8)$$

Показателем робастности q_3 может служить средний модуль отклонения переходной характеристики системы при вариации параметров ОУ относительно расчетных значений за время переходного процесса

$$\bar{\sigma}_R = \frac{1}{N} \sum_{j=T}^N \left| \frac{y_j - y_j^*}{y_j} \right| \cdot 100 \%, \quad (9)$$

где y_j, y_j^* — значения выходной координаты при расчетных и измененных параметрах объекта.

В качестве показателя энергетических затрат на управление q_4 применительно к ЭМС целесообразно принять пиковое значение тока двигателя $I_{a \max}$, которое ограничивается перегрузочной способностью силовой части системы и, как правило, определяет размеры линейной зоны ее работы.

Применение расширенного критерия (8) позволяет обеспечить более полный компромисс между основными техническими показателями ЭМС —

быстродействием, точностью, робастностью, энергетическими затратами на управление. При этом поверхность отклика функционала качества приобретает четко выраженный экстремум, что снимает проблему обусловленности задачи оптимизации.

В тех случаях, когда назначение оценок "хорошо" — "плохо" на шкале Харрингтона для частных показателей качества оказывается затруднительным, следует их уточнить построением соответствующих проекций зоны компромиссов Парето, проводя регулярное сканирование всей области значений параметров регулятора.

Характерной особенностью критериев оптимальности, нормируемых по шкале Харрингтона и используемых для оценки качества робастных систем, является наличие в области оптимума участка с мало изменяющимися значениями функционала $\bar{q}$ (так называемого "плата оптимальности") [9].

В этих случаях для решения задач оптимизации целесообразно использовать методы поиска экстремума, не связанные с вычислением градиентов. Более эффективным здесь оказывается применение генетических алгоритмов, основанных на моделировании процессов естественного отбора в живой природе [3].

2. Применение критерия оптимальности для синтеза ЭМС

Проведем процедуру синтеза цифрового ПР для двухмассовой ЭМС постоянного тока (рис. 2) с параметрами из табл. 1, соответствующими реальной элементной базе экспериментального стенда, ориентируясь на требования быстродействия порядка 0,5 с, минимального перерегулирования по выход-

Таблица 1

$K_f, \text{А/В}$	$T_f, \text{с}$	$C, \text{Вб}$	$J_1, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$J_2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$C_{12}, \text{Н} \cdot \text{м/рад}$	$K_d, \text{Н} \cdot \text{м/рад}$
1	0,007	0,16	0,015	0,05	0,65	0,01

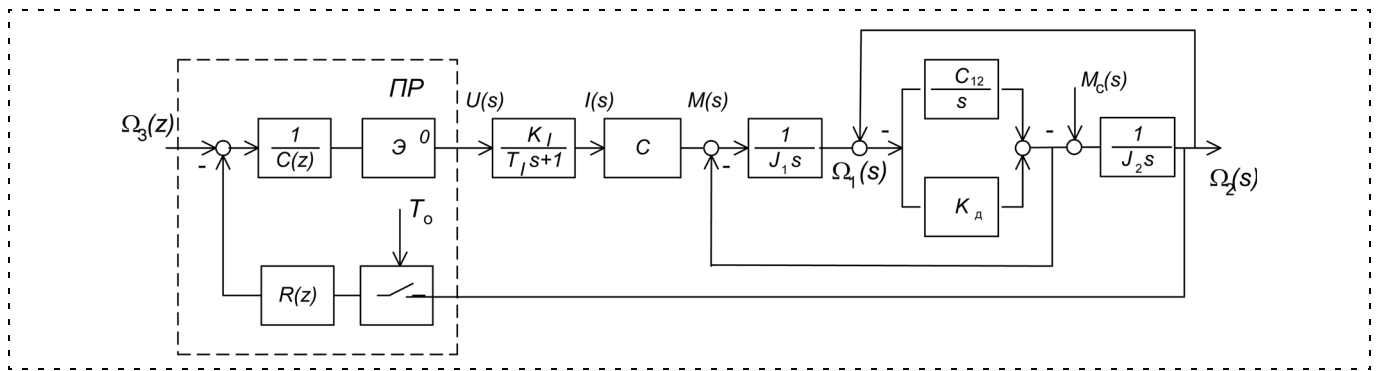


Рис. 2. Структурная схема упрощенной модели двухмассовой ЭМС с цифровым ПР

ной координате Ω_2 , низкой чувствительности к вариациям параметров механической части при максимальном значении тока силовой цепи $I_{a\max} = 30$ А. Для повышения наглядности используем упрощенную модель системы, в которой замкнутый контур тока представлен аperiодическим звеном первого порядка с параметрами K_I , T_I .

Пренебрегая при синтезе регулятора относительно малой постоянной времени контура тока $T_I = 0,007$ с в соответствии с рекомендациями из [8], получаем выражение ПФ объекта в виде

$$H_{Oy}(s) = \frac{\Omega_2(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^3 + a_1 s} = \frac{138,67}{s^3 + 56,33 s}. \quad (10)$$

Для такого ОУ может быть синтезирован минимизированный вариант ПР вида 2/0 с тремя настраиваемыми параметрами, что обеспечит наглядное представление в трехмерном пространстве (r_0, r_1, r_2) изоповерхностей принятого функционала качества.

Для исходного варианта настройки САУ было выбрано стандартное распределение корней характеристического полинома Бесселя 3-го порядка, имеющего значение среднегеометрического корня $\Omega_0 = 8,56$ рад/с [9]. При этом решение уравнения синтеза ПР (3) приводит к следующим выражениям полиномов аналогового прототипа регулятора:

$$R(s) = 0,15s^2 + 0,88s + 4,43;$$

$$C(s) = 1.$$

Переход к цифровой форме регулятора был выполнен с использованием подстановки (z-формы)

Таблица 2

Показатель	i	$q_i^{\text{пл}}$	$q_i^{\text{хор}}$
t_n , с	1	0,7	0,25
$\bar{\sigma}_y$, %	2	12,0	0,5
$\bar{\sigma}_R$, %	3	8,5	0,5
$I_{a \max}$, А	4	45	10

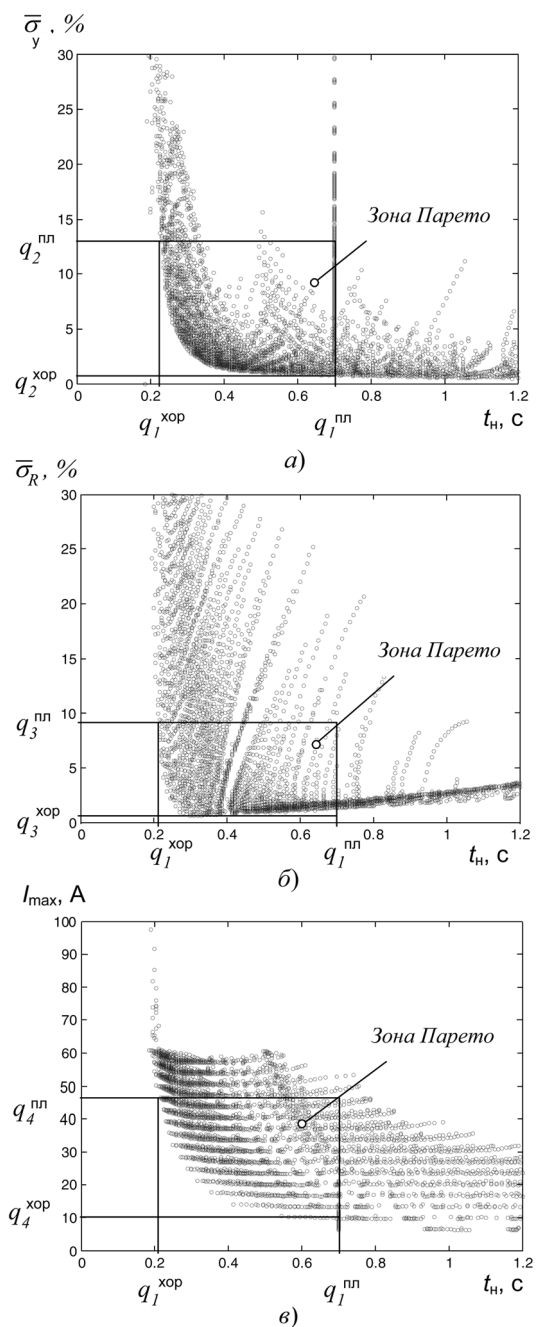


Рис. 3. Проекция зоны Парето для основных показателей качества ЭМС

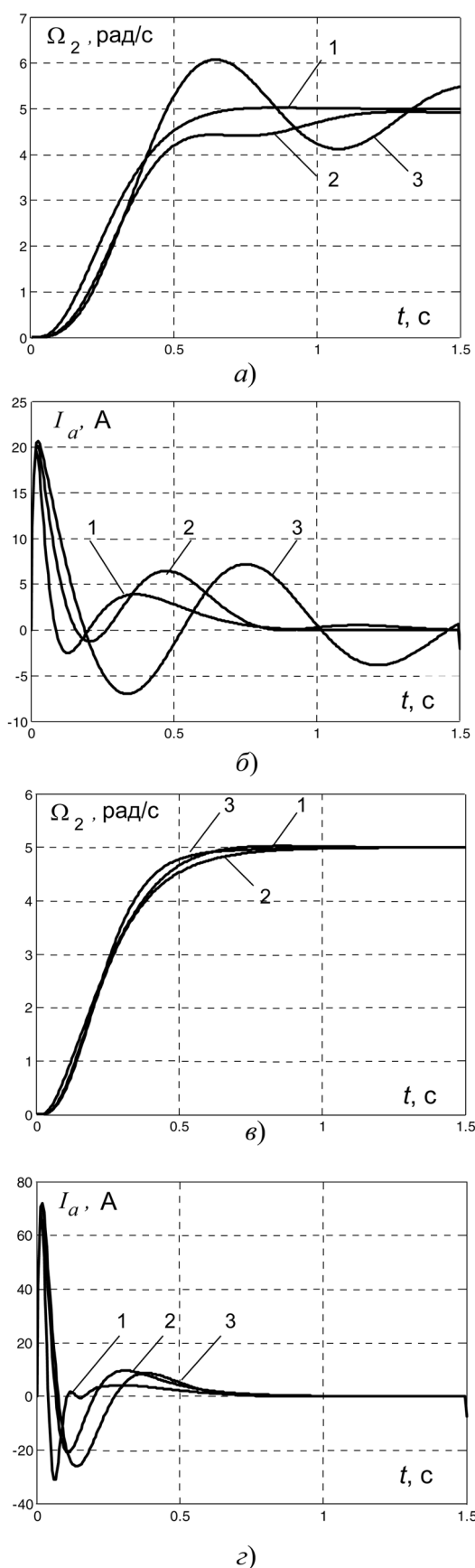


Рис. 4. Переходные характеристики ЭМС при расчетных параметрах ПР 2/0 (а, б) и при более глубокой отрицательной обратной связи (в, г)

$s = (1 - z^{-1})/T_0$, т. е. путем замены производных конечными разностями соответствующих порядков, при шаге квантования времени $T_0 = 0,005$ с согласно требованиям теоремы В. А. Котельникова. В итоге были получены следующие выражения полиномов дискретной ПФ цифрового регулятора:

$$R(z) = 0,15\nabla^2(z) + 0,88\nabla(z) + 4,43;$$

$$C(z) = 1,$$

где $\nabla^2(z) = 4,0 \cdot 10^4(1 - 2z^{-1} + z^{-2})$, $\nabla(z) = 2,0 \cdot 10^2 \times (1 - z^{-1})$ — возвратные конечные разности.

В качестве выходной координаты ЭМС при расчете показателей быстродействия $q_1 = t_n$, точности $q_2 = \bar{\sigma}_y$ (6) и робастности $q_3 = \bar{\sigma}_R$ (9) была принята скорость второй массы Ω_2 , а энергетические затраты на управление q_4 оценивались пиковым значением тока якорной цепи $I_{a\max}$.

С учетом неопределенности начального этапа оптимизации для нормирования частных критериев по шкале Харрингтона были построены проекции области Парето в системе координат (q_1, q_2, q_3, q_4) путем моделирования и анализа процессов ЭМС при вариации параметров ПР в определенном диапазоне (рис. 3). Уровни "хорошо"—"плохо" для каждого показателя качества определялись по соответствующим проекциям границ области Парето.

Полученные таким образом значения оценок $q_i^{\text{пл}}$, $q_i^{\text{хор}}$ приведены в табл. 2.

Для проведения исследования была разработана программа (сценарий вычислительного эксперимента) на языке комплекса MatLab 7.1 и составлена модель двухмассовой ЭМС с ПР в среде Simulink. Программа обеспечивает расчет значений критериев оптимальности (5) и (8) при различных сочетаниях параметров ПР, получаемых методом регулярного сканирования. Расчет частных показателей качества реализуется в форме S-функции `contr sim`, выполняемой на каждом шаге квантования времени.

На рис. 4, а, б приведены переходные характеристики ЭМС при базовой настройке ПР ($r_0 = 4,43$; $r_1 = 0,88$; $r_2 = 0,15$), а на рис. 4, в, г — аналогичные характеристики системы с более глубокой отрицательной обратной связью ($r_0 = 22,4$; $r_1 = 3,83$; $r_2 = 0,3$). При этом графики 1 соответствуют расчетным параметрам ОУ (табл. 1), графики 2 — увеличению момента инерции ($J_2 = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$), а графики 3 — снижению коэффициента жесткости ($C_{12} = 0,25 \text{ Н/м рад}$) механической части. При близких показателях быстродействия и точности система с усиленной обратной связью является более робастной, однако пиковое значение тока силовой цепи оказывается для нее существенно выше.

На рис. 5, а, б для сравнения приведены изоповерхности $\bar{q} = \bar{q}_m = 0,3$ соответствующих критериев

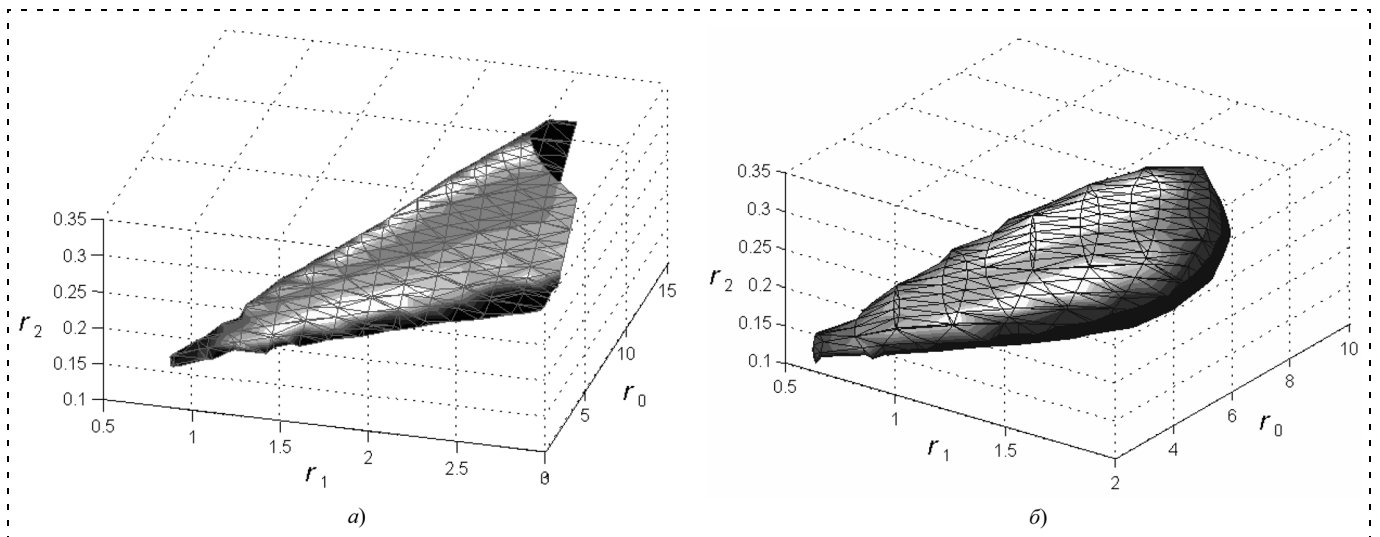


Рис. 5. Изоповерхности уровня 0,3 для исходного $\bar{q}$ (а) и для расширенного $\bar{q}_m$ (б) критериев оптимальности

риев (5), (8). Они наглядно показывают, что преимуществом комплексного критерия $\bar{q}_m$ является наличие четко выраженного минимума. Это снимает проблему обусловленности задачи оптимизации и позволяет применять рекуррентные алгоритмы поиска экстремума.

Характеристики системы с оптимальными значениями параметров ПР ($r_0 = 7,1$; $r_1 = 1,35$; $r_2 = 0,21$), обеспечивающие значение критерия $\bar{q}_m = 0,28$, приведены на рис. 6, где графики 1 соответствуют расчетным параметрам ОУ, а графики 2, 3 — указанным выше вариациям параметров J_2 , C_{12} механической части.

Приведенные результаты моделирования иллюстрируют достижение искомого компромисса между основными показателями качества САУ, обусловленного заданными уровнями их оценок, принятыми проектировщиком при нормировании.

В тех случаях, когда уровни нормирования показателей качества САУ на начальной стадии проектирования известны, например, установлены методом экспертных оценок или выявлены путем анализа свойств системы-прототипа, которые предполагается улучшить в новой разработке, необходимость выполнения процедуры регулярного сканирования пространства параметров ПР и предварительного определения области Парето отпадает. Для достижения желаемого компромисса качества могут быть использованы ускоренные процедуры поисковой параметрической оптимизации, успешность выполнения которых во многом определяется собственными свойствами принятого критерия, характеризующими его эффективность.

Для исследования эффективности сформированного критерия (8) была выполнена повторная параметрическая оптимизация приведенной выше ЭМС с использованием поискового генетического

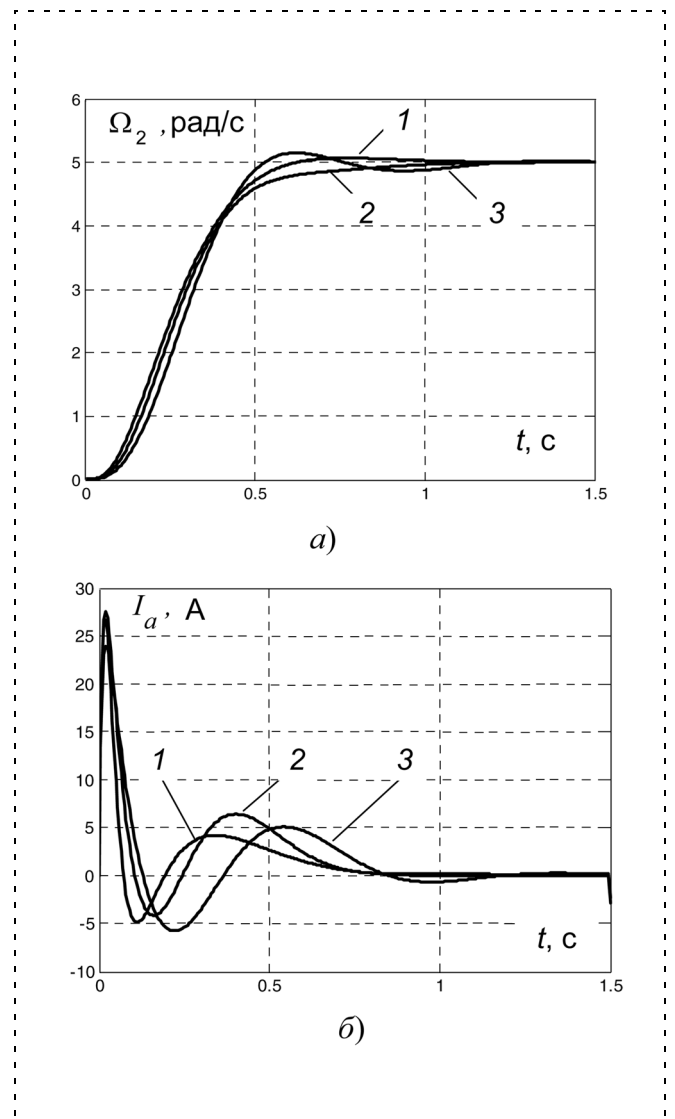


Рис. 6. Переходные характеристики ЭМС при оптимальных ($\bar{q}_m = 0,28$) параметрах ПР 2/0

алгоритма из состава программного комплекса MatLab 7.1 (функция gatool). Результаты оптимизации показывают, что минимальное значение критерия $\bar{q}_m = 0,29$ достигается за 20...25 поколений, каждое из которых состоит из 20 особей, что в совокупности требует проведения 400...500 экспериментов. Синтезированная таким образом САУ по своим параметрам и характеристикам идентична системе, полученной гораздо более трудоемким методом регулярного сканирования.

Проведенные исследования показали, что дальнейшее снижение числа итераций, особенно важное для натурной оптимизации системы на реальном объекте, может быть достигнуто применением метода Дэвидона — Флетчера — Пауэлла и симплекс-методов, однако соответствующей "платой" за ускорение настройки становится завышенное значение критерия в конечной точке поиска и возможность ее смещения к границе "плато оптимальности".

В завершение работы полный комплекс описанных выше исследований был выполнен для ЭМС с регуляторами других типов: ПР вида 2/1, 2/2, безынерционным РС и совокупностью РС с асимптотическим наблюдателем состояния. По аналогии с [9] при этом не только использовались различные методы поиска экстремума, но и учитывалось влияние отдельных нелинейностей (квантование сигналов по уровню, реакция якоря двигателя), являющихся существенными, но не определяющими в динамике ОУ.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что использование комплексного критерия (8)

в задачах параметрической оптимизации ЭМС является эффективным и достаточно универсальным средством достижения требуемого компромисса между основными техническими показателями САУ и создает условия для осознанного управления этим компромиссом в ходе проектирования.

Список литературы

1. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления: Пер. с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 620 с.
2. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 2. Методы современной теории автоматического управления / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 748 с.
4. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. Машиностроение, 1976. 184 с.
5. Сейдж Э. П., Уайт Ч. С. Оптимальное управление системами. Ч. III: Пер. с англ. под ред. Б. Р. Левина. Радио и связь, 1982. 392 с.
6. Мита Ц., Хара С., Кондо Р. Введение в цифровое управление: Пер. с японского. Мир, 1994. 256 с.
7. Изерман Р. Цифровые системы управления. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 541 с.
8. Тарарыкин С. В., Тютиков В. В. Системное проектирование линейных регуляторов состояния // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 4.
9. Анисимов А. А., Тарарыкин С. В. Исследование и разработка методов параметрической оптимизации полиномиальных регуляторов электромеханических систем // Электричество. 2008. № 3. С. 33—39.
10. Башарин А. В., Новиков В. А., Соколовский Г. Г. Управление электроприводами: Учеб. пособие. Л.: Энергоиздат, 1982. 392 с.

УДК 62-83-52

В. П. Кочетков, д-р техн. наук, проф.,
П. Э. Подборский, канд. техн. наук, докторант,
А. В. Коловский, аспирант,
 Хакасский технический институт — филиал
 Сибирского федерального университета
 aleksey_a_v@list.ru

Оптимизация динамики электромеханической системы с помощью систем с переменной структурой

Рассмотрено решение задачи динамической оптимизации двухмассовой электромеханической системы с применением скользящих режимов. С использованием компьютерного моделирования получены соответствующие переходные процессы на примере электропривода копающих механизмов карьерного экскаватора в различных режимах работы.

Ключевые слова: системы с переменной структурой, скользящий режим, нелинейное управление, экскаваторный электропривод, электромеханическая система.

Введение

Актуальной проблемой современной теории и практики управления является разработка и совершенствование способов решения задачи управления сложными динамическими объектами. В данной работе в качестве такого объекта рассмотрен электропривод копающего механизма карьерного экскаватора, работающий под действием значительных внешних нагрузок. Экскаваторный электропривод представляет собой сложную многомассовую систему и, следовательно, броски упругого момента оказывают существенное влияние на его динамику. Кроме того, в процессе работы при изменении положения ковша в забое и его заполнении породой значительно изменяется момент инерции механизма.

Одним из перспективных подходов к синтезу систем управления сложными динамическими объектами является применение систем с переменной структурой, разработанных академиком С. В. Емельяновым [1]. Наиболее широкое признание и применение в этой теории получило направление, изу-

чающее так называемые скользящие режимы. В таких режимах движение изображающей точки определяется уравнением поверхности переключения и не зависит от свойств объекта управления. То есть система, находящаяся в скользящем режиме, инвариантна к параметрическим и внешним возмущениям.

Целью данной работы является синтез системы управления в классе систем с переменной структурой для наиболее распространенного на карьерных экскаваторах электропривода по системе генератор—двигатель (Г—Д).

Математическое описание и постановка задачи

В общем случае математическое описание объекта управления со скалярным входом при общепринятых допущениях представляется системой линейных дифференциальных уравнений [2]:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1)$$

где x — вектор состояния размерности $n \times 1$, u — управление, A — матрица размерности $n \times n$, b — вектор размерности $n \times 1$.

Для удобства исследования динамики математического описания системы представлено в относительных единицах и координаты электропривода рассматриваются относительно их базовых значений. В качестве базовых для управляющего напряжения, тока возбуждения и угловых скоростей выбраны соответствующие номинальные значения. Для тока якорной цепи и момента в качестве базовых приняты их максимальные (стопорные) значения. Все дальнейшие расчеты в статье ведутся в относительных единицах.

Для системы Г—Д двухмассовой электромеханической системы (ЭМС) входящие в (1) матрицы в относительных единицах будут иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & -a_{11} & -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & -a_{23} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Введем вектор желаемого положения $x_{\text{ж}}$ для двухмассовой системы:

$$x_{\text{ж}} = \begin{bmatrix} i_{\text{в}}^{*\text{ж}} \\ i_{\text{а}}^{*\text{ж}} \\ \omega_1^{*\text{ж}} \\ M_y^{*\text{ж}} \\ \omega_2^{*\text{ж}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ g \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g = Ig, \quad (2)$$

где $i_{\text{в}}^{*\text{ж}}$, $i_{\text{а}}^{*\text{ж}}$, $\omega_1^{*\text{ж}}$, $M_y^{*\text{ж}}$, $\omega_2^{*\text{ж}}$ — желаемые значения в установившемся режиме соответственно тока возбуждения, тока якоря, скорости первой массы, упругого момента и скорости второй массы в относительных единицах; g — задающий сигнал.

Запишем уравнение движения относительно вектора рассогласования:

$$\dot{e} = \dot{x}_{\text{ж}} - Ax - bu,$$

где $e = x_{\text{ж}} - x$.

Подставляя значение $x = x_{\text{ж}} - e$ в $\dot{e}$, с учетом того, что $\dot{x}_{\text{ж}} = 0$, получаем

$$\dot{e} = Ae - bu - Ax_{\text{ж}}.$$

Учитывая (2) и обозначая $k = AI$, в результате имеем:

$$\dot{e} = Ae - bu - kg. \quad (3)$$

Таким образом, в отличие от задачи стабилизации координат x системы около нулевого значения в данном случае должно быть сведено к нулю рассогласование e . Здесь kg рассматриваем как возмущающее воздействие. В работе [3] доказано, что можно устранить его влияние на динамику системы с помощью разрывного управления.

Как известно, уравнение поверхности переключения обычно имеет вид

$$s = ce = 0, \quad (4)$$

где c — вектор коэффициентов поверхности переключения размерности $1 \times n$.

Введем пространство новых переменных, связанных с исходным линейным преобразованием

$$e' = Me, e' \in R^n,$$

чтобы для рассматриваемой двухмассовой системы пятого порядка выполнялось условие

$$Mb = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \quad (5)$$

Для выполнения условия (5) первые $(n - 1)$ строк матрицы M должны быть составлены из базиса $(n - 1)$ -мерного подпространства, ортогонального управлению. Следовательно, матрица M имеет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поведение системы (3) в пространстве новых переменных e' описывается уравнением

$$e' = MAM^{-1}e' - Mbu - Mkg,$$

или

$$\begin{cases} \dot{e}'_1 = A_{11}e'_1 + a_{12}e'_5 - k_1g; \\ \dot{e}'_5 = a_{21}e'_1 + a'_{55}e'_5 - u - k_2g, \end{cases} \quad (6)$$

где e'_1 и e'_5 — соответственно $(n-1)$ -мерный и одномерный векторы состояния из компонентов вектора e' ;

$$e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_5 \end{pmatrix}; \quad e'_1 = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3 \ e'_4)^T;$$

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a'_{55} \end{pmatrix}; \quad Mk = \begin{pmatrix} k_1 \\ k'_5 \end{pmatrix};$$

$$k_1 = (k'_1 \ k'_2 \ k'_3 \ k'_4)^T.$$

При синтезе поверхности переключения пренебрегаем возмущающим воздействием, влияние которого скомпенсируем в дальнейшем выбором соответствующего разрывного управления.

Уравнение (4) поверхности разрыва $s = 0$ относительно новых переменных имеет вид

$$s = cM^{-1}e' = c_1e'_1 + c'_5e'_5 = 0, \quad (7)$$

где $cM^{-1} = (c_1 \ c'_5)$, $c_1 = (c'_1 \ c'_2 \ c'_3 \ c'_4)$, для простоты синтеза принимаем $c'_5 = 1$.

Для получения уравнения движения в скользящем режиме с учетом (6) необходимо решить уравнение $\dot{s} = 0$ и подставить полученное решение в систему (7):

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c_1(A_{11}e'_1 + a_{12}e'_5 - k_1g) + \\ &+ (a_{21}e'_1 + a'_{55}e'_5 + u - k'_5g) = 0; \end{aligned}$$

$$u = (c_1A_{11} + a_{21})e'_1 + (c_1a_{12} + a'_{55})e'_5 - (c_1k_1 + k'_5)g.$$

Таким образом, эквивалентное управление имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{eq} &= (c_1A_{11} + a_{21})e'_1 + \\ &+ (c_1a_{12} + a'_{55})e'_5 - (c_1k_1 + k'_5)g. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляем (8) во второе уравнение системы (6):

$$\begin{aligned} \dot{e}'_5 &= a_{21}e'_1 + a'_{55}e'_5 - ((c_1A_{11} + a_{21})e'_1 + \\ &+ (c_1a_{12} + a'_{55})e'_5 - (c_1k_1 + k'_5)g) - k'_5g; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}'_2 &= -c_1A_{11}e'_1 - c_1a_{12}e'_5 + c_1k_1g = \\ &= -c_1(A_{11}e'_1 + a_{12}e'_5 - k_1g) = -c_1\dot{e}'_1. \end{aligned}$$

Следовательно

$$e'_2 = -c_1e'_1.$$

В результате получаем систему уравнений, описывающую движение в скользящем режиме:

$$\begin{cases} \dot{e}'_1 = A_{11}e'_1 + a_{12}e'_2 - k_1g; \\ \dot{e}'_5 = -c_1e'_1. \end{cases} \quad (9)$$

Систему (9) можно рассматривать как разомкнутую систему с вектором состояния e'_1 , управлением e'_5 и возмущением g .

Постановка задачи. Для объекта управления (3) в соответствии с (4) определить с учетом (9) оптимальную поверхность переключения и закон управления, обеспечивающий попадание координат системы на эту поверхность и устойчивое движение по ней.

Синтез оптимальной поверхности переключения по заданному квадратичному критерию

Для оптимизации движения системы (3) в скользящем режиме классический критерий оптимальности вида

$$J = \int_0^\infty (e^T Q e + r u^2) dt$$

не годится, так как движение в скользящем режиме не зависит от управления и определяется положением поверхностей разрыва. Поэтому в качестве критерия нужно рассматривать функционал

$$J = \int_0^\infty (e^T Q e) dt, \quad (10)$$

где Q — весовая диагональная матрица. Задача синтеза поверхности переключения сводится к задаче оптимального управления системой (9), для которой оптимизируемый функционал (10) примет вид [3]

$$J = \int_0^\infty (e'^T_1 Q_{11} e'_1 + 2e'^T_1 q_{12} e'_5 + q'_{55} (e'_5)^2) dt, \quad (11)$$

$$\text{где } (M^{-1})^T Q M^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q'_{55} \end{pmatrix}, \quad q_{21}^T = q_{12}.$$

Для рассматриваемой электромеханической системы Q_{11} , q_{12} , q_{21} , q'_{55} будут иметь следующий вид:

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} q_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{22} \end{bmatrix}; \quad q_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad q_{21} = [0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$q'_{55} = [q_{11} b^2].$$

Введем новую переменную v , связанную с e'_1 и e'_5 соотношением

$$v = e'_5 + q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e'_1. \quad (12)$$

В соответствии с преобразованием (12) перепишем первое уравнение системы (9):

$$\dot{e}'_1 = (A_{11} - a_{12} q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T) e'_1 + a_{12} v, \quad (13)$$

и критерий (11):

$$\begin{aligned} J = & \int_0^\infty (e_1'^T Q_{11} e'_1 + 2e_1'^T q_{12} (v - q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e'_1) + \\ & + (v - q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e'_1) q_{55} (v - q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e'_1)) dt = \\ = & \int_0^\infty (e_1'^T Q_{11} e'_1 + 2e_1'^T q_{12} v - 2e_1'^T q_{12} q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e'_1 + \\ & + v q_{55} v - v q_{55} q_{55}^{\prime-1} q_{12} e'_1 - q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e_1'^T q_{55} v + \\ & + q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e_1'^T q_{55} q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e'_1) dt. \end{aligned}$$

Так как $v q_{12}^T e'_1 = e_1'^T q_{12} v$, то окончательно критерий оптимальности примет вид

$$J = \int_0^\infty (e_1'^T (Q_{11} - q_{12} q_{22}^{-1} q_{12}^T) e'_1 + v^2 q_{55}') dt. \quad (14)$$

Рассматривая e'_1 в качестве вектора состояния, а v — в качестве управления для движения в скользящем режиме, имеем классическую постановку задачи оптимального управления с квадратичным критерием [4], т. е. оптимальное управление системой (13) при критерии (14) определяется следующим образом:

$$v = -q_{55}^{\prime-1} a_{12}^T P e'_1,$$

где P — решение матричного уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} P(A_{11} - a_{12} q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T) + (A_{11} - a_{12} q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T)^T P - \\ - P a_{12} q_{55}^{\prime-1} a_{12}^T P + (Q_{11} - q_{12} q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное управление e'_5 , играющее роль управления в (9), имеет вид

$$\begin{aligned} e'_5 = -c_1 e'_1 = v - q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T e'_1 = \\ = -(q_{55}^{\prime-1} a_{12}^T P + q_{55}^{\prime-1} q_{12}^T) e'_1 = -q_{55}^{\prime-1} (a_{12}^T P + q_{12}^T) e'_1. \end{aligned}$$

Из последнего выражения имеем соотношение $c_1 = q_{55}^{\prime-1} (a_{12}^T P + q_{12}^T)$, подставляя которое в (7), получаем уравнение поверхности переключения (в ис-

ходных координатах), на которой должен быть организован скользящий режим

$$\begin{aligned} s = cM^{-1}e' = cM^{-1}Me = [c_1 \ c'_5]Me = \\ = [q_{55}^{\prime-1} (a_{12}^T P + q_{12}^T) \ 1]Me = 0. \end{aligned}$$

Синтез закона управления, обеспечивающего устойчивый скользящий режим

После нахождения оптимальной поверхности переключения необходимо обеспечить устойчивость самого скользящего режима, описываемого уравнением

$$\dot{s} = cAe - cbu - ck g = 0.$$

Производную поверхности переключения можно записать в виде

$$\dot{s} = he - du - pg = 0, \quad (15)$$

где $h = cA$, $d = cb$, $p = ck$. Тогда эквивалентное управление запишем в виде

$$u_{eq} = d^{-1}he - d^{-1}pg. \quad (16)$$

Из (16) видно, что эквивалентное управление является линейной функцией относительно вектора рассогласования и задающего воздействия. Следовательно, существуют такие положительные числа α и q , что функция

$$F(e, g) = \alpha \sum_{i=1}^n |e_i| - q|g|$$

окажется мажорантой для всех компонентов эквивалентного управления.

Управляющее воздействие будем искать в виде кусочно-линейной функции вектора желаемого состояния системы и вектора рассогласования

$$u = \left(\alpha \sum_{i=1}^n |e_i| - q|g| \right) \text{sign } s \quad (17)$$

либо в виде кусочно-линейной функции задающего воздействия и вектора рассогласования с различными весовыми коэффициентами

$$u = \sum_{i=1}^n \Psi_i^e e_i - \Psi^g g. \quad (18)$$

Из теории систем с переменной структурой известно, что для обеспечения устойчивого скользящего режима на поверхности s необходимым и достаточным условием является выполнение неравенства

$$s\dot{s} < 0. \quad (19)$$

Подставим значение $\dot{s}$ из (15) с учетом управления (17) в условие (19) и получим:

$$s(\mathbf{h}\mathbf{e} - d\left(\alpha \sum_{i=1}^n |e_i| - q|g|\right)\text{sign}s - pg) < 0.$$

Условие устойчивости выполняется, если выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} s\left(\mathbf{h}\mathbf{e} - d\alpha \sum_{i=1}^n |e_i|\text{sign}s\right) < 0; \\ s(-pg + dq|g|\text{sign}s) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, видно, что скользящий режим устойчив при выполнении условия:

$$\begin{cases} d\alpha > \max(|h_i|); \\ dq < -|p|. \end{cases} \quad (20)$$

При выполнении этих неравенств в законе управления (17) скользящий режим всегда возникает на поверхности $s = 0$.

В рассмотренном алгоритме все компоненты вектора управления (17) пропорциональны норме вектора желаемого состояния и вектора рассогласования с одними и теми же коэффициентами α и q , которые должны удовлетворять условию (20).

Эти условия можно ослабить, если выбрать закон управления (18).

В (18) элементы Ψ_i^e и Ψ^g изменяются по следующим логическим законам:

$$\Psi_i^e = \begin{cases} \alpha_i^e & \text{при } se_i > 0; \\ \beta_i^e & \text{при } se_i < 0; \text{ где } i = 1 \dots n, \end{cases}$$

$$\Psi^g = \begin{cases} \alpha^g & \text{при } sg > 0; \\ \beta^g & \text{при } sg < 0, \end{cases}$$

где α_i^e , β_i^e , α^g , β^g — постоянные коэффициенты.

Тогда основное условие существования скользящего режима (19) имеет вид

$$s\left(\mathbf{h}\mathbf{e} - pg - d\left(\sum_{i=1}^n \Psi_i^e e_i - \Psi^g g\right)\right) < 0.$$

Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} s\left(\mathbf{h}\mathbf{e} - d \sum_{i=1}^n \Psi_i^e e_i\right) < 0; \\ s(-pg + d\Psi^g g) < 0. \end{cases} \quad (21)$$

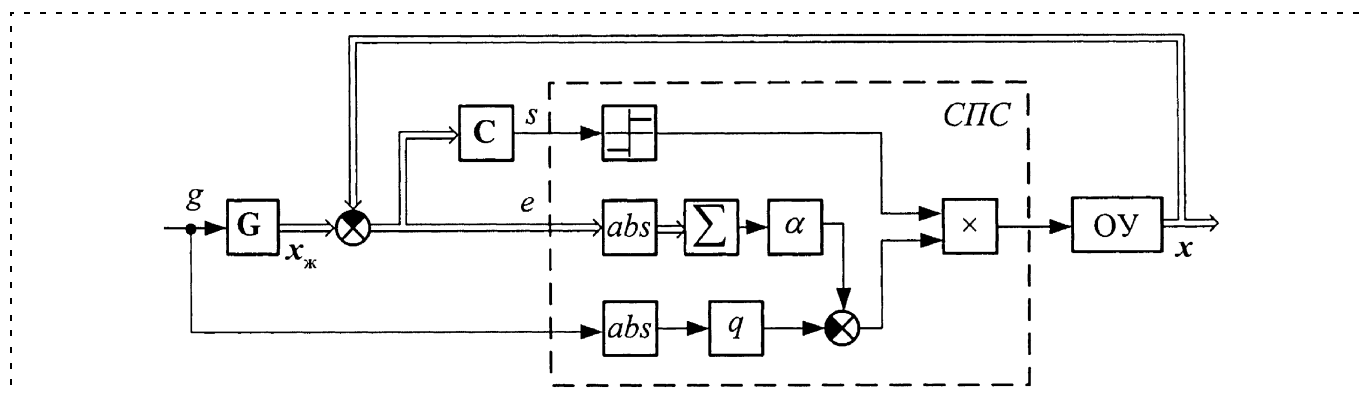


Рис. 1. Система с переменной структурой, построенная на основе управления $u = \left(\alpha \sum_{i=1}^n |e_i| - q|g|\right) \text{sign}s$

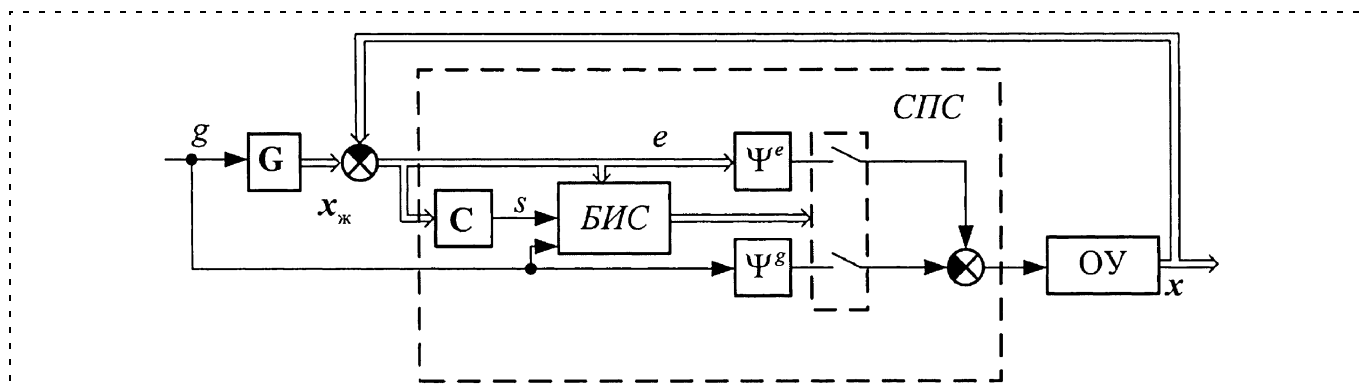


Рис. 2. Система с переменной структурой, построенная на основе управления $u = \sum_{i=1}^n \Psi_i^e e_i - \Psi^g g$

Условия (21) выполняются, если

$$d\alpha_i^e > h_i, d\beta_i^e < h_i, \quad (22)$$

где h_i — элементы вектора-столбца $\mathbf{h}$;

$$d\alpha^g > p, d\beta^e < p. \quad (23)$$

Таким образом, выполнение неравенств (22) и (23) в законе управления (18) гарантирует возникновение скользящего режима на поверхности разрыва $s = 0$.

Структурные схемы систем с переменной структурой с законами управления (17) и (18) изображены на рис. 1 и 2 соответственно.

Электропривод с системой управления с переменной структурой был исследован с помощью пакета математического моделирования Simulink системы MATLAB.

При первых попытках подобрать весовые коэффициенты q_{ij} критерия оптимальности (10) было замечено, что весовые коэффициенты следует подбирать отдельно для четных и нечетных координат. Коэффициенты в каждой группе координат нужно принимать равными по значению и в процессе настройки требуемого качества регулирования изменять одновременно на одну величину [5]. Это заметно упрощает процедуру выбора весовой матрицы. При этом расчет в относительных единицах позволяет использовать тот факт, что равные по значению весовые коэффициенты при координатах означают равный вкладываемый вес или равную важность минимизации этих координат между собой.

Экспериментально было установлено, что уменьшение весового коэффициента ошибки тока якоря приводит к уменьшению времени переходного процесса и увеличению жесткости первого участка электромеханической характеристики. Увеличение же весового коэффициента ошибки тока якоря приводит к уменьшению тока якоря, но затягивает длительность переходного процесса и снижается жесткость первого участка электромеханической характеристики. Однако наряду с этим уменьшаются броски упругого момента в режиме жестких стопорений.

Поэтому выбор весовых коэффициентов необходимо осуществлять отдельно для номинальных режимов (пуска, наброса нагрузки) и аварийных режимов (стопорения). Для этого в модели применяется два регулятора, которые будут обеспечивать работу системы по двум различным поверхностям переключения. Один регулятор соответственно используется для режима пуска и наброса нагрузки, второй для стопорения.

Экспериментально также было установлено, что для обеспечения устойчивости системы и получения необходимых характеристик переходных процессов наиболее удачными весовыми коэффици-

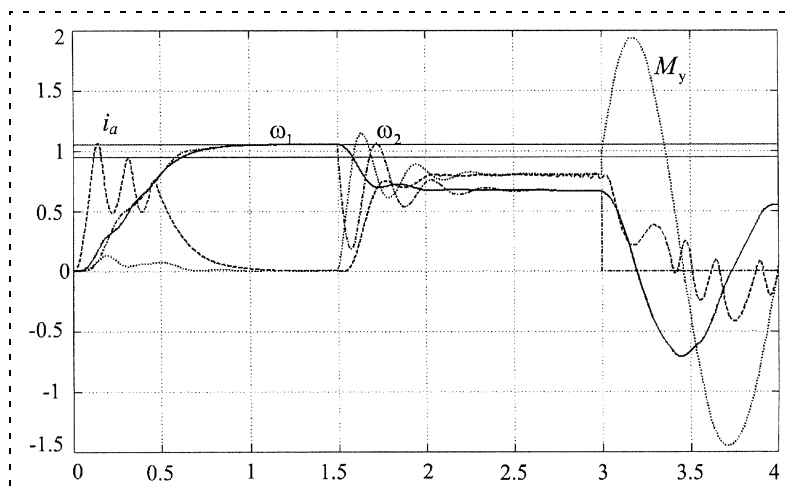


Рис. 3. Переходные процессы при пуске, набросе нагрузки и стопорении электропривода

циентами для номинального режима являются $\mathbf{Q} = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$, а для стопорного режима $\mathbf{Q} = \text{diag}(0,1 \ 200 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1)$.

Динамика электромеханической системы в случае рассмотренных законов управления (17) и (18) похожа, поэтому окончательный выбор закона управления можно осуществить, исходя из возможности более простой реализации. Результаты моделирования электропривода с системой управления переменной структуры приведены на рис. 3.

Заключение

Таким образом, решена задача динамической оптимизации ЭМС с помощью скользящих режимов. Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Результаты моделирования доказывают работоспособность синтезированной системы управления.
2. Разработанная система управления является устойчивой к внешним возмущающим воздействиям.
3. При увеличении момента внешней нагрузки происходит снижение скорости двигателя согласно естественной электромеханической характеристике.
3. В режиме стопорения ток якорной цепи не превышает стопорного значения.

Список литературы

1. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С. В. Емельянова. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 592 с.
2. Кочетков В. П. Основы электропривода: учеб. пособие. 2-е изд., испр. Абакан: Сиб. федер. ун-т; ХТИ — филиал СФУ, 2007. 272 с.
3. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах управления и автоматизации М.: Наука, 1981. 368 с.
4. Квакернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления / М.: Мир, 1977. 650 с.
5. Подборский П. Э. Совершенствование методов синтеза систем управления электроприводами поворотных механизмов карьерных экскаваторов: дис. ... канд. техн. наук: 05.09.03. Абакан, 2006. 205 с.

Т. С. Буканова, аспирант,
Л. А. Стешина, канд. техн. наук, доц.,
А. Б. Савиных, канд. техн. наук, доц.,
 Марийский государственный
 технический университет
 krppevs@marstu.net

Оптимизационная концепция построения системы управления электрической машиной

Представлен подход к построению современных систем оптимального управления оборудованием на базе электропривода, основанный на использовании нового способа энергосберегающего управления динамическими объектами.

Полученные результаты использованы при синтезе системы управления электроприводом, реализующем функции энергосбережения и оптимизации режимов работы оборудования технологических процессов.

Ключевые слова: энергосбережение, оптимизационная концепция, современная теория управления, электрическая машина.

Введение

Состояние технологического базиса обуславливает уровень развития таких отраслей, как нефтегазовый комплекс, энергетическая промышленность и социально-бытовая сфера обслуживания, и имеет первостепенное значение для энерго- и ресурсосбережения, обеспечения качества продукции и предоставляемых услуг, определяет уровень технического оснащения производства.

Основным направлением технического переоснащения промышленности является внедрение современных систем автоматического управления на базе единых модулей, объединяющих собственно электромеханические компоненты с новейшей силовой электроникой, которые управляются микроконтроллерами, ПК или другими вычислительными устройствами.

Одним из важнейших компонентов современной системы управления оборудованием технологических процессов является электромеханическое устройство, входящее в состав любого электроприводного оборудования. Наиболее широко в нефтегазовом комплексе, энергетической промышленности и социально-бытовой сфере обслуживания используются электроприводы на базе асинхронных двигателей.

Анализ систем управления электроприводом

Существующие на данный момент системы управления электрическими двигателями основаны на изменении параметров питающего двигателя напряжения. Такие системы управления электрическими двигателями строятся по классической схеме. Объект управления — электрический двигатель — подключен к сети источника тока через некоторый функ-

циональный преобразователь, который по обратной сигнальной связи обеспечивает изменение параметров питающего напряжения. При этом оптимизация управления осуществляется путем выбора оптимальной траектории движения на основании заданного оптимизирующего функционала качества. Алгоритм оптимизации заложен в микроконтроллере.

Таким образом, в настоящее время в проектно-конструкторской практике существует консервативная традиция раздельного проектирования объекта и регулятора.

При построении систем управления энерго- и ресурсоемкими технологическими процессами, параметры которых значительно изменяются во времени и зависят от внешних факторов, например, на нефте- и газоперекачивающих станциях, в системах холодного и горячего водоснабжения, газоснабжения, стремятся использовать двигатели с чрезмерными запасами по мощности в расчете на максимальную нагрузку, что ведет к их неэкономичности и слабоуправляемости.

Способ энергосберегающего управления электроприводом

Достигнуть цели энерго- и ресурсосбережения в ходе технологического процесса возможно на основе оптимизационной концепции построения современных систем управления. В соответствии с данной концепцией разработан способ энергосберегающего управления динамическими системами, заключающийся во введении внутрисистемных связей в целях оптимизации динамических режимов работы электропривода [1].

При таком способе управления процессы энергетического обмена электропривода с внешней средой могут быть представлены схемой, изображенной на рис. 1, где $Q_{\text{вх}}\{E\}$ — энергетический поток на входе электропривода; $Q\{E\}$ — энергетический поток внутри системы; $Q_{\text{вых}}\{E\}$ — энергетический поток на выходе электропривода; $Q'\{E\}$ — энергетический поток в обратной технологической связи; $I(t)$ — управляющие сигналы.

Процессы распределения потоков в электроприводе описываются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} Q_{\text{вых}}(t) = I(t)Q(t); \\ Q'(t) = Q(t) - Q_{\text{вых}}(t). \end{cases}$$

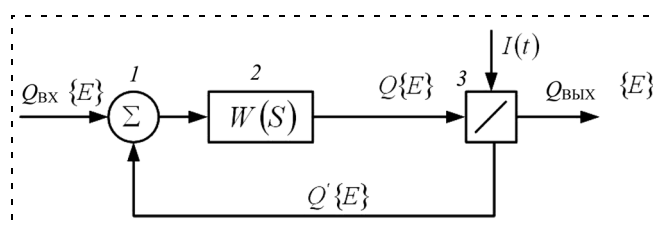


Рис. 1. Схема энергетического обмена электропривода с внешней средой:

1 — устройство суммирования потоков; 2 — передаточная функция двигателя; 3 — устройство распределения потоков энергии и (или) вещества

Введем оператор Лапласа S . Тогда операторное уравнение предлагаемого электропривода примет вид:

$$Q(S) = (Q_{\text{вх}}(S) + Q'(S))W(S).$$

Из уравнений распределения потоков очевидно, что переходная характеристика выходного потока будет представлена функцией скачка, т. е. $Q_{\text{вых}} = 1(t)Q(t)$, что свидетельствует о дифференцирующих свойствах системы. Приведенные рассуждения показывают, что предложенный способ управления обеспечивает высокое быстродействие в переходных режимах, не зависящее от динамических свойств объекта. Кроме того, система приобретает качественно новые свойства.

Применение оптимизационной концепции для синтеза элементов современных систем управления

Тенденцией при построении современных систем является мехатронный подход, заключающийся в построении как можно более монолитных систем, в которых все части системы объединены воедино без использования лишних интерфейсов между модулями.

Применение оптимизационной концепции не только на стадии синтеза "оптимального" регулятора для заранее заданного, неизменного объекта, но и в процессе проектирования оптимальной системы "объект — регулятор" как целостной, неразделяемой конструкции, позволяет создавать качественно новую элементную базу для синтеза современных систем управления электроприводом [2].

Примером применения оптимизационной концепции на стадии проектирования системы "объект — регулятор" как целостной конструкции может служить конструкция энергосберегающей электрической машины, реализующей оптимальное управление электродвигателем (рис. 2).

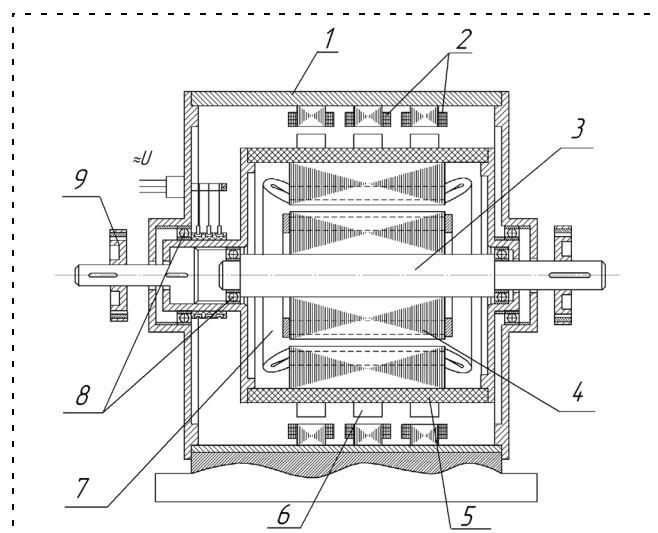


Рис. 2. Конструкция электрической машины:

1 — статор; 2 — генераторная обмотка; 3 — внутренний ротор; 4 — короткозамкнутая обмотка; 5 — промежуточный ротор; 6 — постоянные магниты; 7 — трехфазная обмотка; 8 — подшипники; 9 — электромагнитный тормоз

Электрическая машина содержит статор с уложенной в пазах многофазной генераторной обмоткой, внутренний ротор асинхронного двигателя с короткозамкнутой обмоткой и расположенный между ними вращающийся промежуточный ротор. На промежуточном роторе расположены две магнитонезависимые системы: с внешней стороны — группы постоянных магнитов чередующейся полярности, которые образуют совместно со статором генераторную часть машины, с внутренней стороны — шихтованный магнитопровод с уложенной в пазы трехфазной обмоткой возбуждения, которые образуют совместно с внутренним ротором двигательную часть машины.

Используемые в конструкции подшипники предназначены для обеспечения возможности вращения роторов электрической машины. Также предусмотрен комплект контактных колец и щеток для осуществления электрической связи с вращающейся обмоткой возбуждения. Машина снабжена электромагнитными тормозами валов внутреннего и промежуточного роторов, каждый из которых предназначен для остановки и удержания валов в заторможенном состоянии, необходимом при различных режимах функционирования машины. Электрическая машина может функционировать в следующих режимах: включения двигателя; включения генератора; совместного включения двигателя и генератора; редуктора. Каждый режим обладает своими уникальными динамическими и управляющими характеристиками и позволяет решать поставленные задачи управления.

В отличие от обычных двигателей, в которых управление выходными характеристиками двигателя осуществляется в результате изменения параметров подводимой к двигателю энергии: тока, напряжения, частоты, в представленной электрической машине управление происходит путем изменения тормозного момента, действующего со стороны многофазной генераторной обмотки на промежуточный ротор электрической машины. Постоянные магниты, закрепленные с внешней стороны промежуточного ротора, при его вращении образуют переменное магнитное поле. Это переменное магнитное поле взаимодействует с катушками, расположенными в статоре системы. Катушки являются коммутируемыми, т. е. могут подключаться или отключаться от нагрузки. Тормозной электромагнитный момент возникает в результате взаимодействия переменного магнитного поля движущихся магнитов с катушками статора машины. При этом электромагнитный момент будет образовываться только в катушках, подключенных в данный момент к нагрузке, остальные катушки являются разомкнутыми, не влияют на значение тормозного момента.

Полученные результаты

Электропривод на базе электрической машины, оснащенный адаптивной системой управления, по-

звolyет регулировать частоту вращения выходного вала в широком диапазоне с обеспечением оптимальных энергетических характеристик работы двигателя во всем диапазоне регулирования, что ведет к энерго- и ресурсосбережению за счет введения обратной технологической связи, к росту КПД работы устройства и увеличению срока эксплуатации технологического оборудования.

Генераторная часть электрической машины представляет собой обратный технологический контур, обеспечивающий рециркуляцию потребляемой из сети энергии и возврат в сеть в случае ее избытка на выходе двигательной части электрической машины, за счет чего электрическая машина будет потреблять из сети столько энергии, сколько это необходимо технологическим процессам.

Задача согласования энергетических, механических и других характеристик разрабатываемой системы управления электроприводом на основе предлагаемой электрической машины с требованиями технологической задачи управления, а также обеспечения оптимальных режимов работы электрической машины решается уже на этапе проектирования.

Вывод

Применение оптимизационной концепции в процессе проектирования оптимальной системы "объект — регулятор" как целостной, неразделяемой

конструкции позволит создать высокоэкономичные, энерго- и ресурсосберегающие агрегаты и установки в различных отраслях промышленности. Такой подход позволяет приблизиться к "подлинной" оптимизации, которую следует начать осуществлять еще на стадии проектирования соответствующего динамического объекта.

Приведенные в статье результаты исследований получены при поддержке программ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009—2010)" по государственному контракту № 2.1.2/6206 "Исследование устойчивости и обеспечение инвариантности энергосберегающих систем адаптивного управления динамическими объектами" и "Участник молодежного научно-инновационного конкурса" ("У.М.Н.И.К.") по государственному контракту № 6538p/9098 "Разработка новых наукоемких приборов, техники и технологии в области машиностроения и электроники".

Список литературы

1. **Стешина Л. А.** Способ энергосберегающего управления динамическими системами / Л. А. Стешина // Системы управления и информационные технологии. 2007. № 4.2 (30). С. 295—297.
2. **Савиных А. Б., Буканова Т. С.** Применение универсальных электрических машин в регулируемом электроприводе // XVI Туполевские чтения: Междунар. молодеж. науч. конф., 28—29 мая 2008 года. Тр. конф. Т. 2. Казань: Изд-во Казан. гос. тех. ун-та, 2008. 488 с.

УДК 629.113

В. М. Анисимов, д-р техн. наук, доц.,

В. Е. Высоцкий, д-р техн. наук, проф.,

С. Ю. Кауров, аспирант, **А. С. Репин**, аспирант,

Самарский государственный

технический университет

serkou@rambler.ru

Применение встроенного микроконтроллера для системы управления стартер-генераторной установки

Рассматриваются различные варианты структурных схем систем управления автомобильными стартер-генераторами. Приводится описание основных периферийных устройств микроконтроллеров, необходимых для создания таких систем. Дается описание алгоритмов реализации основных видов широтно-импульсной модуляции. Приводятся алгоритмы управляющих программ для стартер-генераторов, позволяющие решать задачи управления.

Ключевые слова: стартер-генератор, инвертор, датчик положения ротора, микроконтроллер, широтно-импульсная модуляция, электромеханический преобразователь, двигатель внутреннего сгорания.

Мощные электромеханические преобразователи автомобиля используются для двух целей: в качестве стартера для запуска двигателя внутреннего сгорания (ДВС) и генератора для питания бортовой сети и зарядки аккумулятора. Традиционно указанные преобразователи исполняются в виде двух электрических машин (ЭМ): стартера и генератора. За последние десятилетия в развитии электромеханических преобразователей автомобилей появилась тенденция совмещения стартера и генератора в одной ЭМ. Такой подход может иметь большой потенциал. Во-первых, учитывая, что работа обеих систем (стартерной и генераторной) разделена во времени, следует ожидать улучшения массогабаритных показателей всей системы, во-вторых, уменьшение числа ЭМ в два раза повысит надежность всей системы. Однако вследствие большого различия режимов работы ЭМ в обеих системах практическая реализация таких систем наталкивается на некоторые трудности. Так, диапазон частот вращения коленчатого вала ДВС в режиме запуска (стартер) составляет $0... 500 \text{ мин}^{-1}$ (при этом требуется большой момент на валу), а в режиме нормальной работы (генератор) — $900...6000 \text{ мин}^{-1}$ (момент на

валу существенно меньше, чем в режиме стартера). Такое несоответствие частот может привести к необоснованному увеличению массы и габаритных размеров электрической машины. Решение указанной проблемы возможно путем использования сочленения вала стартер-генератора с коленчатым валом ДВС через редуктор с переключаемым коэффициентом передачи или за счет возрастания требований к значению установленной мощности генераторного режима. В этом случае увеличение массы агрегата будет компенсироваться его большей мощностью.

В стартер-генераторе, разработанном специалистами фирмы "Дженерал Моторс", применен редукторный вариант [1]. В качестве электромеханического преобразователя используется асинхронная машина, которая устанавливается на месте генератора. Сочленение машины с коленчатым валом ДВС осуществляется через клиноременную передачу и планетарный редуктор с обгонной муфтой. Общий коэффициент передачи составляет 1:20 в режиме стартера и 1:2 — в режиме генератора, при этом обеспечивается решение указанной выше проблемы несоответствия частот вращения. Стартер-генераторы рассматриваемого типа могут быть конкурентоспособными по сравнению с традиционными системами в случае повышенных требований к надежности агрегата и при снижении стоимости полупроводниковых преобразователей, которые используются для питания машины переменного тока. Такие системы выигрывают в массогабаритных показателях и надежности, но проигрывают в стоимости традиционным системам.

Качественно другим путем развития автомобильных электромеханических систем является использование сочленения ЭМ с коленчатым валом ДВС без переключения коэффициента редукции в режиме стартера и в режиме генератора. Простейшей разновидностью таких систем является система, в которой ротор ЭМ расположен вместо маховика непосредственно на коленчатом валу ДВС. Фирмой "Ford" запатентован стартер-генератор такой системы [2]. В целях уменьшения габаритных размеров машины ее ротор соединен с коленчатым валом через вспомогательное сцепление. Такое решение позволяет накапливать энергию перед запуском ДВС, разгоняя ротор до 1000 мин^{-1} , после чего осуществлять запуск включением сцепления. В общем случае системы с размещением ротора ЭМ на валу ДВС проигрывают традиционным, прежде всего по массогабаритным показателям. Однако, если увеличить требования к установленной мощности электромеханического преобразователя, такие системы станут конкурентоспособными. При этом помимо традиционных функций стартера и генератора они смогут нести дополнительные функции. Во-первых, это рекуперативное торможение автомобиля, когда его механическая энергия сбрасывается в ак-

кумуляторную батарею. Данная функция позволяет существенным образом снизить расход горючего при городском цикле движения. Во-вторых, быстрый запуск двигателя (мощности таких систем достаточно для разгона коленчатого вала при запуске ДВС до скорости вращения холостого хода) позволяет заглушать двигатель при кратковременных остановках автомобиля, что повышает его экологичность, а также снижает расход горючего. В-третьих, появляется возможность использования электромеханического преобразователя в качестве дополнительного привода автомобиля, который разгружает ДВС при низких частотах вращения коленчатого вала и увеличивает полную мощность силового агрегата при необходимости резкого ускорения автомобиля. Данная функция позволяет в отдельных случаях исключить коробку передач из трансмиссии автомобиля, как это реализовано фирмой "TOYOTA MOTOR CORPORATION" в автомобиле "PRIUS". В-четвертых, установки рассматриваемого типа позволяют осуществлять активное электромагнитное демпфирование колебаний частот вращения коленчатого вала ДВС. Силовые агрегаты, которые в той или иной мере реализуют указанные выше функции, получили название комбинированных силовых установок автомобиля. Данное направление разрабатывается большинством автомобильных фирм мира [3, 4]. Установленная мощность таких систем находится в пределах 15...30 кВт по данным различных фирм.

Первоначально были разработаны два варианта стартер-генераторов, рассчитанные на различные напряжения аккумуляторной батареи $U_d = 48 \text{ В}$ и $U_d = 24 \text{ В}$. Оба стартер-генератора были созданы на основе асинхронных машин единой серией 4А. Питание машин осуществлялось от аккумуляторной батареи через инвертор напряжения, собранный на транзисторах МТКД-80. Разработанные стартер-генераторы в режиме стартера развивали пусковой момент $14,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$. При этом предполагалось сочленять их с коленчатым валом ДВС аналогично традиционным стартерам. В режиме генератора они обеспечивали отдачу мощности 900 Вт в диапазоне скоростей вращения 1:5 [5]. Управление всей системой как в режиме стартера, так и в режиме генератора осуществляли с использованием контроллера на основе микроконтроллера C164SI. В качестве сигналов обратной связи были выбраны скорость вращения и напряжение аккумуляторной батареи. Определение требуемого воздействия осуществляли методом таблиц. Подробные описания и исследования рассматриваемых стартер-генераторов приведены в [6, 8, 9].

В качестве варианта стартер-генератора рассматривали серийный генератор 9402.3701, выпускаемый ОАО "Завод им. А. М. Тарасова". При таком его использовании фазы обмотки статора подключали к инвертору напряжения. Роль регулятора на-

пряжения в режиме генератора исполнял в этом случае микроконтроллер C164CI [7]. При этом все показатели генератора соответствовали ТУ. В режиме стартера машина работала как вентильный двигатель постоянного тока [10, 11]. Экспериментально определенный пусковой момент составил $10 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Максимальная частота вращения при ослаблении поля составляла $\sim 2500 \text{ мин}^{-1}$.

Серия 16-разрядных микроконтроллеров фирмы Infineon AG (ранее Siemens AG) разработана специально для обеспечения требований задач управления встроенных систем реального времени. Первым представителем семейства был кристалл SAB-80C166-M, и поэтому всю серию принято на-

зывать C166. Многочисленное семейство этих микроконтроллеров (в настоящее время — около двух десятков) имеет в своем составе ядро процессора, использующего концепцию RISC (Reduced Instruction Set Computer). Система команд семейства C166 оптимизирована для быстрого выполнения инструкций и для уменьшения времени отклика на прерывание. Интегрированные интеллектуальные периферийные модули микроконтроллеров построены таким образом, чтобы минимизировать вмешательство процессора при их работе. Наличие мощного процессорного ядра, полного набора периферийных модулей, различных системных функций (гибкая системная шина, режимы энергосбережения, умножение/деление тактовой частоты) позволило достигнуть хорошего соотношения качество/цена. Микроконтроллеры этой серии сейчас применяются очень широко: в автомобилях, промышленных системах автоматизации, в электроприводах, системах связи, медицинском оборудовании и т. д.

Для управления электроприводами различных систем наиболее подходят микроконтроллеры типа C164CI-8EM, SAB80C166-M. Они позволяют формировать сигналы управления преобразователем с минимальным вмешательством ЦПУ, подключать аналоговые и импульсные сигналы обратных связей, организовывать связь с удаленным управляющим контроллером высшего уровня и решать другие вспомогательные задачи [12].

Полная структурная схема разработанной системы стартер-генератора представлена на рис. 1, где использованы следующие обозначения:

СМ — синхронная машина с постоянными магнитами на роторе, служащая в качестве электромеханического преобразователя; ПП — полупроводниковый преобразователь, работающий управляемым вентильным коммутатором в режиме стартера и выпрямителем в режиме генератора (в последнем режиме используются обратные диоды, встроенные в ключи преобразователя); в качестве ключей используются полевые транзисторы с изолированным затвором типа VMO-420; ДПР — датчик положения ротора, который также служит для определения частоты вращения (первоначальный вариант предусматривает использование тахогенератора); ДН — датчик напряжения аккумуляторной батареи, служит для контроля указанного напряжения; ДТП — датчик тока преобразователя и ДНЗ — датчик начала запуска (эквивалент ключа зажигания в автомобиле); АЦП — аналого-цифровой преобразователь; ШИМ — широтно-импульсная модуляция; МК — микроконтроллер, который осуществляет управление всеми процессами системы; ОЗУ — оперативное запоминающее устройство; ПЗУ — постоянное запоминающее устройство.

Структурная схема микроконтроллера приведена на рис. 2.

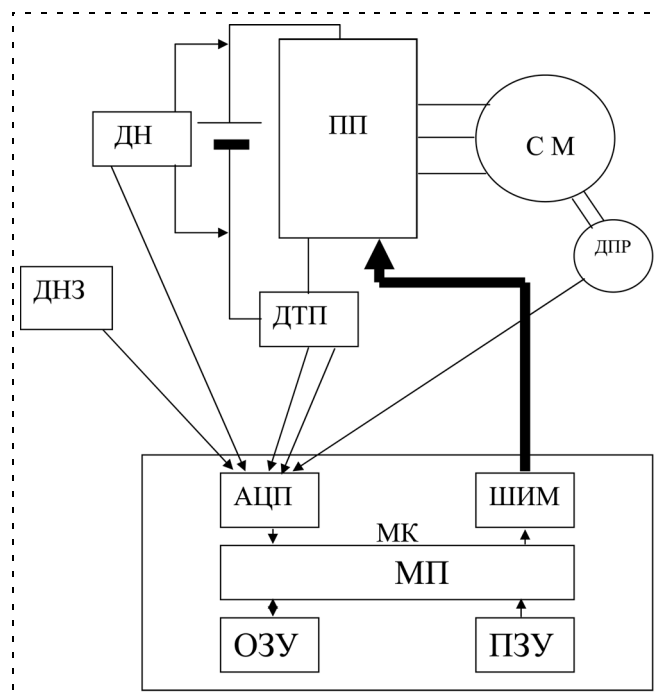


Рис. 1. Структурная схема бесконтактного вентильного стартер-генератора

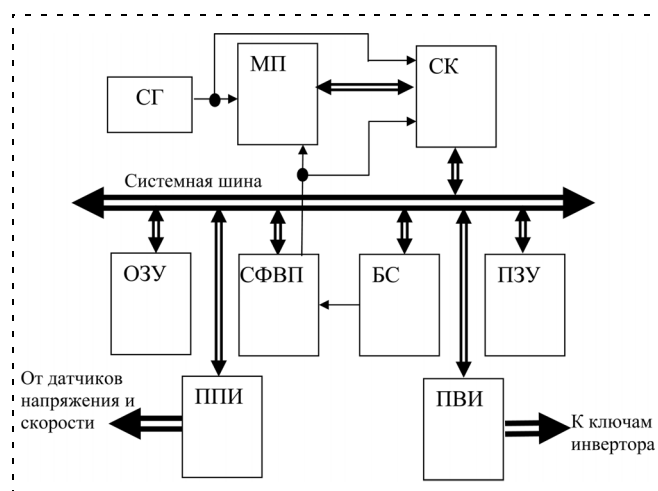


Рис. 2. Структурная схема системного модуля

Системный генератор СГ служит для формирования тактовых сигналов. Микропроцессор МП осуществляет управление всей системой. Системный контроллер СК формирует сигналы управления системной шиной. ОЗУ — оперативное запоминающее устройство, ПЗУ — постоянное запоминающее устройство. Блок БС (блок программируемых счетчиков) и СФВП (схема формирования вектора прерывания) служат для аппаратного определения отсчетов реального времени, а также разделения процессорного времени на обслуживание периферийных устройств. Блоки ППИ (порт приема информации) и ПВИ (порт выдачи информации) служат для приема информации от датчиков скорости, напряжения, положения ключа зажигания и для выдачи управляющих воздействий на ключи инвертора.

Для данного стартер-генератора разработаны математические модели, подтверждаемые экспериментальными данными.

Следующим этапом работ было создание электро-механического преобразователя, ротор которого непосредственно сочленен с валом ДВС. В качестве ЭМ была выбрана синхронная машина с возбуждением от постоянных магнитов из материала Nd—Fe—B (неодим—железо—бор). Размеры ее активных частей следующие: диаметр ротора 275 мм и 290 мм по внешнему диаметру статора, толщина пакета 60 мм, габаритные размеры в аксиальном направлении составляют 70,5 мм, масса 50 кг. Расчетная мощность при частоте вращения 3000 мин^{-1} и напряжении питания 144 В — 15 кВт. Данная машина была изготовлена на ОАО "Завод им. А. М. Тарасова". В качестве системы управления использовали микроконтроллер C164CI. Были проведены предварительные экспериментальные исследования. Указанные размеры полностью удовлетворяют требованиям ВАЗ для такой установки. Основные расчетные данные следующие: пусковой момент — $230 \text{ Н} \cdot \text{м}$, мощность режима прокрутки при частоте вращения 1000 мин^{-1} — 12 кВт, частота вращения начала токоотдачи — 600 мин^{-1} . Расчетные электромагнитные нагрузки составили: линейная токовая в режиме запуска при остановленном вале — $83\,000 \text{ А/м}$ и $45\,000 \text{ А/м}$ при частоте вращения 1000 мин^{-1} , соответственно плотности тока в обмотке статора — $16,6 \text{ А/мм}^2$ и 9 А/мм^2 , индукция магнитного поля в зазоре — 1 Тл. Питание агрегата осуществляли от конденсатора большой емкости. Рассматриваемый образец предназначен для отработки системы на ходовых макетах автомобилей семейства ВАЗ.

Для формирования сигналов управления ключами инвертора посредством микропроцессора необходимо затрачивать большое количество процессорного времени, тем самым уменьшая допустимый ресурс для реализации необходимых законов управления. Поэтому во многих микроконтроллерах

имеются встроенные внешние устройства, которые частично освобождают процессор, формируя сигналы PWM. В C164CI таких устройств два: устройство захвата/сравнения CAPCOM2 и CAPCOM6 [7]. Первое устройство содержит восемь независимых шестнадцатиразрядных каналов формирования ШИМ-сигналов и два шестнадцатиразрядных счетчика для отсчетов реального времени. Данное устройство позволяет формировать ШИМ-сигналы независимо друг от друга, что в большинстве видов ШИМ достаточно неудобно, так как приводит к дополнительным затратам времени при согласовании переключений ключей одной стойки инвертора. Второе устройство состоит из трех основных каналов и одного дополнительного. Временные отсчеты в нем по основным каналам осуществляются шестнадцатиразрядным таймером-счетчиком T12, а по дополнительным — десятиразрядным T13. Достоинством рассматриваемого устройства является наличие двух выводов SSx и COUTx по каждому каналу с номером X. При этом имеется возможность формирования сигналов управления верхним и нижним ключами стойки инвертора автоматически.

Системе управления стартер-генератором необходимо решать три главные проблемы: управление ЭМ в режиме стартера, определение момента запуска двигателя для перевода машины в генераторный режим и управление ЭМ в генераторном режиме. Каждая из приведенных задач имеет свои особенности, поэтому рассмотрим их отдельно.

В стартерном режиме главной задачей электро-механической системы является как можно более быстрый разгон коленчатого вала до скорости запуска ДВС. Указанное требование обусловлено тем фактом, что на ползучей скорости эффективность работы подшипников скольжения низка. Следовательно, на таких скоростях момент сопротивления повышен, что приводит к необоснованному расходу энергии аккумулятора. Для обеспечения указанного требования ЭМ должна развивать максимально возможный для нее момент вращения в течение всего времени разгона, обеспечивая максимальное ускорение. Решение указанной проблемы можно осуществить синтезом системы. При синтезе системы следует учесть тот факт, что момент инерции коленчатого вала ДВС (включая шатуны и маховик), приведенный к валу ЭМ, значительно превышает момент инерции самой машины. Поэтому без больших погрешностей процесс разгона ЭМ можно рассматривать как последовательность квазиустановившихся режимов при постоянной частоте вращения.

Определение момента запуска двигателя можно осуществлять, контролируя два параметра: частоту вращения и ток статора ЭМ. Задача определения усложняется тем, что коэффициенты редукции частоты вращения в режимах стартера и генератора

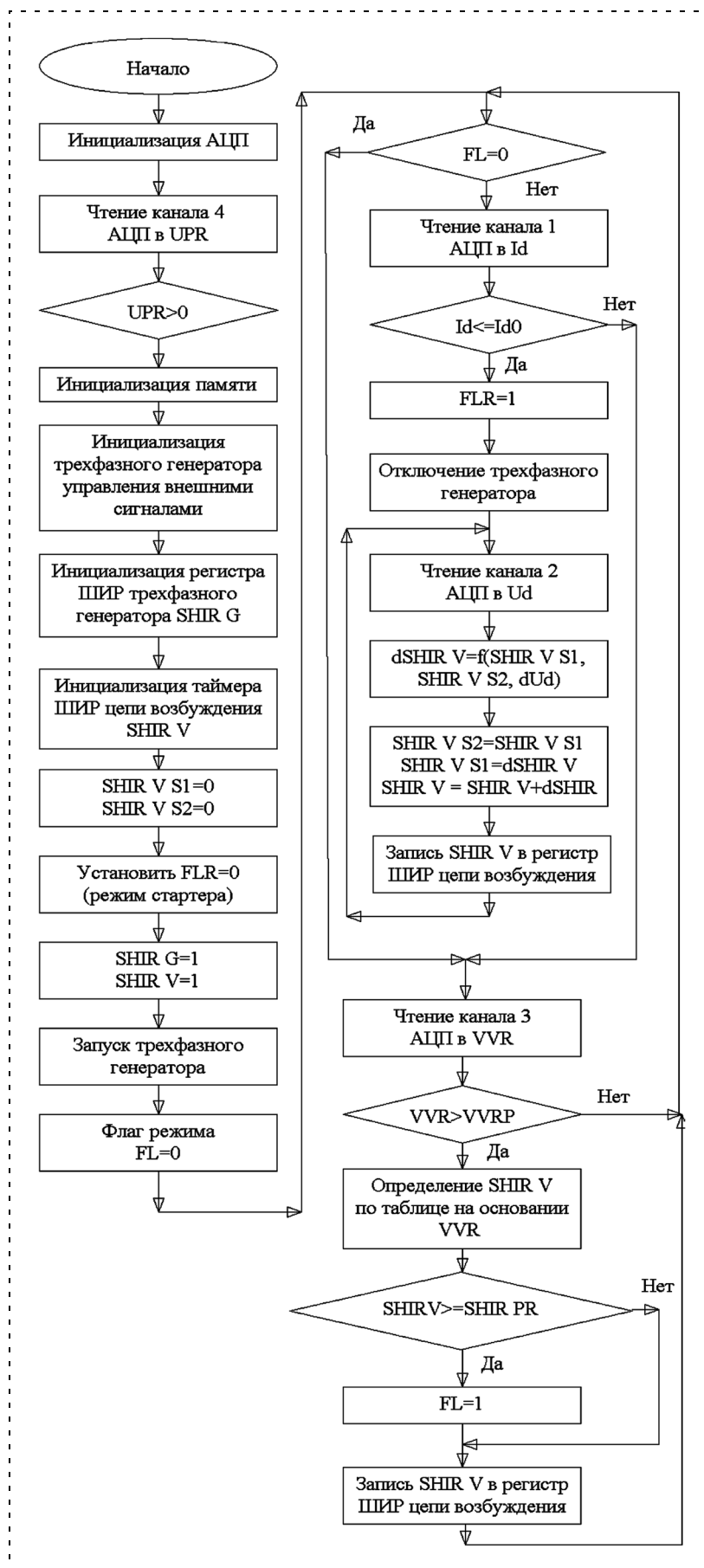


Рис. 3. Блок-схема управляющей программы вентильного стартер-генератора

различны, вследствие чего при переходе в генераторный режим переключается редуктор, и частота вращения ЭМ снижается. Поскольку переключение редуктора можно осуществлять двумя путями — редуктор переключается самостоятельно, и переключение осуществляется по команде системы управления, то и определение момента запуска ДВС необходимо осуществлять в соответствии с типом редуктора. В первом случае необходимо следить за током статора, и при снижении его до значений тока холостого хода ЭМ в течение нескольких оборотов (учитывается неравномерность частоты вращения коленчатого вала при запуске ДВС) осуществлять перевод ЭМ в генераторный режим. Во втором случае достаточно следить за частотой вращения ЭМ, и при превышении ею некоторого заданного значения осуществлять действия по переводу ЭМ в генераторный режим. Задачей управления генераторным режимом ЭМ в автомобиле является поддержание напряжения цепи постоянного тока при изменении нагрузки и частоты вращения.

Рассмотренные идеи были использованы при разработке комплекса программ управления автомобильным вентильным стартер-генератором с электромагнитным возбуждением. При разработке программ учитывалось, что требуемые системой управления периферийные устройства в микроконтроллере C164CI-8ЕМ достаточно автономны и практически не требуют затрат процессорного времени на свое обслуживание [12]. Поэтому основная программа осуществляет только расчеты требуемого воздействия и определяет логику управления. Сигналы, значения которых определяются датчиками напряжения, тока и положения ротора, обрабатываются программами, использующими механизм прерываний микроконтроллера, а запись информации в ячейки памяти осуществляется с использованием встроенного контроллера внешних событий. Укрупненный алгоритм основной программы управления приведен на рис. 3.

В начальной части алгоритма осуществляется запись в память необходимых констант и начальных значений. Инициализируются АЦП, устройства захвата-сравнения и контроллер внеш-

них событий. Настраивается система прерываний. После поступления внешнего сигнала разрешения осуществляется переход на основную программу, которая состоит из двух частей: обработка режимов стартера и генератора.

Затем осуществляется чтение канала 4, который подключается к ключу зажигания автомобиля. После получения разрешения осуществляется инициализация остальных устройств микроконтроллера и осуществляется запуск трехфазного генератора. Система начинает работать в режиме стартера, причем первоначально ток возбуждения устанавливается максимальным. Переключение между режимами осуществляется использованием флага режима.

Для реализации управления стартер-генератором на основе синхронной машины в микроконтроллере имеется встроенный блок в составе периферийного модуля CAPCOM6. При инициализации микроконтроллера данный блок настраивается в мультисканальный режим, а на выходы CC6POS0 CC6POS1 CC6POS2 микроконтроллера подаются сигналы с датчиков положения, сдвинутые на 120° эл. В этом случае управление инвертором будет осуществляться по 120° -закону коммутации, а реализация ШИМ за счет таймера, как показано на рис. 4, где T1, ..., T6 — управляющие ключи; A, B, C — фазы статора; $U_{\phi 1}$ — первая гармоника фазного напряжения.

В режиме стартера в целях повышения частоты вращения можно использовать ослабление магнитного потока за счет регулирования тока возбуждения. В режиме генератора можно отключить инвертор, при этом для выпрямления используются диоды обратного моста, а регулирование напряже-

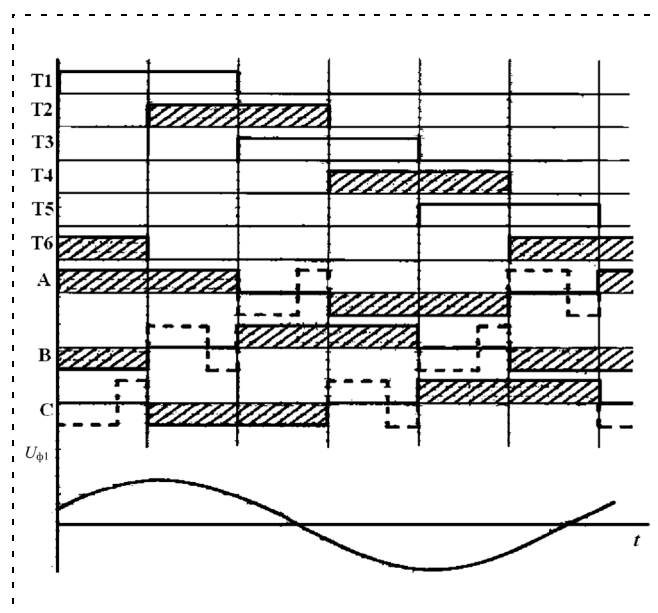


Рис. 4. Диаграммы управляющих сигналов при 120° -законе коммутации

ния осуществляется посредством изменения тока в цепи возбуждения.

Выбранная базовая структура схемы системы управления стартер-генераторами является универсальной и может быть использована для различных типов электромеханических преобразователей. Выбранный микроконтроллер фирмы Infineon C164CI8EM по своим техническим характеристикам полностью удовлетворяет требованиям, предъявляемым к системам управления стартер-генераторами. Разработанные алгоритмы реализации различных ШИМ можно использовать при программировании систем управления. Алгоритмы прямоугольных ШИМ используются для стартер-генераторов, мощность которых не превышает 2 кВт, а синусоидальных — для больших мощностей.

Список литературы

1. **United States Patent Number 4883973.** Automotive electrical system having a starter/generator induction machine / General Motors Corporation, Detroit, Mich / Filed: Aug. 1, 1988 / Date of Patent: Nov. 28, 1989.
2. **United States Patent Number 6073713.** Crankshaft position sensing with combined starter alternator / Ford Global Technologies / Filed: Mar. 25, 1998 / Date of Patent: Jun. 13, 2000.
3. **United States Patent Number 5722502.** Hybrid vehicle and its control method / Toyota / Filed: May. 20, 1996 / Date of Patent: Mar. 3, 1998.
4. **United States Patent Number 6007443.** Hybrid vehicle / Nippon Soken / Filed: Feb. 14, 1997 / Date of Patent: Dec. 28, 1999.
5. **Патент № 2150602** Российской Федерации. МКИ F 02 N 11/04. Автомобильный стартер-генератор / В. М. Анисимов, В. Н. Кудояров, П. Ю. Грачев / Самарский государственный технический университет // 10.06.2000. Бюл. № 16.
6. **Анисимов В. М., Скороспешкин А. И., Тарановский В. Р.** Управление автомобильными электромеханическими преобразователями систем запуска и генерирования энергии на основе микроконтроллеров фирмы SIEMENS // Proc. 4th Int. Conf. UEES 99. Vol. 2. St. Petersburg, Techn. Univ. Press. 21–24 June 1999. P. 523–528.
7. **C164CI.** 16-Bit CMOS Single-Chip Microcontroller. User's Manual. Siemens AG, 1997.
8. **Анисимов В. М., Скороспешкин А. И., Тарановский В. Р.** Управление периферийными устройствами автомобильного стартер-генератора на основе микроконтроллера C164CI // Proc. 4th Int. Conf. UEES 99. Vol. 2. St. Petersburg, Techn. Univ. Press. 21–24 June 1999. P. 518–522.
9. **Анисимов В. М., Тарановский В. Р.** Микропроцессорная система управления автомобильным стартер-генератором // Автомобильная промышленность. 1996. № 4. С. 6–10.
10. **Анисимов В. М., Высоцкий В. Е., Тулупов П. В., Верещагин В. Е.** Вентильные двигатели-генераторы постоянного тока для силовых установок гибридных автомобилей // Электромеханические и электромагнитные преобразователи энергии и управляемые электромеханические системы: Вестник Уральского государственного техн. университета — УПИ. Екатеринбург: УГТУ — УПИ, 2003. С. 262–266.
11. **Высоцкий В. Е., Анисимов В. М.** Электромеханотронные системы с позиционно-зависимым управлением для комбинированных силовых установок гибридных автомобилей // Сб. тр. МНТК "Актуальные проблемы надежности технологических, энергетических и транспортных машин". М.: Машиностроение, 2003. С. 174–179.
12. **Алексеев К. Б., Палагута К. А.** Микроконтроллерное управление электроприводом. М.: Изд. МГИУ, 2008. 296 с.

Г. Г. Гоппе, канд. техн. наук,
Иркутский государственный
технический университет
elprivod@istu.edu

Математические модели технологического комплекса электропривод— турбомеханизм— трубопроводная магистраль

Часть 1. Математические модели статических режимов при двух способах управления производительностью

Сравниваются статические характеристики комплекса электропривод—турбомеханизм—трубопроводная магистраль при двух способах управления производительностью материальной среды, транспортируемой по трубопроводу. Показано, что при управлении частотой вращения характеристики являются линейными, а при методе дросселирования — нелинейными. Поэтому для первых может быть достигнуто более высокое качество управления при однократной настройке регуляторов.

Ключевые слова: электропривод, турбомеханизм, трубопроводная магистраль, напор, производительность, статическая характеристика, дросселирование, частота вращения, регуляторы.

Насосы, вентиляторы, компрессоры составляют большой класс производственных механизмов, особенно в таких отраслях, как химическая и нефтеперерабатывающая промышленность, энергетика, коммунальное хозяйство. С их использованием осуществляется транспортировка по трубопроводным магистралям значительных объемов жидких и газообразных продуктов. Для краткости этот класс машин объединяют общим названием — турбомеханизмы.

Энергетическим звеном турбомеханизмов может быть привод различного типа, но наибольшее применение находит электропривод, в частности, на базе асинхронного электродвигателя (АД). О массовости АД в качестве привода турбомеханизмов свидетельствует то обстоятельство, что он потребляет до 40 % от всего объема вырабатываемой электроэнергии [1].

Управление технологическим комплексом электропривод—турбомеханизм—трубопроводная магистраль сводится к изменению его производительности — объемной подачи транспортируемой среды в единицу времени. Наиболее известными являются два способа управления:

- дросселирование или изменение гидравлического сопротивления магистрали;
- изменение частоты вращения турбомеханизма (способ $\omega = \text{var}$).

До настоящего времени наибольшее применение находит первый способ. Реализуется он с помощью задвижек, клапанов, заслонок, шиберов и других исполнительных механизмов. Перемещение затвора исполнительного механизма изменяет сопротивление магистрали и соответственно производительность. При относительном положении затвора $y = 1$ магистраль полностью открыта, гидравлическое сопротивление минимально и производительность наибольшая (номинальная). При $y = 0$ магистраль закрыта, сопротивление равно бесконечности, а производительность — нулю.

Перемещение регулирующего органа исполнительного механизма реализуется с помощью привода. Он также может быть различного типа — пневматический, гидравлический, электрический. Для определенности остановимся на электроприводе. И поскольку сигнал управления приводом пропорционален требуемому перемещению регулирующего органа, то для способа дросселирования управляющим воздействием целесообразно считать относительное положение затвора y .

При втором способе ($\omega = \text{var}$) вся регулирующая аппаратура на магистрали полностью открыта и управление производительностью турбомеханизма реализуется за счет изменения угловой скорости вращения электропривода. Тогда управляющим воздействием для комплекса является частота вращения ω .

Два названных способа управления давно привлекают внимание специалистов, занятых вопросами энергосбережения. Известно, что способ $\omega = \text{var}$ по сравнению с методом дросселирования позволяет, в зависимости от графика нагрузки турбомеханизма и особенностей работы комплекса, экономить значительные объемы энергии — до 70 % и более.

Гораздо меньше, по сравнению с эффектом энергосбережения, известно еще об одном важном преимуществе способа $\omega = \text{var}$, а именно: управление производительностью по сравнению с методом дросселирования обеспечивает существенно лучшие показатели качества управления выходной переменной. В некоторых случаях эффект от этого может быть значительно выше, чем от показателей энергосбережения. Это относится, например, к системам поддержания концентрации в потоках, необходимых температур, напоров в диктующих точках и других технологических переменных.

В известной литературе, посвященной данной проблеме, например [2–6], рассматриваются процессы только в отдельных устройствах комплекса — в турбомеханизме, магистрали, исполнительных механизмах — и в большинстве случаев они посвящены статическим режимам.

Цель исследования состоит в получении математических моделей статики и динамики для комплекса в целом и оценке на их основе показателей качества двух сравниваемых способов управления.

Данная статья посвящается получению и исследованию статических характеристик, последующие — динамическим моделям сравниваемых способов управления.

Характер движения жидкостей и газов в трубопроводных магистралях в установившихся режимах одинаков, поэтому в качестве транспортируемой среды рассматривается жидкость (вода).

В производственных условиях рассматриваемый комплекс часто работает при наличии встречного (статического) напора. Но поскольку при отсутствии напора наблюдается наибольшая разница в статических характеристиках комплекса, то, чтобы эти отличия подчеркнуть, в работе принимается отсутствие статического напора.

Для получения статических характеристик достаточно рассмотреть разомкнутые системы управления комплексом.

Статические характеристики комплекса для метода дросселирования

Статической характеристикой управления принято называть зависимость между выходной (управляемой) величиной и управляющим воздействием. Выходной величиной рассматриваемых способов управления является производительность, а управлением при методе дросселирования — относительное положение затвора исполнительного механизма. Другими словами, статическая характеристика комплекса при данном способе управления — это зависимость вида $Q = f(y)$. Частота вращения электропривода (турбомеханизма) в этом случае считается неизменной — номинальной. Электропривод работает в режиме естественных механических характеристик — при номинальном значении частоты и уровне питающего напряжения. Возможные их отклонения от номинальных значений могут сказываться на отклонениях частоты, что можно рассматривать в качестве возмущающих воздействий.

Турбомеханизм при этом способе управления также работает в режиме "паспортной" напорной характеристики, которую по аналогии с механической характеристикой электропривода также назовем естественной. Она приводится в технической документации турбомеханизма в виде графической зависимости $Q = f(H)$, где Q — объемная производительность; H — напор (давление) на выходе турбомеханизма.

Для удобства анализа напорную характеристику (иногда ее называют QH -характеристикой) ап-

проксимируют аналитической зависимостью; одним из таких соотношений [7, 8] является следующее:

$$H = H_{0e} - kQ^2, \quad (1)$$

где H_{0e} — напор на выходе турбомеханизма при естественной характеристике на холостом ходу (нулевой производительности); k — постоянный для данного турбомеханизма коэффициент, который можно определить из (1), приравняв $H = 0$, тогда

$$Q = Q_{\max} \text{ и } k = \frac{H_{0e}}{Q_{\max}^2}.$$

В работе [9] показано, что для напорной характеристики вида (1) номинальному режиму соответствует точка с координатами $Q = \frac{Q_{\max}}{\sqrt{3}}$, $H = \frac{2}{3} H_{0e}$.

Если обозначить их соответственно Q_H и H_H , то (1) запишется в следующем виде:

$$H = 1,5H_H - \frac{1,5H_H}{(\sqrt{3}Q_H)^2} Q^2 = 1,5H_H - 0,5 \frac{H_H}{Q_H^2} Q^2.$$

Приняв номинальные значения напора и производительности базовыми и равными единице, приведенное выражение можно записать в относительных величинах в виде

$$H^* = 1,5 - 0,5 Q^{*2}, \quad (2)$$

где знак * — относительное значение.

Для трубопроводной магистрали напорная характеристика имеет вид [5, 10]

$$H = \left[1 + \lambda \frac{L}{D_{yc}} + \Sigma \xi_c + \xi_a(y) \right] \frac{Q^2 \gamma}{2gS_{yc}^2}, \quad (3)$$

где $\lambda \frac{L}{D_{yc}}$ — коэффициент трения потока транспортируемой среды о стенки трубопровода; $\Sigma \xi_c$ — сумма коэффициентов трения, вызванных поворотами и местными сужениями трубопровода; $\xi_a(y)$ — коэффициент трения потока, определяемый положением затвора исполнительного механизма; y — относительное положение затвора ($0 \leq y \leq 1$); γ — удельный вес среды.

При линейной расходной характеристике исполнительного механизма для воды ($\gamma = 9810 \text{ кг/м}^3$) величина $\xi_a(y)$ рассчитывается как

$$\xi_a(y) = \frac{20gS_{yc}^2}{(Q_{yc}y)^2}, \quad (4)$$

где g — ускорение силы тяжести; S_{yc} — площадь внутреннего поперечного сечения трубопровода; Q_{yc} — условная объемная пропускная способность регулирующей арматуры.

Напорную характеристику магистрали при полностью открытой арматуре ($y = 1$) также назовем естественной. Изменяя y от 1 до 0, можно варьировать значения $\xi_a(y)$ от наименьшего $\xi_a(y = 1) = \min$ до $\xi_a(y = 0) = \infty$. Тогда в соответствии с (3) производительность будет изменяться от номинальной до нуля.

Зависимость (3) при промежуточных фиксированных значениях y будем называть искусственными напорными характеристиками магистрали. Отсюда видно, что управление методом дросселирования связано с переходом на искусственные напорные характеристики. Но поскольку при работе турбомеханизма в соответствии с (2) изменяется и напор на входе в магистраль, то для получения зависимости $Q = f(y)$ необходимо совместное решение уравнений (2), (3) и (4). Для упрощения же расчетов соотношение (3) также удобно представить в относительных единицах. Для этого обозначим

$$\left[1 + \lambda \frac{L}{D_{yc}} + \Sigma \xi_c + \xi_a(y)\right] \frac{\gamma}{2gS_{yc}^2} = k_M \quad (5)$$

и его значение при $y = 1$ условно примем равным 1.

Тогда для искусственных напорных характеристик магистрали, где $y < 1$, относительное значение этого коэффициента будет больше единицы. Обозначим его соответственно k_{M*} . Легко показать, что если для номинального режима магистрали $k_{M*} = 1$, то для искусственных напорных характеристик он равен

$$k_{M*} = \frac{1,5 - 0,5 Q_*^2}{Q_*^2}. \quad (6)$$

Например, уже для производительности $Q_* = 0,5$

$$k_{M*} = \frac{1,375}{0,25} = 5,5.$$

Соотношение же для напорных характеристик в относительных величинах следующее:

$$H_* = k_{M*} Q_*^2. \quad (7)$$

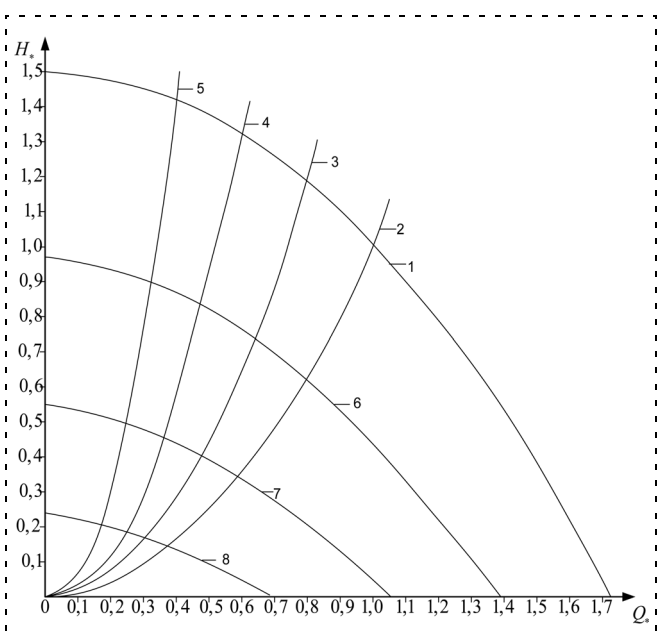


Рис. 1. Напорные характеристики:

1 — турбомеханизма естественная; 2 — магистрали естественная; 3 — магистрали искусственная, $Q_* = 0,8$; 4 — магистрали искусственная, $Q_* = 0,6$; 5 — магистрали искусственная, $Q_* = 0,4$; 6 — турбомеханизма искусственная, $Q_* = 0,8$; 7 — турбомеханизма искусственная, $Q_* = 0,6$; 8 — турбомеханизма искусственная, $Q_* = 0,4$

Напорные характеристики турбомеханизма и магистрали в относительных величинах позволяют достаточно просто строить их графики.

В качестве примера они приведены на рис. 1.

Для получения же статической характеристики комплекса $Q_* = f(y)$ необходимо задаться параметрами реальной трубопроводной арматуры. Пусть это будет трубопровод длиной $L = 200$ м, $D_{yc} = 0,1$ м, $\lambda = 0,02$, исполнительным механизмом является задвижка с коэффициентом сопротивления в открытом состоянии $\xi_a(y = 1) = 0,2$ и пропускной способностью $Q_{yc} = 885$ м³/ч.

Предположим, что по трубопроводу транспортируется вода. Примем номинальный напор турбомеханизма $H_n = 1$ МПа. Трубопроводная магистраль при полностью открытой задвижке и номинальном напоре турбомеханизма обеспечивает производительность, соответствующую номинальной для турбомеханизма.

Тогда из (4) можно получить

$$\xi_a(y) = \frac{0,2}{y^2}.$$

Q_*	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
k_{M*}	∞	149,5	37	16,17	8,875	5,5	3,67	2,56	1,84	1,35	1
y	0	0,005715	0,0116	0,01788	0,0248	0,0328	0,0426	0,0556	0,0756	0,1164	1

Подставляя этот результат в (3) и полагая $\Sigma \xi_c = 0$, можно рассчитать номинальную производительность. При $y = 1$, $Q_H = 0,0547 \text{ м}^3/\text{с} = 197 \text{ м}^3/\text{ч}$. Далее, решая совместно (5) и (7) для номинальной и любой промежуточной относительной производительности, можно определить для последней значение относительного управляющего воздействия. Пример такого расчета представлен в таблице.

Из системы уравнений и данных таблицы следует, что статическая характеристика комплекса является нелинейной. В частности, при малой производительности небольшому приращению управления (y) соответствует значительно большее приращение расхода, чем на производительностях, близких к номинальной. Для магистрали с другими параметрами статические характеристики будут отличаться от полученной, но нелинейность ее сохраняется. Для примера были рассчитаны статические характеристики для трубопроводов той же производительности, но соответственно длиной 800 м и 50 м. Более подробный анализ характеристик будет дан ниже.

Статические характеристики комплекса при изменении производительности путем изменения частоты вращения турбомеханизма

Здесь управление производительностью турбомеханизма осуществляется за счет изменения частоты вращения приводного двигателя. Для этого предполагается электропитание АД от преобразователя частоты — ПЧ. При этом напорная характеристика магистрали остается неизменной — естественной, управление же производительностью комплекса реализуется переходом на искусственные напорные характеристики турбомеханизма. Осуществляется это установкой соответствующей скорости вращения электропривода.

Переход с естественной на искусственные характеристики в соответствии с формулами пропорциональности теории подобия [2, 11] выполняется по соотношениям

$$H_{\text{и}i} = H_{0i} \omega_*^2, \quad Q_{\text{и}i} = Q_{0i} \omega_*, \quad (8)$$

где $H_{\text{и}i}$, $Q_{\text{и}i}$ — значения напора и производительности на искусственных характеристиках, соответствующих давлению и производительности H_{0i} и Q_{0i} на естественной напорной характеристике;

$\omega_* = \frac{\omega_{\text{и}}}{\omega_{\text{н}}}$ — относительное значение скорости на искусственной характеристике.

В работе [5] доказан более простой метод перехода на искусственные напорные характеристики.

Если естественная представляется в виде (1), то искусственная запишется как

$$H_{0i} = H_{0e} \omega_*^2 - k Q_*^2, \quad (9)$$

где k имеет то же значение, что и в соотношении (1). Переход к относительным величинам преобразует последнее соотношение к виду

$$H^* = 1,5 \omega_*^2 - 0,5 Q_*^2. \quad (10)$$

Напорная характеристика магистрали при данном способе управления остается естественной и в относительных единицах соответствует соотношению [7]. Учитывая, что при этом $k_{M_*} = 1$, то оно имеет вид

$$H_* = Q_*^2.$$

При совместной работе устройств комплекса относительное значение напора в данном выражении равно его значению в (10). Решая их совместно, имеем

$$Q_*^2 = \omega_*. \quad (11)$$

Отсюда следует, что статическая характеристика управления в комплексе электропривод — турбомеханизм — трубопроводная магистраль или зависимость $Q_* = f(\omega_*)$ является линейной. Напорные характеристики турбомеханизма и магистрали, поясняющие принцип управления для способа $\omega = \text{var}$, также показаны на рис. 1.

Анализ статических характеристик

Статическая характеристика для способа $\omega = \text{var}$ не требует особых пояснений. Однако для наглядности она приведена на рис. 2 наряду со статическими характеристиками способа дросселирования. Как уже отмечалось, для последнего они рассчитаны для трех трубопроводных магистралей с одинаковой производительностью, но различной длины (800, 200, 50 м).

По оси ординат показаны относительные значения производительности, для которых номинальная соответствует $Q_H = 0,0547 \text{ м}^3/\text{с}$. На оси абсцисс показаны относительные величины управлений (y и ω_*). Для линейной характеристики ко-

эффициент усиления, равный $K = \frac{\Delta Q_*}{\Delta \omega_*} = 1$, по-

стоянен во всем диапазоне изменения рассматриваемых величин. Для метода дросселирования он изменяется в широких пределах. Наибольших значений он достигает в начальной части статической характеристики при $Q_* \approx 0$, а самых малых — при

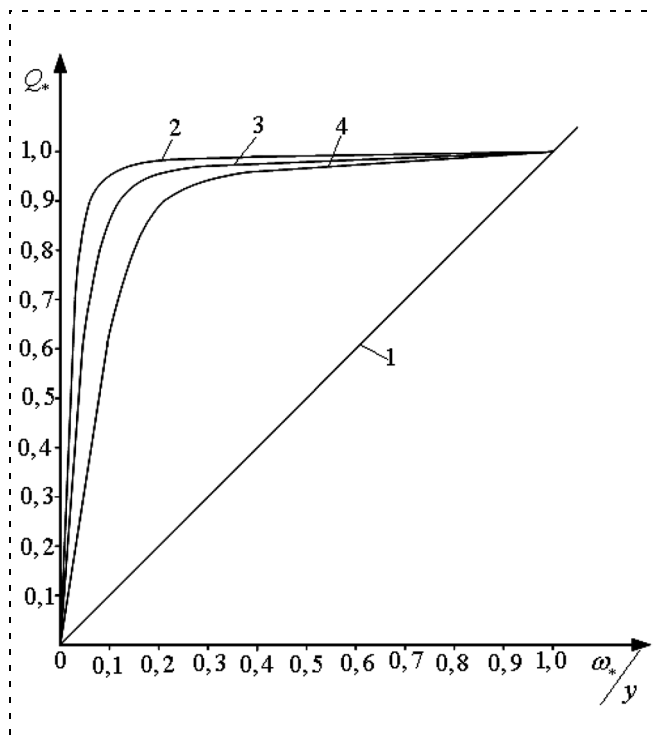


Рис. 2. Статические характеристики для двух способов управления производительностью:
1 — способ $\omega = \text{var}$; дросселирование: 2 — $L = 800$ м; 3 — $L = 200$ м; 4 — $L = 50$ м

полном открытии регулирующей арматуры — $Q_* \approx 1$ и $y \approx 1$. Для определенности подробнее рассмотрим график 3, полученный для трубопровода длиной 200 м (рис. 2). Соответствующие оценки для коэффициента усиления получены при изменении y от 0 до 0,01 и от 0,99 до 1. В частности,

$$K_{\text{нач}} = \frac{\Delta Q_*}{\Delta y} = \frac{0,1732}{0,01} = 17,32;$$

$$K_{\text{кон}} = \frac{3,618 \cdot 10^{-4}}{0,01} = 0,036,$$

т. е. их значения отличаются в 481 раз.

Предположим, что изменение производительности при работе комплекса может быть в пределах от $Q_* = 1$ до $Q_* = 0,25$. Тогда значение коэффициента усиления в окрестности точки $Q_* = 0,25$, рассчитанное по той же схеме, составляет

$$K_{0,25} = \frac{0,16786}{0,01} = 16,786,$$

или отличие коэффициентов на границах диапазона регулирования — 465-кратное.

При таком положении для получения требуемых показателей качества в замкнутой системе регулирования необходимо постоянно, в зависимости от производительности, перестраивать параметры регуляторов.

Альтернативой такому подходу является использование самонастраивающихся регуляторов, но это существенно усложняет систему управления. На практике настройка регуляторов обычно проводится при работе на наиболее вероятном значении производительности. Тогда переход на большие ее значения, где коэффициент усиления меньше, ведет к затягиванию переходных процессов и увеличению ошибки регулирования. При снижении производительности, напротив, растет быстродействие системы, увеличивается колебательность процесса, и при дальнейшем снижении система может стать неустойчивой.

От этих недостатков свободен способ управления $\omega = \text{var}$. Здесь достаточна однократная точная настройка, и система управления с одинаковыми показателями качества будет работать во всем диапазоне изменения производительности. Отсюда видно, что данный способ управления обладает потенциально лучшими показателями качества управления технологическим комплексом в установившихся и переходных режимах.

Список литературы

1. Ильинский Н. Ф. Энергосберегающий электропривод насосов и вентиляторов // Матер. науч.-техн. сем. "Энергосберегающий электропривод насосов и вентиляторов в промышленности и коммунальном хозяйстве". Москва, 1995. С. 3—4.
2. Черкасский В. М. Насосы, вентиляторы, компрессоры // М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987.
4. Емельянов А. И., Емельянов В. А. Исполнительные устройства промышленных регуляторов. М.: Машиностроение, 1975.
5. Гуревич Д. Ф. Расчет и конструирование трубопроводной арматуры. Л.: Машиностроение, 1969.
6. Казинер Ю. Я., Попов А. А. Расчет регулирующих органов для управления потоком среды // Приборы и системы управления, 1970. № 9. С. 25—27.
7. Браславский И. Я., Ишматов З. Ш., Поляков В. И. Энергосберегающий асинхронный электропривод. М.: АКАДЕМА, 2004.
8. Гоппе Г. Г. Снижение энергетических потерь в трубопроводных магистралях при транспортировании жидкостей и газов // Энергосбережение и водоподготовка. 2008. № 1. С. 68—70.
9. Гоппе Г. Г. Математические модели систем регулирования жидкостей и газов в трубопроводах при использовании для управления ресурсов электропривода // Отчет по гранту Минобрнауки РФ. Гос. Регистр. ВНИИ № 02.200.108420.2001. 61 с.
10. Гоппе Г. Г. Математическая модель расхода потоков жидкостей в трубопроводах как звено САП // Автоматизация химических производств. 1973. № 4. С. 32—43.
11. Малюченко В. В. Динамические насосы. Атлас. М.: Машиностроение, 1984.



ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



Управление и информатика в авиакосмических и морских системах



Главный редактор:

ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСЕЕВ В. В.
БЕЛОКОНОВ И. В.
БУКОВ В. Н.
ВАСИЛЬЕВ В. И.
ГОДУНОВ В. А.
ГУРЕВИЧ О. С.
ГУРСКИЙ Б. Г.
ЕФИМОВ В. В.
ЗАЙЦЕВ А. В.
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.
НЕСТЕРОВ В. А.
ОХТИЛЕВ М. Ю.
ПАНКРАТОВ В. М.
РАСПОПОВ В. Я.
САБО Ю. И.
СТЕПАНОВ О. А.
СОЛДАТКИН В. М.
ТЕРЯЕВ Е. Д.
ФИЛИМОНОВ Н. Б.
ШИРЯЕВ В. И.
ШКОЛИН В. П.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧУГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

Волков А. Б., Каретников В. В., Сикарев И. А.

Алгоритмы определения дальности и радиуса зоны действия автоматической информационной системы, работающей в условиях сложной помеховой обстановки 62

Челноков Ю. Н., Логинов М. Ю.

Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой бесплатформенной инерциальной навигационной системы, функционирующей в нормальной географической системе координат 64

Заведеев А. И., Архипов Р. А.

Особенности применения малоизбыточных кратных гиросиловых систем управления ориентацией космических аппаратов 73

А. Б. Волков,

ООО "Транзас Навигатор",

В. В. Каретников, канд. техн. наук, доц.,**И. А. Сикарев,** канд. техн. наук, доц.,Санкт-Петербургский государственный
университет водных коммуникаций

Алгоритмы определения дальности и радиуса зоны действия автоматической информационной системы, работающей в условиях сложной помеховой обстановки

Рассматриваются алгоритмы определения максимальной дальности действия автоматической информационной системы, учитывающие влияние мультипликативных и аддитивных помех.

Ключевые слова: автоматическая информационная система, коэффициент взаимного различия, радиопомеха, дальность действия, замирающий сигнал, замирающая помеха, ретранслированная помеха, взаимная помеха.

В настоящее время на внутренних водных путях (ВВП) Российской Федерации наблюдается ежегодный рост объемов перевозок, осуществляемых речными судами и судами "река — море", используемых в смешанных районах плавания. Естественно, это приводит к увеличению интенсивности судоходства на всей протяженности ВВП России. В таких условиях для обеспечения надлежащего уровня безопасности плавания, несомненно, будет актуальным интеграция в транспортную систему автоматических или автоматизированных инфокоммуникационных систем. Неотъемлемой частью рассматриваемых систем является автоматическая информационная система (АИС).

АИС получили весьма широкое распространение на морском транспорте и в соответствии с требованиями 5 главы Международной конвенции СОЛАС являются обязательными для установки практически на всех морских судах.

С этой точки зрения для специалистов водного транспорта значительный интерес вызывают вопросы, связанные с повышением безопасности, улучшением мониторинга и эффективности управления судоходством при использовании указанных систем, функционирование которых в значительной мере зависит от комплексного воздействия мультипликативных и аддитивных помех в информационных каналах на трассе "базовая станция (БС) — судовой транспондер (СТ)". Среди таких помех имеют место шумы, взаимные помехи радиосредств, внеполосное излучение линий электропередач и различных промышленных установок, различного рода моно- и полигармонические помехи и т. п.

Построение АИС в указанных условиях, прежде всего топология и размеры зон действия, а также дальность их действия исследовались в ряде работ [1, 2, 4], однако вопросы остаются в значительной мере открытыми.

Нужно также учитывать, что БС АИС излучают в диапазоне ультракоротких волн (УКВ) частотно-манипулированные сигналы с непрерывающимися спектрами.

Известно [1], что максимальная дальность зоны действия БС АИС определяется соотношением

$$R_{\max} = \arg[p_{\text{ош}}(R_c) = p_{\text{тр}}], \quad (1)$$

где $p_{\text{тр}} = 10^{-2} \dots 10^{-6}$ — требуемая вероятность ошибки при приеме цифровой двоичной единицы сообщения АИС; $p_{\text{ош}}(R_c)$ — вероятность ошибки приема в информационном канале АИС двоичной цифровой информации при расстоянии БС — СТ, равном R_c .

При воздействии указанных выше помех решение (1) может принимать различные формы.

Алгоритм определения дальности действия АИС для случая "не замирающий сигнал — помеха, замирающая по релеевскому закону"

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{\chi}{R_c^4} \frac{1}{\left(2 + \frac{\chi_{\text{п}} g_{\text{ор}}^2}{R_{\text{п}}^4} \right)} \right], \quad r = 1; 2 \quad [3]. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) для данного случая можно получить:

$$R_{\max} = \left[\frac{\chi}{|\ln 2 p_{\text{тр}}| \left(1 + \frac{\chi_{\text{п}} g_{\text{ор}}^2}{R_{\text{п}}^4} \right)} \right]^{1/4}. \quad (3)$$

Здесь R_c — радиус действия БС; χ и $\chi_{\text{п}}$ — энергетические параметры сигнала и помехи, которые можно определить следующим образом:

$$\chi = \frac{P_{\text{и}} G_1 \eta_1 G_2 \eta_2 (h_1^2 + h_0^2)(h_2^2 + h_0^2)}{2 M_{\text{пр min}}}, \quad (4)$$

$$\chi_{\text{п}} = \frac{P_{\text{ип}} G_{\text{п}} \eta_{\text{п}} G_2 \eta_2 (h_{\text{п}}^2 + h_0^2)(h_2^2 + h_0^2)}{2 M_{\text{пр min}}}, \quad (5)$$

где $P_{\text{и}}$ и $P_{\text{ип}}$ — соответственно, мощность передатчика БС АИС и источника помехи (ИП); $M_{\text{пр min}}$ — чувствительность приемника судового транспондера АИС; h_1 , h_2 и $h_{\text{п}}$ — высоты антенн БС, СТ и ИП; G_1 , G_2 и $G_{\text{п}}$ — КПД антенн БС, СТ и ИП; η_1 , η_2 и $\eta_{\text{п}}$ — соответственно КПД антенно-фидерных трактов БС, СТ и ИП; $R_{\text{п}}$ — расстояние между ИП и БС; $g_{\text{ор}}^2$ — коэффициент взаимного различия r -го ва-

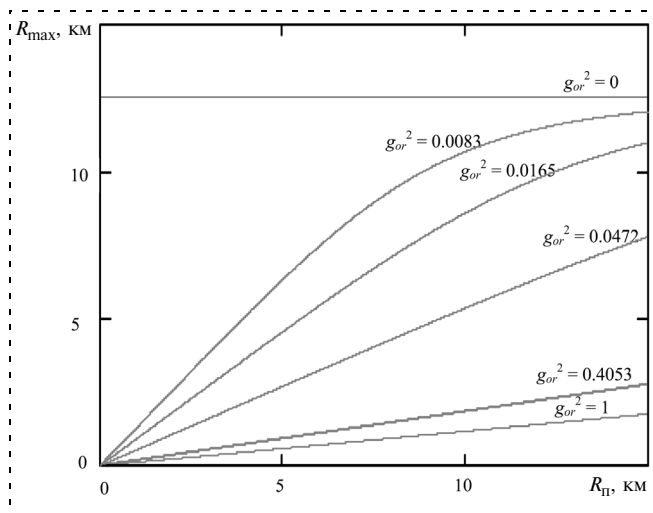


Рис. 1. Зависимость $R_{\max}$ от R_{Π} для различных максимумов коэффициента взаимного различия g_{or}^2 ("не замирающий сигнал — замирающая помеха")

рианта сигнала и сосредоточенной помехи, определенной в [3, с. 31].

Как правило, для случая одиночной БС АИС, работающей в УКВ-диапазоне, для определения ее зоны действия с учетом влияния окружающей помеховой обстановки рассмотренных представлений вполне достаточно. Для создания полноценно функционирующей автоматизированной системы управления движением судов (АСУ ДС) необходимо установить несколько БС АИС и соединить в цепь. В таком случае для получения полной картины необходимо обратить особое внимание на случай (3). Такой подход весьма актуален при создании АСУ ДС, базирующихся на применении технологии АИС.

Используя выражение (3), можно построить номограмму зависимости максимальной зоны действия БС АИС (АИС-1) от расстояния до источника помехи (АИС-2) для различных значений максимумов коэффициента взаимного различия g_{or}^2 .

Номограмма (рис. 1) построена для случая, когда мощность передатчика АИС-1 и мощности источника помех АИС-2 равны 2 Вт. Достаточно просто построить подобную номограмму и для других характерных случаев, например для $P_{\Pi} = 2$ Вт, $P_{\Pi\Pi} = 12$ Вт и т. д.

Алгоритм определения дальности действия АИС для случая "замирающий сигнал — помеха, замирающая по релеевскому закону"

После несложных математических преобразований соотношение (1) можно адаптировать для случая "замирающий сигнал — замирающая помеха":

$$R_{\max} = \left[\frac{\chi}{\left(\frac{1}{2P_{\text{тр}}} - 1 \right) \left(2 + \frac{\chi_{\Pi} g_{or}^2}{R_{\Pi}^4} \right)} \right]^{1/4}. \quad (6)$$

Необходимо отметить, что соотношения (3) и (6) являются явными замкнутыми аналитическими решениями относительно $R_{\max} = R_{\max}(g_{or}^2)$. Кроме того, указанные выражения являются одновременно и оценками сверху для случаев "не замирающий сигнал — не замирающая помеха" и "замирающий сигнал — не замирающая помеха" соответственно.

Эти выражения обладают достаточной общностью и позволяют анализировать влияние на $R_{\max}$ различных классов взаимных помех, в том числе таких, как различного рода побочные излучения и взаимные моногармонические помехи, для которых [3]

$$g_{or}^2 = \left(\frac{\sin \frac{\Omega_r T}{2}}{\frac{\Omega_r T}{2}} \right)^2; \quad \Omega_r = |k_r \omega_0 - \omega_{\Pi}|; \quad r = 1, 2;$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (7)$$

где $\omega_{\Pi} = 2\pi f_{\Pi}$ — частота помехи; T — длительность посылки цифрового сообщения в АИС; k_r — порядковый номер гармоники.

В таблице представлены значения максимумов g_{or}^2 в соответствии с (7).

Зависимости $R_{\max}$ от R_{Π} для некоторых указанных в этой таблице g_{or}^2 показаны на рис. 1 и 2. При этом $g_{or}^2 \approx 1$ соответствует случаю ретранслированной помехи, $g_{or}^2 = 0,4053$ — случаю моногармонической взаимной помехи, а $g_{or}^2 = 0,0472$ практически соответствует влиянию помехи побочного излучения по основным каналам приема.

Максимумы функции g_{or}^2

Ω_r	0	$\pi/2$	$3\pi/T$	$5\pi/T$	$7\pi/T$	$9\pi/T$	$11\pi/T$
$\max g_{or}^2$	1	0,4053	0,0472	0,0165	0,00834	0,00503	0,00336

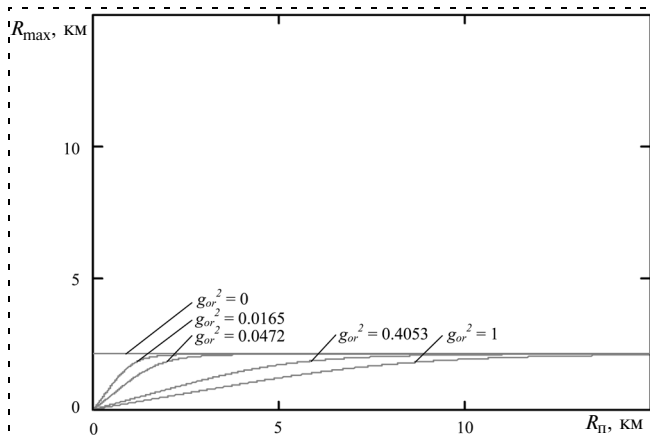


Рис. 2. Зависимость $R_{\max}$ от R_{Π} для различных максимумов коэффициента взаимного различия g_{or}^2 ("замирающий сигнал — замирающая помеха")

В качестве заключения необходимо отметить, что при создании АИС, работающих для нужд внутреннего водного транспорта, особое внимание необходимо уделить помехозащищенности их информационных каналов. В рамках данной статьи был рассмотрен достаточно актуальный вопрос определения радиуса сервисной зоны АИС с учетом влияния помех, замирающих по релеевскому закону распределения для различных максимумов коэффициента взаимного различия.

1. Петухов Ю. В., Сикарев И. А. Электромагнитная защищенность базовых станций речных АИС в условиях взаимных помех // Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы. Вып. 2. СПб.: Издательство политехнического университета, 2008. С. 115—119.

2. Вишнеvский Ю. Г., Сикарев И. А. Электромагнитная защищенность цифровых информационных каналов спутниковых радионавигационных систем // Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы. Вып. 1. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2008. С. 152—158.

3. Сикарев А. А., Фалько А. И. Оптимальный прием дискретных сообщений. М.: Связь, 1978. 328 с.

4. Вишнеvский Ю. Г., Сикарев А. А. Поля поражения сигналов и электромагнитная защищенность информационных каналов в АСУДС // СПб.: Судостроение, 2006. 356 с.

УДК 629

Ю. Н. Челноков, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр.,

М. Ю. Логинов, аспирант,

Институт проблем

точной механики и управления РАН, г. Саратов

heetseeker@mail.ru

Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой бесплатформенной инерциальной навигационной системы, функционирующей в нормальной географической системе координат

Выводятся нелинейные и линейные дифференциальные уравнения ошибок корректируемой бесплатформенной инерциальной навигационной системы, функционирующей в нормальной географической системе координат.

Ключевые слова: инерциальная навигация, бесплатформенные инерциальные навигационные системы, ошибки БИНС.

Введение

При построении алгоритмов функционирования бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) используются так называемые уравнения идеальной работы БИНС, т. е. дифференциальные и функциональные соотношения, связывающие проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта, измеряемые чувствительными элементами БИНС (при условии их идеального функционирования), с навигационными параметрами (координатами местонахождения и проекциями скорости) и параметрами ориентации. Возможны различные варианты таких уравнений [2—4]. Анализ различных вариантов уравнений идеальной работы БИНС, решающей задачи ориентации и навигации объекта в географической системе координат, показывает,

что в качестве основных могут быть рекомендованы используемые в данной статье уравнения идеального функционирования БИНС в нормальной географической системе координат (НГСК), в которых в качестве промежуточных кинематических параметров ориентации используются параметры Эйлера (Родрига-Гамильтона) [5—10].

Для этих уравнений выводятся дифференциальные уравнения ошибок БИНС, которые позволяют изучать влияние на работу БИНС погрешностей чувствительных элементов (акселерометров и гироскопов), ошибок начального задания параметров ориентации и навигации и т. д. Нелинейные дифференциальные уравнения ошибок достаточно сложны и позволяют проводить исследования только численно. Для аналитического исследования, как правило, используются линеаризованные дифференциальные уравнения ошибок БИНС. В данной статье выводятся и те, и другие уравнения ошибок для БИНС, вырабатывающей параметры ориентации, координаты местоположения и проекции скорости объекта относительно нормальной географической системы координат. При этом БИНС считается корректируемой, и форма дифференциальных уравнений ошибок позволяет учитывать различные способы линейной коррекции путем задания соответствующих коэффициентов коррекции.

Уравнения идеального функционирования БИНС в НГСК

Рассматривается задача инерциальной ориентации и навигации объекта в географической опорной системе координат, решаемая с помощью БИНС, имеющей в своем составе три ньютометра и пространственный измеритель абсолютной угловой скорости, жестко закрепленные на борту объекта, и бортовой вычислитель. Считается, что в задачу инерциальной навигации входит определение ориентации объекта относительно географического сопро-вождающего трехгранника (параметров Эйлера (Родрига-Гамильтона), а также углов ориентации

объекта: географического курса, углов рыскания, тангажа и крена), проекций линейной скорости движения объекта относительно Земли на оси географического сопровождающего трехгранника, криволинейных географических координат местоположения объекта. В качестве исходной информации для решения этой задачи принимаются проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним оси (или приращения интегралов от этих величин), формируемые чувствительными элементами БИНС.

При рассмотрении задач ориентации и навигации объекта используются следующие системы координат:

- $O^1 X_1^* X_2^* X_3^* (X^*)$ — геоцентрическая инерциальная система координат с началом в центре масс Земли, принимаемой за эллипсоид вращения. Ось X_1^* направлена по полярной оси Земли (вдоль вектора $\mathbf{u}$ угловой скорости вращения Земли); оси X_2^* , X_3^* расположены в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли;
- $O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3 (\eta)$ — геоцентрическая система координат, жестко связанная с Землей. Ось η_1 направлена по оси X_1^* ; оси η_2 , η_3 расположены в плоскости экватора, причем ось η_2 совпадает с линией пересечения плоскости экватора и гринвичского меридиана;
- $O_2 Z_1' Z_2' Z_3' (Z')$ — нормальная географическая система координат (НГСК), начало O_2 которой совпадает с одной из точек объекта (точкой местоположения чувствительных масс ньютонометров). Ось Z_2' направлена по географической вертикали вверх, ось Z_1' — вдоль касательной к меридиану h -эллипсоида на север, ось Z_3' — вдоль касательной к параллели на восток;
- $O_2 Y_1 Y_2 Y_3 (Y)$ — связанная с объектом система координат, начало O_2 которой совпадает с одной из точек объекта (точкой местоположения чувствительных масс ньютонометров). Ось Y_1 направлена по продольной оси объекта, ось Y_2 — по нормальной, а ось Y_3 — по поперечной.

Все введенные системы координат являются правыми. Схемы поворотов координатных трехгранников приведены на рис. 1–3. На них $\mu = \mu_0 + \omega t$ (μ — значение угла разворота системы координат η относительно X^* , μ_0 — значение этого угла в начальный момент времени, ω — угловая скорость вращения Земли, t — время); λ , φ — географическая долгота и широта местонахождения объекта; ψ — географический курс объекта; ϑ , γ — углы тангажа и крена.

Взаимная ориентация введенных координатных трехгранников задается также параметрами Эйлера в соответствии со схемой поворотов

$$X^* \xrightarrow{\omega/\lambda_j} Y \sim X^* \xrightarrow{\omega_c/v_j} Z' \xrightarrow{\alpha_j} Y, \quad (1)$$

где λ_j , α_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию объекта (трехгранника Y) относительно трехгранников X^* и Z' соответственно; v_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию НГСК относительно системы координат X^* ; ω — вектор абсолютной угловой скорости вращения объекта (системы координат Y); ω_c — проекция вектора ω абсолютной угловой скорости объекта на ось Y_2 .

Рассмотрим исходную систему уравнений инерциальной ориентации и навигации объекта относительно нормальной географической системы ко-

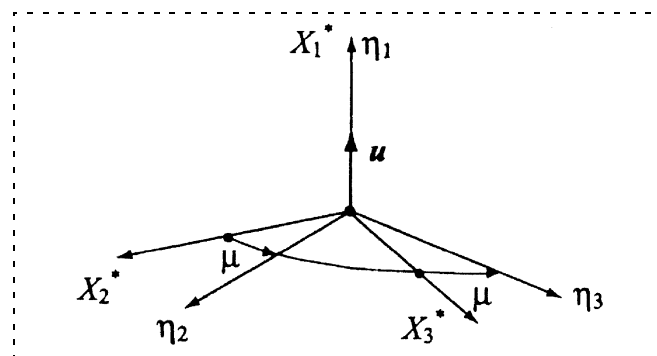


Рис. 1

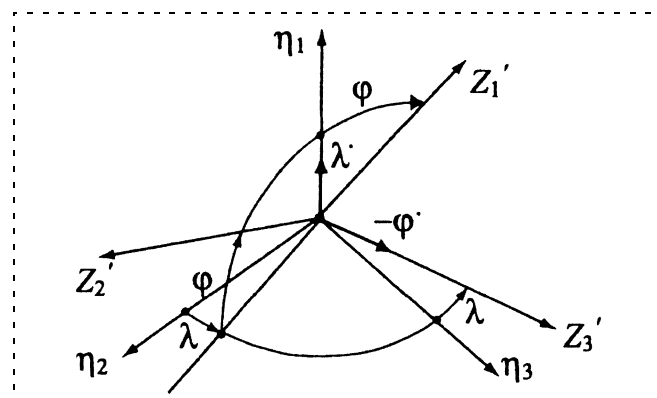


Рис. 2

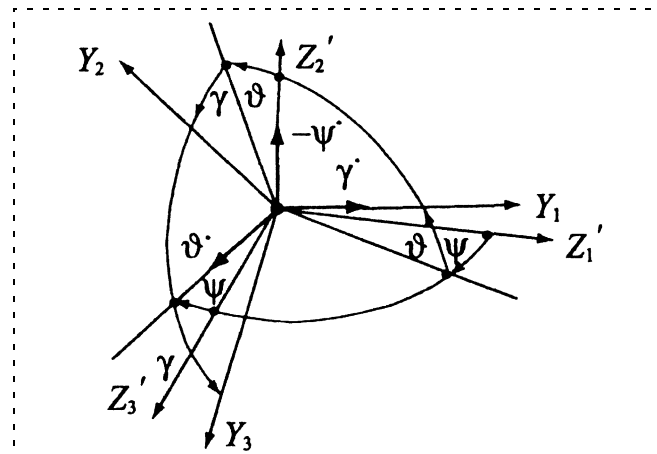


Рис. 3

ординат, являющихся уравнениями идеального функционирования БИНС в НГСК [1]:

$$\begin{aligned}\dot{v}_N &= a_N + \omega_E v_H - (u_H + \omega_H) v_E; \\ \dot{v}_H &= a_H - \omega_E v_N + (u_N + \omega_N) v_E - g; \\ \dot{v}_E &= a_E + (u_H + \omega_H) v_N - (u_N + \omega_N) v_H;\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}2\dot{\alpha} &= n_\omega \alpha - n_\alpha \omega_{Z'} = (n_\omega - m_{\omega_{Z'}}) \alpha; \\ \alpha &= (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \omega_{Z'} = (0, \omega_N, \omega_H, \omega_E);\end{aligned}\quad (3)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_1 \cos \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_2}, \quad \dot{H} = \frac{v_H}{\alpha}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\omega_N &= u_N + \frac{v_E}{R_1}, \quad \omega_H = u_H + \frac{v_E}{R_1} \operatorname{tg} \varphi, \quad \omega_E = -\frac{v_N}{R_2}; \\ u_N &= u \cos \varphi, \quad u_H = u \sin \varphi;\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{\tilde{a} + H}{\alpha^*}, \quad R_2 = \frac{(\tilde{a} + H)(1 - e^2)}{\alpha^3}, \\ \alpha &= (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2};\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \psi &= \frac{\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - 0,5}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha_0 \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_0^2 + \alpha_2^2 - 0,5}, \\ \sin \vartheta &= 2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_3);\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}a_{Z'} &= n_\alpha^T m_\alpha a, \quad a_{Z'} = (0, a_N, a_H, a_E), \\ a &= (0, a_1, a_2, a_3);\end{aligned}\quad (8)$$

$$g = \frac{g_{eo} \tilde{a}^2}{(\tilde{a} + H)^2} (1 + \delta \sin^2 \varphi). \quad (9)$$

Здесь v_p ($p = N, H, E$) — проекции относительной скорости (скорости точки O_2 системы координат Y относительно земной поверхности) на оси НГСК; a_i ($i = 1, 2, 3$) и a_p ($p = N, H, E$) — проекции вектора кажущегося ускорения (ускорения, измеряемого пространственным ньютонометром) на объектовые оси и на оси НГСК; ω_i ($i = 1, 2, 3$) и ω_p ($p = N, H, E$) — проекции векторов абсолютных угловых скоростей вращения объекта и НГСК на объектовые оси и на оси НГСК; λ, φ — географические долгота и широта местонахождения объекта; H — высота местонахождения объекта; ψ, ϑ, γ — углы рыскания, тангажа и крена (угол географического курса равен углу рыскания ψ , взятому с противоположным знаком); $n_\alpha, m_\alpha, n_\omega, m_{\omega_{Z'}}$ — кватернионные матрицы n - и m -типов (см. ниже); g — модуль ускорения силы тяжести; $u = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость суточного вращения Земли; $e^2 = 0,006692$ — квадрат первого эксцентриситета; $\tilde{a} = 6\,378\,245 \text{ м}$ — большая полуось земного эллипсоида вращения; $g_{eo} = 9,78049 \text{ м/с}^2$, $\delta = 5,317 \cdot 10^{-3}$.

Используемые в описанных выше соотношениях кватернионные матрицы n - и m -типов имеют следующий вид (для любого кватерниона α):

$$n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}; \quad m(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix};$$

матрицы n_ω и $m_{\omega_{Z'}}$ — вид

$$n_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad m_{\omega_{Z'}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_N & -\omega_H & -\omega_E \\ \omega_N & 0 & -\omega_E & \omega_H \\ \omega_H & \omega_E & 0 & -\omega_N \\ \omega_E & -\omega_H & \omega_N & 0 \end{pmatrix}.$$

Вместо системы (3) могут быть использованы две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}2\dot{\lambda} &= n_\omega \lambda, \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3); \\ 2\dot{v} &= n_{\omega_{Z'}} v, \quad v = (v_0, v_1, v_2, v_3)\end{aligned}\quad (10)$$

и матричное соотношение

$$\alpha = m_v^T \lambda = n(v_0, -v_1, -v_2, -v_3), \quad (11)$$

в которых матрицы $n_{\omega_{Z'}}$, m_v и $n(v_0, -v_1, -v_2, -v_3)$ следующие:

$$\begin{aligned}n_{\omega_{Z'}} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_N & -\omega_H & -\omega_E \\ \omega_N & 0 & \omega_E & -\omega_H \\ \omega_H & -\omega_E & 0 & \omega_N \\ \omega_E & \omega_H & -\omega_N & 0 \end{pmatrix}; \quad m_v = \begin{pmatrix} v_0 & -v_1 & -v_2 & -v_3 \\ v_1 & v_0 & -v_3 & v_2 \\ v_2 & v_3 & v_0 & -v_1 \\ v_3 & -v_2 & v_1 & v_0 \end{pmatrix}; \\ n(v_0, -v_1, -v_2, -v_3) &= \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ -v_1 & v_0 & -v_3 & v_2 \\ -v_2 & v_3 & v_0 & -v_1 \\ -v_3 & -v_2 & v_1 & v_0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Кроме того, вместо системы (3) могут быть взяты система (10) и формулы, связывающие параметры Эйлера v_j ($j = 0, 1, 2, 3$) с географическими широтой φ и долготой λ :

$$\begin{aligned}v_0 &= \cos(\varphi/2) \cos(\lambda_a/2); \quad v_1 = \cos(\varphi/2) \sin(\lambda_a/2); \\ v_2 &= \sin(\varphi/2) \sin(\lambda_a/2); \quad v_3 = -\sin(\varphi/2) \cos(\lambda_a/2);\end{aligned}\quad (12)$$

$$\lambda_a = \lambda + \mu_0 + ut,$$

где μ_0 — значение угла разворота системы координат η относительно X^* в начальный момент времени.

Введение коррекции

Для обеспечения работы БИНС в течение длительного времени необходимо периодически уточнять ее работу по какой-либо корректирующей информации, например, по данным спутниковой навигационной системы. Для линейной коррекции в правые части дифференциальных уравнений для скоростей (2), координат местоположения (4) и ориентации (3) нужно ввести слагаемые, пропорциональные разностям $(X - X^k)$, где X — параметр, определяемый БИНС, а X^k — соответствующий параметр, определенный по корректирующим данным.

Скорректируем указанным образом уравнения для скоростей (2) и координат местоположения (4):

$$\begin{aligned}\dot{v}_N &= a_N + \omega_E v_H - (u_H + \omega_H) v_E + k_{v_N}^{v_N} (v_N - v_N^k) + \\ &+ k_{v_N}^{v_H} (v_H - v_H^k) + k_{v_N}^{v_E} (v_E - v_E^k) + k_{v_N}^{\varphi} (\varphi - \varphi^k); \\ \dot{v}_H &= a_H - \omega_E v_N + (u_N + \omega_N) v_E - g + k_{v_H}^{v_N} (v_N - v_N^k) + \\ &+ k_{v_H}^{v_H} (v_H - v_H^k) + k_{v_H}^{v_E} (v_E - v_E^k) + k_{v_H}^H (H - H^k); \quad (13)\end{aligned}$$

$$\dot{v}_E = a_E + (u_H + \omega_H) v_N - (u_N + \omega_N) v_H + k_{v_E}^{v_N} (v_N - v_N^k) + k_{v_E}^{v_H} (v_H - v_H^k) + k_{v_E}^{v_E} (v_E - v_E^k) + k_{v_E}^{\lambda} (\lambda - \lambda^k);$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_1 \cos \varphi} + k_{\lambda}^{v_E} (v_E - v_E^k) + k_{\lambda}^{\varphi} (\varphi - \varphi^k) + k_{\lambda}^{\lambda} (\lambda - \lambda^k);$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_2} + k_{\varphi}^{v_N} (v_N - v_N^k) + k_{\varphi}^{\varphi} (\varphi - \varphi^k); \quad (14)$$

$$\dot{H} = \frac{v_H}{\alpha} + k_H^{v_H} (v_H - v_H^k) + k_H^H (H - H^k).$$

Для уравнения ориентации (3) считаем, что корректирующая информация может быть представлена в виде параметров Эйлера (Родрига-Гамильтона) $\mathfrak{x}_p^k$ ($p = 0, 1, 2, 3$). Выполним коррекцию следующим образом:

$$\begin{aligned}2\dot{\mathfrak{x}} &= n_{\omega} \mathfrak{x} - n_{\mathfrak{x}} \omega_{Z'} + K_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^k) = \\ &= (n_{\omega} - m_{\omega_{Z'}}) \mathfrak{x} + K_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^k); \end{aligned}$$

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)^T; \mathfrak{x}^k = (\mathfrak{x}_0^k, \mathfrak{x}_1^k, \mathfrak{x}_2^k, \mathfrak{x}_3^k)^T;$$

$$K_{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} k_0^{\mathfrak{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1^{\mathfrak{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2^{\mathfrak{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3^{\mathfrak{x}} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В этих соотношениях k_i^j ($i, j = v_N, v_H, v_E, \lambda, \varphi, H$), $k_p^{\mathfrak{x}}$ ($p = 0, 1, 2, 3$) — константы, называемые *коэффициентами коррекции*.

Для k_i^j ($i, j = v_N, v_H, v_E, \lambda, \varphi, H$) нижний индекс показывает, какой параметр корректируется, а верхний индекс указывает, по какому параметру проводится коррекция. Например, $k_{\varphi}^{v_N}$ обозначает, что этот коэффициент задает коррекцию широты φ по разности определяемой и корректирующей северных составляющих вектора скорости $(v_N - v_N^k)$. Коэффициенты $k_p^{\mathfrak{x}}$ ($p = 0, 1, 2, 3$) используются в дифференциальном уравнении для $\mathfrak{x}$, и нижний индекс показывает, какая из компонент $\mathfrak{x}_p$ ($p = 0, 1, 2, 3$) корректируется.

Очевидно, что корректирующие данные должны задаваться так же, как и параметры, определяемые БИНС, а именно: координаты местоположения должны задаваться в виде географической долготы, широты и высоты, а скорости — в проекциях на оси НГСК. Такая информация, однако, не всегда доступна. Например, рассмотрим случай, когда для коррекции используется доплеровский измеритель скорости, который определяет составляющие вектора относительной скорости объекта не в проекциях на оси НГСК, а в проекциях на оси связанной с объектом системы координат. В этом случае перед использованием в соотношениях (13) необходимо выполнить соответствующее преобразование перепроектирования. Для этого, например, можно использовать соотношение, аналогичное (8):

$$\begin{aligned}V_{Z'}^k &= n_{\kappa}^T m_{\mathfrak{x}} V^k; V_{Z'}^k = (0, v_N^k, v_H^k, v_E^k); \\ V^k &= (0, v_1^k, v_2^k, v_3^k), \quad (16)\end{aligned}$$

где v_i^k ($i = 1, 2, 3$) и v_p^k ($p = N, H, E$) — проекции вектора относительной скорости объекта, определенного с помощью корректирующих данных, на объектовые оси и на оси НГСК соответственно. Соотношение (16) эквивалентно соотношению

$$\begin{pmatrix} v_N^k \\ v_H^k \\ v_E^k \end{pmatrix} = C_{\mathfrak{x}}^T \begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_3^k \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где элементы матрицы $C_{\mathfrak{x}}$ определяются из равенств, связывающих параметры Эйлера $\mathfrak{x}_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) с направляющими косинусами c_{ik} , ($i, k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}c_{11} &= 2\mathfrak{x}_0^2 + 2\mathfrak{x}_1^2 - 1; c_{12} = 2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3); \\ c_{13} &= 2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_2); \\ c_{21} &= 2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3); c_{22} = 2\mathfrak{x}_0^2 + 2\mathfrak{x}_2^2 - 1; \\ c_{23} &= 2(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1); \\ c_{31} &= 2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_2); c_{32} = 2(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1); \\ c_{33} &= 2\mathfrak{x}_0^2 + 2\mathfrak{x}_3^2 - 1. \quad (18)\end{aligned}$$

Нелинейные уравнения ошибок

Для начала выполним замену переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} v_i &= v_i^F = v_i^* + \Delta v_i \quad (i = 1, 2, 3); \\ v_p &= v_p^F = v_p^* + \Delta v_p \quad (p = N, H, E); \\ H &= H^F = H^* + \Delta H; \\ \lambda &= \lambda^F = \lambda^* + \Delta \lambda; \quad \varphi = \varphi^F = \varphi^* + \Delta \varphi; \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}^F = \mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}; \\ \mathbf{x}^* &= (\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*)^T; \quad \Delta \mathbf{x} = (\Delta \mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}_1, \Delta \mathbf{x}_2, \Delta \mathbf{x}_3)^T; \\ C_{\mathbf{x}ij} &= C_{\mathbf{x}ij}^F = C_{\mathbf{x}ij}^* + \Delta C_{\mathbf{x}ij} \quad (i, j = 1, 2, 3); \\ a_i &= a_i^F = a_i^* + \Delta a_i; \quad \omega_i = \omega_i^F = \omega_i^* + \Delta \omega_i \quad (i = 1, 2, 3); \\ v_i^k &= v_i^* + \Delta v_i^k \quad (i = 1, 2, 3); \\ v_p^k &= v_p^* + \Delta v_p^k \quad (p = N, H, E); \\ H^k &= H^* + \Delta H^k; \quad \lambda^k = \lambda^* + \Delta \lambda^k; \quad \varphi^k = \varphi^* + \Delta \varphi^k; \\ \mathbf{x}^k &= \mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}^k; \\ \mathbf{x}^* &= (\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*)^T; \quad \Delta \mathbf{x}^k = (\Delta \mathbf{x}_0^k, \Delta \mathbf{x}_1^k, \Delta \mathbf{x}_2^k, \Delta \mathbf{x}_3^k)^T. \end{aligned} \quad (19)$$

В этих соотношениях величины с верхним индексом "*" обозначают точные (невозмущенные) значения параметров, а величины со знаком Δ — отклонения параметров от их точных значений. Таким образом, Δv_i ($i = 1, 2, 3$), Δv_p ($p = N, H, E$) — ошибки определения относительной скорости объекта в проекциях на оси связанной системы координат и НГСК соответственно; ΔH , $\Delta \lambda$, $\Delta \varphi$ — ошибки определения высоты, долготы и широты объекта; $\Delta \mathbf{x}$ и $\Delta C_{\mathbf{x}ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) — ошибки определения ориентации объекта в параметрах Родрига-Гамильтона и направляющих косинусов соответственно; Δa_i , $\Delta \omega_i$ ($i = 1, 2, 3$) — инструментальные погрешности акселерометров и гироскопов соответственно; Δv_i^k ($i = 1, 2, 3$), Δv_p^k ($p = N, H, E$) — отклонения от истинного значения предоставляемой для коррекции относительной скорости объекта в проекциях на оси связанной системы координат и НГСК соответственно (например, инструментальная погрешность доплеровского измерителя скорости); ΔH^k , $\Delta \lambda^k$, $\Delta \varphi^k$, $\Delta \mathbf{x}^k$ — отклонения от истинного значения предоставляемых для коррекции высоты, долготы, широты и кватерниона ориентации соответственно (например, погрешности спутниковой навигационной системы).

Для удобства также будем использовать верхний индекс "F" в тех случаях, когда нужно подчеркнуть тот факт, что величина рассматривается как сумма точного (невозмущенного) значения и ошибки (отклонения).

Для вывода собственно нелинейных дифференциальных уравнений ошибок для координат местоположения и скоростей необходимо (19) подставить в (13)—(15), а затем из полученных уравнений вычесть дифференциальные уравнения невозмущенного движения:

$$\begin{aligned} \dot{v}_N^* &= a_N^* + \omega_E^* v_H^* - (u_H^* + \omega_H^*) v_E^*; \\ \dot{v}_H^* &= a_H^* - \omega_E^* v_N^* + (u_N^* + \omega_N^*) v_E^* - g^*; \\ \dot{v}_E^* &= a_E^* + (u_H^* + \omega_H^*) v_N^* - (u_N^* + \omega_N^*) v_H^*; \\ \dot{\lambda}^* &= \frac{v_E^*}{R_1^* \cos \varphi^*}; \quad \dot{\varphi}^* = \frac{v_N^*}{R_2^*}; \quad \dot{H}^* = \frac{v_H^*}{\alpha^*}; \\ 2\dot{\mathbf{x}}^* &= n_{\omega}^* \mathbf{x}^* - n_{\mathbf{x}}^* \omega_{Z'}^* = (n_{\omega}^* - m_{\omega_{Z'}}^*) \mathbf{x}^*. \end{aligned} \quad (20)$$

В этих соотношениях

$$\begin{aligned} \omega_N^* &= u_N^* + \frac{v_E^*}{R_1^*}; \quad \omega_H^* = u_H^* + \frac{v_E^*}{R_1^*} \operatorname{tg} \varphi^*; \quad \omega_E^* = -\frac{v_N^*}{R_2^*}; \\ u_N^* &= u \cos \varphi^*; \quad u_H^* = u \sin \varphi^*; \\ R_1^* &= \frac{\tilde{a} + H^*}{\alpha^*}; \quad R_2^* = \frac{(\tilde{a} + H^*)(1 - e^2)}{\alpha^{*3}}; \\ \alpha^* &= (1 - e^2 \sin^2 \varphi^*)^{1/2}; \\ a_{Z'}^* &= n_{\mathbf{x}}^{*T} m_{\mathbf{x}}^* a^*; \quad a_{Z'}^* = (0, a_N^*, a_H^*, a_E^*); \\ a^* &= (0, a_1^*, a_2^*, a_3^*); \\ g^* &= \frac{g_{eo} \tilde{a}^2}{(\tilde{a} + H^*)^2} (1 + \delta \sin^2 \varphi^*); \\ \mathbf{x}^* &= (\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*)^T; \quad \omega_{Z'}^* = (0, \omega_N^*, \omega_H^*, \omega_E^*)^T, \\ \text{а } n_{\omega}^*, n_{\mathbf{x}}^*, m_{\omega_{Z'}}^*, m_{\mathbf{x}}^* &\text{ — кватернионные матрицы } n\text{-} \end{aligned} \quad (21)$$

и m -типов, элементы которых суть величины ω_i^* ($i = 1, 2, 3$), $\mathbf{x}_p^*$ ($p = 0, 1, 2, 3$), ω_j^* ($j = N, H, E$) и $\mathbf{x}_p^*$ ($p = 0, 1, 2, 3$) соответственно.

В результате этих преобразований получаем нелинейные уравнения ошибок корректируемой БИНС относительно величин Δv_N , Δv_H , Δv_E , ΔH , $\Delta \lambda$, $\Delta \varphi$ и $\Delta \mathbf{x}_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v}_N &= \Delta a_N + \omega_E^F v_H^F - (u_H^F + \omega_H^F) v_E^F - \omega_E^* v_H^* + \\ &+ (u_H^* + \omega_H^*) v_E^* + k_{v_N}^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + k_{v_N}^{v_H} (\Delta v_H - \\ &- \Delta v_H^k) + k_{v_N}^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + k_{v_N}^{\varphi} (\Delta \varphi - \Delta \varphi^k); \\ \Delta \dot{v}_H &= \Delta a_H - \omega_E^F v_N^F + (u_N^F + \omega_N^F) v_E^F - \Delta g + \omega_E^* v_N^* - \\ &- (u_N^* + \omega_N^*) v_E^* + k_{v_H}^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + k_{v_H}^{v_H} (\Delta v_H - \\ &- \Delta v_H^k) + k_{v_H}^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + k_{v_H}^H (\Delta H - \Delta H^k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{v}_E &= \Delta a_E + (u_H^F + \omega_H^F) v_N^F - (u_N^F + \omega_N^F) - \\
&- (u_H^* + \omega_H^*) v_N^* + (u_N^* + \omega_N^*) v_H^* + k_{v_E}^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + \\
&+ k_{v_E}^{v_H} (\Delta v_H - \Delta v_H^k) + k_{v_E}^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + k_{v_E}^\lambda (\Delta \lambda - \Delta \lambda^k); \\
\Delta \dot{\alpha} &= \frac{1}{2} (n_\omega^F \alpha^F - n_\alpha^F \omega_{Z'}^F - n_\omega^* \alpha^* + n_\alpha^* \omega_{Z'}^*) + \\
&+ K_\alpha (\Delta \alpha - \Delta \alpha^k) = \frac{1}{2} [(n_\omega^F - m_{\omega_{Z'}}^F) \alpha^F - \\
&- (n_\omega^* - m_{\omega_{Z'}}^*) \alpha^*] + K_\alpha (\Delta \alpha - \Delta \alpha^k); \\
\Delta \dot{H} &= \frac{v_H^F}{\alpha^F} - \frac{v_H^*}{\alpha^*} + k_H^{v_H} (\Delta v_H - \Delta v_H^k) + k_H^H (\Delta H - \Delta H^k); \\
\Delta \dot{\varphi} &= \frac{v_N^F}{R_2^F} - \frac{v_N^*}{R_2^*} + k_\varphi^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + k_\varphi^\varphi (\Delta \varphi - \Delta \varphi^k); \\
\Delta \dot{\lambda} &= \frac{v_E^F}{R_1^F \cos \varphi^F} - \frac{v_E^*}{R_1^* \cos^*} + k_\lambda^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + \\
&+ k_\lambda^\varphi (\Delta \varphi - \Delta \varphi^k) + k_\lambda^\lambda (\Delta \lambda - \Delta \lambda^k); \\
\Delta g &= g_{eo} \tilde{a}^2 \left[\frac{1 + \delta \sin^2 \varphi^F}{(\tilde{a} + H^F)^2} - \frac{1 + \delta \sin^2 \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)^2} \right].
\end{aligned} \tag{22}$$

В этих уравнениях

$$\begin{aligned}
\omega_N^F &= u_N^F + \frac{v_E^F}{R_1^F}; \quad \omega_H^F = u_H^F + \frac{v_E^F}{R_1^F} \operatorname{tg} \varphi^F; \quad \omega_E^F = -\frac{v_N^F}{R_2^F}; \\
u_N^F &= u \cos \varphi^F; \quad u_H^F = u \sin \varphi^F; \\
R_1^F &= \frac{\tilde{a} + H^F}{\alpha^F}; \quad R_2^F = \frac{(\tilde{a} + H^F)(1 - e^2)}{(\alpha^F)^3}; \\
\alpha^F &= (1 - e^2 \sin^2 \varphi^F)^{1/2},
\end{aligned} \tag{23}$$

где величины $v_N^F, v_H^F, v_E^F, \varphi^F$ и H^F определяются по соотношениям (19). n_ω^F, n_α^F и $m_{\omega_{Z'}}^F$ — кватернионные матрицы n - и m -типов, элементы которых суть величины ω_i^F ($i = 1, 2, 3$), α_p^F ($p = 0, 1, 2, 3$) и ω_j^F ($j = N, H, E$) соответственно.

Обратим внимание на величины $\Delta a_N, \Delta a_H, \Delta a_E$ в уравнениях (22). Выражения для них получаются из соотношений (8):

$$\Delta a_{Z'} = (n_\alpha^F)^T m_\alpha^F \alpha^F - (n_\alpha^*)^T m_\alpha^* \alpha^*. \tag{24}$$

Можно также использовать выражение

$$\begin{pmatrix} a_N \\ a_H \\ a_E \end{pmatrix} = C_\alpha^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

и соотношения (18). Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} \Delta a_N \\ \Delta a_H \\ \Delta a_E \end{pmatrix} = \Delta C_\alpha^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix} + C_\alpha^{*T} \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix} + \Delta C_\alpha^T \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где элементы Δc_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы ΔC_α имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Delta c_{11} &= 2((\alpha_0^F)^2 + (\alpha_1^F)^2 - (\alpha_0^*)^2 - (\alpha_1^*)^2); \\
\Delta c_{12} &= 2(\alpha_1^F \alpha_2^F + \alpha_0^F \alpha_3^F - \alpha_1^* \alpha_2^* - \alpha_0^* \alpha_3^*); \\
\Delta c_{13} &= 2(\alpha_1^F \alpha_3^F - \alpha_0^F \alpha_2^F + \alpha_1^* \alpha_3^* + \alpha_0^* \alpha_2^*); \\
\Delta c_{21} &= 2(\alpha_1^F \alpha_2^F - \alpha_0^F \alpha_3^F + \alpha_1^* \alpha_2^* - \alpha_0^* \alpha_3^*); \\
\Delta c_{22} &= 2((\alpha_0^F)^2 + (\alpha_2^F)^2 - (\alpha_0^*)^2 - (\alpha_2^*)^2); \\
\Delta c_{23} &= 2(\alpha_2^F \alpha_3^F + \alpha_0^F \alpha_1^F - \alpha_2^* \alpha_3^* - \alpha_0^* \alpha_1^*); \\
\Delta c_{31} &= 2(\alpha_1^F \alpha_3^F + \alpha_0^F \alpha_2^F - \alpha_1^* \alpha_3^* - \alpha_0^* \alpha_2^*); \\
\Delta c_{32} &= 2(\alpha_2^F \alpha_3^F - \alpha_0^F \alpha_1^F + \alpha_2^* \alpha_3^* + \alpha_0^* \alpha_1^*); \\
\Delta c_{33} &= 2((\alpha_0^F)^2 + (\alpha_3^F)^2 - (\alpha_0^*)^2 - (\alpha_3^*)^2).
\end{aligned} \tag{26}$$

Линейные уравнения ошибок

Получим линейные уравнения ошибок корректируемой БИНС, которые удобны для исследования и позволяют многие задачи решить аналитическими методами, не прибегая к численным исследованиям.

Разложим соотношения (5) и (9) в ряд Тейлора, пренебрегая членами второго и более порядка малости относительно величин $\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi$ и $\Delta \lambda$:

$$\begin{aligned}
\omega_N &= \omega_N^* - \left[u_H^* + \frac{v_E^* e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*) \alpha^*} \right] \Delta \varphi + \\
&+ \frac{\Delta v_E}{R_1^*} - \left[\frac{v_E^*}{R_1^* (\tilde{a} + H^*)} \right] \Delta H; \\
\omega_H &= \omega_H^* + \left[u_N^* - \frac{v_E^* e^2 \sin^2 \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*) \alpha^*} + \right. \\
&+ \left. \frac{v_E^* (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi^*)}{R_1^*} \right] \Delta \varphi + \frac{\operatorname{tg} \varphi^*}{R_1^*} \Delta v_E - \left[\frac{v_E^* \operatorname{tg}^2 \varphi^*}{R_1^* (\tilde{a} + H^*)} \right] \Delta H; \\
\omega_E &= \omega_E^* + 3 \left[\frac{v_N^* e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^* (1 - e^2)} \right] \Delta \varphi - \\
&- \frac{\Delta v_N}{R_2^*} + \left[\frac{v_N^*}{R_2^* (\tilde{a} + H^*)} \right] \Delta H;
\end{aligned} \tag{27}$$

$$g = g^* + 2 \left[\frac{g_{eo} \tilde{a}^2 \delta \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)^2} \right] \Delta \varphi - 2 \left[\frac{g_{eo} \tilde{a}^2 (1 + \delta \sin \varphi^*)}{(\tilde{a} + H^*)^3} \right] \Delta H. \quad (28)$$

Таким же образом поступим с выражениями для u_N и u_H :

$$u_N = -u \sin \varphi^* \Delta \varphi, \quad u_H = u \cos \varphi^* \Delta \varphi. \quad (29)$$

Подставим (19) и (27)–(29) в (13)–(15), а затем из полученных уравнений вычтем дифференциальные уравнения невозмущенного движения (20). После этого удержим члены первого порядка малости (включительно) относительно интересующих нас величин Δv_N , Δv_H , Δv_E , ΔH , $\Delta \varphi$, $\Delta \lambda$ и $\Delta \mathfrak{a}_p$ ($p = 0, 1, 2, 3$). В результате получим линейную систему уравнений ошибок корректируемой БИНС:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v}_N &= \Delta a_N - \frac{v_H^*}{R_2^*} \Delta v_N + \omega_E^* \Delta v_H - \\ &- 2 \omega_H^* \Delta v_E + \left[\frac{(\omega_H^* - u_H^*) v_E^* - \omega_E^* v_H^*}{\tilde{a} + H^*} \right] \Delta H - \\ &- \left[2 u_N^* v_E^* + \frac{(\omega_N^* - u_N^*) v_E^*}{\cos^2 \varphi^*} - \frac{v_E^* e^2 \sin^2 \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*) \alpha^*} - \right. \\ &- \left. 3 \frac{v_N^* v_H^* e^2 \sin^2 \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^* (1 - e^2)} \right] \Delta \varphi + k_{v_N}^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + \\ &+ k_{v_N}^{v_H} (\Delta v_H - \Delta v_H^k) + k_{v_N}^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + k_{v_N}^\varphi (\Delta \varphi - \Delta \varphi^k); \\ \Delta \dot{v}_H &= \Delta a_H - 2 \omega_E^* \Delta v_N + 2 \omega_N^* \Delta v_E + \\ &+ \left[\frac{\omega_E^* v_N^* - (\omega_N^* - u_N^*) v_E^* + 2 g^*}{\tilde{a} + H^*} \right] \Delta H - \left[2 u_H^* v_E^* + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{g_{eo} \tilde{a}^2 \delta \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)^2} + 3 \frac{v_N^* e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^* (1 - e^2)} + \right. \\ &+ \left. \frac{v_E^* e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*) \alpha^*} \right] \Delta \varphi + k_{v_H}^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + \\ &+ k_{v_H}^{v_H} (\Delta v_H - \Delta v_H^k) + k_{v_H}^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + k_{v_H}^H (\Delta H - \Delta H^k); \\ \Delta \dot{v}_E &= \Delta a_E + (u_H^* + \omega_H^*) \Delta v_N - \\ &- (u_N^* + \omega_N^*) \Delta v_H + \left(\frac{v_N^* \operatorname{tg} \varphi^* - v_H^*}{R_1^*} \right) \Delta v_E + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[\frac{(\omega_N^* - u_N^*) v_H^* - (\omega_H^* - u_H^*) v_N^*}{\tilde{a} + H^*} \right] \Delta H + \\ &+ \left[2 u_N^* v_N^* + 2 u_H^* v_H^* + \frac{(\omega_N^* - u_N^*) v_N^*}{\cos^2 \varphi^*} + \right. \\ &+ \left. \frac{v_E^* e^2 \sin \varphi^* (\omega_H^* \cos \varphi^* - v_N^* \sin \varphi^*)}{(\tilde{a} + H^*) \alpha^*} \right] \Delta \varphi + \\ &+ k_{v_E}^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + k_{v_E}^{v_H} (\Delta v_H - \Delta v_H^k) + \\ &+ k_{v_E}^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + k_{v_E}^\lambda (\Delta \lambda - \Delta \lambda^k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{H} &= \frac{\Delta v_H}{\alpha^*} + \frac{v_E^* e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{\alpha^* 3} \Delta \varphi + \\ &+ k_H^{v_H} (\Delta v_H - \Delta v_H^k) + k_H^H (\Delta H - \Delta H^k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\varphi} &= \frac{\Delta v_N}{R_2^*} - \frac{v_N^*}{R_2^* (\tilde{a} + H^*)} \Delta H - 3 \frac{v_N^* e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^* (1 - e^2)} \Delta \varphi + \\ &+ k_\varphi^{v_N} (\Delta v_N - \Delta v_N^k) + k_\varphi^\varphi (\Delta \varphi - \Delta \varphi^k); \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\lambda} &= \frac{\Delta v_E}{R_2^* \cos \varphi^*} - \frac{v_E^*}{R_1^* \cos \varphi^* (\tilde{a} + H^*)} \Delta H + \\ &+ \left[\frac{v_E^* \sin \varphi^*}{R_1^* \cos^2 \varphi^*} - \frac{v_E^* e^2 \sin \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*) \alpha^*} \right] \Delta \varphi + k_\lambda^{v_E} (\Delta v_E - \Delta v_E^k) + \\ &+ k_\lambda^\varphi (\Delta \varphi - \Delta \varphi^k) + k_\lambda^\lambda (\Delta \lambda - \Delta \lambda^k); \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\mathfrak{a}} = \frac{1}{2} (n_\omega^* \Delta \mathfrak{a} + \Delta n_\omega \mathfrak{a}^* - n_{\mathfrak{a}}^* \Delta \omega_{Z'} - \Delta n_{\mathfrak{a}} \omega_{Z'}^*); \quad (31)$$

$$\mathfrak{a}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_0^* \\ \mathfrak{a}_1^* \\ \mathfrak{a}_2^* \\ \mathfrak{a}_3^* \end{pmatrix}; \quad \Delta \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \Delta \mathfrak{a}_0 \\ \Delta \mathfrak{a}_1 \\ \Delta \mathfrak{a}_2 \\ \Delta \mathfrak{a}_3 \end{pmatrix}; \quad \omega_{Z'}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_N^* \\ \omega_H^* \\ \omega_E^* \end{pmatrix}; \quad \Delta \omega_{Z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \omega_N \\ \Delta \omega_H \\ \Delta \omega_E \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где n_ω^* , Δn_ω , $n_{\mathfrak{a}}^*$, $\Delta n_{\mathfrak{a}}$ — кватернионные матрицы n -типа, составленные соответственно из элементов ω_j^* , $\Delta \omega_j$ ($j = 1, 2, 3$), $\mathfrak{a}_p^*$ и $\Delta \mathfrak{a}_p$ ($p = 0, 1, 2, 3$). Для получения $\Delta \omega_{Z'}$ можно из уравнений (27) вычесть уравнения

$$\omega_N^* = u_N^* + \frac{v_E^*}{R_1^*}, \quad \omega_H^* = u_H^* + \frac{v_E^*}{R_1^*} \operatorname{tg} \varphi^*, \quad \omega_E^* = -\frac{v_N^*}{R_2^*}, \quad (33)$$

входящие в (21).

Погрешности Δa_N , Δa_H и Δa_E с точностью до величин первого порядка малости включительно определяются соотношениями:

$$\begin{pmatrix} \Delta a_N \\ \Delta a_H \\ \Delta a_E \end{pmatrix} = (C_{\mathfrak{a}}^*)^T \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix} + \Delta C_{\mathfrak{a}}^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Элементы Δc_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы $\Delta C_{\mathfrak{a}}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta c_{11} &= 2(\mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_0 + 2\mathfrak{a}_1^* \Delta \mathfrak{a}_1); \\ \Delta c_{12} &= 2(\mathfrak{a}_1^* \Delta \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2^* \Delta \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3^* \Delta \mathfrak{a}_0); \\ \Delta c_{13} &= 2(\mathfrak{a}_1^* \Delta \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3^* \Delta \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_2^* \Delta \mathfrak{a}_0); \\ \Delta c_{21} &= 2(\mathfrak{a}_1^* \Delta \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2^* \Delta \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_3^* \Delta \mathfrak{a}_0); \\ \Delta c_{22} &= 2(2\mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_0 + 2\mathfrak{a}_2^* \Delta \mathfrak{a}_2); \\ \Delta c_{23} &= 2(\mathfrak{a}_2^* \Delta \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3^* \Delta \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1^* \Delta \mathfrak{a}_0); \\ \Delta c_{31} &= 2(\mathfrak{a}_1^* \Delta \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3^* \Delta \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2^* \Delta \mathfrak{a}_0); \\ \Delta c_{32} &= 2(\mathfrak{a}_2^* \Delta \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3^* \Delta \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1^* \Delta \mathfrak{a}_0); \\ \Delta c_{33} &= 2(2\mathfrak{a}_0^* \Delta \mathfrak{a}_0 + 2\mathfrak{a}_3^* \Delta \mathfrak{a}_3), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\Delta \mathfrak{a}_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) определяются из линейных соотношений, полученных из выражений (11):

$$\Delta \mathfrak{a} = (m_v^*)^T \Delta \lambda + \Delta m_v^T \lambda^*. \quad (36)$$

Выразим $\Delta C_{\mathfrak{a}}$ через $\Delta \varphi$ и $\Delta \lambda$. Согласно схеме поворотов (1)

$$\begin{aligned} C_{\mathfrak{a}} &= n_{\mathfrak{a}} m_{\mathfrak{a}}^T = n_{\lambda} n_v^T (m_v^T m_{\lambda})^T = n_{\lambda} n_v^T m_{\lambda}^T m_v = \\ &= n_{\lambda} m_{\lambda}^T m_v n_v^T = C_{\lambda} C_v^T. \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда получаем линейное выражение

$$\Delta C_{\mathfrak{a}} = C_{\lambda}^* \Delta C_v^T + \Delta C_{\lambda} (C_v^*)^T, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} C_v^* &= \begin{pmatrix} \cos \varphi^* & -\sin \varphi^* \cos \lambda_a^* & -\sin \varphi^* \sin \lambda_a^* \\ \sin \varphi^* & \cos \varphi^* \cos \lambda_a^* & \cos \varphi^* \sin \lambda_a^* \\ 0 & -\sin \lambda_a^* & \cos \lambda_a^* \end{pmatrix}; \\ \Delta C_v &= \Delta \varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi^* & -\cos \lambda_a^* \cos \varphi^* & -\sin \lambda_a^* \cos \varphi^* \\ \cos \varphi^* & -\cos \lambda_a^* \sin \varphi^* & -\sin \lambda_a^* \sin \varphi^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \Delta \lambda \begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi^* \sin \lambda_a^* & -\sin \varphi^* \cos \lambda_a^* \\ 0 & -\cos \varphi^* \sin \lambda_a^* & \cos \varphi^* \cos \lambda_a^* \\ 0 & -\cos \lambda_a^* & -\sin \lambda_a^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая соотношение $C_{\lambda} = C_{\mathfrak{a}} C_v$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta C_{\mathfrak{a}} &= C_{\mathfrak{a}}^* C_v^* \Delta C_v^T + \Delta C_{\lambda} (C_v^*)^T; \\ \Delta C_{\mathfrak{a}}^T &= \Delta C_v (C_v^*)^T \Delta C_v + C_v^* \Delta C_{\lambda}^T. \end{aligned} \quad (40)$$

Запишем теперь соотношения для Δa_N , Δa_H и Δa_E в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \Delta a_N \\ \Delta a_H \\ \Delta a_E \end{pmatrix} = \Delta C_{\mathfrak{a}}^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix} + (C_{\mathfrak{a}}^*)^T \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Учитывая (40), получаем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta a_N \\ \Delta a_H \\ \Delta a_E \end{pmatrix} &= \Delta C_v (C_v^*)^T (C_{\mathfrak{a}}^*)^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix} + \\ &+ (C_{\mathfrak{a}}^*)^T \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix} + C_v^* \Delta C_{\lambda}^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Отметим, что

$$(C_{\mathfrak{a}}^*)^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta a_N^* \\ \Delta a_H^* \\ \Delta a_E^* \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Произведение $\Delta C_v (C_v^*)^T$, с учетом (39), имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta C_v (C_v^*)^T &= \\ &= \Delta \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Delta \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \varphi^* \\ 0 & 0 & \cos \varphi^* \\ \sin \varphi^* & \cos \varphi^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда соотношения (42), с учетом (43) и (44), примут вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta a_N \\ \Delta a_H \\ \Delta a_E \end{pmatrix} &= \Delta \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_N^* \\ \Delta a_H^* \\ \Delta a_E^* \end{pmatrix} + \\ &+ \Delta \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \varphi^* \\ 0 & 0 & \cos \varphi^* \\ \sin \varphi^* & \cos \varphi^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_N^* \\ \Delta a_H^* \\ \Delta a_E^* \end{pmatrix} + \\ &+ (C_{\mathfrak{a}}^*)^T \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix} + C_v^* \Delta C_{\lambda}^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь систему (30) можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\Delta \dot{X} = A\Delta X + U + B, \quad (46)$$

где

$$\Delta \dot{X} = (\Delta \dot{v}_N, \Delta \dot{v}_H, \Delta \dot{v}_E, \Delta \dot{H}, \Delta \dot{\varphi}, \Delta \dot{\lambda})^T;$$

$$\Delta X = (\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda)^T;$$

$$U = S(\Delta X - \Delta X^k);$$

$$\Delta X^k = (\Delta v_N^k, \Delta v_H^k, \Delta v_E^k, \Delta H^k, \Delta \varphi^k, \Delta \lambda^k)^T;$$

$$S = \begin{pmatrix} k_{v_N}^{v_N} & k_{v_N}^{v_H} & k_{v_N}^{v_E} & k_{v_N}^H & k_{v_N}^\varphi & 0 \\ k_{v_H}^{v_N} & k_{v_H}^{v_H} & k_{v_H}^{v_E} & k_{v_H}^H & k_{v_H}^\varphi & 0 \\ k_{v_E}^{v_N} & k_{v_E}^{v_H} & k_{v_E}^{v_E} & k_{v_E}^H & k_{v_E}^\varphi & 0 \\ 0 & k_{v_H}^{v_H} & 0 & k_{v_H}^H & k_{v_H}^\varphi & 0 \\ k_\varphi^{v_N} & 0 & 0 & k_\varphi^H & k_\varphi^\varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_\lambda^{v_E} & k_\lambda^H & k_\lambda^\varphi & k_\lambda^\lambda \end{pmatrix};$$

$$B = (O_1, O_2, O_3, 0, 0, 0)^T;$$

$$O_i = \sum_{j=1}^3 C_{\alpha ij}^* \Delta a_j + \sum_{j=1}^3 Q_{ij} a_j^*; \quad (47)$$

$$Q = C_v^* \Delta C_\lambda^T.$$

Элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) матрицы A :

$$a_{11} = -\frac{v_H^*}{R_2^*}; a_{12} = \omega_E^*; a_{13} = -2\omega_H^*;$$

$$a_{14} = \frac{(\omega_H^* - u_N^*)v_E^* - \omega_E^*v_H^*}{\tilde{a} + H^*}; a_{15} = -a_H^* - 2u_N^*v_E^* - \frac{(\omega_H^* - u_N^*)v_E^*}{\cos^2 \varphi^*} + \frac{v_E^{*2} e^2 \sin^2 \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*} + 3 \frac{v_N^* v_H^* e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^* (1 - e^2)};$$

$$a_{16} = -a_E^* \sin \varphi^*; a_{21} = -2\omega_E^*; a_{22} = 0; a_{23} = 2\omega_N^*;$$

$$a_{24} = \frac{\omega_E^* v_N^* - (\omega_N^* - u_N^*)v_E^* + 2g^*}{\tilde{a} + H^*};$$

$$a_{25} = a_N^* - 2u_H^*v_E^* - 2 \frac{g_{eo} \tilde{a}^2 \delta \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)^2} - 3 \frac{v_N^{*2} e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^* (1 - e^2)} - \frac{v_E^{*2} e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*};$$

$$a_{26} = a_E^* \cos \varphi^*; a_{31} = u_H^* + \omega_H^*; a_{32} = -u_N^* - \omega_N^*;$$

$$a_{33} = \frac{v_N^* \tan \varphi^* - v_H^*}{R_1^*}; a_{34} = \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_H^* - (\omega_H^* - u_H^*)v_N^*}{\tilde{a} + H^*};$$

$$a_{35} = 2u_N^*v_N^* + 2u_H^*v_H^* + \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_N^*}{\cos^2 \varphi^*} + \frac{v_E^{*2} \sin \varphi^* (v_H^* \cos \varphi^* - v_N^* \sin \varphi^*)}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*};$$

$$a_{36} = a_N^* \sin \varphi^* - a_H^* \cos \varphi^*; a_{41} = 0; a_{42} = \frac{1}{\alpha^*};$$

$$a_{43} = 0; a_{44} = 0; a_{45} = \frac{v_H^{*2} e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{\alpha^{*3}}; a_{46} = 0;$$

$$a_{51} = \frac{1}{R_2^*}; a_{52} = 0; a_{53} = 0; a_{54} = -\frac{v_N^*}{R_2^* (\tilde{a} + H^*)};$$

$$a_{55} = -3 \frac{v_N^{*2} e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^* (1 - e^2)}; a_{56} = 0; a_{61} = 0; a_{62} = 0;$$

$$a_{63} = \frac{1}{R_1^* \cos \varphi^*}; a_{64} = -\frac{v_E^*}{R_1^* \cos \varphi^* (\tilde{a} + H^*)};$$

$$a_{65} = \frac{v_E^* \sin \varphi^*}{R_1 \cos^2 \varphi^*} - \frac{v_E^{*2} \sin \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*}; a_{66} = 0.$$

Система (46) в совокупности с системой (31) образуют замкнутую линейную систему дифференциальных уравнений относительно интересующих нас величин $\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda$ и $\Delta \varepsilon_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$).

Таким образом, получены нелинейные и линейные дифференциальные уравнения ошибок корректируемой БИНС, функционирующей в НГСК.

Список литературы

1. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
2. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Автоматные системы. М.: Физматгиз, 1966. 579 с.
3. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, 1979. 296 с.
4. Захарин М. И. Кинематика инерциальных систем навигации. М.: Машиностроение, 1968. 236 с.
5. Челнокова Л. А., Челноков Ю. Н. Моделирование работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы, определяющей ориентацию объекта в ортодромической и географической системах координат, на универсальных ЭВМ. Саратов. политехн. ин-т. Саратов, 1988. 21 с. Деп. в ВИНТИ 11.05.88, № 3763-B88.
6. Челнокова Л. А., Челноков Ю. Н. Моделирование работы БИНС на универсальных ЭВМ. Саратов. политехн. ин-т. Саратов, 1989. 15 с. Деп. в ВИНТИ 13.06.89, № 3909-B89.
7. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные методы в задачах механики твердого тела и материальных систем: Автореф. дис. ... д. ф-м. н. М., 1987. 36 с.
8. Челноков Ю. Н., Петров С. В. О задачах ориентации и навигации объекта в географической и ортодромической системах координат. Деп. в ВИМИ 27.05.88; Д07701. 21 с.
9. Челноков Ю. Н., Челнокова Л. А., Ланденко И. В. Алгоритм идеальной работы системы ориентации для подвижного объекта // Вопросы авиационной науки и техники: Сб. тр. М., 1988. Вып. 10.
10. Челноков Ю. Н. Инерциальная ориентация и навигация движущихся объектов: Учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. 64 с.

А. И. Заведеев, канд. техн. наук, доц.,

Р. А. Архипов, аспирант,

Московский авиационный институт
(государственный технический университет)

argelron@mail.ru

Особенности применения малоизбыточных кратных гиросиловых систем управления ориентацией космических аппаратов

Обсуждаются особенности применения силовых гироскопических стабилизаторов в задачах управления ориентацией космических аппаратов. Показаны возможности и ограничения малоизбыточных кратных гиросиловых систем на примере четырех гиродинов, расположенных по схемам "ромб" и "пирамида".

Ключевые слова: космический аппарат, система управления ориентацией, гироскопический стабилизатор, гиродин, прецессия, алгоритм, особое состояние.

Введение

Достоинством гироскопических исполнительных органов (ИО) является возможность обеспечения значительных управляющих моментов при ограниченном энергопотреблении. Наибольшее практическое применение получили:

- трехстепенные силовые гироскопы (СГП);
- однороторные двухстепенные стабилизаторы (гиродины);
- гирорамы — спарки двухстепенных СГП.

Из них первым и последним соответствуют достаточно простые законы управления, практически не отличающиеся от законов управления инерционными двигателями-маховиками. Трехстепенные СГП чрезвычайно сложны конструктивно и допускают управление в ограниченном диапазоне по угловому отклонению. Гирорамы практически неработоспособны в случае отказа одного из гиродинов и поэтому ненадежны.

Наибольший интерес представляют гиродины в количестве 4...8, обеспечивающие необходимую надежность, но они требуют применения достаточно сложных алгоритмов управления по сравнению с другими ИО. Многочисленность вариантов использования гиродинов заставляет разработчиков проводить самостоятельные исследования конкретных схем.

В качестве критерия эффективности гиросистемы можно принять безразмерный коэффициент

$$\alpha = \min \gamma(\xi),$$

где $\gamma(\xi) = H(\xi)/\Gamma_{\Sigma} \leq 1$ (Γ_{Σ} — суммарный кинетический момент (КМ) всех СГП), характеризующий минимальное гарантированное значение КМ $H(\xi)$, развиваемого системой СГП по всем возможным направлениям $O\xi$ в связанной с космическим аппаратом (КА) системе координат (СК) $OXYZ$. При проектировании силовых гиросистем обычно ставится задача максимизации значения α . В [1] показано, что предельно возможное значение α для случая произвольного числа гиродинов составляет 0,785.

Анализ отдельных групп, составленных из n идентичных гиродинов с различным расположением осей η_i подвеса (прецессии), а также их комбинаций приводит к следующему заключению. Применение коллинеарных групп желательно при увеличении размеров области S возможного КМ гиросистемы по всем направлениям, параллельным какой-либо плоскости, связанной с КА. Для каждого числа n существует единственная компланарная (всеременная) группа, не включающая гироскопы с параллельными осями подвеса и обладающая наибольшим для этого n значением коэффициента α . Эта группа образуется при размещении осей η_i параллельно n парам смежных сторон правильного $2n$ -угольника.

В зависимости от технических условий решаемой задачи может потребоваться определенная форма области S . В частности, для получения "вытянутых" осесимметричных областей S компланарные группы гиродинов предпочтительнее пространственных, а для получения "сжатых" областей S целесообразно включить в систему соответствующую коллинеарную группу.

Изменить форму области S в желаемом направлении можно также путем комбинации конической группы с группами другого типа. Так, добавляя к коническим коллинеарную группу с осями подвеса, параллельными оси OZ , можно произвольно "расширить" область S по всем направлениям, принадлежащим плоскости OXY . С целью максимизации α можно также использовать пространственные группы гиродинов с осями прецессии, параллельными нормалью к граням правильных многогранников.

Таким образом, коэффициент α увеличивается с ростом числа гиродинов n , и его значение, близкое к предельному, можно получить для n порядка 6...8 и больших, что ограничивает практическое применение таких гиросистем. Кроме того, при одном и том же числе n комбинации гиродинов с высоким показателем α обычно проигрывают комбинациям с меньшим показателем α по другим критериям (прежде всего, в простоте законов управления). Следует отметить, что критерий сравнительной оценки гиросистемы по показателю α справедлив в случае, когда область S имеет форму, приближенную к сферической.

Постановка задачи

При проектировании системы управления ориентацией (СУО) космического аппарата необходимо, в первую очередь, руководствоваться целевым назначением КА. Система ориентации должна обеспечивать высокие динамические характеристики и требуемую точность угловой стабилизации КА на всех режимах орбитального полета. Основное внимание при создании СУО уделяют выбору рациональной структуры, приборного состава, программно-алгоритмического обеспечения, а также вопросам комплексного управления и контроля бортовых подсистем и агрегатов. Назначение КА влияет также на выбор типа, числа, расположение осей прецессии и конструктивные характеристики применяемых в качестве ИО силовых гиростабилизаторов.

Создание гиросиловой системы связано с решением таких задач, как:

- оценка области потребного кинетического момента;

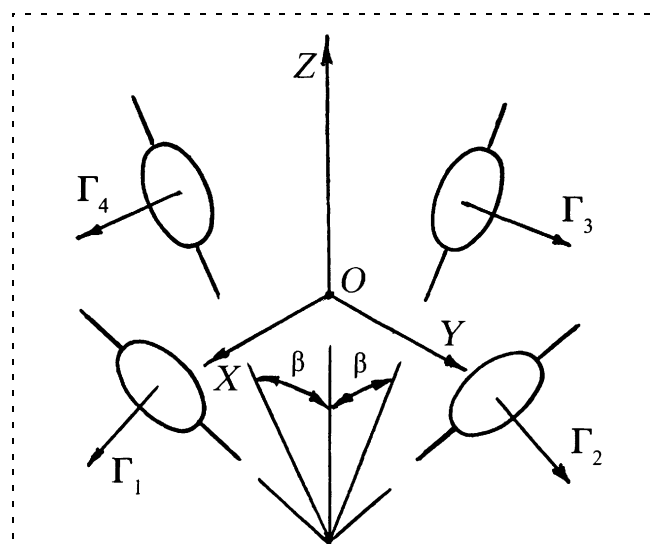


Рис. 1. Расположение гиродин по схеме "пирамида"

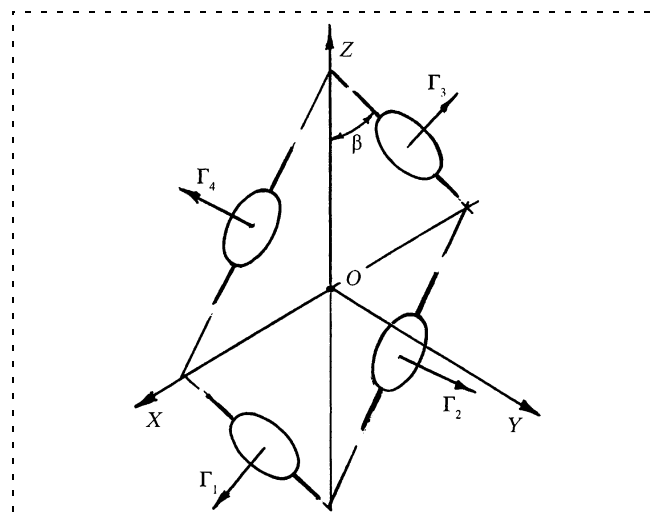


Рис. 2. Расположение гиродин по схеме "ромб"

- разработка программ исследования вида особых поверхностей и способов их прохождения для принятой системы гиродин;
- синтез алгоритмов управления гиросистемой для заданного типа, числа и расположения СГП;
- оценка возможности сохранения работоспособности принятой конфигурации при отказе отдельных гиродин.

Выбор закона управления ИО включает два момента: формирование требуемого управляющего момента и выбор закона настройки системы, по которому совершается обход особых состояний, соответствующих "насыщению" или "запиранию" системы.

Многоальтернативность построения силовых гиросистем (тип, число, расположение СГП) не позволяет свести задачу к оптимальной в рамках ограниченной структуры, поэтому представляется полезным сравнительный анализ отдельных вариантов построения гиросистем различных классов.

В данной статье рассмотрен КА, осуществляющий наблюдение за заданной точкой или районом земной поверхности с конструктивными и инерционными характеристиками, параметрами орбиты, режимами ориентации, динамическими и точностными требованиями, приведенными в работе [2].

Представляет определенный интерес исследование малоизбыточной силовой гиросистемы, включающей четыре гироскопа, расположенных по схемам "пирамида" и "ромб". В схеме "пирамида" (рис. 1) оси прецессии совпадают с ребрами правильной четырехгранной пирамиды с углом при вершине β . В случае схемы "ромб" (рис. 2) имеем кратную систему из двух групп с взаимно коллинеарными осями прецессии и полууглом β .

Известно [3], что кратные системы при одинаковых КМ Γ отдельных СГП всегда уступают по размерам области S возможного КМ некрatным системам, имеют отчетливо выраженную выпуклую и обычно вытянутую форму, что не в полной мере соответствует требованиям, предъявляемым к СУО. Однако основным преимуществом кратных систем является отсутствие непроходимых состояний в пределах оболочки области S , что существенно упрощает алгоритм управления гиросистемой.

На рис. 3 представлены проекции области S на координатные плоскости системы для схемы "ромб". Минимальная "несферичность" области S , вычисленная по формуле

$$(R - r)/r,$$

где $R = 4\Gamma$, $r = 2\Gamma \sin(2\beta)$ — радиусы описанной и вписанной сфер соответственно, при $\beta = 45^\circ$ составляет 100 %.

Область S для схемы "пирамида" ближе к сферической характеризуется большим числом развитых особых поверхностей, соответствующие радиусы равны $R = 2\Gamma(1 + \cos\beta)$, $r = 4\Gamma \sin\beta$. На рис. 4 изображены проекции области S на координатные

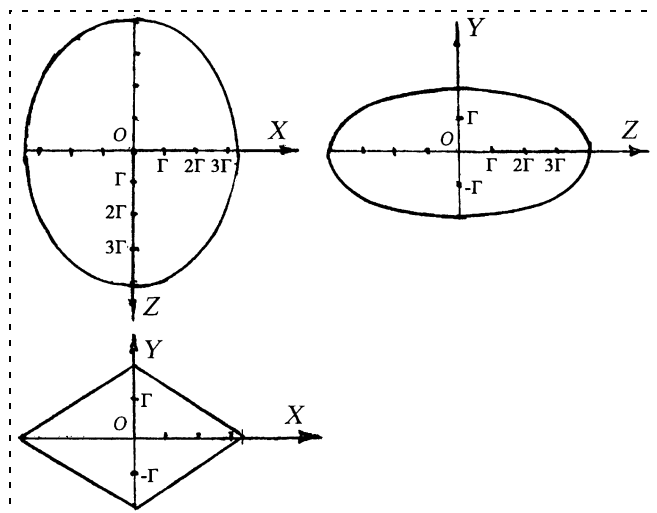


Рис. 3. Сечения области S для схемы "ромб"

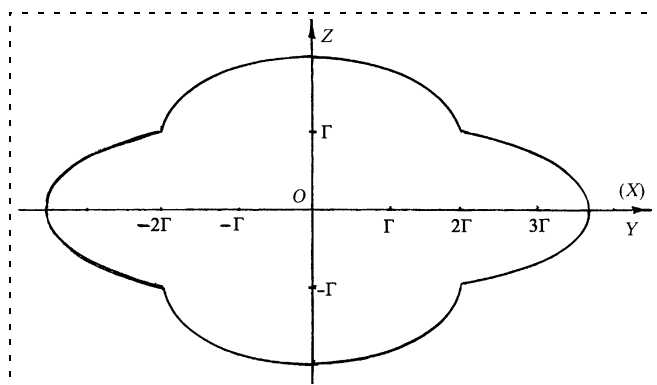


Рис. 4. Сечения области S для схемы "пирамида"

плоскости, построенные с использованием алгоритма, описанного в [4]. В этом случае для $\beta = 45^\circ$ "несферичность" составляет 20,7 %.

При выборе основных параметров гиросистемы (КМ гироидина Γ и угла установки β) необходимо обеспечить выполнение условия: область вариации возможного КМ должна охватывать область потребного КМ. Принцип формирования области требуемого КМ изложен в [4]. Данная область должна обеспечивать решение двух задач:

- компенсацию внешнего возмущающего момента при заданном времени между разгрузками;
- выполнение угловых маневров.

Для маневрирующих КА решение второй задачи является определяющим при формировании области потребного КМ. Если требуется обеспечить одинаковые предельные угловые скорости разворота КА по всем осям, то размеры области вариации КМ должны быть пропорциональны соответствующим моментам инерции аппарата.

Основное внимание в работе уделяется режиму интенсивного маневрирования с максимальными угловыми скоростями и ускорениями порядка $2,0^\circ/\text{с}$ и $0,04^\circ/\text{с}^2$ соответственно на углы от 10 до 180° .

Выбор характеристик системы для схемы "ромб"

Пусть угловое движение КА вокруг оси OY описывается выражением

$$J_Y \ddot{\varphi}_Y = -\Gamma \sum_{i=1}^n \cos \varepsilon_i(t), \quad (1)$$

где ε_i — угол прецессии i -го гироидина; J_Y — момент инерции КА относительно оси Y ; φ_Y — угол поворота КА вокруг оси Y .

Возможны три варианта изменения $\varphi_Y(t)$:

1) разгон — торможение (ни в одной из групп насыщение не достигается);

2) разгон до максимальной скорости — торможение;

3) трапецеидальное изменение, включающее участок движения с постоянной скоростью, на котором обе группы достигают насыщения.

Для минимизации времени разворота КА считаем, что на участках разгона и торможения СГП прецессируют с максимальными скоростями.

Интегрируя уравнение (1), получим

$$\varphi_Y = -\frac{4\Gamma}{J_Y \dot{\varepsilon}_m} \begin{cases} [2\varepsilon_0 - \sin(\varepsilon_0 + 0,5\dot{\varepsilon}_m T) - \\ - \sin(\varepsilon_0 - 0,5\dot{\varepsilon}_m T)], \frac{T}{2} \leq \frac{\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}_m}; \\ [2\sin\varepsilon_0 - \sin(\varepsilon_0 + 0,5\dot{\varepsilon}_m T) + \\ + (\frac{T}{2} - \frac{\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}_m})\dot{\varepsilon}_m], \frac{\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}_m} \leq \frac{T}{2} \leq \frac{\pi - \varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}_m}; \\ [T\dot{\varepsilon}_m - \pi + 2\sin\varepsilon_0], \frac{T}{2} > \frac{\pi - \varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}_m}, \end{cases}$$

где ε_0 — полное значение угла прецессии; $\dot{\varepsilon}_m$ — максимальная скорость прецессии; T — время поворота КА.

Последнее соотношение устанавливает связь между КМ гироидина Γ и максимальной скоростью прецессии $\dot{\varepsilon}_m$, при которых обеспечиваются разворот КА на угол φ_Y за время T :

$$\Gamma = \frac{J_Y \varphi_Y \dot{\varepsilon}_m}{4} \begin{cases} [2\sin\varepsilon_0 - \sin(\varepsilon_0 - 0,5\dot{\varepsilon}_m T) - \\ - \sin(\varepsilon_0 + 0,5\dot{\varepsilon}_m T)]^{-1}; T \leq \frac{2\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}_m}; \\ [2\sin\varepsilon_0 - \sin(\varepsilon_0 + 0,5\dot{\varepsilon}_m T) + \\ + (\frac{\dot{\varepsilon}_m T}{2} - \varepsilon_0)\dot{\varepsilon}_m]^{-1}, \frac{2\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}_m} \leq T \leq \frac{2(\pi - \varepsilon_0)}{\dot{\varepsilon}_m}; \\ [2\sin\varepsilon_0 - \pi + T\dot{\varepsilon}_m]^{-1}, T > \frac{2(\pi - \varepsilon_0)}{\dot{\varepsilon}_m}. \end{cases}$$

В случае заданного времени разгона или торможения величину Γ можно оценить следующим об-

разом. При использовании для этой схемы алгоритма, изложенного в [4], начальные значения углов прецессии равны: $|\varepsilon_I| = 60^\circ$, $|\varepsilon_{II}| = 120^\circ$. За заданное время разгона t_p при максимальной скорости прецессии СГП первой группы успеют развернуться и достичь насыщения относительно оси OY , а СГП второй группы не успеют. В результате суммарный КМ системы за время t_p будет равен

$$H_Y(t_p) = 2a\Gamma,$$

где $a = 1 + \cos(\varepsilon_0 - \dot{\varepsilon}_m t_p)$, а H_Y — суммарный КМ относительно оси Y .

Из последнего выражения видно, что КМ одного гироина должен удовлетворять условию

$$\Gamma \geq \frac{J_Y \omega_Y}{2(1 + \cos(\varepsilon_0 - \dot{\varepsilon}_m t_p))}.$$

При выполнении маневра вокруг оси OX КА СГП первой и второй групп должны в среднем развернуться на 90° , следовательно, за время t_p они успеют достичь насыщения, и суммарный КМ относительно оси X будет равен

$$H_X(t_p) = 4\Gamma \cos \beta = J_X \omega_X.$$

Последнее выражение показывает связь между величиной Γ и углом β .

Приведенные упрощенные соотношения позволяют приближенно оценить основные параметры гиросистемы. Для более точных оценок необходимо решение вариационной задачи на множестве заданных программных движений с учетом выбранного алгоритма управления. Исключительно важную роль играет алгоритм управления для гиросистем, имеющих большое число развитых непроходимых особых поверхностей.

Выбор характеристик системы для схемы "пирамида"

Известно, что гиросистема, построенная по схеме "пирамида", имеет большое число непроходимых особых поверхностей в области S [5], поэтому достижение границ области S , соответствующих насыщению системы, становится проблематичным.

Управляющий момент гиросистемы равен

$$M = I(\varepsilon)u, \quad (2)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ — вектор управления;

$$I(\varepsilon) = \begin{bmatrix} m_{1X} & m_{2X} & m_{3X} & m_{4X} \\ m_{1Y} & m_{2Y} & m_{3Y} & m_{4Y} \\ m_{1Z} & m_{2Z} & m_{3Z} & m_{4Z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

— матрица размерности 3×4 , зависящая от углов прецессии ε_i ($i = 1, \dots, 4$). В случае $u = \dot{\varepsilon}$ матрица

$$I = \frac{\partial(H_X, H_Y, H_Z)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)}$$

является матрицей Якоби вида

$$I_{(3 \times 4)} = \left[\left\{ A_1 \begin{bmatrix} \Gamma_1 \cos \varepsilon_1 \\ 0 \\ -\Gamma_1 \sin \varepsilon_1 \end{bmatrix} \right\} \dots \left\{ A_4 \begin{bmatrix} \Gamma_4 \cos \varepsilon_4 \\ 0 \\ -\Gamma_4 \sin \varepsilon_4 \end{bmatrix} \right\} \right],$$

(3×1) (3×1)

где A_i ($i = 1, \dots, 4$) — матрицы установки гироинов на борту КА.

Вектор управления u предлагается формировать с помощью сигналов $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$, поступающих из контура стабилизации для управления гиросистемой согласно алгоритму [3]

$$u = I^+(\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z)^T,$$

где $I^+ = I^T(I I^T)^{-1}$ — псевдообратная матрица.

Выберем управляющий вектор в виде

$$u = u_1 + k u_2, \quad (4)$$

где u_1 — составляющая, обеспечивающая согласно (2) управление ориентацией КА посредством момента $M = dH/dt$ (локальная производная в связанных осях); u_2 — составляющая, обеспечивающая закон настройки гиросистемы; k — весовой коэффициент. На управление наложено ограничение $|u| \leq u_0$. Синтез закона управления осуществим из условия максимизации функции $\mu(\varepsilon)$, обеспечивающей наибольшую эффективность работы гиросистемы. Обычным требованием при выборе $\mu(\varepsilon)$ является максимальное удаление вектора углов прецессии ε от особых точек ε^* [1].

Функция $\mu(\varepsilon)$ и вектор u выбраны из условия существования вектора g , определяющего производную $\dot{\mu} = (gu)$, который в случае $u = \dot{\varepsilon}$ равен

$$g = \text{grad } \mu. \quad (5)$$

Составляющие управления u в выражении (4) взаимноортогональны и находятся из условий

$$u_1 = I^T D^{-1} M;$$

$$u_2 = (E - I^T D^{-1} I)g,$$

где E — единичная квадратная матрица размерности, равной числу гироинов,

$$D = J J^T = \begin{bmatrix} (I_X I_X) & (I_Y I_X) & (I_Z I_X) \\ (I_X I_Y) & (I_Y I_Y) & (I_Z I_Y) \\ (I_X I_Z) & (I_Y I_Z) & (I_Z I_Z) \end{bmatrix}.$$

Если в качестве вектора g взять значение (5), то за критерий (4) можно принять определитель Грама для векторов I_X, I_Y, I_Z

$$\mu = \det D. \quad (6)$$

Поскольку определитель (6) обладает свойством $\mu \geq 0$, а условие $\mu = 0$ выполняется при совпадении ε с особой точкой ε^* , то максимизация (6) со-

Значения частных производных

	∂a_{11}	∂a_{12}	∂a_{13}	∂a_{14}	∂a_{15}	∂a_{16}
$\partial \varepsilon_1$	$\sin(2\varepsilon_1)\cos^2\beta$	$-\cos(2\varepsilon_1)\cos\beta$	$-1/2\sin(2\varepsilon_1)\sin(2\beta)$	$-\sin(2\varepsilon_1)$	$\cos(2\varepsilon_1)\sin\beta$	$\sin(2\varepsilon_1)\sin^2\beta$
$\partial \varepsilon_2$	$-\sin(2\varepsilon_2)$	$\cos(2\varepsilon_2)\cos\beta$	$-\cos(2\varepsilon_2)\sin\beta$	$\sin(2\varepsilon_2)\cos^2\beta$	$-1/2\sin(2\varepsilon_2)\sin(2\beta)$	$\sin(2\varepsilon_2)\sin^2\beta$
$\partial \varepsilon_3$	$\sin(2\varepsilon_3)\cos^2\beta$	$-\cos(2\varepsilon_3)\cos\beta$	$-1/2\sin(2\varepsilon_3)\sin(2\beta)$	$-\sin(2\varepsilon_3)$	$-\cos(2\varepsilon_3)\sin\beta$	$\sin(2\varepsilon_3)\sin^2\beta$
$\partial \varepsilon_4$	$-\sin(2\varepsilon_4)$	$\cos(2\varepsilon_4)\cos\beta$	$\cos(2\varepsilon_4)\sin\beta$	$\sin(2\varepsilon_4)\cos^2\beta$	$1/2\sin(2\varepsilon_4)\sin(2\beta)$	$\sin(2\varepsilon_4)\sin^2\beta$

ответствует наибольшему отклонению системы в пространстве E от особых состояний.

Проекция КМ гиросистемы с четырьмя СГП на связанные оси равны

$$H_X = \Gamma \sin\beta (\cos\varepsilon_1 + \cos\varepsilon_2 + \cos\varepsilon_3 + \cos\varepsilon_4);$$

$$H_Y = \Gamma (-\cos\varepsilon_1 \cos\beta + \sin\varepsilon_2 + \cos\varepsilon_3 \cos\beta - \sin\varepsilon_4);$$

$$H_Z = \Gamma (-\sin\varepsilon_1 - \cos\varepsilon_2 \cos\beta + \sin\varepsilon_3 + \cos\varepsilon_4).$$

Матрица Якоби примет вид

$$J = \Gamma \begin{bmatrix} -\sin\varepsilon_1 \sin\beta & -\sin\varepsilon_2 \sin\beta & -\sin\varepsilon_3 \sin\beta & -\sin\varepsilon_4 \sin\beta \\ \sin\varepsilon_1 \cos\beta & \cos\varepsilon_2 & -\sin\varepsilon_3 \cos\beta & -\cos\varepsilon_4 \\ -\cos\varepsilon_1 & \sin\varepsilon_2 \cos\beta & \cos\varepsilon_3 & -\sin\varepsilon_4 \cos\beta \end{bmatrix},$$

а матрицу D представим в форме

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

где $a_{11} = \sin^2\beta (\sin^2\varepsilon_1 + \sin^2\varepsilon_2 + \sin^2\varepsilon_3 + \sin^2\varepsilon_4);$

$$a_{12} = a_{21} = \sin\beta [\sin\varepsilon_4 \cos\varepsilon_4 - \sin\varepsilon_2 \cos\varepsilon_2 + \cos\beta (\sin^2\varepsilon_3 - \sin^2\varepsilon_1)];$$

$$a_{13} = a_{31} = \sin\beta [\sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_1 - \cos\varepsilon_3 \sin\varepsilon_3 + \cos\beta (\sin^2\varepsilon_4 - \sin^2\varepsilon_2)];$$

$$a_{22} = \cos^2\varepsilon_2 + \cos^2\varepsilon_4 + \cos^2\beta (\sin^2\varepsilon_1 + \sin^2\varepsilon_3);$$

$$a_{23} = a_{32} = \cos\beta [-\sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_1 + \sin\varepsilon_2 \cos\varepsilon_2 - \sin\varepsilon_3 \cos\varepsilon_3 + \sin\varepsilon_4 \cos\varepsilon_4];$$

$$a_{33} = \cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2 + \cos^2\beta (\sin^2\varepsilon_2 + \sin^2\varepsilon_4).$$

Определитель Грамма (6) равен

$$\mu = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{13}^2 a_{22} - a_{23}^2 a_{11} - a_{12}^2 a_{33}.$$

Вектор g представим в виде

$$g = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial \varepsilon_i} a_1 + 2 \frac{\partial a_{12}}{\partial \varepsilon_i} a_2 + 2 \frac{\partial a_{13}}{\partial \varepsilon_i} a_3 + \right. \\ \left. + \frac{\partial a_{22}}{\partial \varepsilon_i} a_4 + 2 \frac{\partial a_{23}}{\partial \varepsilon_i} a_5 + \frac{\partial a_{33}}{\partial \varepsilon_i} a_6 \right) \varepsilon_i,$$

где $a_1 = a_{22}a_{33} - a_{23}^2$, $a_2 = a_{23}a_{13} - a_{12}a_{33}$,

$$a_3 = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, a_4 = a_{11}a_{33} - a_{13}^2,$$

$$a_5 = a_{12}a_{13} - a_{23}a_{11}, a_6 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Значения частных производных приведены в таблице.

Область S_M вариации вектора M в выражении (2) в связанных с КА осях $OXYZ$ в общем случае представляет собой поверхность, ограниченную некоторым выпуклым многогранником [4]. Длины ребер S_M одинаковы и равны $2\Gamma\dot{\varepsilon}_0$, поэтому все грани — ромбы, число которых определяется через число сочетаний по формуле $\gamma_S = 2C_n^2 = n(n-1)$. На множестве особых значений ε^* область S_M вырождается в плоскую фигуру. Это происходит, когда все m_i — компланарны, а $\text{rang } J = 2$. Можно вычислить радиус r сферы с центром в точке O , вписанной в S_M^* . Сфера касается двух (или более) граней. В результате вычисления расстояний до всех граней необходимо выбрать минимальное из них.

Критерий $\mu(\varepsilon) = r$ означает выбор минимального гарантированного момента M , который способен обеспечить гиросистема.

Детальное исследование реальной системы с четырьмя СГП практически невозможно из-за сложности описания ее состояния, которое описывается тринадцатью переменными ($\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4, \dot{\varepsilon}_1, \dots, \dot{\varepsilon}_4, H_X, H_Y, H_Z, \mu, r$), где величина μ характеризует настройку системы, т. е. показывает ее удаленность от особых состояний. Часть из указанных переменных независима, а часть зависит от начального состояния системы и вида функции $H(t)$. Поэтому выбор параметров β и k в алгоритме управления можно осуществить только на основании численных расчетов.

Для выбора величины β целесообразно принять функционал, определяющий время выполнения типового маневра переориентации КА при выполнении условия $r > r_{\text{зад}}$. Физически это означает, что в течение заданного времени при выполнении маневра система СГП может развить управляющий момент $M = r_{\text{зад}}$ независимо от его направления.

Основной целью расчетов гиросистемы является выбор угла установки СГП β и коэффициента k в законе управления (4). Для этой цели была разработана программа моделирования отработки маневра по угловой скорости, в которой суммарный КМ системы изменялся под действием управляющих сигналов по требуемому закону $H(t)$. При этом для каждого текущего значения КМ вычислялось гарантированное значение момента r , который система может развить независимо от направления, и это значение сравнивалось с требуемым. Как только r становилось меньше требуемого, текущий момент фиксировался как конечное время, и программа при данном управляющем сигнале прерывалась. По набранной статистике вычисляли среднее арифметическое M_T и дисперсию D_T конечных времен. После повторения серии испытаний для различных значений β и k проводили отбор оптимальных параметров по критерию $M_T \rightarrow \max$, $D_T \rightarrow \min$. В качестве типовых при моделировании рассматривали маневры, состоящие из вышеупомянутых участков разгона и торможения.

При моделировании системы СГП по схеме "ромб" использовали алгоритм, изложенный в [4], при нулевом начальном КМ системы и параметрах $\alpha_I = \alpha_{II} = 0$, $\beta_I = 60^\circ$, $\beta_{II} = 120^\circ$, где α_k ($k = I, II$) — положение вектора суммарного КМ для k -й группы, а β_k ($k = I, II$) — угол между суммарным вектором группы и отдельным СГП из этой группы. Моделирование подтвердило корректность предварительного выбора. При этом максимальное значение r , соответствующее начальной точке $H = 0$, равнялось $0,866 M$, где M — максимальный момент, развиваемый СГП. Как и ожидалось, при отработке любых $H(t)$ система была в состоянии достичь оболочки области S .

При моделировании системы СГП по схеме "пирамида" и с использованием алгоритма управления с настройкой по определителю Грамма обнаружилось, что данный алгоритм не обеспечивает обхода внутренних особых поверхностей. Максимальное значение r во всех вариантах соответствовало начальной точке $H = 0$ и равнялось $1,55 M$ при $\beta = 30^\circ$. В описываемых вариантах моделирования было принято значение $k = 1$. При увеличении k ($k = 1,5; 2; 4$) характер поведения системы изменялся, наблюдались колебания СГП относительно нулевого состояния с максимальными скоростями прецессии, но программа $H(t)$ не отрабатывалась. Проведенное исследование может быть полезным при выборе структуры и параметров разрабатываемой гиросистемы.

1. С увеличением числа гиродинов число особых точек в области вариации КМ, соответствующих потере работоспособности системы, монотонно возрастает, а относительные размеры непроходимых состояний сокращаются.

2. Все системы, распадающиеся на коллинеарные группы гиродинов, например, на пары с параллельными осями прецессии, не имеют непроходимых особых поверхностей, за исключением оболочки. Для малоизбыточных систем, включающих четыре гиродин с попарно параллельными осями, перспективны законы управления с перераспределением КМ между парами.

3. Исследование системы с четырьмя гиродинами, включенными по схеме "пирамида", показало, что выбор параметров в значительной степени зависит от алгоритма управления. Так, при алгоритме с критерием настройки по определителю Грамма системе не удастся преодолеть внутренних особых поверхностей и достичь оболочки области вариации КМ.

4. При выполнении быстрых поворотов КА вокруг одной и той же связанной оси наилучший результат дают компланарные системы гиродинов с осями прецессии, нормальными к оси поворота. Если оси требуемых разворотов не фиксированы в теле КА, то предпочтительнее системы гиродинов с равномерным распределением осей прецессии по сфере.

5. Моментные характеристики избыточных гиросистем менее стабильны и требуют при управлении ими достаточно сложных командных сигналов, формируемых бортовым вычислительным комплексом. Это является недостатком избыточных систем.

Список литературы

1. Токарь Е. Н. О рациональном построении систем гиросиловых стабилизаторов // Космические исследования. 1978. Т. 16. № 1. С. 22—30.
2. Заведеев А. И., Архипов Р. А. Возможные подходы к построению перспективных систем управления ориентацией космических аппаратов с помощью гиросиловых устройств // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. 2008. № 2. С. 8—12.
3. Токарь Е. Н., Легостаев В. П., Платонов В. Н., Седых Д. А. Кратные гиросиловые системы // Космические исследования. 1981. Т. 19. № 6. С. 813—822.
4. Токарь Е. Н. Критерий настройки гиросиловых систем // Космические исследования. 1980. Т. 18. № 3. С. 307—315.
5. Токарь Е. Н., Платонов В. Н. Исследование особых поверхностей системы безупорных гиродинов // Космические исследования. 1978. Т. 16. № 5. С. 675—685.

CONTENTS

- Furtat I. B.** Modified Algorithm of Robust Integrator Backstepping 2
The algorithm of robust control of parametric and functionally identity linear plant is offered. Ensuring tracking of an output of plant behind a reference signal with given accuracy and for final time. It is supposed that the scalar output of plant is accessible to measurement. The results of computer modeling are given. It are illustrating functionality of the proposed scheme.
Keywords: robust control, priori and functional identity plant, integrator backstepping, observer, singular-perturbed differential equation, Lyapunov function.
- Makarov N. N., Vladimirov K. I.** Asymptotic Deviations in Switching Control Systems. 8
Disturbance accumulation task is solved using dynamic programming for discrete switching systems. Effective iterative procedure for numerical solution is proposed.
Keywords: switching system, modes of switching system, disturbance accumulation, maximum deviation, dynamic programming, numerical algorithm.
- Mironov V. I., Mironov Yu. V., Yusupov R. M.** The Optimum Control in Multipointed Problems on Meeting Points Motions 14
One considers the task of optimum control of active objects movement at it's consecutive meeting with a system of mobile objects for special targets. One determines necessary conditions with regard of restrictions.
Keywords: optimum control, system of mobile objects, necessary conditions.
- Egorov O. D., Baturova V. A.** Definition of a Robot Positioning Error. 19
Definition of a robot positioning error methodology is considered with a respect to manufacturing and control errors.
Keywords: robot, error, parameters, mobility degree, joint coordinate.
- Goritov A. N.** Construction of the Plan of a Trajectory of the Industrial Robot in the Conditions of the Incomplete Information on an Environment 25
The algorithm providing construction of the plan of a trajectory of moving of the working tool of the industrial robot in the environment with an unknown arrangement of obstacles is offered. The heuristic functions are resulted, allowing to reduce volume of calculations at construction of the plan of a trajectory, optimum on power inputs or on transition time in a target condition.
Keywords: the industrial robot, trajectory planning.
- Golovin V. F., Arkhipov M. V., Zhuravlev V. V.** Force Teaching Method for Trajectory Planning of Robot for Restorative Medicine. 29
The method of force teaching, necessary for position/force control of robots for restorative medicine, and different from conventional position teaching is considered. The errors of position/force control in force teaching algorithms are estimated.
Keywords: force teaching, position/force control, restorative medicine, soft tissues.
- Stebulyanin M. M.** The Combinational Method of Multivariable Mechatronic Systems Design in a Mode of Position Confinement 31
The approach of design of control rule of multivariable mechatronic system in a mode of defined state stabilization is discussed. The approach is based on examining the "big" system with $m > 2$ state variables as combination of two-variable systems to which the direct Lyapunov method is applied similarly. It helps to tune up a new system drive using uncomplicated design technique.
Keywords: mechanical movement, multivariable system, control, stability, Lyapunov function.
- Anissimov A. A., Tararykin S. V.** The Forming of Optimization Criterion in the Problems of Parametric Synthesis of the State Regulators in Electromechanical Systems 36
The article deals with the forming of optimization criterion in the problems of parametric synthesis of the state regulators in electromechanical systems. The complex optimization criterion is proposed, which is based on the accuracy factor and regulation time, as well as the factors of parametric sensitive and power consumption, normalized by the Harrington scale. It is shown on example of electromechanical system with the digital polynomial regulator that the method allows to solve effectively the problem of parametric optimization in control systems.
Keywords: electromechanical system, state regulator, digital polynomial regulator, optimization criterion, quality factors of control system, parametric sensitive.
- Kochetkov V. P., Podborsky P. E., Kolovsky A. V.** Optimization of Dynamic for an Electromechanical System by the Application of Variable Structure Systems 42
The problem of dynamic optimization for two-mass electromechanical system has been solved by the application of sliding modes presented in this paper. There is an electric drive for digging mechanisms of open-mine excavator which has been considered as an example in various operating modes. Corresponding transients have been obtained by means of computer modeling.
Keywords: variable structure systems, VSC, sliding mode, SMC, nonlinear control, open-mine excavator electric drive, electromechanical system.

Bukanova T. S., Steshina L. A., Savinyh A. B. The Optimising Concept of Construction of a Control System by Electric Drive 48

In article the approach to construction of modern systems of optimum control by the equipment on the basis of the electric drive, based on use of a new way of power saving up management by dynamic objects is presented.

The received results are used at synthesis of a control system by the electric drive realising functions of power savings and optimisation of operating modes of the equipment of technological processes.

Keywords: power savings, the optimising concept, the modern theory of regulation, control system, electric drive.

Anisimov V. M., Vysotsky V. E., Kaurov S. Yu., Repin A. S. Application of the Built in Microcontroller for a Control System an Installation Starter-Generating 50

The summary. In given article various variants of block diagrammes of control systems are considered by automobile starters-generators. The description of the basic remote terminal units of microcontrollers of such systems necessary for creation is resulted. The description of algorithms of realisation of principal views of pulse-width modulation is given. Algorithms of operating programs for starters-generators allowing are resulted to solve management problems.

Keywords: a starter-generator, the inverter, the gauge opposition of a rotor. the microcontroller, pulse-width modulation, the electromechanical converter, an internal combustion engine, the electric machine.

Goppe G. G. Mathematical Models of the Technological Complex "Electric Drive — Turbomechanism — Pipeline". Part 1. Mathematical Models of Static Modes by Two Methods of the Efficiency Control 56

We compare static characteristics of the complex "electric drive—turbomechanism—pipeline" by two methods of the efficiency control of the material environment being transported via pipeline. It was proved that by rotation frequency control the characteristics are linear while by strangling method they are non-linear. Thus in the first case better control quality can be achieved by single regulator adjustment.

Keywords: electric drive, turbomechanism, pipeline, pressure, efficiency, static characteristic, strangling, rotation frequency, regulator.

Volkov A. B., Karetnikov V. V., Sikarev I. A. Algorithms of Definition of Range and Radius of an Operative Range of Automatic Information System Working in Difficult Radio Noise Conditions 62

In article algorithms of definition of the maximum range of action of the automatic information system, considering influence of multiplicate and additive hindrances are considered

Keywords: automatic information system; the coefficient of mutual difference; the radio interference; the range coverage; a fading signal; a fading interference; the retransmitted interference; an interference.

Chelnokov Yu. N., Loginov M. Yu. Differential Error Equations of Corrected Strapdown Inertial Navigation System Functioning In the Normal Geographic Reference Frame 64

In this paper, nonlinear and linear differential error equations of corrected strapdown inertial navigation system, functioning in the normal geographic reference frame, are derived.

Keywords: inertial navigation, strapdown inertial navigation systems, strapdown INS errors.

Zavedeyev A. I., Arkhipov R. A. Peculiarities of Application of Few Excessive Divisible Control Moment Gyro Systems for Spacecraft Orientation 73

Peculiarities of application control moment gyro stabilizers in problems of spacecraft orientation are considered. Possibilities and restrictions of few excessive divisible control moment gyro systems are described for example four gyrodyns located accordingly to "rhombus" and "pyramid" configurations.

Keywords: spacecraft, spacecraft control orientation system, control moment gyro system, gyrodyn, precession, algorithm, singular state.

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Дизайнер Т. Н. Погорелова.

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор Е. В. Комиссарова.

Сдано в набор 04.08.2009. Подписано в печать 17.09.2009. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,8. Уч.-изд. л. 9,48. Заказ 824. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Отпечатано в ООО "Подольская Периодика". 142110, Московская обл., г. Подольск, ул. Кирова, 15