

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 3 (108)

март

2010

Редакционный совет:

КУЗНЕЦОВ Н. А.
МАКАРОВ И. М.
МАТВЕЕНКО А. М.
ПЕШЕХОНОВ В. Г.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М.
ФЕДОРОВ И. Б.

Главный редактор:

ТЕРЯЕВ Е. Д.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В.
ПУТОВ В. В.
ЮЩЕНКО А. С.

Выпускающий редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б.

Ответственный секретарь:

ПЕТРИН К. В.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М.
БОГАЧЕВ Ю. П.
БУКОВ В. Н.
ВОСТРИКОВ А. С.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г.
ГОЛУБЯТНИКОВ И. В.
ИВЧЕНКО В. Д.
ИЛЬЯСОВ Б. Г.
КАЛЯЕВ И. А.
КОЛОСОВ О. С.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г.
КУЗЬМИН Н. Н.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.
ЛЕОНОВ Г. А.
ЛЁВИН Б. А.
ЛОХИН В. М.
НОРЕНКОВ И. П.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е.
РАПОПОРТ Э. Я.
РАССАДКИН Ю. И.
РАЧКОВ М. Ю.
РЕЗЧИКОВ А. Ф.
СЕБРЯКОВ Г. Г.
СИГОВ А. С.
СИРОТКИН О. С.
СОЙФЕР В. А.
ТИМОФЕЕВ А. В.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф.
ФУРСОВ В. А.
ХИМЕНКО В. И.
ЮРЕВИЧ Е. И.
ЮСУПОВ Р. М.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Фурсов В. А.** Согласованная идентификация управляемого объекта по малому числу наблюдений 2
Цыкунов А. М. Следящие системы для линейных объектов с запаздывающим управлением 9
Ушаков А. В., Цвентарный А. Ю. Формирование полиномиальной динамической модели при сложном экзогенном стохастическом воздействии 14

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

- Седов А. В., Тришечкин Е. В.** Новый подход для оценки учета высокочастотных составляющих при выборе частоты дискретизации сигнала 20
Романов А. М. Оценка старших производных в контуре цифровой системы управления в условиях шумов 25

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

- Иванов Е. Б.** Система поддержки принятия решений по управлению доменным процессом 29
Антонов А. Н., Аршанский М. М. Нечеткая модель системы принятия решений по выбору параметров дозирования пипетирующей станции EVO Freedom 75. 33

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ

- Фалдин Н. В., Липатов А. Ю., Моржов А. В.** Синтез оптимального по быстродействию объемного силового гидропривода при задании ограничения на потребляемую мощность. 39
Когут А. Т. Синтез приближенных алгоритмов двойного управления двигателями постоянного тока на основе процедур линеаризации 45
Ганнель Л. В. Анализ процессов управления линейными синхронными двигателями на основе быстродействующих синусоидальных усилителей мощности 50

РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Зенкевич С. Л., Космачев П. В.** Управление движением мобильного робота в неподвижную точку 55

Журнал в журнале "УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"

- Сильвестров М. М., Федоров А. В., Котицын Л. О., Бегичев Ю. И., Наумов А. И.** Концепция построения эргатического комплекса управления многоцелевыми беспилотными летательными аппаратами 62
Сапунков Я. Г. Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS-переменных 73
Contents 79

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mec@novtex.ru

УДК 62.50

В. А. Фурсов, д-р техн. наук, проф., зав. каф., Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королева, Институт систем обработки изображений РАН
fursovs@smr.ru

Согласованная идентификация управляемого объекта по малому числу наблюдений

Рассматривается алгоритм идентификации для определения модели управляемого объекта по малому числу наблюдений. Идея метода состоит в поиске наиболее свободных от шума наблюдений с помощью алгоритма, основанного на принципе согласованности оценок. В качестве критерия согласованности используется функция взаимной близости оценок на подсистемах небольшой размерности. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность метода.

Ключевые слова: идентификация, малое число наблюдений, согласованность оценок

Введение

Обычно идентификация управляемого объекта осуществляется в целях адаптации алгоритмов управления к изменяющимся параметрам модели объекта. Примером является схема адаптивной системы с эпизодической идентификацией модели объекта [1]. В этой системе алгоритмы идентификации "включаются" только на переходных режимах. Связано это с тем, что попытка решать задачу идентификации управляемого объекта в установившемся режиме приводит к плохой обусловленности или даже вырожденности задачи. Однако из-за кратковременности переходных процессов и, как следствие, малого числа доступных наблюдений возникают следующие проблемы.

Вероятностные модели сигналов оказываются ненадежными, так как не выполняется основное условие статистической устойчивости — существование большого числа наблюдений. При этом использование методов статистического оценивания оказывается малообоснованным. Этот факт в достаточно острой полемической форме обсуждался в работе [2]. В работе [3] Р. Калман подверг резкой критике методы, опирающиеся на так называемую стандартную статистическую априорную гипотезу. В частности, он показал, что возможность улучшения оценок метода наименьших квадратов (МНК-оценок) может быть связана лишь с наличием переменных,

свободных от шума. Используемый в настоящей работе подход является попыткой построить работоспособную процедуру для поиска таких переменных.

Идея метода состоит в том, чтобы для исходной системы построить множество оценок на всех возможных подсистемах небольшой размерности и отобрать среди них подмножество наиболее согласованных между собой по критерию взаимной близости [4, 5]. На этом подмножестве затем строится искомая точечная оценка. Успех в данном случае зависит от того, насколько оправданы предположения о существовании некоторого подмножества наблюдений, почти свободных от шума. Указанные предположения более реалистичны и менее обременительны, чем те, которые обычно используются в теории статистического оценивания. Развиваемый подход не требует выполнения требования статистической устойчивости, которое все равно не выполняется при малом числе наблюдений.

Постановка задачи и предположения

Типичной формой описания управляемого объекта в цифровой системе управления являются векторные конечно-разностные уравнения [6, 7]. В частности, для системы порядка n с одним входом $u[k]$ и одним выходом $y[k]$ уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[k] + \mathbf{d}u[k]; \\ y^*[k] &= \mathbf{h}^T\mathbf{x}[k], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}[k]$ — $(n \times 1)$ -вектор состояния; \mathbf{d} , \mathbf{h} — $(n \times 1)$ -векторы параметров объекта, а $\mathbf{\Phi}$ — $(n \times n)$ -матрица (переходных состояний). Для объекта, описываемого системой (1), можно записать передаточную функцию

$$W(z) = \frac{Y^*(z)}{U(z)} = \frac{\mathbf{h}^T \text{Adj}(\mathbf{E}z - \mathbf{\Phi})\mathbf{d}}{\det(\mathbf{E}z - \mathbf{\Phi})} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}z^i}{z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}z^j},$$

где \mathbf{E} — единичная матрица; z — оператор сдвига; $\text{Adj}(\mathbf{E}z - \mathbf{\Phi})/\det(\mathbf{E}z - \mathbf{\Phi}) = (\mathbf{E}z - \mathbf{\Phi})^{-1}$, а b_i , a_j , $i, j = \overline{1, n}$ — коэффициенты передаточной функции. От передаточной функции можно перейти во временную область:

$$y^*[k+1] = \sum_{i=1}^n a_i y^*[k-i+1] + \sum_{j=1}^n b_j u[k-j+1]. \quad (2)$$

Проведя N наблюдений входного и выходного сигналов объекта в соответствии с (2), можно записать матричное уравнение вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{c} + \boldsymbol{\xi} \text{ или } \mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \boldsymbol{\xi}, \quad (3)$$

где $\mathbf{y}^* = \mathbf{X}\mathbf{c}$; $\mathbf{c} = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T$ — вектор па-

раметров объекта; $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[k+1] \\ y[k+2] \\ \vdots \\ y[k+N] \end{bmatrix}$;

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y[k] \dots y[k-n+1] & u[k] \dots u[k-n+1] \\ y[k+1] \dots y[k-n+2] & u[k+1] \dots u[k-n+2] \\ \vdots & \vdots \\ y[k+N-1] \dots y[k+N-n] & u[k+N-1] \dots u[k+N-n] \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi[k+1] \\ \xi[k+2] \\ \vdots \\ \xi[k+N] \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее будем полагать, что $2n = M$, так что матрица \mathbf{X} имеет размерность $N \times M$. Компоненты вектора ошибок определяются как

$$\xi[k+j] = \varepsilon[k+j] - \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon[k-i+j], \quad (4)$$

где $\varepsilon[k+j]$ — аддитивные ошибки измерения, порядка модели и др. Для элементов матрицы \mathbf{X} и вектора \mathbf{y} далее будем использовать более компактные обозначения: $x_{ij}, y_i, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$, соответственно.

Общие принципы построения систем с эпизодической идентификацией (рис. 1) рассматривались в работе [1]. Задача идентификации управляемого объекта в такой системе состоит в построении оценки $\hat{\mathbf{c}}$ векторного параметра \mathbf{c} уравнения (3) по доступным для непосредственного наблюдения $(N \times M)$ -матрице \mathbf{X} и $(N \times 1)$ -вектору \mathbf{y} ($N > M$) при неизвестном $(N \times 1)$ -векторе ошибок $\boldsymbol{\xi}$. Далее используются следующие предположения.

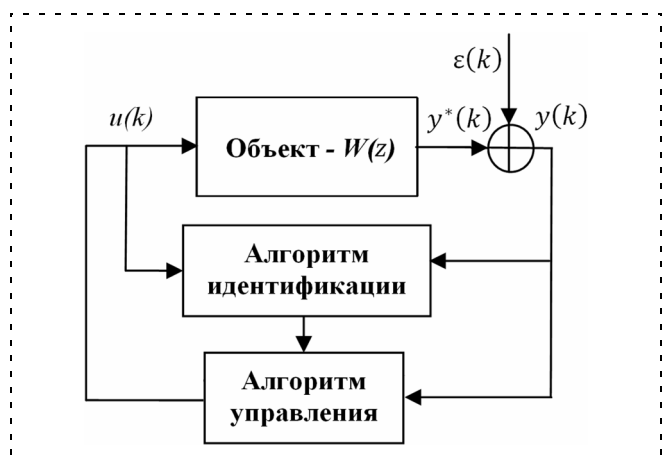


Рис. 1. Общая схема системы

1. Матрица \mathbf{X} и вектор \mathbf{y} фиксированы, т. е. $x_{ij}, y_i, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$, известны в результате измерений на одной реализации.

2. Число наблюдений мало, поэтому имеет место неопределенность свойств обусловленности матрицы \mathbf{X} и статистических характеристик вектора $\boldsymbol{\xi}$.

3. Норма вектора ошибок $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$ ограничена, а его направление в шаре

$$\Xi = \{\boldsymbol{\xi}; (\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi})^{1/2} = \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq R_\xi = \text{const}\} \quad (5)$$

является произвольным и неопределенным.

4. В исходных данных, несмотря на возможные ошибки, все же содержится достаточное число наблюдений (подсистема, наиболее свободная от шума), по которым оценки $\hat{\mathbf{c}}$ могут быть вычислены с требуемой точностью.

5. Существует соответствующая уравнению (3) точная модель

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}\mathbf{c}, \quad (6)$$

где $\mathbf{y}^* = \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}$.

Конкретизируем сделанные предположения. Матрица \mathbf{X} , вообще говоря, случайна, однако в каждом эпизоде идентификации она формируется по доступным для непосредственного измерения (хотя и содержащим случайные ошибки) сигналам. Поэтому она считается известной точно, а содержащиеся в ней ошибки в силу (4) представляются в виде реализации случайного вектора ошибок $\boldsymbol{\xi}$, длина и направление которого в пределах шара (5) являются неопределенными.

Число наблюдений считается малым, если число степеней свободы $(N - M)$ превышает число оцениваемых параметров M не более чем в 2...3 раза. Что касается предположения 4, конечно, невозможно построить точную систему (6) из (3), так как неизвестен вектор ошибок $\boldsymbol{\xi}$. Однако, опираясь на предположение 4, можно ставить задачу отыскания подсистемы, наиболее свободной от шума [4, 5].

Подчеркнем, что в данном случае решается задача идентификации динамического объекта по одному малому набору данных в рамках указанных выше предположений 1—5. Традиционно применяемые в статистической теории оценивания вероятностные модели в данном случае не используются, поскольку на одной короткой реализации прогноз поведения ошибок оценивания исходя из распределений ошибок измерений все равно не надежен.

Общая схема построения согласованных оценок

В соответствии с изложенным принципом отбора данных общая схема решения задачи представляется следующим образом. Из N строк исходной системы (3) формируется, например, L подсистем размерности P :

$$y_l = \mathbf{X}_l \mathbf{c} + \xi_l, \quad l = \overline{1, L}, \quad (7)$$

где \mathbf{X}_l — $(P \times M)$ -матрицы, а y_l, ξ_l — $(P \times 1)$ -векторы.

Из P строк каждой l -й подсистемы (7), в свою очередь, формируется, например, K_l подсистем размерности S :

$$y_{l,i} = X_{l,i}c + \xi_{l,i}, \quad i = \overline{1, K_l}, \quad l = \overline{1, L}. \quad (8)$$

Для различения подсистем (7) и (8) далее будем их называть подсистемами *верхнего* и *нижнего* уровней соответственно. Индекс i здесь и далее служит для обозначения номера подсистемы нижнего уровня и соответствующих ей $(S \times M)$ -матрицы $X_{l,i}$ и $(S \times 1)$ -векторов $y_{l,i}, \xi_{l,i}$.

Предполагается также, что для всех $l = \overline{1, L}$ и $i = \overline{1, K_l}$

$$\text{rank} X_{l,i} = M. \quad (9)$$

Выполнение условия (9) обеспечивается применением процедуры предварительного отбора информативных данных по показателям обусловленности [8].

С использованием введенных подсистем принцип согласованности формулируется следующим образом. Пусть для каждой i -й подсистемы нижнего уровня, сформированной из l -й подсистемы верхнего уровня, вычислен вектор оценок $\hat{c}_{l,i}$. Пусть также задана функция, характеризующая взаимную близость множества решений $\hat{c}_{l,i}$ на каждой подсистеме верхнего уровня:

$$W[l] = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{K_l} \rho(\hat{c}_{l,i}, \hat{c}_{l,j}), \quad l = \overline{1, L}, \quad (10)$$

где $\rho(\hat{c}_{l,i}, \hat{c}_{l,j})$ — расстояние между полученными на l -й подсистеме верхнего уровня векторами $\hat{c}_{l,i}$ и $\hat{c}_{l,j}$, взятыми попарно во всех возможных сочетаниях $C_{K_l}^2$. Искомая точечная оценка \hat{c} ищется по тому же или иному правилу на подсистеме с номером l^* :

$$W[l^*] = \min_{\forall l} W[l], \quad l = \overline{1, L}.$$

В рамках указанной постановки могут строиться различные алгоритмы, различающиеся мерой близости $\rho(\hat{c}_{l,i}, \hat{c}_{l,j})$. В данной статье исследуется частный случай критерия (10), в котором в качестве функции взаимной парной близости используется сумма квадратов евклидовых норм разности всех возможных пар векторов оценок:

$$W_l[l] = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{K_l} \|\hat{c}_{l,i} - \hat{c}_{l,j}\|_E^2, \quad l = \overline{1, L}, \quad (11)$$

где $\hat{c}_{l,i}, \hat{c}_{l,j}, i = \overline{1, K_l}, j = \overline{1, K_l}$, — оценки, полученные на подсистемах нижнего уровня каждой (l -й) подсистемы верхнего уровня.

Анализ ошибок при разбиении системы на подсистемы

Представляет интерес нахождение общих закономерностей формирования ошибок идентификации при разбиении исходной системы (3) на подсистемы. Для этого проведем анализ ошибок оценивания с использованием ортогональных разложений. Для сокращения обозначений рассмотрим случай одноуровневого разбиения исходной системы (3) с $(N \times M)$ -матрицей X на подсистемы (ясно, что система (3) может рассматриваться как подсистема верхнего уровня для системы большей размерности).

Известно [9], что для $(N \times M)$ -матрицы X ранга M системы вида (3) существуют ортогональные $(N \times N)$ -матрица T и $(M \times M)$ -матрица F такие, что

$$T^T X F = S; \quad X = T S F^T; \quad X X^T = T S S^T T^T = T \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^T, \quad (12)$$

где S — диагональная $(N \times M)$ -матрица, составленная из M сингулярных чисел $s_i, i = \overline{1, M}$, $(N \times M)$ -матрицы $X X^T$ ($N > M$); $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ — диагональная матрица собственных значений λ_i , являющихся квадратами соответствующих сингулярных чисел s_i ; матрица

$$T = [T_\lambda : T_0], \quad (13)$$

где T_λ, T_0 — матрицы, составленные из собственных векторов, соответствующих ненулевому и нулевому собственным значениям матрицы $X X^T$ соответственно. Векторы-столбцы матрицы T_λ образуют (столбцовое) пространство матрицы X : $\mathcal{R}(X) = \text{span}[t_{\lambda,1}, \dots, t_{\lambda,M}]$, а столбцы T_0 — нуль-пространство матрицы X^T : $\mathcal{N}(X^T) = \text{span}[t_{0,1}, \dots, t_{0,N-M}]$ [10].

Лемма. Для системы (3) с $(N \times M)$ -матрицей X ($\text{rank } X = M$) МНК-оценка, вычисленная для любой i -й подсистемы $y_i = X_i c + \xi_i$ с $(S \times M)$ -матрицей $X_i, M \leq S < N$ ($\text{rank } X_i = M$), может быть представлена в виде

$$\hat{c}_i = c + \Delta c + \Delta \tilde{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где $\Delta c = F \Lambda^{-1/2} T_\lambda^T \xi$, $\Delta \tilde{c}_i = [X_i^T X_i]^{-1} X_i^T T_{0,i} T_0^T \xi$, а $T_{0,i}$ — соответствующий i -й подсистеме блок матрицы T_0 .

Доказательство.

С учетом (12), (13) вектор ошибок $\xi = y - Xc$ может быть представлен в виде двух составляющих:

$$\xi = X \Delta c + T_0 \Delta d, \quad (15)$$

где

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{F}\Lambda^{-1/2}\mathbf{T}_\lambda^T \xi; \quad (16)$$

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{T}_0^T \xi. \quad (17)$$

Используя представления (15)–(17), исходную систему (3) можно переписать в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) + \mathbf{T}_0 \Delta \mathbf{d}, \quad (18)$$

откуда, в частности, следует известный факт [10], что ошибка $\Delta \mathbf{c}$ МНК-оценки

$$\hat{\mathbf{c}} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c} \quad (19)$$

определяется лишь проекцией вектора ξ на подпространство $\mathcal{R}(\mathbf{X})$.

В разложении (18) можно выделить строки, соответствующие i -й подсистеме размерности S , $M \leq S < N$:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) + \mathbf{T}_{0,i} \Delta \mathbf{d}, \quad (20)$$

где $\mathbf{T}_{0,i}$ — соответствующий i -й подсистеме блок матрицы \mathbf{T}_0 , а $\Delta \mathbf{c}$, $\Delta \mathbf{d}$ — те же, что и в (16), (17).

Умножив обе части (20) слева сначала на \mathbf{X}_i^T , а затем на $[\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_i]^{-1}$, приходим к (14).

Лемма доказана.

При $\xi \neq 0$ из леммы вытекают следующие возможные случаи.

1. $\mathbf{T}_\lambda^T \xi \neq 0$, $\mathbf{T}_0^T \xi = 0$ ($\xi \in \mathcal{R}(\mathbf{X})$). Оценки $\hat{\mathbf{c}}_i$, $i = 1, 2, \dots$, согласованы в смысле критерия (11).

2. $\mathbf{T}_\lambda^T \xi = 0$, $\mathbf{T}_0^T \xi \neq 0$ ($\xi \in \mathcal{N}(\mathbf{X})$). При этом $\Delta \mathbf{c} = 0$, однако ошибки $\Delta \tilde{\mathbf{c}}_i$, $i = 1, 2, \dots$, различны, следовательно, оценки $\hat{\mathbf{c}}_i$, $i = 1, 2, \dots$, не согласованы в смысле критерия (11).

3. $\mathbf{T}_\lambda^T \xi \neq 0$, $\mathbf{T}_0^T \xi \neq 0$ (вектор имеет проекции как в $\mathcal{R}(\mathbf{X})$, так и в $\mathcal{N}(\mathbf{X})$). В соответствии с (11), (14) оценки будут также не согласованными.

Нетрудно заметить, что соотношение (14) может быть применено как в случае разбиения исходной системы (3) на подсистемы верхнего уровня, так и в случае разбиения некоторой подсистемы верхнего уровня на подсистемы нижнего уровня. Если рассматривается случай разбиения подсистем верхнего уровня (7) с $(P \times M)$ -матрицами \mathbf{X}_l , $l = \overline{1, L}$, на подсистемы нижнего уровня, критерий согласованности (11), вычисленный на множествах полученных для них оценок, может указывать на подсистему верхнего уровня, наиболее свободную от шума.

Действительно, в формировании векторов $\Delta \mathbf{c}$ (16) и $\Delta \mathbf{d}$ (17) участвует один и тот же вектор ошибок измерений — ξ . Если для некоторой, например, l -й подсистемы верхнего уровня норма этого вектора

существенно больше, чем для других подсистем верхнего уровня, есть основания ожидать, что составляющие ошибок оценивания $\Delta \mathbf{c}(l)$, $\Delta \tilde{\mathbf{c}}_i(l)$ будут также велики. Составляющая $\Delta \mathbf{c}(l)$, являющаяся ошибкой МНК-оценки $\hat{\mathbf{c}}(l)$ на l -й подсистеме верхнего уровня, одинакова для всех подсистем нижнего уровня и не может быть определена, поскольку неизвестен вектор ξ . В качестве индикатора относительной величины этого вектора может использоваться степень разброса оценок $\hat{\mathbf{c}}_i(l)$, $i = 1, 2, \dots$, являющегося следствием разброса ошибок $\Delta \tilde{\mathbf{c}}_i(l)$. Количественной оценкой этого разброса и является значение функции взаимной близости оценок $W[l]$ (11).

Приведенные результаты указывают на возможность повышения точности согласованных оценок по сравнению с МНК-оценками. Вероятность реализации случаев 1 и 2 равна нулю, так как размерности подпространств $\mathcal{R}(\mathbf{X})$ и $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ меньше размерности N исходного пространства измерений. В случае 3 в соответствии с (14) относительно малые значения критерия согласованности (11) свидетельствуют о том, что ошибки $\Delta \tilde{\mathbf{c}}_i$, $i = 1, 2, \dots$, малы, и, следовательно, норма вектора ошибок измерений ξ также сравнительно мала. Случай, когда ошибки $\Delta \tilde{\mathbf{c}}_i$, $i = 1, 2, \dots$, велики и одинаковы по величине и знаку (сознательное и разумное противодействие), не рассматривается.

Функция взаимной близости в случае подсистем с квадратными матрицами

Проведем теперь детальный анализ критерия взаимной парной близости (11) для случая, когда подсистемы нижнего уровня построены с использованием квадратных $(M \times M)$ -матриц \mathbf{X}_i . Здесь, как и в предыдущем разделе, для простоты индекс l , служащий для обозначения подсистем верхнего уровня, опускается.

Теорема. Пусть на подсистеме верхнего уровня (7) с $(P \times M)$ -матрицей \mathbf{X} ($\text{rank } \mathbf{X} = M$) задано K подсистем нижнего уровня (8) с квадратными $(M \times M)$ -матрицами \mathbf{X}_i ($\text{rank } \mathbf{X}_i = M$), $i = \overline{1, K}$.

Тогда для функции взаимной близости (11), вычисленной по множеству МНК-оценок $\hat{\mathbf{c}}_i$, $i = \overline{1, K}$, справедливо равенство

$$W(l) = \sum_{\substack{i=1, K-1 \\ j=i+1, K}} \|\hat{\mathbf{c}}_i - \hat{\mathbf{c}}_j\|^2 = W_1(l) - W_2(l), \quad (21)$$

где

$$W_1(l) = 2 \sum_{i=1}^K \xi_i^T (\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T)^{-1} \xi_i; \quad (22)$$

$$W_2(l) = 2 \sum_{\substack{i=1, K-1 \\ j=i+1, K}} \xi_i^T (\mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T)^{-1} \xi_j. \quad (23)$$

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{X}_i \mathbf{c} = \mathbf{y}_i - \xi_i \quad (24)$$

— подсистема с квадратной $(M \times M)$ -матрицей \mathbf{X}_i ($\text{rank } \mathbf{X}_i = M$), а соответствующая этой подсистеме оценка $\hat{\mathbf{c}}_i$ является решением уравнения

$$\mathbf{X}_i \hat{\mathbf{c}}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = \overline{1, K}. \quad (25)$$

Вычитая из обеих частей (25) соответствующие части равенства (24), имеем

$$\mathbf{X}_i \Delta \hat{\mathbf{c}}_i = \xi_i, \quad (26)$$

где $\Delta \hat{\mathbf{c}}_i = \hat{\mathbf{c}}_i - \mathbf{c}$ — вектор ошибок оценивания на i -й подсистеме нижнего уровня. Для двух, например i -й и j -й, подсистем нижнего уровня можно записать:

$$\hat{\mathbf{c}}_i - \hat{\mathbf{c}}_j = (\hat{\mathbf{c}}_i - \mathbf{c}) - (\hat{\mathbf{c}}_j - \mathbf{c}) = \Delta \hat{\mathbf{c}}_i - \Delta \hat{\mathbf{c}}_j. \quad (27)$$

С учетом (27) функцию взаимной парной близости оценок (11) для всех $i = \overline{1, K}, j = \overline{1, K}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(l) &= \sum_{\substack{i=1, K-1 \\ j=i+1, K}} \|\hat{\mathbf{c}}_i - \hat{\mathbf{c}}_j\|_E^2 = \\ &= \sum_{\substack{i=1, K-1 \\ j=i+1, K}} \|\Delta \hat{\mathbf{c}}_i - \Delta \hat{\mathbf{c}}_j\|^2 = \\ &= \sum_{\substack{i=1, K-1 \\ j=i+1, K}} (\Delta \hat{\mathbf{c}}_i - \Delta \hat{\mathbf{c}}_j)^T (\Delta \hat{\mathbf{c}}_i - \Delta \hat{\mathbf{c}}_j). \end{aligned} \quad (28)$$

По предположению $\text{rank } \mathbf{X}_i = M$, поэтому в соответствии с (26)

$$\Delta \hat{\mathbf{c}}_i = \mathbf{X}_i^{-1} \xi_i.$$

Подставляя указанное значение $\Delta \hat{\mathbf{c}}_i$ в (28), получаем

$$\begin{aligned} W(l) &= \sum_{i,j} [\xi_i^T (\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T)^{-1} \xi_i + \xi_j^T (\mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T)^{-1} \xi_j - \\ &- \xi_i^T (\mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T)^{-1} \xi_j - \xi_j^T (\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T)^{-1} \xi_i]. \end{aligned} \quad (29)$$

Фигурирующие в (29) индексы $i = \overline{1, K}, j = \overline{1, K}$ "пробегают" один и тот же набор подсистем. Поэтому два первых слагаемых в правой части можно заменить одной суммой — (22). Аналогично два последних слагаемых (взятых с плюсом) также представляются одной суммой — (23). *Теорема доказана.*

Свойства составляющих функции взаимной близости $W_1(l)$ (22) и $W_2(l)$ (23) и их вклады в значение критерия (21) существенно различаются. Все слагаемые в $W_1(l)$ неотрицательны, поэтому сумма

в значительной степени будет определяться нормами фрагментов $\xi_i, i = \overline{1, K}$, вектора ошибок ξ . Вклад суммы $W_2(l)$ зависит также от взаимной ориентации ξ_i, ξ_j между собой и относительно подпространств, образованных матрицами $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j, i = \overline{1, K}, j = \overline{1, K}$. На конкретной реализации слагаемые в (23) могут иметь разные знаки, при этом сумма $W_2(l)$ может оказаться малой по сравнению с $W_1(l)$. Если основной вклад в функцию взаимной близости (21) вносит составляющая $W_1(l)$, то значение функции взаимной близости как индикатора подсистемы, наиболее свободной от шума, более эффективно.

Принцип согласованности оценок в рассматриваемом случае имеет ясную геометрическую трактовку. Поскольку каждая подсистема нижнего уровня имеет квадратную $(M \times M)$ -матрицу, оценки $\hat{\mathbf{c}}_{l,i}$ являются нормальными векторами соответствующей M -мерной гиперплоскости. Множеству K подсистем соответствует "облако" гиперплоскостей. По принципу согласованности среди подсистем верхнего уровня предпочтение отдается той, для которой имеет место наибольшая взаимная близость гиперплоскостей в этом "облаке". После того как выбрана подсистема верхнего уровня, необходимо либо выбрать в ней конкретную гиперплоскость, либо построить некоторую усредненную точечную оценку. Указанные геометрические представления использовались Р. Калманом в работе [3], где он предлагал конечный результат формулировать в виде интервальной оценки размеров "облака" гиперплоскостей.

Поскольку никогда не известно число наблюдений, почти свободных от шума, метод может предусматривать перебор различных вариантов подсистем верхнего уровня, различающихся размерностями. Такой алгоритм, основанный на критерии относительной согласованности оценок, рассматривался в работе [11].

Примеры

Пример 1. Исходные данные для этого примера формировали с использованием датчика нормально распределенных случайных чисел. Размерность задачи: $N = 10, M = 4$. Наиболее согласованные оценки отыскивали на $C_{10}^7 = 120$ вариантах подсистем верхнего уровня по 7 наблюдений в каждой. Для каждой подсистемы верхнего уровня, в свою очередь, формировали $C_7^4 = 35$ подсистем нижнего уровня с матрицами \mathbf{X}_i размерности 4×4 и вычисляли множество МНК-оценок и функцию взаимной близости (11). Полученный набор значений критерия согласованности выстраивался по возрастанию (рис. 2).



Рис. 2. Функция взаимной близости

Для сравнения на рис. 3 приведена кривая значений критерия качества $\|\Delta c\|_{CEM} = \|c - \hat{c}\|_E$ согласованных оценок (*Conformity Estimates Method*), расположенных в такой же последовательности. На этом же рисунке горизонтальной линией показано значение $\|\Delta c\|_{LSM}$ для МНК-оценки, вычисленной по всему набору данных.

Нетрудно заметить, что точность оценок на более чем 20 подсистемах верхнего уровня, для которых функция взаимной близости принимает малые значения, выше, чем для МНК-оценок, притом эти подсистемы однозначно определяются по критерию взаимной близости (11).

Пример 2. По измерениям входа $u[k]$ и выхода $y[k]$ осуществлялась идентификация четырех параметров ($M = 4$) модели динамического объекта, описываемого разностным уравнением вида

$$y[k] = a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2] + \xi[k].$$

Входной сигнал $u[k]$ (при нулевых начальных условиях) показан на рис. 4, а. К выходному сигналу $y^*[k]$ идентифицируемого объекта в соответствии со схемой (см. рис. 1) добавляли ошибки $\varepsilon[k]$, $k = 1, 2, \dots$. Последовательность $\varepsilon[k]$, $k = 1, 2, \dots$, моделировали как смесь нормальных ($0, \sigma_\varepsilon$), $\sigma_\varepsilon \cong 0,01\sigma_X$ и аномальных ошибок (2,5%), где σ_X — СКО наблюдаемых значений входа и выхода объекта (элементов матрицы X). Компоненты вектора ошибок ξ , фигурирующего в уравнении (3), в соответствии с равенством (4) для данной конкретной модели вычисляли как

$$\xi[k] = \varepsilon[k] + a_1 \varepsilon[k-1] + a_2 \varepsilon[k-2].$$

Вид сформированного указанным образом выходного зашумленного сигнала $y[k]$ показан на рис. 4, б.

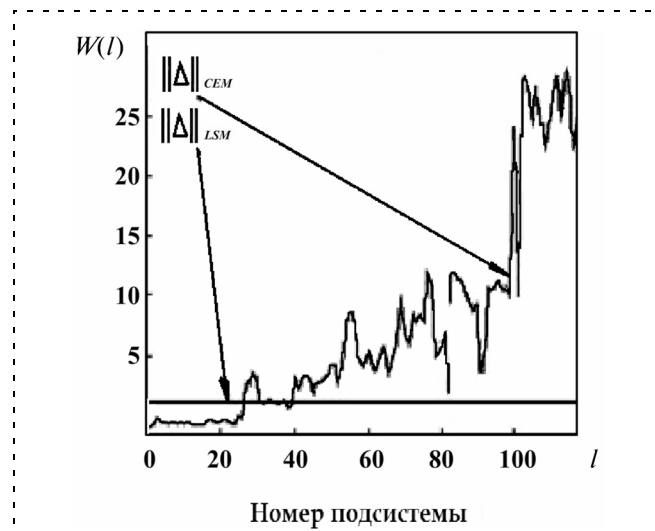


Рис. 3. Точность оценок

Для определения интервалов переходных режимов, содержащих информативные наблюдения, при использовании которых задача идентификации хорошо обусловлена, использовали методику, предложенную и описанную в работах [8, 12]. В частности, в темпе с процессами после проведения каждых четырех измерений вычисляли так называемый показатель диагонального преобладания:

$$\Phi[A] = \left(\sum_{i=1}^M a_{ii} \right)^2 / \sum_{i,j=1}^M a_{ij}^2,$$

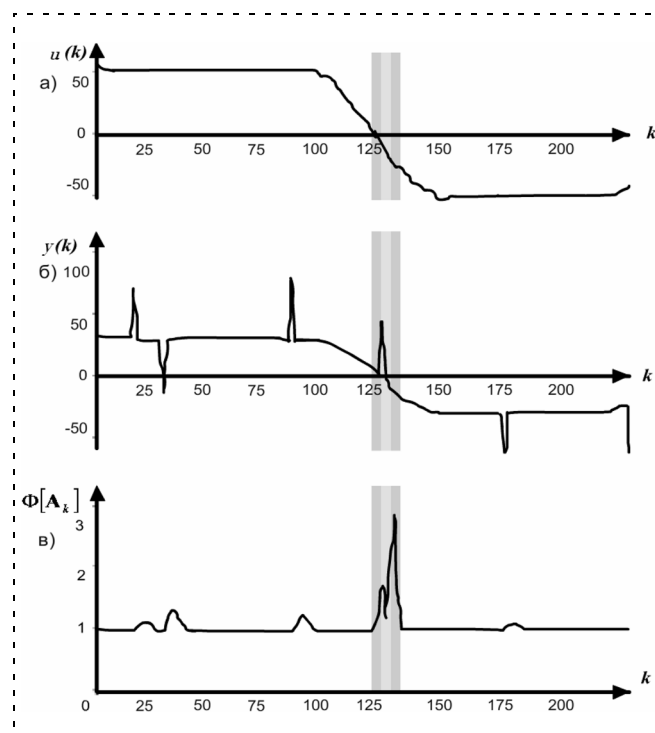


Рис. 4. Входной (а), выходной (б) сигналы объекта и показатель диагонального преобладания (в)

где a_{ij} — элементы информационной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Известно [8, 12], что на интервалах с более высоким значением показателя $\Phi[\mathbf{A}]$, как правило, достигается более хорошая обусловленность задачи. График изменения показателя $\Phi[\mathbf{A}_k]$ приведен на рис. 4, в.

В настоящем примере осуществляли отбор данных, для которых $\Phi[\mathbf{A}_k] \geq 1,02$. При этом было отобрано $N = 10$ наблюдений, из которых была составлена система вида (3). Как и следовало ожидать, в это число попали также наблюдения, содержащие аномальные ошибки. Связано это с тем, что грубые ошибки типа сбоев, как правило, улучшают обусловленность задачи, хотя ошибки оценивания при этом также обычно возрастают.

Далее среди этих данных осуществляли поиск подсистем верхнего уровня, для которых оценки на подсистемах нижнего уровня по критерию (11) оказывались наиболее согласованными. Размерность подсистем нижнего уровня принималась равной числу оцениваемых параметров ($M = 4$).

На рис. 4 серым цветом показаны временные интервалы, на которых данные были отобраны по показателю диагонального преобладания. На этих интервалах более темным цветом выделены участки, данные на которых в процессе последующего согласованного оценивания были отобраны по критерию взаимной близости (11).

Для сравнения на том же исходном наборе данных наряду с согласованными оценками (\hat{c}_{CEM}) вычисляли оценки по методу наименьших квадратов (\hat{c}_{LSM}). В эксперименте при описанных выше условиях получены следующие показатели качества:

$$\|c - \hat{c}_{LSM}\|_E / \|c\|_E = 0,9; \|c - \hat{c}_{CEM}\|_E / \|c\|_E = 0,15.$$

Нетрудно заметить, что критерий согласованности (11) позволяет уверенно отсеять среди исходных данных выделяющиеся ошибки.

Заключение

Приведенные примеры подтверждают принципиальную возможность построения оценок с использованием критерия согласованности оценок, не опирающегося на свойство статистической устойчивости. Этот факт является, безусловно, важным, так как не только содержит традиционную критику методов оценивания по малой выборке (которая обычно не вызывает возражений), но и вселяет надежду на конструктивное преодоление известных проблем.

Для отыскания "хорошего" решения в сформулированной задаче может потребоваться перебор большого числа вариантов подсистем. Этот факт

не является удивительным. Это неизбежная плата за недостаток априорной информации, связанный с недостаточностью числа наблюдений. Возможность применения простых (а следовательно, относительно дешевых) статистических схем обработки, как правило, является следствием значительных затрат на получение достаточно большого числа измерений, при котором эти схемы обработки пригодны.

Конечно, высокая вычислительная сложность методов, основанных на принципе согласованности оценок, вызывает неудовлетворенность. Тем не менее применение этого подхода оправдано в ситуациях, когда требуется получить точное решение, несмотря на то, что число наблюдений мало, а проведение дополнительных измерений, или ожидание "хороших" данных, по каким-либо причинам невозможно.

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" (BRHE) и РФФИ (грант № 09-07-00269-а).

Список литературы

1. **Belonogov V. V., Nikolaev J. A., Teryev E. D., Shamrikof B. M.** Estimation of aircraft parameters for the design of adaptive digital control. IV IFAC Symposium on Identification and System Parameter estimation. Preprints, Tbilisi, USSR, 1974.
2. **Алимов Ю. И.** О практической ценности теории оценок. Автоматика. 1981. № 2. С. 84—94.
3. **Калман Р. Е.** Идентификация систем с шумами // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 4 (244).
4. **Fursov V.** Conformity principle in the problems of evaluating using a small number of observations // Proc. of the IASTED International Conference Automation, Control, and Information Technology. June 10—13, 2002. Novosibirsk, Russia. P. 279—281.
5. **Fursov V. A.** Estimates Conformity Principle in the Problems of Identification. Computational Science — ICCS 2003 // Proc. of International Conference Melbourne, Australia and St-Petersburg, Russia. June 2003. P. II. P. 463—470.
6. **Graupe D.** Identification of systems. Colorado State University Fort Collins. Robert E. Krieger Publishing Company Huntington, New York, 1978.
7. **Ljung L.** System Identification. Theory for the User. University of Linkoping, Sweden Prentice — Hall, Inc., 1987.
8. **Fursov V. A.** Constructing unified identification algorithms using a small number of observations for adaptive control and navigation systems // Proc. SPIE. 1997. Vol. 3087. P. 34—44.
9. **Charls L. Lawson, Richard J. Hanson.** Solving Least Squares Problems. Prentice — Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1974.
10. **Bjorck Ake.** Least Squares Methods. Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), 1990.
11. **Fursov V. A., Gavrilov A. V.** Parallel algorithm of data selection using relative conforming estimate criterion // Proc. of The 12th ISPE International Conference on Concurrent Engineering: Research and Applications, Focus Symposium Recursive Dynamics and Iterated Mappings in Service Modeling and Design, Ft. Worth/Dallas, USA, 25—29 July, 2005, P. 375—380.
12. **Belonogov V. V., Teryev E. D., Fursov V. A., Shamrikof B. M.** Development of adaptation and identification algorithms in adaptive digital aircraft control systems // VI IFAC Symposium on Identification and System Parameter estimation. Preprints, Kioto, 1981.

А. М. Цыкунов, д-р техн. наук, проф.,
Астраханский государственный
технический университет
tsykunov_al@mail.ru

Следящие системы для линейных объектов с запаздывающим управлением

Рассматриваются задачи построения следящих систем для линейных объектов с запаздывающим управлением с частичной компенсацией внешних ограниченных возмущений. Приводятся числовые примеры и результаты их моделирования.

Ключевые слова: прогноз, эталонная модель, возмущающее воздействие, наблюдатель

Введение

Задача проектирования систем управления, которые обеспечивают выполнение основной поставленной цели управления в условиях априорной неопределенности данных о внешних возмущениях, является одной из основных проблем теории управления. Впервые на возможность создания систем управления, не чувствительных к внешним возмущениям, было указано в [1]. Впоследствии такие системы были названы инвариантными [2]. По этой проблеме имеется большое число публикаций, достаточно полно эта проблема изложена в [3], где приводятся классификации задач проектирования инвариантных систем управления и различных типов возмущений.

Выделяются два основных принципа построения систем управления, позволяющих достичь выполнения основных целевых условий при наличии параметрических и внешних возмущений. В инвариантных системах структура и параметры управляющего устройства выбираются таким образом, чтобы обеспечить полную или частичную нечувствительность системы к нежелательным различным воздействиям. Другой принцип построения основан на динамической компенсации возмущений, когда за счет формирования управляющего воздействия осуществляется подавление влияния возмущений на систему. В настоящее время системы, обеспечивающие выполнение вышеперечисленных условий, стали называть *робастными*. Теория построения таких систем и обширная библиография приведены в [4].

К системам, в которых осуществляется компенсация возмущений, следует отнести управляющие устройства, использующие внутреннюю модель возмущений [5, 6], оценку производных неизмеряемых сигналов [7, 8], идентификацию гармонических воздействий, метод вспомогательного контура [11–14],

позволяющий выделить сигналы, несущие информацию о возмущениях.

Особое место среди различных объектов управления занимают объекты с запаздывающим управлением. Они не допускают, чтобы управляющее устройство имело большой коэффициент усиления, что ведет к уменьшению точности регулирования и ухудшению качества переходных процессов. Для преодоления этого препятствия используются различные прогнозирующие устройства [15], среди которых одним из самых распространенных является регулятор Смита [15]. Однако прогнозирующие устройства не решают проблему компенсации внешних возмущений, а только усугубляют ее, что объясняется большой ошибкой прогноза, когда присутствуют внешние неконтролируемые воздействия. Поэтому для качественного управления объектом с запаздывающим управлением при наличии внешних неизмеряемых возмущений требуется решить две взаимосвязанные задачи: обеспечить прогноз регулируемой переменной и скомпенсировать действие внешних возмущений на выходную переменную.

В данной статье исследуются задачи построения систем слежения за входным сигналом с частичной компенсацией ограниченных возмущений, когда время запаздывания и максимальный спектр возмущения удовлетворяют определенному условию, что связано с используемым алгоритмом прогноза. Для выделения сигнала, несущего информацию о возмущении, используется метод вспомогательного контура [11], а для его прогноза на величину запаздывания применяется метод скользящей аппроксимации [16].

Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(P)y(t) = R(P)(u(t-h) + f(t-h)), \quad (1)$$

где $P = d/dt$ — дифференциальный оператор; $y(t)$ — регулируемая переменная; $Q(P)$, $R(P)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; $\deg Q(P) = n$, $\deg R(P) = m$; $u(t)$ — управляющее воздействие; $f(t)$ — внешнее возмущение; h — время запаздывания.

Сформулируем две задачи.

1. Требуется построить систему управления, обеспечивающую выполнение целевого условия

$$|y(t) - g(t-h)| < \delta \text{ при } t > T. \quad (2)$$

2. Необходимо спроектировать систему управления таким образом, чтобы передаточная функция замкнутой системы имела вид

$$k_m e^{-\lambda h} / Q_m(\lambda), \quad (3)$$

где λ — комплексная переменная в преобразованиях Лапласа; $g(t)$ — задающее воздействие; $Q_m(\lambda)$ —

гурвицев полином степени $\gamma = n - m$; T — время, по истечении которого ошибка должна быть меньше величины δ ; $k_m > 0$, $\delta > 0$.

Наличие запаздывания h в (2) объясняется тем, что в системах с запаздыванием нельзя отработать задающее воздействие быстрее, чем за время h . Вторая задача соответствует построению системы с невязной эталонной моделью.

Будем решать сформулированные задачи при следующих ограничениях.

Предположения. 1. Полиномы $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$ — гурвицевы с известными коэффициентами, и многочлен $Q(\lambda)$ — нормированный.

2. Возмущающее воздействие $f(t)$ — ограниченная гладкая функция с ограниченной производной $(r + 1)$ -го порядка, $|f(t)| < \tau$, $|f^{r+1}(t)| < \alpha$.

3. Запаздывание h и максимальный спектр ω_m возмущения $f(t)$ известны и связаны соотношением $h \leq \frac{1}{2\omega_m}$.

Ограничения на спектр входных воздействий связаны с тем, что их прогноз на время запаздывания равносильно преобразованию непрерывной величины в решетчатую функцию. В этом случае для восстановления исходной функции в соответствии с теоремой Котельникова должно быть выполнено приведенное соотношение.

Следящая система

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого задана уравнением (1). Будем предполагать, что выполнены условия предположений. Решение задачи состоит из следующих этапов.

1. Сформируем систему, позволяющую выделить сигнал, несущий информацию о возмущении $f(t - h)$, и получим алгоритм его оценки.

2. Выберем алгоритм прогнозирования для получения оценки сигнала $f(t)$.

3. Спроектируем алгоритм функционирования устройства, прогнозирующего регулируемую переменную на время запаздывания.

4. Получим алгоритм управления, обеспечивающий выполнение основного целевого условия (2).

Для выделения сигнала, несущего информацию о возмущающем воздействии, введем вспомогательный контур, уравнение которого имеет вид

$$Q(P)\bar{y}(t) = R(P)u(t - h), \quad (4)$$

и составим уравнение для сигнала рассогласования $\zeta(t) = y(t) - \bar{y}(t)$, вычитая (4) из (1):

$$Q(P)\zeta(t) = R(P)f(t - h). \quad (5)$$

Выполним "операторное деление" $\frac{Q(P)}{R(P)} = Q_0(P) + \frac{\Delta Q(P)}{R(P)}$, где $\deg Q_0(P) = n - m$, $\deg \Delta Q(P) = m - 1$.

Из уравнения (5) находим

$$f(t - h) = \left(Q_0(P) + \frac{\Delta Q(P)}{R(P)} \right) \zeta(t). \quad (6)$$

Если $n - m$ производных выходного сигнала объекта управления доступны измерению, то с помощью формулы (6) можно точно определить значение возмущения в момент времени $t - h$. Если такая возможность отсутствует, то для оценки производных воспользуемся наблюдателем [17]

$$\dot{z}(t) = F_0 z(t) + H_0(\zeta(t) - Lz(t)), \quad \bar{\zeta}(t) = Lz(t). \quad (7)$$

Здесь $z(t) \in R^{n-m}$; $\theta > 0$; $F_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-m-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $H_0^T = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{n-m} \\ \theta & \dots & \theta \end{bmatrix}$; $L = [1, 0, \dots, 0]$; числа b_1, \dots, b_{n-m}

выбираются так, чтобы матрица $F = F_0 + \bar{H}L$ была гурвицевой; $\bar{H}^T = [b_1, \dots, b_{n-m}]$.

Тогда формула для оценки возмущения будет иметь вид

$$\bar{f}(t - h) = \left(q_0^T z(t) + \frac{\Delta Q(P)}{R(P)} \right) \zeta(t), \quad (8)$$

где q_0 — вектор, компонентами которого являются коэффициенты оператора $Q_0(P)$, записанные в обратном порядке. Известно [17], что существует число θ_0 такое, что при $\theta \leq \theta_0$ и заданных ограничениях на функцию $f(t)$ ошибка оценки $|z(t) - z_0(t)|$ будет иметь требуемое значение, где $z_0^T(t) = [\zeta(t), \zeta'(t), \zeta''(t), \dots, \zeta^{n-m}(t)]$. Введем ошибку оценки

$$\varepsilon_1(t - h) = \bar{f}(t - h) - f(t - h).$$

Следующим этапом проектирования следящей системы является обеспечение прогноза возмущающего воздействия на величину запаздывания, так как имеется оценка значения $f(t - h)$, а требуется получить оценку величины $f(t)$. Для этой цели воспользуемся методом скользящей аппроксимации [16]

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} C_{r+1}^i \bar{f}(t - ih), \quad (9)$$

где C_{r+1}^i — биномиальные коэффициенты. Ошибка прогноза определяется формулой [16] $|\varepsilon_p| \leq h^{r+1} \sup_t |f^{r+1}(t)|$. Из этой формулы становится

ясно, для чего были введены ограничения на $(r + 1)$ -ю производную. Подставив в правую часть формулы (9) значение $\bar{f}(t - ih) = f(t - ih) + \varepsilon_1(t - ih)$, получим, что ошибка прогноза состоит из двух составляющих

$\varepsilon_p + \tilde{\varepsilon}_1(t)$, где $\tilde{\varepsilon}_1(t)$ — спрогнозированное значение ошибки $\varepsilon_1(t-h)$. Обозначим ошибку прогноза $\varepsilon_2(t)$. Следует отметить, что для работы прогнозирующего алгоритма (8) требуется время $h(r+1)$ для накопления информации. Поэтому это устройство начинает работать по истечении времени $h(r+1)$ после начала работы системы. Это время можно значительно уменьшить, если запаздывание h представить в виде $h = \beta\Delta t$, где β — целое число, и прогноз осуществлять следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t + \Delta t - h) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} C_{r+1}^i \bar{f}(t - h - (i-1)\Delta t); \\ \tilde{f}(t + 2\Delta t - h) &= C_{r+1}^1 \tilde{f}(t + \Delta t - h) + \\ &+ \sum_{i=2}^{r+1} (-1)^{i-1} C_{r+1}^i \bar{f}(t - h - (i-1)\Delta t); \\ &\dots\dots\dots (10) \\ \tilde{f}(t) &= \sum_{i=1}^{\beta-1} (-1)^{i-1} C_{r+1}^i \tilde{f}(t - h - i\Delta t) + \\ &+ \sum_{i=\beta}^{r+1} (-1)^{i-1} C_{r+1}^i \bar{f}(t - h - (i-1)\Delta t). \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что $r+1 > \beta$. Применение формулы (10) позволяет сократить время накопления информации до величины $2h$. Следует отметить, что для реализации (10) используется такое же число блоков запаздывания, как и в (9). Добавляются только блоки суммирования и усилители.

Для прогнозирования регулируемой переменной воспользуемся регулятором Смита с частичной компенсацией возмущения, для чего введем контур, математическая модель которого имеет вид

$$Q(P)y_v(t) = R(P)(u(t) - u(t-h) + \tilde{f}(t) - \bar{f}(t-h)). \quad (11)$$

Сложив (1) и (11), получим оценку прогноза регулируемой переменной

$$Q(P)\bar{y}(t+h) = R(P)(u(t) + f(t) + \varepsilon_2(t)). \quad (12)$$

Для оценки качества прогноза введем ошибку $e(t) = \bar{y}(t) - y(t)$ и составим для нее уравнение динамики, принимая во внимание (1) и (12):

$$Q(P)e(t) = R(P)\varepsilon_2(t-h). \quad (13)$$

Принимая во внимание гурвицевость полиномов $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$, можно сделать вывод об ограниченности ошибки $e(t)$ и вычислить максимально возможную ошибку в установившемся состоянии

$$e_y = \frac{R(0)}{Q(0)} \sup_t |\varepsilon_2(t)|. \quad \text{Таким образом, уменьшая величину } \theta \text{ в наблюдателе (7) и увеличивая значение } r \text{ в (9) или (10), можно получить достаточно}$$

малое значение e_y . Выполним параметризацию уравнения (12):

$$\begin{aligned} Q_m(P)\bar{y}(t+h) &= ku(t) + \frac{N_1(P)}{M(P)}\bar{y}(t+h) + \\ &+ \frac{N_2(P)}{M(P)}u(t) + \frac{S(P)}{M(P)}\varphi(t), \quad (14) \end{aligned}$$

где $\varphi(t) = R(P)(f(t) + \varepsilon_2(t))$; $\deg N_1(P) = \deg N_2(P) = n-2$, $\deg M(P) = n-1$; $\deg S(P) = \deg Q_m(P) = n-m$; полиномы $Q_m(\lambda)$, $M(\lambda)$, $S(\lambda)$ — гурвицевы; k — коэффициент при старшей производной оператора $R(P)$.

Составим уравнение для ошибки $e_g(t) = \bar{y}(t+h) - g(t)$, принимая во внимание (14):

$$Q_m(P)e_g(t) = ku(t) + \psi(t), \quad (15)$$

где $\psi(t) = \frac{N_1(P)}{M(P)}\bar{y}(t+h) + \frac{N_2(P)}{M(P)}u(t) + \frac{S(P)}{M(P)}\varphi(t) + Q_m(P)g(t)$. Получилась задача, исследованная в [11, 13].

Утверждение [13]. Пусть $f(t)$ — ограниченная функция и полином $R(\lambda)$ — гурвицев, тогда существуют числа μ_0, α такие, что при $\mu \leq \mu_0$ для любого $\delta_1 > 0$ алгоритм управления

$$u(t) = \frac{\alpha Q_m(P)}{(\mu P + 1)^\gamma - 1} (g(t) - \bar{y}(t+h)) \quad (16)$$

обеспечивает выполнение неравенства

$$|g(t) - \bar{y}(t+h)| < \delta_1.$$

Получилась система управления, состоящая из вспомогательного контура (4), наблюдателя производных (7), устройства (8), реализующего оценку возмущения, алгоритма прогноза (9) или (10), а также алгоритма управления (16). Оценка ошибки в целевом условии (2) следует из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} |y(t) - g(t-h)| &= |y(t) - \bar{y}(t) + \bar{y}(t) - g(t-h)| \leq \\ &\leq |y(t) - \bar{y}(t)| + |\bar{y}(t) - g(t-h)| < e_y + \delta_1. \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь e_y зависит от ошибок оценки $\bar{f}(t-h)$ и прогноза $\tilde{f}(t)$. Таким образом, величина δ в целевом условии (2) равна $e_y + \delta_1$.

Следящая система с неявной эталонной моделью

Для решения этой задачи используем вспомогательный контур (4), наблюдатель производных (7) и устройства, реализующие формулу (8) и алгоритм прогноза (9) или (10). Управляющее воздействие будем формировать в виде суммы двух составляющих $u(t) = u_y(t) + u_f(t)$, где

$$u_f(t) = -\tilde{f}(t),$$

$$\begin{aligned} R(P)Q_m(P)u_y(t) + R(P)u_y(t-h) &= \\ = Q(P)y(t) + k_m Q(P)g(t). \quad (18) \end{aligned}$$

Применим преобразование Лапласа к уравнениям (1) и (18). Тогда из (18) получим

$$u_y(\lambda) = \frac{1}{R(\lambda)(Q_m(\lambda) + e^{-\lambda h})} (Q(\lambda)y(\lambda) + k_m Q(\lambda)g(\lambda)).$$

Подставив значения $u_y(\lambda)$ и $u_f(\lambda)$ в уравнение

$$y(\lambda) = \frac{R(\lambda)e^{-\lambda h}}{Q(\lambda)} (u(\lambda) + f(\lambda)),$$

получим

$$y(\lambda) = \frac{k_m e^{-\lambda h}}{Q_m(\lambda)} g(\lambda) + \varepsilon_f(\lambda),$$

где $\varepsilon_f(\lambda) = \frac{(Q_m(\lambda) + e^{-\lambda h})R(\lambda)e^{-\lambda h}}{Q_m(\lambda)Q(\lambda)} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda))$. По-

лучили следящую систему управления с неявной эталонной моделью $Q_m(P)y_m(t) = k_m g(t-h)$. Значение ошибки можно уменьшать, увеличивая число r в прогнозирующем устройстве и уменьшая θ в наблюдателе производных.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим числовые примеры.

Примеры

1. Рассмотрим объект управления, математическая модель которого описывается уравнением

$$(P^3 + P^2 + 2P + 1)y(t) = (P + 2)(u(t-2) + f(t-2)). \quad (19)$$

Уравнения вспомогательного контура (4) и наблюдателя производных (7) зададим в виде

$$(P^3 + P^2 + 2P + 1)\bar{y}(t) = (P + 2)u(t-2); \quad (20)$$

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) + \frac{1}{\theta}(\zeta(t) - z_1(t)); \quad \dot{z}_2(t) = \frac{2}{\theta^2}(\zeta(t) - z_1(t));$$

$$\zeta(t) = y(t) - \bar{y}(t); \quad \theta = 0,02.$$

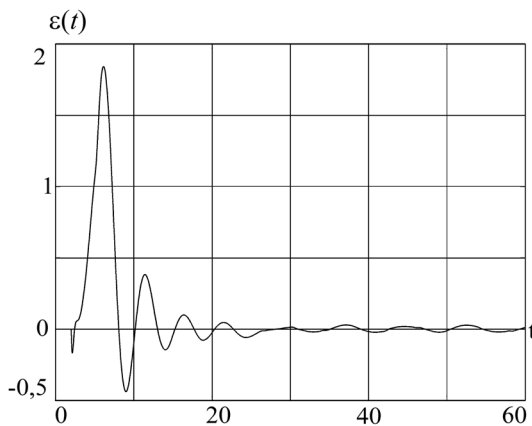


Рис. 1. Переходный процесс по ошибке слежения

Формула (8) для оценки возмущения запишется следующим образом:

$$\tilde{f}(t-2) = \dot{z}_2(t) - z_2(t) + 4z_1(t) + \frac{7}{P+2}\zeta(t). \quad (21)$$

Прогнозирующее устройство реализуется в соответствии с формулой (10). Выберем $r = 3$, $\beta = 4$, $\Delta t = 0,5$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t-1,5) &= 4\tilde{f}(t-2) - \\ &- 6\tilde{f}(t-2,5) + 4\tilde{f}(t-3) - \tilde{f}(t-3,5); \\ \tilde{f}(t-1) &= 4\tilde{f}(t-1,5) - \\ &- 6\tilde{f}(t-2) + 4\tilde{f}(t-2,5) - \tilde{f}(t-3); \\ \tilde{f}(t-0,5) &= 4\tilde{f}(t-1) - \\ &- 6\tilde{f}(t-1,5) + 4\tilde{f}(t-2) - \tilde{f}(t-2,5); \\ \tilde{f}(t) &= 4\tilde{f}(t-0,5) - \\ &- 6\tilde{f}(t-1) + 4\tilde{f}(t-1,5) - \tilde{f}(t-2). \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (11), предназначенное для прогноза регулируемой переменной, запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} (P^3 + P^2 + 2P + 1)y_v(t) &= \\ &= (P + 2)(u(t) - u(t-h) + \tilde{f}(t) - \tilde{f}(t-2)). \end{aligned}$$

Уравнение управляющего устройства (16) принимает вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{P^2 + 4P + 4}{(0,05P + 1)^2 - 1} (g(t) - \bar{y}(t+h)); \\ \bar{y}(t+h) &= y(t) + y_v(t). \end{aligned}$$

На рис. 1–4 представлены результаты моделирования при следующих входных сигналах: возмущение $f(t) = \sin 0,2t + \sin 0,13t$, задающее воздействие, которое необходимо отслеживать, $g(t) = 2\sin 0,8t + 2\sin 0,3t$.

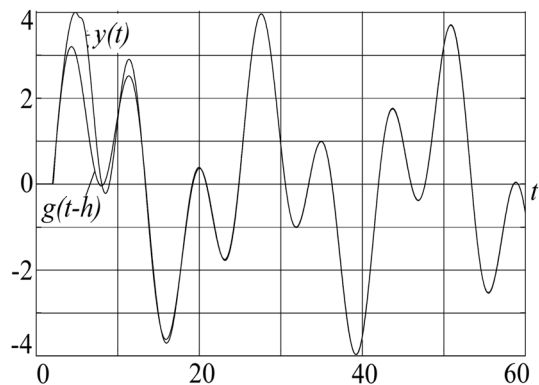


Рис. 2. График изменения выхода и задающего воздействия

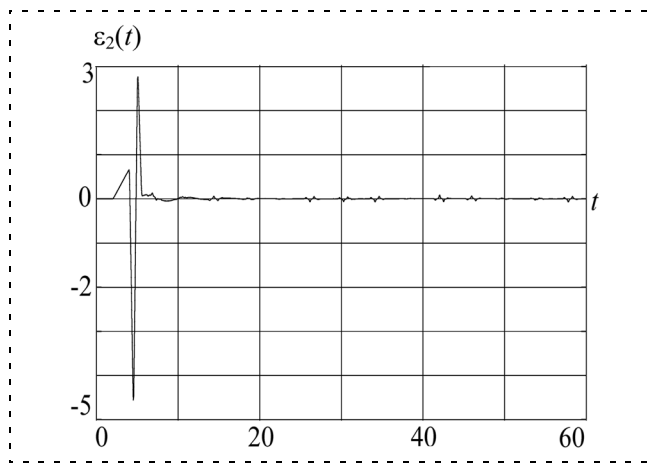


Рис. 3. Ошибка прогноза возмущения

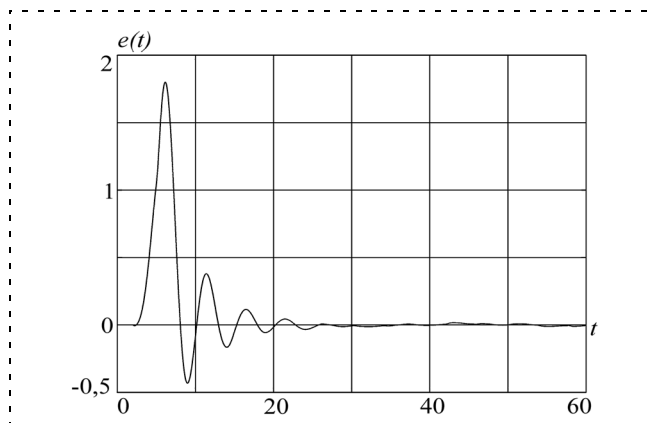
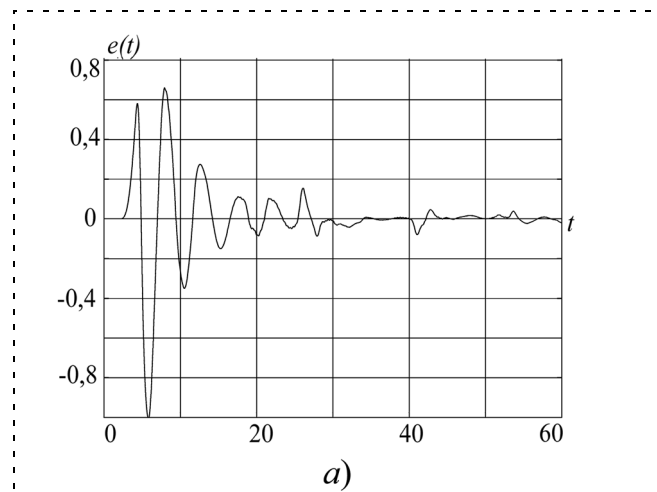
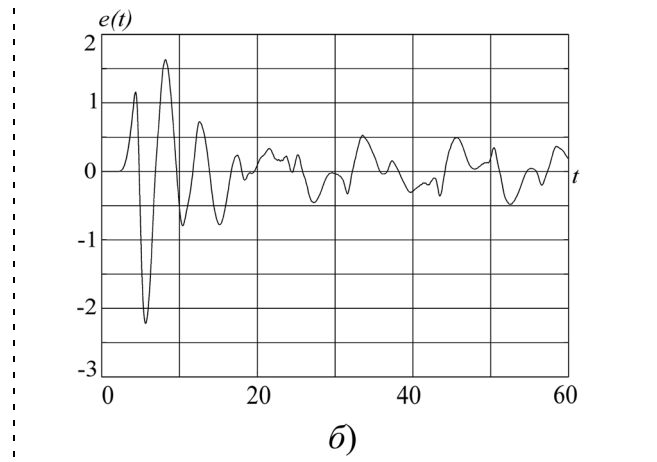


Рис. 4. Ошибки прогноза регулируемой переменной



а)



б)

Рис. 5. Ошибка слежения

На рис. 1 представлен переходный процесс по ошибке слежения $\varepsilon(t) = y(t) - g(t - 2)$, которая не превышает величину 0,04 при $t > 25$ с. Переходный процесс по ошибке прогноза возмущения $\varepsilon_2(t) = \tilde{f}(t - 2) - \bar{f}(t - 2)$ изображен на рис. 3. График изменения ошибки прогноза регулируемой переменной $e(t) = y(t) - \bar{y}(t - 2)$ представлен на рис. 4. Ошибки прогноза возмущения и регулируемой величины через 25 с не превышают значений 0,05 и 0,015 соответственно.

2. Рассмотрим пример построения следящей системы управления для объекта (19) с неявной эталонной моделью, уравнение которой имеет вид

$$(P^2 + 4P + 4)y_m(t) = 5g(t - 2).$$

Возьмем устройства, которые описываются уравнениями (20)–(22), предназначенные для оценки и прогноза внешнего возмущения. Тогда уравнения управляющего устройства (18) запишутся следующим образом:

$$u(t) = u_y(t) + u_f(t); \quad u_f(t) = -\tilde{f}(t);$$

$$(P + 2)^3 u_y(t) + (P + 2)u_y(t - h) = (P^3 + P^2 + 2P + 1)y(t) + 5g(t).$$

На рис. 5, а представлен график изменения ошибки $e(t) = y(t) - y_m(t)$, когда параметры входных сигналов такие же, как в предыдущем примере. На рис. 5, б возмущение формируется в виде $f(t) = \sin 0,5t + \sin 0,2t$, т. е. не выполнено условие теоремы Котельникова. Если в первом случае ошибка не превышает значения 0,05 при $t > 30$ с, то во втором случае она резко возрастает.

Заключение

Предложены два принципа построения следящих систем управления для объектов с запаздывающим управлением, когда параметры объекта известны. Полученные системы управления позволяют частично компенсировать влияние внешних возмущений на регулируемую переменную, если максимальный спектр входного воздействия и запаздывание связаны соотношением, полученным в соответствии с теоремой Котельникова. Это ограничение связано с выбранным алгоритмом прогноза возмущающего воздействия.

Основным недостатком приведенных систем управления является их сложность, если осуществлять их непрерывную реализацию. Однако автору

не известны работы, в которых решается задача слежения для объектов с запаздывающим управлением при наличии внешнего возмущения, когда необходимо отслеживать быстро изменяющийся сигнал. Кроме того, для современных средств вычислительной техники этот недостаток не существен.

Список литературы

1. **Щипанов Г. В.** Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // А и Т. 1939. № 1. С. 49—66.
2. **Петров Б. Н.** О реализации условий инвариантности // Тр. 1-го Всесоюзного совещ. по теории инвариантности. Киев: Изв. отд. техн. наук АН УССР. 1959. С. 59—80.
3. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научной лит-ры. Н. Ф. Бочкаревой, 2006.
4. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
5. **Никифоров В. О.** Наблюдатели внешних возмущений. Ч. 1. Объекты с известными параметрами // А и Т. 2004. № 10. С. 13—24.
6. **Никифоров В. О.** Наблюдатели внешних возмущений. Ч. 2. Объекты с неизвестными параметрами. // А и Т. 2004. № 11. С. 40—48.
7. **Никифоров В. О.** Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 69—73.
8. **Бобцов А. А.** Алгоритм робастного управления линейным объектом по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 2. С. 93—97.
9. **Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В.** Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для неминимально фазового объекта // Тр. 5-й научно-техн. конф. Мехатроника, автоматизация, управление. СПб., 2008. С. 37—40.
10. **Бобцов А. А.** Алгоритмы управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // А и Т. 2008. № 9. С. .
11. **Цыкунов А. М.** Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // А и Т. 2007. № 7. С. 103—115.
12. **Цыкунов А. М.** Алгоритм робастного управления нестационарным объектом с компенсацией возмущения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 33—40.
13. **Цыкунов А. М.** Алгоритм робастного управления линейным динамическим объектом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 8. С. 7—12.
14. **Фургат И. Б., Цыкунов А. М.** Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. 2008. № 5. С. 2—7.
15. **Гурецкий Х.** Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение. 1974.
16. **Цыпкин Я. З.** Скользящая аппроксимация и принцип поглощения // Докл. АН. 1997. Т. 357. № 6. С. 750—751.
17. **Khalil H. K.** Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models // IEEE Trans. on Automatic Control. 1996. Vol. 41. N 2. P. 177—188.

УДК 62.50

А. В. Ушаков, д-р техн. наук, проф.,
А. Ю. Цвентарный, аспирант,
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики
Taifyn@nm.ru

Формирование полиномиальной динамической модели при сложном экзогенном стохастическом воздействии

Решается задача формирования банка аналитических представлений дисперсий выхода и ошибки полиномиальных динамических моделей непрерывных систем, функционирующих в условиях сложного экзогенного стохастического воздействия. Результаты иллюстрируются алгоритмом синтеза модального управления непрерывным объектом с заданными дисперсиями ошибки или выхода.

Ключевые слова: полиномиальная динамическая модель, модальное управление, сложное экзогенное стохастическое воздействие, относительные дисперсии и частоты, асимптотическое представление

При проектировании систем управления с желаемыми показателями качества в переходном и установившемся режимах широкое применение находят методы, основанные на обеспечении необходимой

структуры собственных значений (мод) матрицы состояния синтезируемой системы. Наиболее полно данный подход реализован в современных методах модального управления (МУ), основанных на концепции векторного и матричного подобия, что позволяет конструировать алгоритмическое обеспечение МУ, основанное на решении матричного уравнения Сильвестра.

Постановка задачи. В статье рассматриваются вопросы формирования банка аналитических представлений матриц дисперсий выхода, состояния и ошибки полиномиальных динамических моделей (ПДМ) типа "одномерный вход—одномерный выход" (ОВОВ) с различными распределениями мод, параметризованными характеристической частотой ω_0 для порядков $n = 1..5$, в условиях действия на эти ПДМ сложных экзогенных стохастических воздействий (СЭСВ), стационарных в широком смысле [1, 2]. Возможны две реализационные версии СЭСВ: мультипликативного типа (МТ) и аддитивного типа (АТ).

СЭСВ мультипликативного типа представляет собой последовательное соединение возбуждаемого непрерывным "белым шумом" $w(t)$ интенсивности N формирующего фильтра (ФФ), на выходе которого наблюдается "экспоненциально коррелированный" окрашенный шум (ЭКОШ) $\xi(t)$ с дисперсией D_ξ , который, в свою очередь, подается на вход следую-

шего $\Phi\Phi$, представляющего собой, в случае подачи на его вход "белого шума", формирователь стационарного в широком смысле стохастического воздействия типа окрашенный шум "регулярная качка" (ОШРК) $\eta(t)$ с дисперсией D_η . Формирователь СЭСВ МТ представляется последовательным соединением формирователя ЭКОШ и формирователя ОШРК, имеющих соответственно передаточные функции вида

$$\Phi_{\text{ЭКОШ}}(s) = \frac{\xi(s)}{w(s)} = \frac{K_\Phi \Omega_\Phi}{s + \Omega_\Phi}; \quad (1)$$

$$\Phi_{\text{ОШРК}}(s) = \frac{\eta(s)}{\xi(s)} = \frac{\Omega_K^2}{s^2 + 2\zeta\Omega_K s + \Omega_K^2}, \quad (2)$$

и имеет передаточную функцию вида

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{СЭСВ}}(s) &= \Phi_{\text{ЭКОШ}}(s)\Phi_{\text{ОШРК}}(s) = \\ &= \frac{K_\Phi \Omega_\Phi}{s + \Omega_\Phi} \frac{\Omega_K^2}{s^2 + 2\zeta\Omega_K s + \Omega_K^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где K_Φ , Ω_Φ — соответственно коэффициент усиления и эффективная полоса пропускания $\Phi\Phi$ ЭКОШ; Ω_K — эффективная полоса пропускания $\Phi\Phi$ ОШРК; ζ — коэффициент демпфирования $\Phi\Phi$ ОШРК.

Примером реализации СЭСВ МТ является движение пространственного конструктивного элемента, планарная модель которого представляет собой слабодемпфированное колебательное звено, деформируемого под воздействием ветра, модельно описываемого ЭКОШ, при решении задачи контроля его перемещения, слежения или стабилизации в пространстве. Следует заметить, что в силу линейной природы связей дисперсий D_ξ , D_η и интенсивности N конкретные значения дисперсий можно трансформировать в значения интенсивности N , а потому, в общем случае, положить значение коэффициента K_Φ равным единице.

СЭСВ АТ представляет собой параллельное соединение моделей типа ЭКОШ и ОШРК с передаточными функциями $\Phi_{\text{ЭКОШ}}(s)$ (1) и $\Phi_{\text{ОШРК}}(s)$ (2) соответственно и представимо в виде передаточной функции вида

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{СЭСВ}}(s) &= \Phi_{\text{ЭКОШ}}(s) + \Phi_{\text{ОШРК}}(s) = \\ &= \frac{K_\Phi \Omega_\Phi}{s + \Omega_\Phi} + \frac{\Omega_K^2}{s^2 + 2\zeta\Omega_K s + \Omega_K^2} = \\ &= \frac{s^2 K_\Phi \Omega_\Phi + \zeta\Omega_K (2\zeta K_\Phi \Omega_\Phi + \Omega_K) + \Omega_K^2 \Omega_\Phi (K_\Phi + 1)}{(s^2 + 2\zeta\Omega_K s + \Omega_K^2)(s + \Omega_\Phi)}. \end{aligned}$$

Примером реализации СЭСВ АТ является движение пространственного конструктивного элемен-

та, установленного на некотором плавсредстве, возмущаемом волнением водной среды, при решении задачи контроля его перемещения, слежения или стабилизации в пространстве. При этом дополнительное движение конструктивного элемента порождается ветровым воздействием.

Предметом дальнейших исследований выбран случай СЭСВ МТ, модельно описываемых в форме (3). Следует заметить, что предложенная схема формирования СЭСВ МТ на входе ПДМ обладает универсальностью. Так, устремление Ω_K и Ω_Φ к бесконечности приводит к формирователю воздействия типа "белый шум" $w(t)$ интенсивности N на входе ПДМ; устремление только Ω_K к бесконечности приводит к случаю формирования на входе ПДМ стохастического экзогенного воздействия $\xi(t)$ типа ЭКОШ; устремление только Ω_Φ приводит к случаю формирования на входе ПДМ стохастического экзогенного воздействия $\eta(t)$ типа ОШРК.

Формирование банка аналитических представлений матриц дисперсий выхода, состояния и ошибки полиномиальных динамических моделей различных размерностей. В решаемой задаче используется модельное представление формирователя СЭСВ с передаточной функцией (3), векторно-матричное описание (ВМО) которого [3] имеет вид

$$\dot{z}_\Phi(t) = \Gamma_\Phi z_\Phi(t) + G_\Phi w(t), \quad \eta(t) = P_\Phi z_\Phi(t), \quad (4)$$

где $z_\Phi(t)$, $w(t)$, $\eta(t)$ — соответственно векторы состояния, входного стохастического воздействия типа "белый шум" и выходного сигнала СЭСВ-типа; Γ_Φ , G_Φ , P_Φ — соответственно матрицы состояния, входа и выхода модели формирователя СЭСВ; $\dim(z_\Phi(t)) = l$, $\dim(w(t)) = \dim(\eta(t)) = m$; $\dim(\Gamma_\Phi) = l \times l$, $\dim(P_\Phi) = m \times l$, $\dim(G_\Phi) = l \times m$. В дальнейшем будем полагать $m = 1$.

Аналитическое представление ПДМ в исходном виде задается передаточной функцией

$$\Phi_{\text{ПДМ}}(s) = \frac{y(s)}{\eta(s)} = \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^n v_i \omega_0^i s^{n-i}} = \frac{v_n \omega_0^n}{V(s, \omega_0)}, \quad (5)$$

в которой $y(s)$ — лапласов образ выходной переменной $y(t)$, относительно которой передаточные функции модальной модели и проектируемой методами МУ системы совпадают; $\eta(s)$ — входное стохастическое воздействие; ω_0 — характеристическая частота ПДМ; $V(s, \omega_0)$ — желаемый характеристический полином матриц состояния ПДМ и проектируемой системы. Отметим также, что форма (5) позволяет при решении задачи формирования аналитических представлений показателей ПДМ положить $\omega_0 = 1$ с последующим переходом в них от

$$v_i \text{ к } v_i \omega_0^i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Задача решается в общем виде, инвариантном относительно конкретных распределений (Баттерворта, Ньютона и др.) мод характеристического полинома $V(s, \omega_0)$.

Переход от передаточной функции (5) к векторно-матричному описанию дает аналитическое представление ПДМ, записываемое в форме

$$\begin{aligned} \dot{z}_M(t) &= \Gamma_M z_M(t) + G_M g(t); z_M(0) \equiv 0; \\ y(t) &= P_M z_M(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $z_M(t)$, $g(t)$, $y(t)$, $\varepsilon(t)$ — соответственно векторы состояния, экзогенного входного воздействия, выхода и ошибки ПДМ; Γ_M , G_M , P_M — соответственно матрицы состояния, входа и выхода ПДМ; $\dim(z_M(t)) = n$, $\dim(g(t)) = \dim(y(t)) = \dim(\varepsilon(t)) = m$, $\dim(\Gamma_M) = n \times n$, $\dim(G_M) = n \times m$, $\dim(P_M) = m \times n$. ВМО ПДМ для матрицы Γ_M использует сопровождающий характеристический полином $V(s, \omega_0)$ форму представления. Так как в поставленной задаче исследуются только стохастические составляющие процессов, то все стохастические переменные полагаются центрированными, начальное состояние ПДМ нулевым ($z_M(0) \equiv 0$), а $g(t) = \eta(t)$.

В основу технологии получения банка пользовательских аналитических представлений матриц дисперсий выхода и ошибки полиномиальных динамических моделей различных размерностей кладется [1, 4] уравнение Ляпунова относительно матрицы дисперсий вектора состояния ПДМ, формируемой для случая стохастического экзогенного воздействия, стационарного в широком смысле типа "белый шум". Это обстоятельство требует введения в рассмотрение агрегированной системы с вектором состояния $\tilde{z} = [z_M^T \ z_\Phi^T]^T$.

ВМО агрегированной системы с вектором состояния $\tilde{z}(t)$ и выходами $z_M(t)$, $z_\Phi(t)$, $y(t)$, $\varepsilon(t)$, $\eta(t)$ строится на основании агрегирования ВМО (6) и (4). Используя (6) и (4), можно построить следующую цепочку векторно-матричных равенств

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_M \\ \dot{z}_\Phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Gamma_M z_M(t) + G_M \eta(t) \\ \Gamma_\Phi z_\Phi(t) + G_\Phi w(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_M z_M(t) + G_M P_\Phi z_\Phi(t) + 0 w(t) \\ 0 z_M(t) + \Gamma_M z_\Phi(t) + G_\Phi w(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_M & G_M P_\Phi \\ 0 & \Gamma_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_M(t) \\ z_\Phi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_\Phi \end{bmatrix} w(t); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} z_M(t) &= I z_M(t) + 0 z_\Phi(t); z_\Phi(t) = 0 z_M(t) + I z_\Phi(t); \\ y(t) &= P_M z_M(t) + 0 z_\Phi(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= g(t) - y(t) = \eta(t) - y(t) = -P_M z_M(t) + P_\Phi z_\Phi(t); \\ \eta(t) &= 0 z_M(t) + P_\Phi z_\Phi(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Агрегированная система с агрегированным вектором состояния $\tilde{z}(f)$ на основании (7), (8) получает представление

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{\Gamma} \tilde{z}(t) + \tilde{G} w(t); \quad (9)$$

$$z_M(t) = \tilde{P}_M \tilde{z}(t); y(t) = \tilde{P}_y \tilde{z}(t),$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{P}_\varepsilon \tilde{z}(t); z_\Phi(t) = \tilde{P}_\Phi \tilde{z}(t); \eta(t) = \tilde{P}_\eta \tilde{z}(t), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \Gamma_M & G_M P_\Phi \\ 0 & \Gamma_\Phi \end{bmatrix}; \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_\Phi \end{bmatrix}; \\ \tilde{P}_M &= [I \ 0]; \tilde{P}_y = [P_M \ 0]; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tilde{P}_\varepsilon = [-P_M \ P_\Phi]; \tilde{P}_\Phi = [0 \ I]; \tilde{P}_\eta = [0 \ P_\Phi]. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что агрегированная система (9), (10) является непрерывной динамической системой, возбуждаемой стохастическим экзогенным воздействием, стационарным в широком смысле типа "белый шум" $w(t)$. Для матрицы дисперсий этой системы $\tilde{D}_z \stackrel{\Delta}{=} M\{\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)\}$ оказывается справедливым уравнение Ляпунова

$$\tilde{\Gamma} \tilde{D}_z + \tilde{D}_z \tilde{\Gamma}^T = -\tilde{G} N \tilde{G}^T. \quad (13)$$

С учетом выражений (11) и (12) можно получить следующие выражения для вычисления дисперсий выхода и ошибки:

$$D_y = \tilde{P}_y \tilde{D}_z \tilde{P}_y^T, D_\varepsilon = \tilde{P}_\varepsilon \tilde{D}_z \tilde{P}_\varepsilon^T.$$

Матричное уравнение (13) обнаруживает возможность его декомпозиции на четыре матричных уравнения типа Ляпунова в связи с возможностью декомпозиции на четыре компоненты матрицы \tilde{D}_z . Действительно, в силу агрегативной структуры вектора $\tilde{z}(t)$ становится справедливой следующая цепочка векторно-матричных равенств:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_z &= M\{\tilde{z}(t)\tilde{z}^T(t)\} = M\left\{\begin{bmatrix} z_M \\ z_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_M^T & z_\Phi^T \end{bmatrix}\right\} = \\ &= M\left\{\begin{bmatrix} z_M z_M^T & z_M z_\Phi^T \\ z_\Phi z_M^T & z_\Phi z_\Phi^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} D_M & D_{M\Phi} \\ D_{M\Phi}^T & D_\Phi \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $D_M = M\{z_M z_M^T\}$, $D_\Phi = M\{z_\Phi z_\Phi^T\}$, $D_{M\Phi} = M\{z_M z_\Phi^T\}$.

Если в уравнении Ляпунова (13) для матрицы дисперсии \tilde{D}_z учесть представления (14), а для матрицы агрегированной системы учесть (11), то (13) запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_M & G_M P_\Phi \\ 0 & \Gamma_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_M & D_{M\Phi} \\ D_{M\Phi}^T & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_M & D_{M\Phi} \\ D_{M\Phi}^T & D_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_M^T & 0 \\ P_\Phi^T G_M^T & \Gamma_\Phi^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -G_\Phi N G_\Phi^T \end{bmatrix}.$$

Путем простого перемножения матричных компонент в приведенном выражении нетрудно получить три матричных уравнения Ляпунова, необходимых для дальнейших расчетов:

$$\Gamma_\Phi D_\Phi + D_\Phi \Gamma_\Phi^T = -G_\Phi N G_\Phi^T;$$

$$\Gamma_M D_{M\Phi} + D_{M\Phi} \Gamma_\Phi^T = -G_M P_\Phi D_\Phi;$$

$$\Gamma_M D_M + D_M \Gamma_M^T = -G_M P_\Phi D_{M\Phi}^T - D_{M\Phi} P_\Phi^T G_M^T.$$

Приведенные выше три матричных уравнения записаны в порядке последовательности их решения, так как решение предыдущего формирует правую часть последующего уравнения. Выражения для дисперсий выхода D_y и ошибки D_ε динамической модели желаемого поведения проектируемой системы строятся различными способами. В силу выражений (11), (12) для вычисления D_y достаточно матрицы дисперсий D_M , а для вычисления D_ε необходимо формирование матрицы \tilde{D}_z .

Следует заметить, что для придания аналитическим представлениям скалярных показателей ПДМ в виде дисперсий ее выхода D_y и ошибки D_ε как функции характеристической частоты ω_0 ПДМ универсализма целесообразно перейти к относительным представлениям дисперсий, задав их в форме

$$\bar{D}_y = D_y D_\eta^{-1}; \quad \bar{D}_\varepsilon = D_\varepsilon D_\eta^{-1},$$

и относительным представлениям частот, задав их в форме

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 \Omega_k^{-1}; \quad \bar{\Omega}_\Phi = \Omega_\Phi \Omega_k^{-1}; \quad \bar{\Omega}_k = \Omega_k \Omega_k^{-1} = 1, \quad (15)$$

где \bar{D}_y , \bar{D}_ε , $\bar{\omega}_0$, $\bar{\Omega}_\Phi$, $\bar{\Omega}_k$ — соответственно относительные дисперсии выхода, ошибки, характеристическая частота, сопрягающая частота ФФ ЭКОШ, сопрягающая частота ФФ ОШРК.

В итоге пользователю будут предложены аналитические выражения вида

$$\begin{aligned} \bar{D}_y &= \bar{D}_y(v_i(i = \overline{1, n}); \bar{\Omega}_\Phi; \bar{\omega}_0), \\ \bar{D}_\varepsilon &= \bar{D}_\varepsilon(v_i(i = \overline{1, n}); \bar{\Omega}_\Phi; \bar{\omega}_0). \end{aligned} \quad (16)$$

В качестве примера авторами приведены значения относительных дисперсий выхода \bar{D}_y и ошибки \bar{D}_ε в форме (16) для ПДМ порядка $n = 1$, имеющие следующее представление:

$$\begin{aligned} \bar{D}_y &= \frac{V_1 \bar{\omega}_0 (2\zeta + (V_1 \bar{\omega}_0 + \bar{\Omega}_\Phi)(V_1 \bar{\omega}_0 + 2\zeta)(\bar{\Omega}_\Phi + \zeta))}{(V_1 \bar{\omega}_0 + \bar{\Omega}_\Phi)(\bar{\Omega}_\Phi + \zeta)(V_1^2 \bar{\omega}_0^2 + 2\zeta V_1 \bar{\omega}_0 + 1)}; \\ \bar{D}_\varepsilon &= \frac{\left((V_1 \bar{\omega}_0 + \bar{\Omega}_\Phi)(\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta)(V_1^2 \bar{\omega}_0^2 + 2\zeta V_1 \bar{\omega}_0 + 1) - \right. \\ &\quad \left. - V_1 \bar{\omega}_0 \{ 2\zeta + (V_1 \bar{\omega}_0 + \bar{\Omega}_\Phi)(V_1 \bar{\omega}_0 + 2\zeta)(\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta) \} \right)}{(V_1 \bar{\omega}_0 + \bar{\Omega}_\Phi)(\bar{\Omega}_\Phi + \zeta)(V_1^2 \bar{\omega}_0^2 + 2\zeta V_1 \bar{\omega}_0 + 1)}. \end{aligned}$$

При этом следует учитывать, что общий порядок n_Σ системы из двух ФФ и ПДМ рассчитывается как

$$n_\Sigma = n_{\text{ФФ}} + n_{\text{ПДМ}},$$

где $n_{\text{ФФ}} = 3$ — общий порядок системы из двух ФФ ЭКОШ и ОШРК; $n_{\text{ПДМ}} = n$ — порядок ПДМ.

Приведенные выражения для дисперсий выхода \bar{D}_y и ошибки \bar{D}_ε в форме (16) обнаруживают в силу своей громоздкости заметные пользовательские трудности, которые могут быть существенно уменьшены, если выделить из них асимптотические компоненты. При введении в пользовательскую практику асимптотических компонентов авторы базируются на следующих соображениях. СЭСВ может нести в себе различную сигнальную нагрузку, порождающую два типа системных задач.

Первый тип задачи имеет место, когда СЭСВ является полезным сигналом, который должен быть воспроизводим на выходе системы с минимальным отклонением от задающего воздействия, т. е. с минимальным значением дисперсии ошибки \bar{D}_ε , что достигается максимизацией характеристической частоты ПДМ как в относительном $\bar{\omega}_0$, так и в абсолютном ω_0 представлениях. Таким образом, аналитическое выражение для асимптотического значения $\bar{D}_{\varepsilon A} = \bar{D}_{\varepsilon A}(\bar{\omega}_0)$, удовлетворяющего условию $\lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \infty} \bar{D}_{\varepsilon A}(\bar{\omega}_0) = 0$, будет представлять собой отношение членов числителя и знаменателя исходного выражения для \bar{D}_ε , содержащих $\bar{\omega}_0$ в наивысших степенях.

Второй тип задачи имеет место, когда СЭСВ является помехой, которая не должна проявляться на

выходе системы, т. е. стохастическая компонента выхода системы должна характеризоваться минимальной (максимально приближенной к нулю) дисперсией, что достигается минимизацией характеристической частоты ПДМ как в относительном $\bar{\omega}_0$, так и в абсолютном ω_0 представлениях. Таким образом, аналитическое выражение для асимптотического значения $\bar{D}_{yA} = \bar{D}_{yA}(\bar{\omega}_0)$, удовлетворяющего условию $\lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \infty} \bar{D}_{yA}(\bar{\omega}_0) = 0$, будет представлять собой отношение членов числителя и знаменателя исходного выражения для \bar{D}_y , содержащих $\bar{\omega}_0$ в наименьших степенях.

Выражения для асимптотических представлений $\bar{D}_{\varepsilon A}(\bar{\omega}_0)$, $\bar{D}_{yA}(\bar{\omega}_0)$ соответственно дисперсий $\bar{D}_\varepsilon(\bar{\omega}_0)$, $\bar{D}_y(\bar{\omega}_0)$ для ПДМ порядка $n = 1 \dots 3$ сведены в таблицу.

Сведенные в таблицу выражения являются аналитической основой для построения алгоритма синтеза систем управления при СЭСВ методами МУ [5].

Алгоритм модального управления динамическими объектами типа "одномерный вход-выход" при сложном экзогенном стохастическом воздействии.

1. Сформировать модель формирующей цепи в виде (3) последовательного соединения звеньев, описываемых выражениями (1), (2) и характеризующихся параметрами ζ , Ω_k и Ω_Φ [6].

2. Сформировать требования к показателям качества проектируемой системы в переходном и установившемся режимах, при этом для установившегося режима принять режим воспроизведения или парирования СЭСВ. В зависимости от постановки указанных задач сформировать требования к абсолютным значениям дисперсий $D_\varepsilon \leq D_{\varepsilon R}$ ошибки и выхода $D_y \leq D_{yR}$ и осуществить переход к их относительным аналогам $\bar{D}_\varepsilon \leq \bar{D}_{\varepsilon R}$ и $\bar{D}_y \leq \bar{D}_{yR}$.

Асимптотические представления дисперсий

| Порядок ПДМ | $\bar{D}_{\varepsilon A}(\bar{\omega}_0)$ | $\bar{D}_{yA}(\bar{\omega}_0)$ |
|-------------|---|---|
| 1 | $\frac{\bar{\Omega}_\Phi}{\bar{\omega}_0^2(\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta)}$ | $\frac{2\zeta V_1 \bar{\omega}_0 (\bar{\Omega}_\Phi (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta) + 1)}{\bar{\Omega}_\Phi (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta)}$ |
| 2 | $\frac{\bar{\Omega}_\Phi V_1^2}{V_2^2 \bar{\omega}_0^2 (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta)}$ | $\frac{2\zeta V_2 \bar{\omega}_0 (\bar{\Omega}_\Phi (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta) + 1)}{V_1 \bar{\Omega}_\Phi (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta)}$ |
| 3 | $\frac{\bar{\Omega}_\Phi V_2^2}{V_3^2 \bar{\omega}_0^2 (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta)}$ | $\frac{2\zeta V_1 V_3 \bar{\omega}_0 (\bar{\Omega}_\Phi (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta) + 1)}{(V_1 V_2 - V_3) \bar{\Omega}_\Phi (\bar{\Omega}_\Phi + 2\zeta)}$ |

3. Оценить значение относительной характеристической частоты $\bar{\omega}_0$ в зависимости от задачи из условия*

$$\bar{\omega}_0 = \arg\{\bar{D}_{\varepsilon A}(n, \bar{\omega}_0, \zeta, \bar{\Omega}_\Phi, \bar{\Omega}_k) \leq \bar{D}_{\varepsilon R}\} \vee \arg\{\bar{D}_{yA}(n, \bar{\omega}_0, \zeta, \bar{\Omega}_\Phi, \bar{\Omega}_k) \leq \bar{D}_{yR}\},$$

где указанная зависимость $\bar{D}_{\varepsilon A}$ и \bar{D}_{yA} от $\{n, \bar{\omega}_0, \zeta, \bar{\Omega}_\Phi, \bar{\Omega}_k\}$ следует из (15), (16) и проиллюстрирована в таблице.

4. Сформировать абсолютное значение характеристической частоты $\omega_0 = \bar{\omega}_0 \Omega_k$.

5. Сформировать характеристический полином матрицы состояния ПДМ в форме $D(s, \omega_0) = s^n +$

$$+ \sum_{i=1}^n v_i \omega_0^i s^{n-i}.$$

6. Сформировать $(n \times n)$ -матрицу Γ состояния модальной модели с характеристическим полиномом $\det(sI - \Gamma) = D(s, \omega_0) = s^n + \sum_{i=1}^n v_i \omega_0^i s^{n-i}$ в одном

из канонических базисов.

из канонических базисов.

7. Построить (A, B, C) — векторно-матричное представление объекта управления (ОУ) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$; $y(t) = Cx(t)$, где x, u, y — соответственно векторы состояния, управления и выхода; (A, B, C) — соответственно матрицы состояния, управления и выхода ОУ; (A, B) — полностью управляемая пара матриц; (A, C) — полностью наблюдаемая пара матриц.

8. Завершить формирование ПДМ с парой матриц (Γ, H) , где $\Gamma = \Gamma(\Omega_\Phi, \Omega_k, \zeta, \omega_0)$, $H = \arg(\text{observ}(\Gamma, H) \& \dim H = \dim(B^T))$. Здесь $\text{observ}(\Gamma, H)$ означает наблюдаемость пары матриц Γ и H .

9. В предположении справедливости гипотезы о непосредственной измеримости экзогенного воздействия $g(t) = \eta(t)$ и вектора состояния $x(t)$ сформировать сигнал управления в виде $u(t) = K_g g(t) - Kx(t)$, где матрицы K, K_g вычислить в силу соотношений

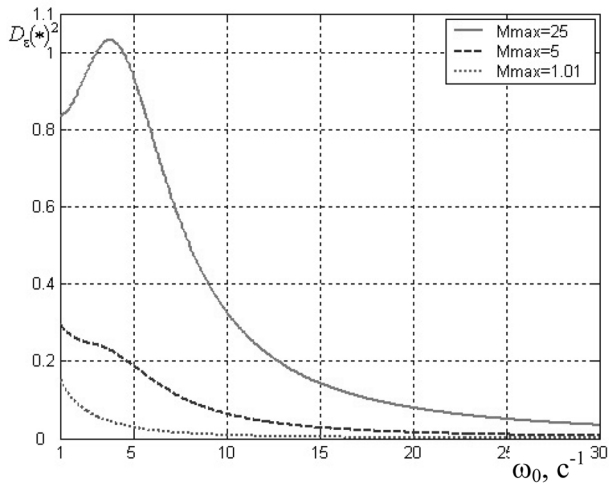
$$K = HM^{-1}, M = \arg\{M\Gamma - AM = -BH\};$$

$$K_g = \arg\{-CM\Gamma^{-1}M^{-1}BK_g = I\} = -(CM\Gamma^{-1}M^{-1}B)^{-1}.$$

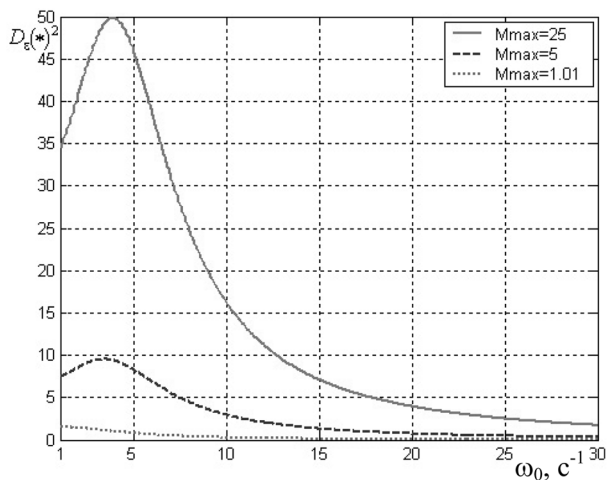
10. Построить (F, G, C) — векторно-матричное описание проектируемой системы $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t)$; $y(t) = Cx(t)$; $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$, где g, ε — соответственно вектор экзогенного воздействия и ошибка его воспроизведения, $F = A - BK, G = BK_g$.

11. Отказаться от гипотезы о непосредственной измеримости $g(t) = \eta(t)$, воспользоваться измери-

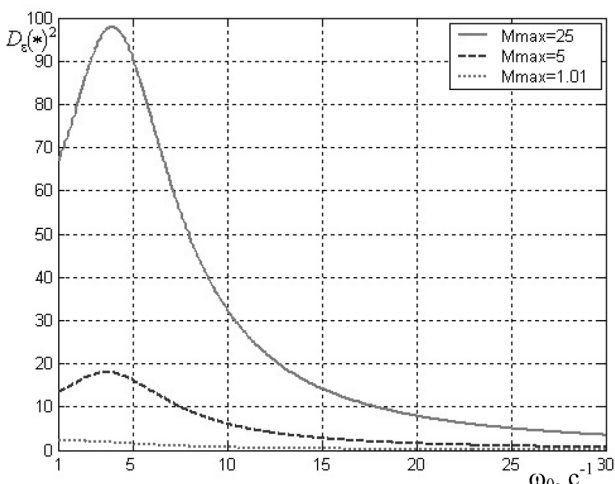
* Здесь и далее $\arg\{\dots\}$ означает значение, удовлетворяющее условию, содержащемуся в фигурных скобках.



а)



б)



в)

Зависимость дисперсии ошибки D_ε от характеристической частоты ω_0 для ПДМ с $M_{\max} = \{1,01; 5; 25\}$ при различных значениях Ω_Φ :

$a - \Omega_\Phi = 0,1\Omega_K$; $b - \Omega_\Phi = \Omega_K$; $v - \Omega_\Phi = 10\Omega_K$

мостью вектора ошибки $\varepsilon(t)$ для формирования сигнала управления в форме $u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t)$, где $K_\varepsilon = K_g$, $K_x = K - K_g C$.

12. Провести комплексное компьютерное исследование спроектированной системы управления в среде компьютерного моделирования MatLab Simulink.

В качестве примера на рисунке приведены кривые зависимости дисперсии ошибки D_ε для системы второго порядка с распределением мод Баттерворта, возбуждаемой сложным стохастическим воздействием, сформированным из последовательно соединенных ФФ типа ЭКОШ и ОШРК, от характеристической частоты ω_0 при различных значениях параметров $\Omega_\Phi = \{0,1\Omega_K; \Omega_K; 10\Omega_K\}$ и ζ , где $\Omega_K = 5$ — резонансная частота ФФ; $v_1(\omega_0) = 1,414\omega_0$ и $v_2(\omega_0) = \omega_0^2$ — первый и второй коэффициенты распределения мод Баттерворта второго порядка; $\zeta = \{0,02; 0,1005; 0,6556\}$ — коэффициент демпфирования, вычисляемый в силу соотношения

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - (M_{\max})^{-2}}}{2}}$$

при показателе колебательности второго ФФ $M_{\max} = \{1,01; 5; 25\}$; $N = 1(*)^2$ — интенсивность "белого шума" на входе ФФ ЭКОШ, где (*) в зависимости от применительной области задачи принимает размерность метров, радиан, вольт и т. д.

Аналогичным образом могут быть построены аналитические представления для дисперсий выхода и ошибки ПДМ проектируемой системы, которая функционирует в условиях сложного экзогенного стохастического воздействия аддитивного типа.

Список литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. СПб.: Изд-во "Профессия", 2003.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ. М.: Мир, 1977.
3. Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учеб. пособ. Под ред. Ушакова А. В. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.
4. Дэвис М. Х. А. Линейное оценивание и стохастическое управление: Пер. с англ. под ред. А. Н. Ширияева. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984.
5. Слита О. В., Ушаков А. В., Цветгарный А. Ю. Синтез модального управления, доставляющего непрерывной системе гарантированный запас устойчивости // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 9. С. 2—6.
6. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления: Пер. с англ. М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.

УДК 004.3:621.391.26

А. В. Седов^{1, 2},

д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр.,

Е. В. Тришечкин², аспирант,

¹ Южный научный центр РАН (г. Ростов-на-Дону),

² Южно-Российский государственный
технический университет

(Новочеркасский политехнический институт)

sedov_A.V@mail.ru

Новый подход для оценки учета высокочастотных составляющих при выборе частоты дискретизации сигнала

Рассматривается задача оценки правильности выбора частоты дискретизации сигнала с точки зрения учета основных высокочастотных составляющих. Предлагается новый подход, реализующий такую оценку непосредственно во время измерения отсчетов сигнала. По сравнению с традиционным предложенный подход обеспечивает более высокую скорость расчета, требует меньшего числа дополнительных измерений и обладает лучшей чувствительностью.

Ключевые слова: цифровые системы, спектр сигнала, частота дискретизации, эффект наложения спектров, критерии учета высокочастотных составляющих, адаптивная дискретизация

Постановка задачи

Измерение дискретных отсчетов $x[kT]$ непрерывного сигнала $x(t)$ в системах контроля, мониторинга и управления нередко связано с оценкой того, насколько правильно была выбрана частота дискретизации $\omega_S = 2\pi/T$ с точки зрения учета всех основных высокочастотных составляющих сигнала в соответствии с теоремой отсчетов. Общепринятым подходом к оценке в этом случае является уточняющее N -кратное определение спектрального состава сигнала с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [1]

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x[kT] e^{-\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (1)$$

Так, при двукратном уточняющем определении осуществляют следующие действия:

1) выбирают на интервале наблюдения $t \in [0, T_S)$ две группы отсчетов $x[kT_1]$, $k = \overline{0, N_1-1}$, и $x[kT_2]$, $k = \overline{0, N_2-1}$, с разными интервалами дискретизации $T_1 = T_S/N_1$ и $T_2 = T_S/N_2$ измеряемого сигнала $x(t)$, полагая для определенности $N_1 < N_2$;

2) вычисляют комплексные спектры $X_1(n)$ и $X_2(n)$ в соответствии с (1) для каждой группы отсчетов;

3) сравнивают спектры $X_1(n)$ и $X_2(n)$, и если при этом обнаруживается, что

- в спектре $X_2(n)$, полученном по отсчетам $x[kT_2]$, $k = \overline{0, N_2-1}$, с увеличенной частотой дискретизации $\omega_{S2} = 2\pi/T_2$ сигнала, по сравнению со спектром $X_1(n)$, добавляются лишь частотные составляющие, значением которых можно пренебречь (практически нулевые),

$$|X_2(n)| \approx 0, \quad n = \overline{\langle N_1/2 \rangle, \langle N_2/2 \rangle}, \quad (2)$$

где $\langle \dots \rangle$ — обозначение целой части числа;

- отсчеты спектров $X_1(n)$ и $X_2(n)$ в совпадающих частотных областях практически не искажаются из-за эффекта наложения, т. е.

$$|X_1(n)|/(N_1/2) = |X_2(n)|/(N_2/2), \quad n = \overline{0, \langle N_1/2 \rangle}, \quad (3)$$

то считают, что изначально выбор частоты дискретизации $\omega_{S1} = 2\pi/T_1$ был выполнен верно, в соответствии с условием теоремы отсчетов

$$T_1 < \pi/\omega_h \quad (4)$$

и все высокочастотные составляющие сигнала в спектре учтены. Значение ω_h определяет частоту наивысшей ненулевой частотной составляющей в спектре $X_1(n)$ сигнала.

Однако указанному подходу присущи следующие недостатки и неопределенности:

- четко не определено, во сколько раз необходимо увеличивать число отсчетов N_2 сигнала на интервале наблюдения $t \in [0, T_S)$, чтобы однозначно убедиться в отсутствии не учтенных при дискретизации высокочастотных составляющих;
- подход выявляет только ситуацию, когда выбор N_1 отсчета сигнала на интервале был неверен, и не позволяет судить о правильности выбора N_2 отсчетов сигнала на интервале наблюдения с точки зрения указанной задачи (в то же время $N_2 > N_1$, и данная проблема интересна); для проверки же случая с N_2 отсчетами необходимо дополнительно измерить отсчеты сигнала $x[kT_3]$, $k = \overline{0, N_3-1}$, с интервалом дискретизации $T_3 = T_S/N_3$, где $N_3 > N_2$;
- имеет место увеличивающаяся сложность расчетов при пересчете спектра сигнала, так как необходимо проводить расчет $X_1(n)$, $X_2(n)$, $X_3(n)$, ... по формуле (1) с увеличивающимся числом отсчетов N_1, N_2, N_3, \dots , где $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$;

- требуется достаточно большое число дополнительных отсчетов сигнала, измеренных на интервале наблюдения с разными частотами дискретизации.

В ряде случаев на практике данный подход огрубляют, исключая этап анализа искажения спектров в результате эффекта наложения (3), что делает его в ряде случаев практически неработоспособным.

Предлагаемый в статье новый подход к оценке учета высокочастотных составляющих при выборе частоты дискретизации сигнала лишен указанных недостатков.

Общее описание нового подхода

Предположим, что некоторый сигнал $x(t)$ задан на интервале наблюдения $t \in [0, T_S)$ своими отсчетами $x[kT]$, $k = \overline{0, N-1}$, и его комплексный спектр $X(n)$ состоит из двух разнесенных в частотной области составляющих: низкочастотной (НЧС) и высокочастотной (ВЧС) (рис. 1). Для удобства представления, помимо отчетов абсолютного значения $|X(n)|$, $n = \overline{0, N/2}$, комплексного спектра на рис. 1 показана и огибающая кривая.

Проиллюстрируем использование *общепринятого подхода*, изложенного выше, для случая неверного выбора частоты дискретизации сигнала. Допустим, задались числом отсчетов $N_1 = 18$ на интервале $t \in [0, T_S)$. После расчета ДПФ по формуле (1) получаем спектр $X(n)$, изображенный на рис. 2.

Имеет место наложение копий составляющих спектра НЧС и ВЧС (см. рис. 1) исходного сигнала друг на друга (эффект наложения спектров, или "aliasing"). Штриховой линией на рис. 2 показан искаженный спектр сигнала из-за наложения ВЧС и НЧС спектра в результате невыполнения условия теоремы отсчетов (4).

Точный спектр исходного сигнала, показанный на рис. 1, был рассчитан при числе отсчетов $N = N_2 = 34$. Условие теоремы отсчетов (4) при этом выполняется, а следовательно, эффект наложения отсутствует. Осуществим сравнение спектров на рис. 1 и рис. 2, обозначив при этом первый $X_2(n)$, а второй — $X_1(n)$. Несложно заметить, что условия (2) и (3) при этом не выполняются:

$$|X_2(n)| \neq 0, n = \overline{9, 17},$$

$$\text{и } |X_1(n)|/9 \neq |X_2(n)|/17, n = \overline{0, 9}.$$

Следовательно, интервал дискретизации $T_1 = T_S/N_1$ не позволяет

учесть все высокочастотные составляющие сигнала в спектре. В данной ситуации подтверждается работоспособность общепринятого подхода. Однако этот подход не позволяет судить, удовлетворяет или нет интервал дискретизации $T_2 = T_S/N_2$ условию учета высокочастотных составляющих сигнала, хотя затрочено достаточно число операций на вычисление комплексного спектра и измерено дополнительное число отсчетов сигнала.

Основной особенностью механизма оценки учета высокочастотных составляющих сигнала в предлагаемом *новом подходе* является то, что "отрицательный" эффект наложения спектров, проиллюстрированный на рис. 2, реализуется как главный инструмент, используемый в целях контроля за правильностью выбора интервала дискретизации сигнала, с точки зрения учета высокочастотных составляющих. С помощью указанного эффекта осуществляется аккумулярование или отображение всех частотных составляющих сигнала в узкую низкочастотную полосу, где и осуществляется анализ учета высокочастотных составляющих при дискретизации сигнала. Поэтому данный подход можно назвать *аккумулялирующим*.

Кроме того, если в рассмотренном общепринятом подходе требуется увеличивать число отсчетов сигнала при повторном пересчете спектра, в предлагаемом новом подходе при повторном пересчете требуется уменьшенное число отсчетов, поэтому его можно назвать *экономичным* в расчетном смысле.

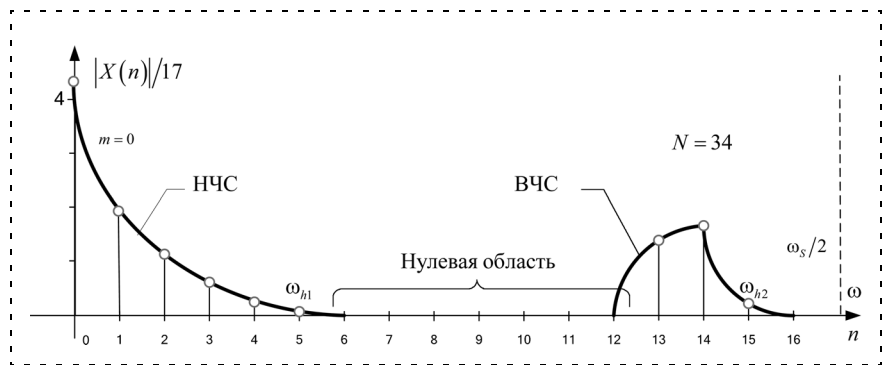


Рис. 1. Абсолютное значение комплексного спектра $X(n)$ сигнала

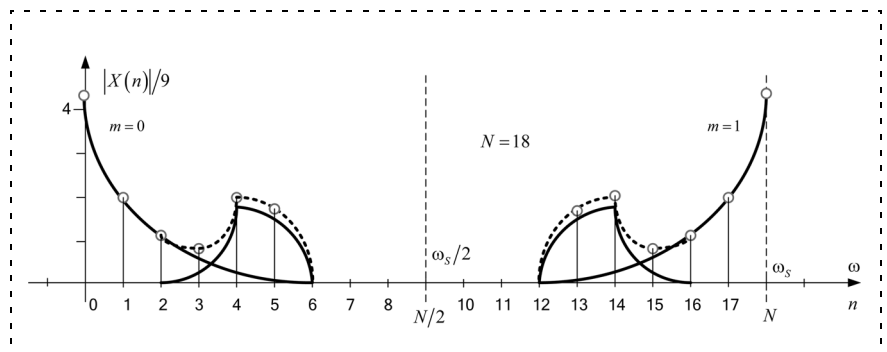


Рис. 2. Наложение составляющих спектра сигнала при невыполнении условия теоремы отсчетов (4)

Непосредственно для проверки наличия высокочастотных составляющих в новом подходе используется формула, позволяющая вычислять спектр дискретного сигнала при варьировании частоты следования отсчетов [2]:

$$X_1(n) \Big|_{n=0, N_1-1}^{N_2} = \sum_{m=-Q_1}^{Q_2} X_2(n - mN_1 + \sigma^*(m-1)N_2), \quad (5)$$

где

$$\begin{cases} Q_1 = \left\langle \frac{1}{N_1} \left(\frac{N_2}{2} - n \right) \right\rangle \sigma \left(\frac{1}{N_1} \left(\frac{N_2}{2} - n \right) \right); \\ Q_2 = \left\langle \frac{1}{N_1} \left(\frac{N_2}{2} - n \right) \right\rangle, \end{cases}$$

$\sigma(i) = \begin{cases} 1, & i \geq 0, \\ 0, & i < 0 \end{cases}$ и $\sigma^*(i-1) = \begin{cases} 1, & i \geq 1, \\ 0, & i < 1 \end{cases}$ — несмещенная и смещенная функции Хевисайда.

Формула (5) позволяет по вычисленному спектру $X_2(n)$, $n = \overline{0, N_2 - 1}$, дискретного сигнала $x[kT_2]$, $k = \overline{0, N_2 - 1}$, определять спектр $X_1(n)$, $n = \overline{0, N_1 - 1}$, для иного числа отсчетов N_1 , причем $N_1 < N_2$ с учетом возможного возникающего эффекта наложения спектров.

В соответствии с новым подходом уменьшают число дискретных отсчетов измеряемого сигнала на интервале $t \in [0, T_S]$ до малой величины $x[kT_1]$, $k = \overline{0, N_1 - 1}$, например $N_1 = 4$, так, чтобы в спектре $X_1(n)$ сигнала возник эффект наложения. Определяют спектр $X_1(n)$, $n = \overline{0, N_1 - 1}$, сигнала двумя методами:

- расчетом по формуле ДПФ (1) (обозначим его $X_1^{(1)}(n)$), используя измеренные отсчеты $x[kT_1]$, $k = \overline{0, N_1 - 1}$;
- расчетом по формуле (5) (обозначим его $X_1^{(5)}(n)$), на основе вычисленного ранее спектра $X_2(n)$, $n = \overline{0, N_2 - 1}$, для N_2 ($N_2 > N_1$) отсчетов сигнала.

Затем сопоставляют полученные спектры $X_1^{(1)}(n)$, $X_1^{(5)}(n)$, и в случае их близости или совпадения делают вывод о правильности выбора частоты дискретизации отсчетов $x[kT_2]$, $k = \overline{0, N_2 - 1}$ сигнала с точки зрения учета высокочастотных составляющих.

Не сложно показать, что если отсчеты сигнала $x[kT_2]$, $k = \overline{0, N_2 - 1}$, выбраны неверно с точки зрения учета высокочастотных составляющих, то в спектре $X_2(n)$, $n = \overline{0, N_2 - 1}$, будет иметь место эффект наложения и дальнейший пересчет его в спектр $X_1^{(5)}(n)$, $n = \overline{0, N_1 - 1}$, с меньшим числом отсчетов по формуле (5) будет ошибочным. Поэтому, сопоставляя $X_1^{(1)}(n)$ и $X_1^{(5)}(n)$, можно с меньшими вычислительными затратами определить ситуацию наличия или отсутствия эффекта наложения в спектре $X_2(n)$, а следовательно, проверить адекватность учета высокочастотных составляющих при дискретизации сигнала.

Следует отметить, что выбор N_1 необходимо осуществлять так, чтобы N_1 и N_2 не были *кратными* величинами, т. е. $N_2/N_1 \notin \mathbf{Z}$. В случае же $N_2/N_1 \in \mathbf{Z}$ результаты вычислений по формуле ДПФ (1) и по формуле (5) будут совпадать даже в случае неверного выбора интервала дискретизации T_2 . Это обусловлено тем, что уменьшение частоты дискретизации в целое число раз приводит к "сжатию" спектра сигнала по оси частот без изменения его формы.

Сопоставление спектров $X_1^{(1)}(n)$ и $X_1^{(5)}(n)$ осуществляют с помощью условия, построенного, например, на основе равенства Парсеваля [3]

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^2[kT] = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} X^2[n],$$

устанавливающего связь между энергией сигнала и энергией его спектра. В частности, условие запишем так:

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{N_1-1} (X_1^{(1)}(n))^2 - \sum_{n=0}^{N_1-1} (X_1^{(5)}(n))^2}{\sum_{n=0}^{N_1-1} (X_1^{(1)}(n))^2} \right| \leq \delta_{\text{зад}}, \quad (6)$$

т. е. относительное изменение энергии спектра сигнала из-за неучета высокочастотных составляющих при дискретизации не должно превышать заданной величины $\delta_{\text{зад}}$. В случае идеального сигнала без шума и при условии, что выбор интервала дискретизации T_2 удовлетворяет теореме отсчетов, правая часть (6) обращается в ноль. В случае реальных сигналов с шумами величина выбирается из диапазона $\delta_{\text{зад}} \in (0; 0,03]$.

Выполнение условия (6) в рамках рассматриваемого нового подхода позволяет констатировать, что интервал дискретизации $T_2 = T_S/N_2$ выбран верно, а следовательно, учтены все основные высокочастотные составляющие при измерении сигнала.

**Алгоритм применения нового подхода
в форме иллюстративного примера**

В качестве эталонного сигнала для проверки работоспособности подхода выберем непрерывный сигнал $x(t)$:

$$x(t) = 2,15 + 1,8\cos 2\pi \frac{t}{T_S} + \cos 4\pi \frac{t}{T_S} + 0,6\cos 6\pi \frac{t}{T_S} + 0,3\cos 8\pi \frac{t}{T_S} + 0,1\cos 10\pi \frac{t}{T_S} + 1,4\cos 26\pi \frac{t}{T_S} + 1,7\cos 28\pi \frac{t}{T_S} + 0,2\cos 30\pi \frac{t}{T_S}, \quad (7)$$

заданный на интервале наблюдения $t \in [0, 1)$ и представленный на рис. 3.

Амплитудный спектр сигнала (7), рассчитанный с использованием (1) для $N = 34$ отсчетов, имеет вид, изображенный на рис. 1, т. е. включает НЧС и ВЧС.

Алгоритм применения подхода опишем в форме отдельных этапов.

1. *Проведем измерение двух групп отсчетов сигнала $x(t)$ на интервале наблюдения $t \in [0, 1)$. Одна группа отсчетов $x[kT_2]$, $k = \overline{0, N_2 - 1}$, для $T_2 = T_S/N_2$, $T_S = 1$, $N_2 = 18$ на рис. 3 помечена на графике окружностями. Ее и будем проверять на правильность выбора интервала дискретизации T_2 с точки зрения учета ВЧС. Другая группа отсчетов $x[kT_1]$, $k = \overline{0, N_1 - 1}$, для $T_1 = T_S/N_1$, $N_1 = 4$ — вспомогательная и на рис. 3 помечена заштрихованными квадратами. При этом $N_1 < N_2$ и $N_2/N_1 \notin \mathbf{Z}$.*

2. *Осуществим расчет комплексных спектров $X_2(n)$, $n = \overline{0, N_2 - 1}$, и $X_1^{(1)}(n)$, $n = \overline{0, N_1 - 1}$, каждой из групп сигналов с использованием ДПФ (1). График амплитудного спектра $|X_2(n)|$ изображен на рис. 2. Считаем, что изначально полный спектр сигнала (приведенный на рис. 1) неизвестен, что соответствует ситуации на практике. Осуществим проверку спектра $|X_2(n)|$ (рис. 2) на наличие эффекта наложения. График амплитудного спектра $|X_1^{(1)}(n)|$ вспомогательной группы с учетом эффекта наложения составляющих представлен на рис. 4.*

3. *Осуществим расчет комплексного спектра $X_1^{(5)}(n)$ вспомогательной группы путем пересчета из комплексного спектра $X_2(n)$, $n = \overline{0, N_2 - 1}$, используя формулу (5). График амплитудного спектра $|X_1^{(5)}(n)|$ вспомогательной группы, полученный по*

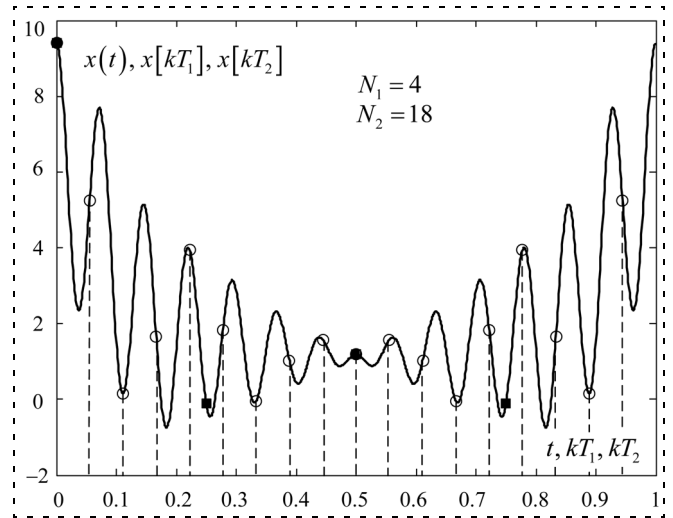


Рис. 3. Общий вид сигнала $x(t)$ и дискретных отсчетов $x[kT_1]$, $x[kT_2]$

| n | $X_1^{(1)}(n)$ | $X_1^{(5)}(n)$ |
|-----|----------------|----------------|
| 0 | 4,9 | 8,3 |
| 1 | 4,1 | 4,1 |
| 2 | 5,4 | 2 |
| 3 | 4,1 | 4,1 |

формуле (5), с учетом эффекта наложения составляющих представлен на рис. 5.

4. *Проведем сопоставление спектров $X_1^{(1)}(n)$ и $X_1^{(5)}(n)$ в соответствии с условием (6). Значения отсчетов спектров приведены в таблице.*

Рассчитаем правую часть (6), получим

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^3 (X_1^{(1)}(n))^2 - \sum_{n=0}^3 (X_1^{(5)}(n))^2}{\sum_{n=0}^3 (X_1^{(1)}(n))^2} \right| = 0,22.$$

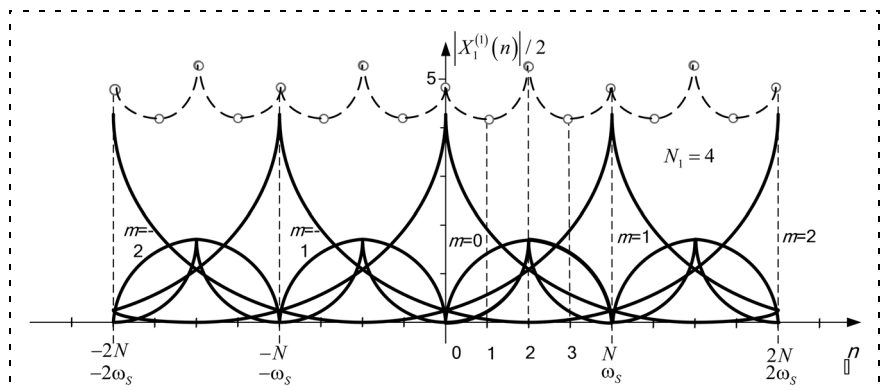


Рис. 4. Амплитудный спектр $|X_1^{(1)}(n)|$ вспомогательной группы, полученный по формуле ДПФ (1) при $N_1 = 4$ отсчетах

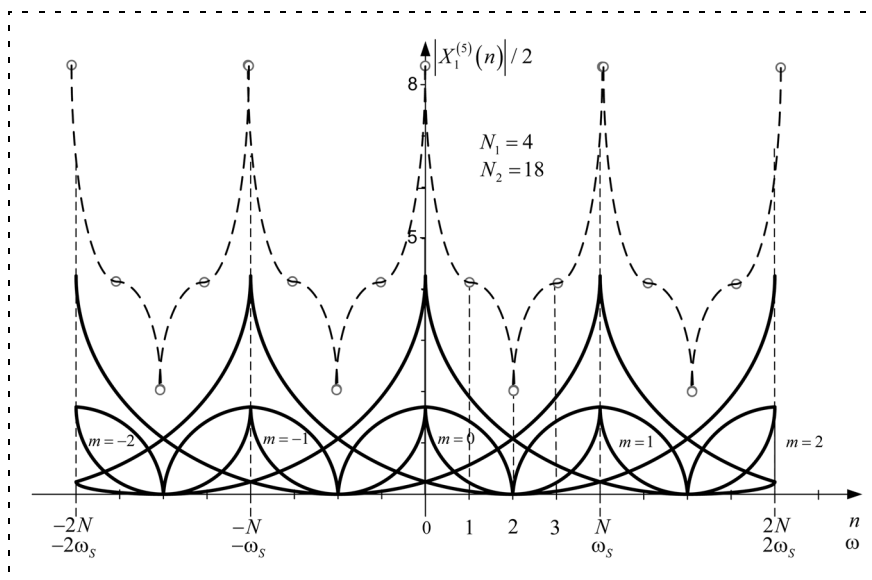


Рис. 5. Амплитудный спектр $|X_1^{(5)}(n)|$ вспомогательной группы, полученный по формуле (5) путем пересчета из спектра $X_2(n)$, $n = \overline{0, N_2 - 1}$

Относительное изменение энергии спектра сигнала из-за неучета высокочастотных составляющих в нашем случае составило 22 %. Это значительная величина (более 2...3 %), следовательно, можно констатировать, что выбор интервала дискретизации T_2 — неудовлетворительный с точки зрения учета высокочастотных составляющих. Этот же вывод очевиден и из визуального сопоставления спектров $X_1^{(1)}(n)$ и $X_1^{(5)}(n)$ на рис. 4 и 5.

Несложно показать, что если число отсчетов N_1 выбрать так, чтобы выполнялось отношение $N_2/N_1 \in \mathbf{Z}$, то подход теряет работоспособность. И это понятно, так как в этом случае первая и вторая группы будут состоять из одних и тех же отсчетов сигнала, а следовательно, исчезнет возможность

сопоставления спектров сигнала, так как один из спектров не будет иметь отличной информации относительно другого. Так, на рис. 6 проиллюстрирован расчет спектра вспомогательной группы $|X_1^{(5)}(n)|$ (штриховая линия) при числе отсчетов $N_1 = 6$ и отношении $N_2/N_1 = 3$ отсчетов сигнала (7).

Этот спектр $|X_1^{(5)}(n)|$ полностью совпадает со спектром $|X_1^{(1)}(n)|$, рассчитанным по формуле ДПФ (1), даже если интервал дискретизации T_1 был выбран неудовлетворительно с точки зрения учета высокочастотных составляющих, что подтверждает вышесказанное.

Определим вычислительную эффективность предложенного подхода по сравнению с общепринятым. Для общепринятого подхода при задании $N_1 = 18$ и наилучшего

с точки зрения скорости вычислений значения $N_2 = 19$ при вычислении ДПФ (1) потребуется число операций комплексного умножения, равное $N_1^2 + N_2^2 = 685$. В случае использования предлагаемого подхода при $N_2 = 18$ и $N_1 = 4$ получим значение $N_1^2 + N_2^2 = 340$. Это более чем в два раза ($685/340$) быстрее. Если же учесть также, что чувствительность подходов тем ниже, чем ближе значения N_1 и N_2 между собой, то можно констатировать, что предлагаемый подход обеспечивает более высокую скорость расчета при лучшей чувствительности. Чувствительность при этом определяется большей различимостью сравниваемых спектров, а в новом подходе она очевидно выше.

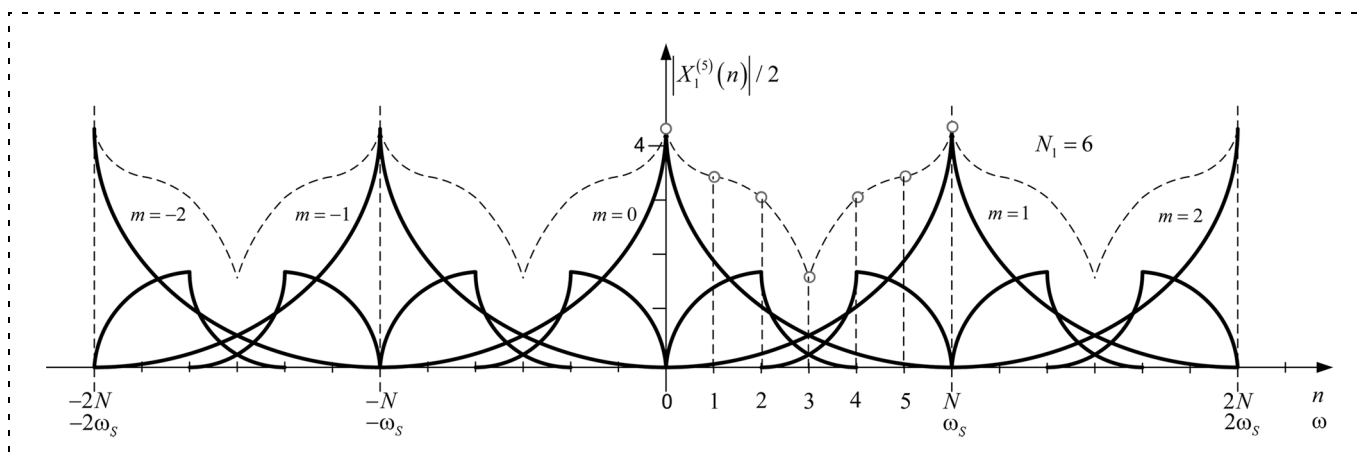


Рис. 6. Графическая иллюстрация к вычислению спектра $|X_1^{(5)}(n)|$ сигнала при $N_1 = 6$ и $N_2/N_1 = 3$

Общие выводы

Сформулированный новый экономичный аккумулярующий подход позволяет судить о правильности выбора частоты дискретизации сигнала с точки зрения учета основных высокочастотных составляющих спектра сигнала.

Основные достоинства подхода по сравнению с известными подходами следующие:

1) требуется минимальное число измерений сигнала, так как для оценки достаточно иметь отсчеты измеренного сигнала, полученные с оцениваемой частотой и с частотой, значительно меньшей;

2) реализуется более высокая скорость оценки, так как не требуется выполнение многократных ДПФ для групп с большим числом отсчетов сигнала;

3) реализуется лучшая чувствительность с точки зрения оценки учета высокочастотных составляющих, так как при анализе используются группы

с резко разнящимся числом отсчетов, а следовательно, сопоставляются более разнящиеся спектры, получаемые, в том числе, и за счет аккумулярования в низкочастотной области составляющих спектров в результате эффекта наложения.

Подход может применяться в микропроцессорных мехатронных системах управления, мониторинга и иных, где требуется адаптивный выбор частоты дискретизации измеряемых сигналов.

Список литературы

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
2. Седов А. В., Тришечкин Е. В. Формула для вычисления спектра дискретного сигнала при варьировании частоты следования отсчетов в системах контроля и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 8. С. 39—43.
3. Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. СПб.: Политехника, 1999. 592 с.

УДК 681.518

А. М. Романов, оператор ЭВМ,
Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)
AlexRomashka@yandex.ru

Оценка старших производных в контуре цифровой системы управления в условиях шумов

Рассмотрена проблема получения оценок производных старших порядков в цифровых системах управления. Предложен метод оценки производных, основанный на аппроксимации показаний датчика функциональным рядом Тейлора. Рассмотрены способы оптимизации предложенного метода для дальнейшей практической реализации. Приводятся результаты экспериментов, подтверждающие эффективность предложенного метода по сравнению с методом многократного численного дифференцирования.

Ключевые слова: оценка производных, цифровые системы, обработка датчиков

При реализации цифровых систем управления приводами задача вычисления производных сигналов датчиков по времени сопряжена с определенными трудностями. Наличие шумов датчика приводит к сильному зашумлению результатов вычислений, что делает затруднительным получение адекватных значений даже первой производной.

В настоящее время реализуются несколько подходов к решению указанной проблемы.

Первый из них базируется на использовании фильтра Калмана или расширенного фильтра Калмана и широко освещен в печати [1]. Его основным

недостатком является необходимость наличия знаний о модели объекта управления, характеристиках шумов и, что более существенно, об оценках возмущений объекта управления. В ряде случаев получить такие оценки не представляется возможным (например, при наличии ненаблюдаемых возмущений).

Второй подход состоит в построении нелинейного наблюдателя, который оценивает значения производной и исходного сигнала [2]. Процесс настройки такого наблюдателя достаточно сложен. Дополнительные трудности его реализации в цифровой системе управления связаны с тем, что модель данного наблюдателя описана только для непрерывных систем.

Третий подход состоит в аппроксимации выходного сигнала датчика известным функциональным рядом на малом интервале времени с последующим аналитическим расчетом производной от полученного разложения. В качестве функциональных рядов, как правило, выбираются ряды Фурье и Тейлора. Так, в ряде работ рассматривается технология оценки значения производных с помощью разложения в ряд Фурье [3]. К недостаткам этого способа получения оценок производных можно отнести необходимость использования тригонометрических функций, расчет которых на промышленных контроллерах требует больших вычислительных затрат.

В настоящей статье рассматривается метод оценки производных с помощью разложения выходного сигнала датчика в ряд Тейлора на ограниченном интервале времени, или так называемом окне.

Для нахождения коэффициентов ряда Тейлора предлагается использовать метод наименьших квадратов (МНК), реализованный в виде поиска псевдоинверсной матрицы Мура-Пенроуза. Этот метод подробно описан в работах [4, 5, 6], поэтому здесь будет рассмотрено только его применение к решению поставленной задачи.

Пусть ширина окна составляет $k = MT_s$, где T_s — постоянный период дискретизации показаний датчика по времени, а M — число дискретных отсчетов. На i -м шаге расчета производной функция выходного сигнала датчика раскладывается в ряд Тейлора в окрестности i -го показания датчика.

Составим систему линейных уравнений в матричном виде, связывающую k предыдущих измерений датчика на i -м шаге с коэффициентами разложения в ряд Тейлора:

$$Y = AX, \quad (1)$$

где A и X — соответственно матрица и векторы коэффициентов разложения в ряд Тейлора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^n \\ 1 & -2 & \dots & (-2)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -k & \dots & (-k)^n \end{pmatrix}; X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix},$$

а Y — вектор, содержащий k последних измерений датчика

$$Y = \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \dots \\ y_{i-k} \end{bmatrix}.$$

Матрица A не является квадратной, поэтому решить уравнение (1), вычислив обратную к ней матрицу, нельзя. Вследствие этого вычисление значения вектора X осуществляется с помощью псевдоинверсной матрицы Мура-Пенроуза:

$$X = A^+ Y, \quad (2)$$

где $A^+ = (A'A)^{-1}A'$ — псевдоинверсная матрица Мура-Пенроуза; ' — знак транспонирования.

Вычисленный таким образом вектор X является оптимальным по МНК решением системы уравнений (1) [6].

Запишем производную j -го порядка от сигнала датчика по "времени" i в момент i -го измерения датчика:

$$\frac{d^j y_i}{(dt)^j} = a_j j! + [a_{j+1} j!] \cdot 0 + \dots + \left[\frac{n!}{(n-j)!} a_n \right] \cdot 0 = a_j j! \quad (3)$$

В этом случае производная j -го порядка сигнала датчика по времени на момент i -го измерения датчика равна

$$\frac{d^j y_i}{(dt)^j} = \frac{a_j j!}{(T_s)^j}. \quad (4)$$

Для увеличения быстродействия при практической реализации каждую строку матрицы A^+ можно заранее домножить на $\frac{j!}{(T_s)^j}$, где j — номер строки

матрицы A^+ . Заметим, что для вычисления j -й производной используется только j -я строка матрицы A^+ . В этом случае вычислительная сложность оценки производной каждого порядка на одном такте работы составляет M операций умножение-сложение.

Выбор ширины окна M зависит от спектра шумов датчика. Увеличение ширины окна уменьшает влияние шумов на оценку производной, но не позволяет отслеживать ее быстрые изменения.

Для оценки качества вычисленных производных на основе предложенного подхода был проведен ряд экспериментов в среде Mathworks MATLAB с использованием пакета Simulink. Структурная схема использованной модели представлена на рис. 1

Модель состоит из модели двигателя постоянного тока (ДПТ) с датчиком положения и блоков оценки ускорения на валу двигателя.

К положению вала двигателя φ прибавляется шумовая составляющая n , которая имеет нулевое матожидание и дисперсию N . Зашумленное значение φ поступает на вход квантователя по уровню и по времени (НЭ), который имеет 2^Q дискретных значений в диапазоне измерений от -60 до $+60$ рад, и дискретизацию по времени 100 мкс. Таким образом имитируется наличие цифрового датчика положения.

Управляющее напряжение двигателя U_y изменяется по синусоидальному закону с амплитудой 40 В, частотой 0,5 Гц и сдвигом фазы 60° .

Момент нагрузки на валу двигателя M_n изменяется также по синусоидальному закону с амплитудой 5 Н·м и частотой 2 Гц.

Моделируемый двигатель постоянного тока имеет следующие параметры:

- коэффициент передачи по току $K_m = 0,2153$ Н·м/А;
- коэффициент противоЭДС $K_e = 0,3205$ В/(рад/с);

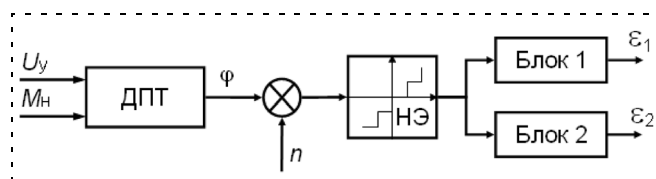


Рис. 1. Структурная схема модели вычислений производной

- индуктивность якорной обмотки $L_a = 7,9$ мГн;
- сопротивление якорной обмотки $R_a = 2,52$ Ом;
- момент инерции на валу двигателя $J = 0,001$ кг · м².

Ускорение вала двигателя ε вычисляется двумя способами: с помощью предложенного алгоритма с размером окна k (Блок 1 на рис. 1) и с помощью двукратного численного дифференцирования с последующим усреднением за последние k измерений (Блок 2 на рис. 1).

Было проведено четыре эксперимента при различных значениях k , Q и N :

- эксперимент № 1: $k = 15$, $N = 0$, $Q = 160$;
- эксперимент № 2: $k = 150$, $N = 0$, $Q = 160$;
- эксперимент № 3: $k = 150$, $N = 0$, $Q = 16$;
- эксперимент № 4: $k = 150$, $N = 0,01$, $Q = 16$.

Результаты экспериментов представлены на рис. 2—9. На всех рисунках сплошной линией ото-

бражается вычисленное значение ускорения, а пунктирной — истинное.

Из результатов эксперимента № 1, представленных на рис. 2 и 3, видно, что при отсутствии шумов, большом числе дискрет датчика и малом размере окна результаты вычислений, полученные обоими методами, идентичны и полностью соответствуют истинному значению.

Увеличение размера окна (эксперимент № 2) приводит к запаздыванию вычисленных значений ускорения по отношению к истинным. Как видно из рис. 4 и 5, запаздывание при использовании предложенного подхода больше.

Использование большого окна и при существенном уменьшении разрядности датчика (эксперимент № 3) вызывает зашумление сигнала при использовании метода двукратного численного дифферен-

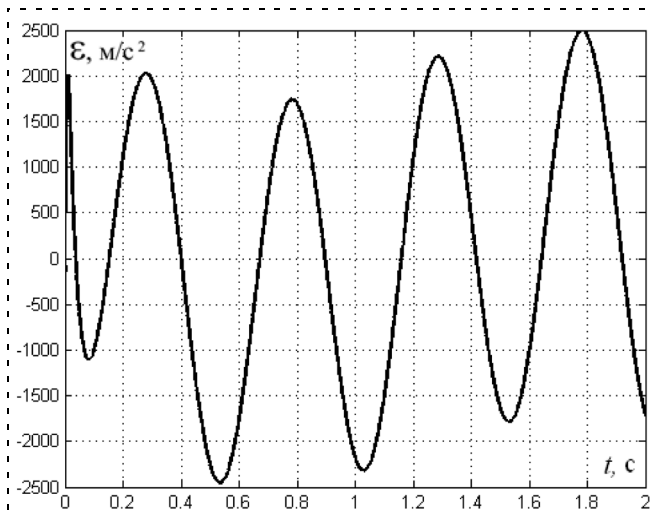


Рис. 2. Результаты, полученные предложенным методом в эксперименте № 1

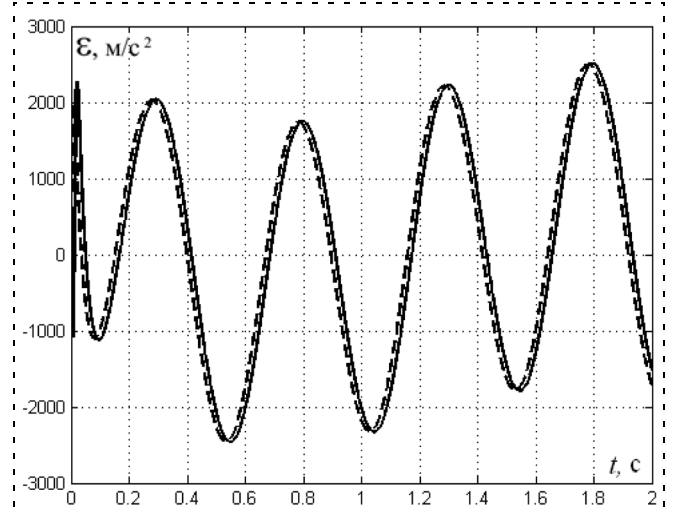


Рис. 4. Результаты, полученные предложенным методом в эксперименте № 2

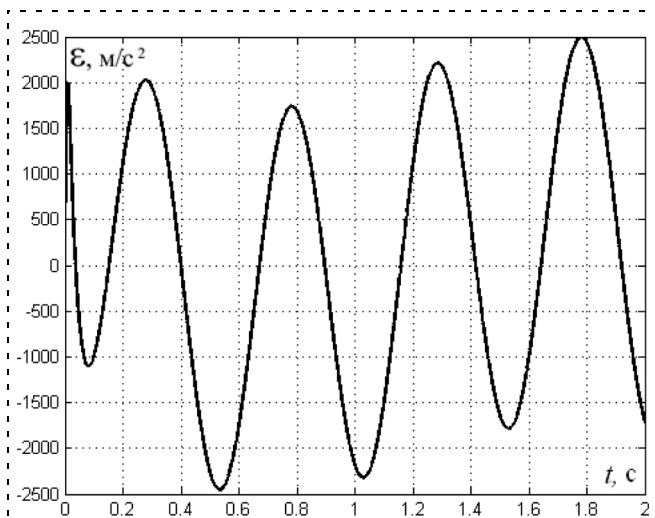


Рис. 3. Результаты, полученные методом двукратного дифференцирования в эксперименте № 1

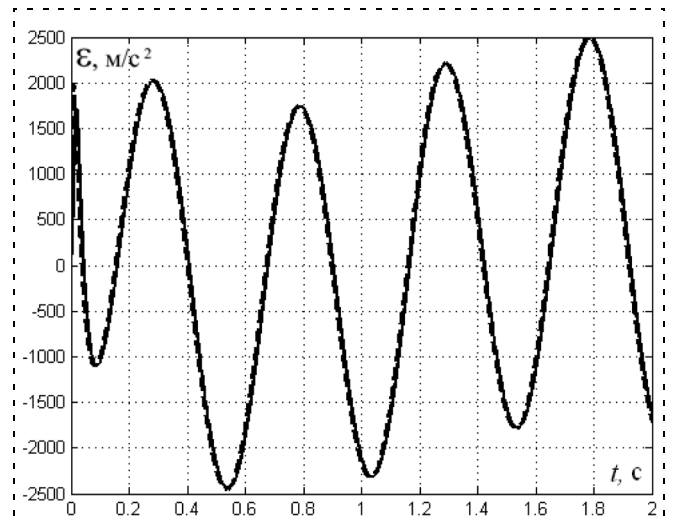


Рис. 5. Результаты, полученные методом двукратного дифференцирования в эксперименте № 2

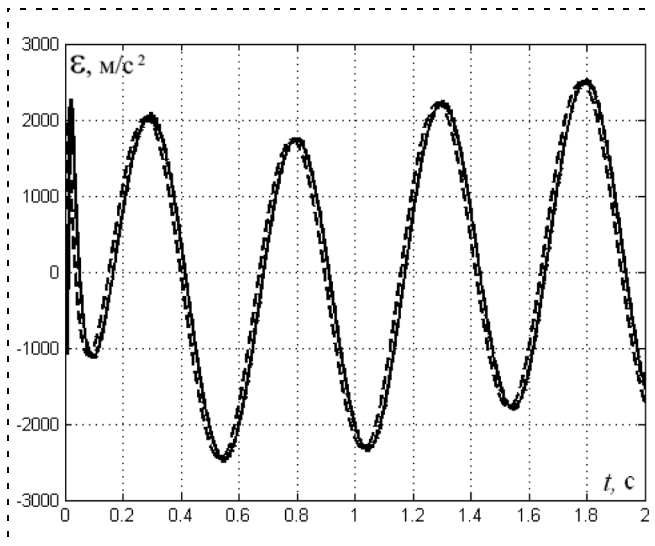


Рис. 6. Результаты, полученные предложенным методом в эксперименте № 3

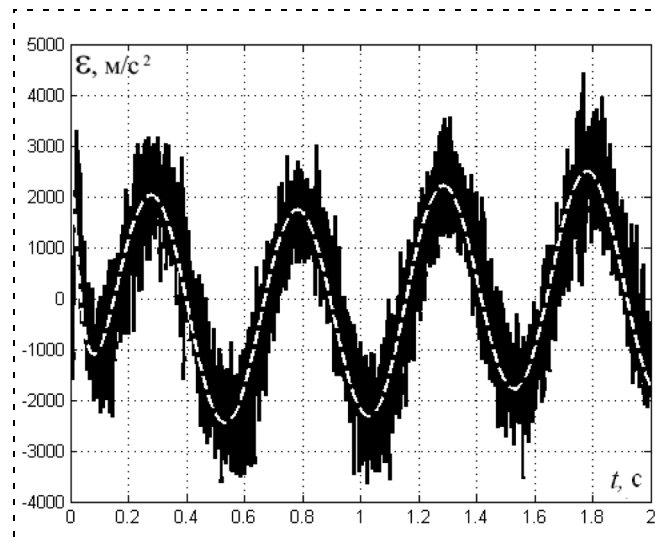


Рис. 8. Результаты, полученные предложенным методом в эксперименте № 4

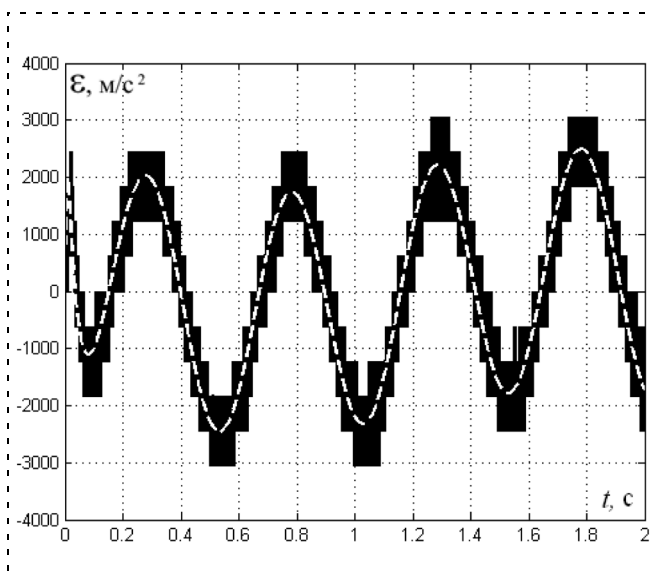


Рис. 7. Результаты, полученные методом двукратного дифференцирования в эксперименте № 3

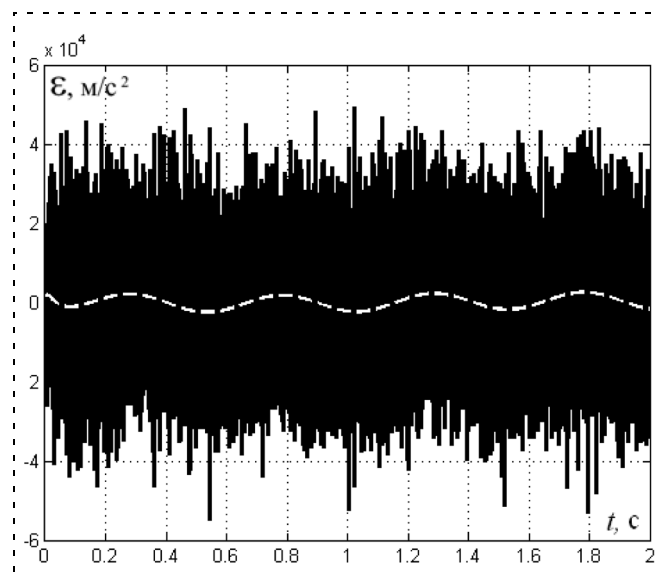


Рис. 9. Результаты, полученные методом двукратного дифференцирования в эксперименте № 4

цирования (рис. 7) в отличие от предложенного метода (рис. 6).

Результаты эксперимента № 4 (рис. 8 и 9) показывают, что наличие шума приводит к полной неработоспособности метода двукратного численного дифференцирования, в то время как предложенный подход дает приемлемые результаты.

На основании проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что предложенный подход к оценке производных существенно превосходит метод многократного численного дифференцирования в условиях наличия шумов и ограничений на разрядность выходного сигнала датчика.

Список литературы

1. **Simon D.** Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ and Non-linear Approaches. New York: John Wiley & Sons, 2006.
2. **Медведев М. Ю.** Структура и алгоритмическое обеспечение нелинейного наблюдателя производных в условиях действия случайных шумов // Известия ЮФУ. Технические науки. Тем. вып. "Перспективные системы и задачи управления". Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008.
3. **Марковский М. В.** Технология оценки значений производных экспериментальных последовательностей // Научная сессия МИФИ-2001: Сб. науч. тр. Т. 2. М.: МИФИ, 2001.
4. **Broussard K. J., Trahan R. E Jr.** Automatic Control System Failure Detection via Parameter Identification Techniques // IEEE Proc. of Southeastcon, April 1991. P. 176–180.
5. **Franklin G. F., Powell J. D., Workman M.** 1998 Digital Control of Dynamic Systems. 3rd. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.
6. **On best approximate solution of linear matrix equations** // Proc. of the Cambridge Philosophical Society 52, 17–19 (1956).

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

УДК. 004.891:669

Е. Б. Иванов, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН
ivanov-ics@mail.ru

Система поддержки принятия решений по управлению доменным процессом

Рассматривается система поддержки принятия решений по управлению доменным процессом, предназначенная для предотвращения аварийных ситуаций, повышения квалификации обслуживающего персонала и обучения студентов старших курсов вузов технических специальностей. В основу рассматриваемой системы заложен принцип гетерогенного моделирования, т. е. объединения разнородных моделей.

Ключевые слова: система поддержки принятия решений, доменный процесс, предотвращение аварийных ситуаций

Доменная печь как агрегат для выплавки чугуна появилась в 16-м веке и прошла ряд этапов совершенствования, на которых применялись коксование, принудительное дутье, автоматическая загрузка, автоматизированные системы управления технологическим процессом. Протекание технологических процессов в доменной печи основано на противотоке шихтовых материалов и горячих газов. Регулирование сверху выполняется с помощью изменения интенсивности загрузки шихты, регулирование снизу осуществляется изменением параметров дутья (расхода, температуры, влажности).

Началом автоматизации доменного процесса можно считать 1937 г., когда А. Н. Похвисневым (Московский государственный институт стали и сплавов) был впервые разработан алгоритм автоматического управления доменной печью.

С начала 90-х годов ведутся разработки экспертных систем в качестве советчиков в Австрии (фирма VAIron), Финляндии (фирма Rautaruuki), Японии (фирма Suzuki) и России (Институт машиноведения УроРАН) [1, 2]. Накопленные научные знания позволяют соблюдать технологию плавки, однако не являются непременным условием высокопроизводительной и безаварийной работы домны в связи с отсутствием взаимосвязи между используемыми на производстве моделями. Поэтому целесообразно оснащать доменные печи комплексными системами поддержки принятия решений, помогающими оператору в каждой конкретной ситуации принимать правильное решение.

Основы разработки системы поддержки принятия решений по управлению доменным процессом

В Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН разработана система поддержки принятия решений по управлению доменным процессом на основе гетерогенного способа моделирования. Данный способ основан на взаимосвязи известных и наиболее применяемых на производстве математических и логических моделей. В разработанной системе учитывается вероятность отказа одной из моделей, но при этом система продолжает работать в нормальном режиме за счет использования основных и дублирующих каналов связи (рис. 1). Такой подход позволяет учитывать наиболее важные факторы управления процессом и вовремя принимать оперативные решения по предотвращению аварийных ситуаций.

В соответствии с рис. 1 на первоначальном этапе используется логическая модель как основная, применяемая в оперативном управлении в целях сокращения числа простоев и предотвращения аварийных ситуаций. Далее используется балансовая и технологическая модели для определения количества шихтовых материалов и технологии плавки соответственно. Физико-химическая модель участвует в расчете перераспределения химических элементов между чугуном и шлаком при заданной температуре и давлении дутья. Целью использования модели аналитического контроля является прове-

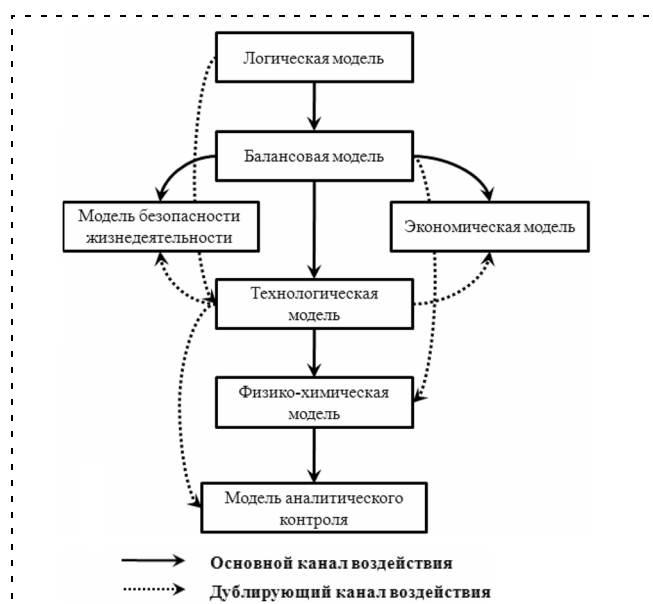


Рис. 1. Модель системы поддержки принятия решений по управлению доменным процессом

дение качественного анализа продукции с использованием системы Rapid на основе базы данных американского общества стандартов и материалов (ASTM). Также в разработанной системе применяются модели экономики (расчет себестоимости продукции) и безопасности жизнедеятельности (определение безопасности работы персонала).

Логическая модель

Данная модель состоит из 15 элементов или логических таблиц. Входами являются значения переменных, характеризующих устройства, с помощью которых оператор управляет технологическим процессом. Поскольку цель регулирования — удержание всех наблюдаемых параметров в "норме", то выходы — это значения наблюдаемых переменных: уровень засыпи (H_i), скорость схода шихты (V_i), теоретическая температура горения кокса (T_i), температура колошниковога газа (T^K) и содержание кислорода (O_2^K) и водорода в колошниковом газе

(H_2^K). При управлении доменной используются следующие параметры: расход (R), температура (T) и влажность (W) дутья (регулировка снизу); расход топливных добавок и кислорода (D); загрузка центра и периферии печи (Z) (регулировка сверху). Входы (X_i) и выходы (Y_i) различных элементов схемы соединены между собой коммуникационными каналами, по которым распространяются значения сигналов.

Система построена на базе трехзначной логики, когда используются понятия отклонения наблюдаемых параметров от нормы. Предполагается, что нормальные значения наблюдаемых параметров определены интервалом $X_{\text{ном}} \pm \Delta$, в пределах которого X принимает значение "норма" (1/2). В качестве примера рассмотрим модуль преобразователя параметров дутья (табл. 1) и формулы, описывающие их.

Значения этих параметров характеризуются тремя качественными уровнями: меньше нормы (0), норма (1/2), больше нормы (1):

$$K_0^{\Delta} = DW\bar{T} \vee D\tilde{W}T; \quad (1)$$

$$K_{1/2}^{\Delta} = DWT; \quad (2)$$

$$K_1^{\Delta} = DW\tilde{T}, \quad (3)$$

Таблица 1

Модуль преобразователя параметров дутья

| Входы | | | Выходы |
|-------|-----|-----|--------------|
| D | W | T | K^{Δ} |
| 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 |
| 1/2 | 1/2 | 1 | 1 |
| 1/2 | 1 | 1/2 | 0 |

где K_0^{Δ} , $K_{1/2}^{\Delta}$, K_1^{Δ} — значения выходного параметра качества дутья в режимах "меньше нормы", "норма" и "больше нормы"; \bar{i} , i , \tilde{i} — задаваемые параметры в режимах "меньше нормы", "норма" и "больше нормы".

Балансовая модель

Модель разработана для соблюдения материального баланса в печи, а именно: баланса по марганцу, основности шлака, выходу чугуна из рудной смеси, марганцевой руды и известняка. Все входные переменные модели, а именно:

- составы чугуна, агломерата, окатышей, марганцевой руды и др.;
- температура дутья (T^{Δ}), чугуна ($T^{\text{ч}}$), шлака ($T^{\text{шл}}$) и др.

принимают значения из множества положительных чисел.

Выходные переменные модели характеризуют составы побочных продуктов плавки — шлака, колошниковога газа, а также описывают статьи теплового и материального балансов.

Если для производства чугуна используется смесь материалов, то сначала вычисляется содержание компонентов K_i в i -й сырьевой смеси по следующей формуле [3]:

$$K_i = \sum_j \alpha_{ij} K_j, \quad (4)$$

где K_j — содержание компонента (Fe, Si, Mn и др.) в j -м сырьевом материале (окатышах, агломерате и др.); α_{ij} — содержание j -го сырьевого материала (окатышей, агломерата и др.) в i -й сырьевой смеси. Затем для определения значений расхода компонентов шихты используется система балансовых уравнений [3]:

$$\begin{cases} a_{11}K_1 + a_{12}K_2 + a_{13}K_3 = 100; \\ a_{21}K_1 + a_{22}K_2 + a_{23}K_3 = 0; \\ a_{31}K_1 + a_{32}K_2 + a_{33}K_3 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где K_1 , K_2 , K_3 — расходы рудной смеси, марганцевой руды и известняка (кг) на 100 кг чугуна соответственно; a_{11} , a_{12} , a_{13} — количество чугуна, образующегося в доменной печи при проплавлении 1 кг рудной смеси, марганцевой руды и известняка (кг) на 100 кг чугуна соответственно; a_{21} , a_{22} , a_{23} — количество ферромарганца, образующегося в доменной печи при проплавлении 1 кг рудной смеси, марганцевой руды и известняка (кг) на 100 кг чугуна соответственно; a_{31} , a_{32} , a_{33} — содержание компонента в виде оксида, образующегося в доменной печи при проплавлении 1 кг рудной смеси, марганцевой руды и известняка (кг) на 100 кг чугуна соответственно.

Технологическая модель

Данная математическая модель позволяет оператору контролировать рабочий ход доменной печи с точки зрения технологии производства. Основными показателями являются производительность печи и расход кокса, а также соответствующие им параметры — длительность выпуска чугуна и число выпусков чугуна в сутки [4]:

$$\Pi = (K^c H^{p/k} Fe^{III})_{0,95} = K^c / Q^K, \quad (6)$$

где Π — производительность печи, т/сут; K^c — количество сожженного кокса, т/сут; $H^{p/k}$ — рудная нагрузка (отношение руда/кокс); Fe^{III} — количество проплавленного железа шихты в сутки; 0,95 — степень использования железа шихты; Q^K — расход кокса, т/т чугуна;

$$\tau^B = \Pi / (60 \rho^ч V^ч Z \cdot 0,785 d), \quad (7)$$

где τ^B — продолжительность выпуска чугуна, мин; 60 — количество минут в одном часе; $\rho^ч$ — плотность чугуна, г/м³; $V^ч$ — объем выпускаемого чугуна, м³/сут; Z — число выпусков чугуна в сутки; 0,785 — коэффициент отношения выпуска чугуна к шлаку; d — диаметр чугунной летки, м;

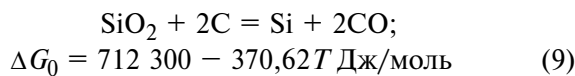
$$Z = (q^ч + q^{III}) 1440 / (S^Г h^Г E + (q^ч + q^{III}) \tau^B), \quad (8)$$

где $q^ч$, q^{III} — объемные скорости накопления чугуна и шлака, м³/мин; 1440 — число минут в сутках; $h^Г$ и $S^Г$ — высота и площадь поперечного сечения горна, м, м²; E — коэффициент заполнения горна чугуном и шлаком, м³/м³.

Физико-химическая модель

Особенностью рассматриваемой модели является возможность управления перераспределением химических элементов между чугуном и шлаком при заданной температуре и давлении дутья в печи.

В качестве примера рассмотрим распределение кремния между чугуном и шлаком по реакции взаимодействия кремнезема в шлаке и углерода в чугуне [5]:



с использованием уравнения изотермы реакции:

$$\Delta G = \Delta G_0 + RT \ln D = -RT \ln (K^P / D), \quad (10)$$

где $K^P = \exp(\Delta G_0 / RT)$ — константа равновесия реакции; ΔG_0 — стандартная энергия Гиббса реакции; ΔG — энергия Гиббса реакции; D — функция конечного состояния чугуна и шлака (степень готовности продукции):

$$D = P^{\text{CO}} a_1^{\text{Si}} / (a_2^{\text{Si}} a_2^{\text{C}}), \quad (11)$$

где P^{CO} — парциальное давление CO в газовой фазе; a_1^{Si} — активность кремния в чугуне; a_2^{Si} , a_2^{C} — активности кремния и углерода в шлаке.

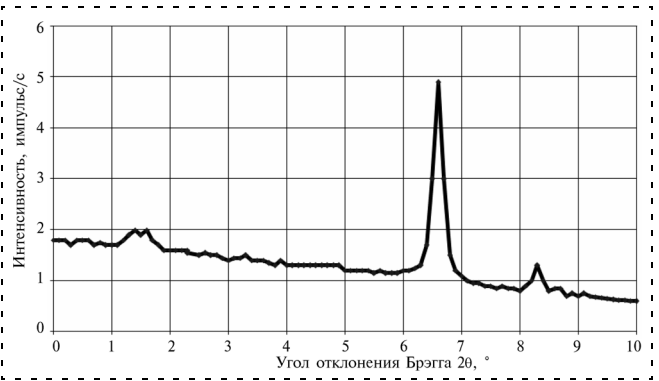


Рис. 2. Рентгенофазовый анализ чугуна доменной печи

Используя вышеприведенные расчеты определения энергии Гиббса и функции конечного состояния чугуна и шлака, можно установить оптимальную рабочую температуру в печи для получения продукции необходимого химического состава и качества.

Модель аналитического контроля

Модель позволяет оценивать содержание определяемых компонентов в контролируемом веществе (рис. 2). Результаты аналитического контроля являются основанием для вынесения решения о соответствии химического состава этих веществ регламентируемым требованиям [6].

В соответствии с химическим анализом образец чугуна состоит из карбида Fe с примесью Cr: $(\text{FeCr})_3\text{C}$; фаза: феррит + цементит. В соответствии с системой ASTM (American Society for Testing and Materials) существует некоторое смещение, так как присутствует влияние Cr на содержание Fe.

Модель безопасности жизнедеятельности персонала

Доменная печь относится к высокоопасным объектам. Для безопасности персонала, обслуживающего доменную печь, в цехе применяют теплоотводящий экран. Необходимое количество воды для охлаждения экрана (G , кг/т) определяется по формуле [7]:

$$G = (a E^H F) / (c (t^{yx} - t^п)), \quad (12)$$

где a — коэффициент поглощения инфракрасных лучей материалом экрана и водой; E^H — интегральная плотность теплового потока от источника излучения, Вт; F — площадь стенки экрана, м²; c — теплоемкость воды, Вт/(кг · К); t^{yx} — температура уходящей воды, °С; $t^п$ — температура поступающей воды, °С.

Модель безопасности жизнедеятельности учитывает возможность возникновения травм в случае несоблюдения правил техники безопасности на производстве. Степень травматизма характеризуется коэффициентом частоты $K^ч$ и тяжести травматизма $K^т$:

$$K^ч = 1000 N / Ч; \quad (13)$$

$$K^т = Д / N, \quad (14)$$

где N — число несчастных случаев за выбранный промежуток времени; $\bar{Ч}$ — среднесписочное число работающих за этот же промежуток времени; D — суммарное число дней нетрудоспособности.

Экономическая модель

Применение в системе поддержки принятия решений по управлению доменным процессом экономической модели позволяет определить себестоимость выплавки чугуна.

Затраты по каждой i -й статье рассчитываются по формуле [8]:

$$Z_i = K_i \Pi_i, \quad (15)$$

где K_i — расходный коэффициент, показывающий, сколько требуется заданного компонента для получения 1 кг чугуна; Π_i — цена на этот компонент.

Общие затраты на материалы, задействованные в производстве, определяются как

$$Z_1 = Z_1^1 + Z_1^2, \quad (16)$$

где Z_1^1 — затраты на топливо (кокс и природный газ);

Z_1^2 — затраты на основные материалы (руда, агломерат, окатыши).

Расходы по переделу:

$$Z_2 = Z_2^1 + Z_2^2 + Z_2^3, \quad (17)$$

где Z_2^1 — затраты по переработке и обогащению топлива;

Z_2^2 — энергетические затраты на передел;

Z_2^3 — другие дополнительные затраты.

Побочная продукция:

$$Z_3 = \Pi_3^1 M_3^1 D_3^1 + \Pi_3^2 M_3^2 D_3^2, \quad (18)$$

где M_3^1, M_3^2 — масса колошникового газа и шлака, вычисляемые по методике расчета балансовой модели процесса производства чугуна Рамма-Похвиснева, кг; Π_3^1, Π_3^2 — рыночная цена на шлак и колошниковый газ, руб.;

D_3^1 — доля шлака, которая идет на продажу; D_3^2 — доля колошникового газа, которая идет на сторону.

Таким образом, общая себестоимость рассчитывается как:

$$C = Z_1 + Z_2 - Z_3. \quad (19)$$

Результаты применения системы поддержки принятия решений по управлению процессом

Система разработана специалистами ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН и реализована средствами языка программирования *Delphi7*. На рис. 3 (см. вторую сторону обложки) представлен интер-

Таблица 2

Время обработки информации и принятия решений (в мин)

| Время | Работа мастера без советчика | Работа мастера с советчиком |
|------------------|------------------------------|-----------------------------|
| T_1 | 1...2 | 1..2 |
| T_2 | 10...30 | 5...10 |
| T_3 | 3...5 | 3...5 |
| $T^{\text{общ}}$ | 14...37 | 9...17 |

фейс программы, который состоит из графического (профиль доменной печи, слева) и динамического (режим управления, наблюдаемые и регулируемые параметры в виде трехзначной логики с их соответствующими значениями, справа) протоколов.

В качестве примера рассмотрен аварийный вариант работы печи при повышенном расходе дутья ("выше нормы") и низкой температуре дутья ("ниже нормы"). В результате получены отклонения наблюдаемых параметров на периферии печи: температура горения ($T_1^{\text{п}}$) и скорость схода шихты ($V_1^{\text{п}}$)

"ниже нормы", высота столба шихты ($H_1^{\text{п}}$) "выше нормы". При включении режима "автомат" печь выходит на нормальный уровень за два такта по времени за счет уменьшения интенсивности загрузки печи на периферии ($Z_1^{\text{п}}$). Такая оперативность позволяет оператору (технологу) достаточно быстро принимать правильные решения.

В дальнейшем был проработан вопрос по затрачиваемому времени на выведение доменной печи из возможного аварийного состояния. В результате рассчитано общее время обработки информации $T^{\text{общ}}$ с помощью советчика мастера:

$$T^{\text{общ}} = T_1 + T_2 + T_3, \quad (20)$$

где T_1 — время на обработку информации, полученной с доменной печи; T_2 — время принятия решения; T_3 — время на исправление режима работы печи мастером и консультации экспертов.

В табл. 2 представлены данные по затратам времени на обработку аварийной ситуации и изменение режимов управления.

Таким образом, система поддержки принятия решений помогает мастеру в три раза быстрее обработать полученную информацию и провести кардинальные изменения в работе доменной печи.

Выводы

В разработанной системе поддержки принятия решений по управлению доменным процессом использован принцип гетерогенного моделирования, т. е. объединения разнородных моделей. Это позволяет сократить число ошибок при эксплуатации системы и, как следствие, получить достаточно полное и четкое управление рассмотренным технологическим процессом. Данная система в качестве тренажера внедрена в доменных цехах ОАО "Косогор-

ский металлургический завод", ООО "Уральская сталь" (Орско-Халиловский металлургический комбинат), а также в учебном процессе Московского института стали и сплавов (Новотроицкий филиал), что подтверждено актами и справками о внедрении.

Список литературы

1. Беттингер Д. Доменный процесс производства чугуна // Steel Times International на русском языке. 2005. Сентябрь. С. 10–18.
2. Чистов В. П. Разработка экспертной системы на основе логического интеллекта для управления доменной печью // Наука и инженерное творчество — 21 веку. 1995. С. 89–92.

3. Вегман Е. Ф., Жеребин Б. Н., Похвистнев А. Н. и др. Металлургия чугуна. М.: Академкнига, 2004. 774 с.
4. Товаровский И. Г., Ободан Я. М., Проценко В. Г. Расчетный анализ доменного процесса с использованием ЭВМ. М.: Доменное производство, 1975. 107 с.
5. Падерин С. Н., Филиппов В. В. Теория и расчеты металлургических систем. М.: Изд. МИСиС, 2002. 334 с.
6. Карпов Ю. А., Гиммельфарб Ф. А., Савостин А. П., Сальников В. Д. Аналитический контроль металлургического производства. М.: Металлургия, 1995. 400 с.
7. Бринза В. Н. Охрана труда и окружающей среды: Учеб. пособие для практических занятий для всех специальностей. М.: Изд. МИСиС. 1985. 58 с.
8. Белобородова В. А., Чечета А. П., Слабинский В. Т. и др. Калькуляция себестоимости продукции в промышленности. М.: Финансы и статистика, 1989. 69 с.

УДК 62-50

А. Н. Антонов, аспирант,
М. М. Аршанский, д-р техн. наук, проф.,
Московский государственный университет
приборостроения и информатики
numator@gmail.com

Нечеткая модель системы принятия решений по выбору параметров дозирования пипетирующей станции EVO Freedom 75

Для решения задачи задания параметров дозирования жидких реагентов пипетирующей станцией предлагается использовать алгоритм нечеткого логического вывода. Поставлена задача построения нечеткой модели задания параметров. Для ее решения используется нечеткий алгоритм Мамдани.

Ключевые слова: нечеткая логика, логический вывод, алгоритм Мамдани, пипетирующая станция, дозирование

Дозирование жидких реагентов в пищевой и фармацевтической промышленности является неотъемлемой частью технологического процесса. На сегодняшний момент порядка 80 % операций дозирования на малых и средних предприятиях, производящих диагностические тест-системы (наборы реагентов для выявления заболеваний человека и животных), а также в клинично-диагностических лабораториях являются ручными. В настоящее время большинство решений по автоматизации дозирования жидких реагентов основаны на применении пипетирующих станций на основе мостовой схемы промышленного робота: каретка с рукой робота (с устройством удержания наконечника) перемещается по подвижному мосту (рис. 1). Каретка устанавливается на перекладине, которая посредством шариковинтовой передачи перемещается по горизонтальной оси (X). Сама же каретка с рукой робота перемещается с помощью цепной передачи по

фронтальной оси (Y). Рука робота перемещается по вертикальной оси (Z) посредством реечной передачи. Данная схема четко выполняет возложенные на нее функции, не обладая излишними степенями подвижности, она способна предельно точно позиционировать наконечник над требуемой точкой рабочего стола. Главным недостатком такой схемы является относительная громоздкость.

Трудности ввода в технологическую цепочку производств автоматических пипетирующих станций связаны с тем, что станции должны быть приспособлены к работе с большой номенклатурой дозируемых составов и иметь возможность оперативной переналадки на разные типы продукции. Автоматические пипетирующие станции не способны обеспечить достаточно высокую точность и диапазоны дозирования с учетом разнообразия физико-химических свойств дозируемых веществ. Во всех предлагаемых на рынке роботизированных станциях дозирования параметры дозирования определяются оператором исходя из его собственного опыта и навыков. Таким образом, на данном этапе использование роботизированных автоматических станций дозирования ограничено рядом технологических особенностей малых производств.

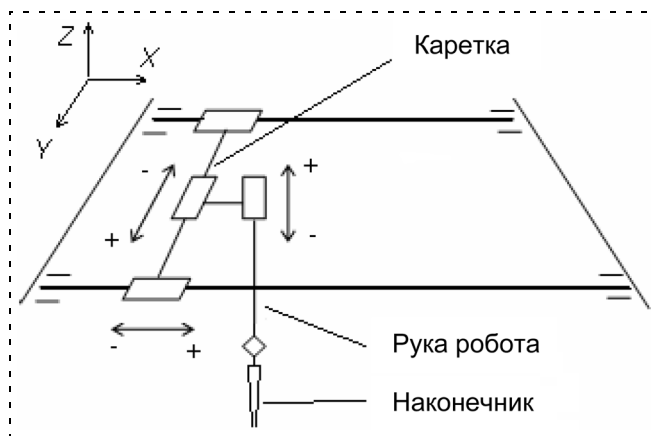


Рис. 1. Мостовая кинематическая схема пипетирующего робота

Строго говоря, использование роботизированных пипетирующих станций высвобождает только руки человека, так как робот не подвержен усталости и влиянию внешних факторов при монотонной и повторяющейся работе, которой является дозирование. Алгоритм движения руки робота жестко задан и не подвержен изменениям. Рука последовательно подходит к строго определенным ячейкам на рабочем столе робота и выполняет дозирование. Однако при всей универсальности пипетирующих станций и четкости выполнения заложенных алгоритмов движения руки робота выбор параметров самого процесса дозирования (скорость аспирации, скорость дозирования, задержка между операциями) по-прежнему является проблемой, решаемой человеком исходя из его опыта и субъективных представлений о свойствах дозируемого реагента. Процесс дозирования с помощью роботизированной пипетирующей станции можно представить в виде следующего алгоритма (рис. 2).

Алгоритм состоит из шести функциональных блоков. Процесс начинается с требования: необходимо дозирование нужного объема реагента. Затем (блок 2) оператор вводит в программное обеспечение, управляющее роботом, значения этого объема и подобранных параметров дозирования (скорости дозирования и аспирации и задержки). На данном этапе оператор выполняет функцию эксперта, принимая решение, основанное на его опыте и знаниях. Именно этот этап представляется наиболее уязвимым к человеческим ошибкам и неточностям. И именно от этого этапа зависит точность и производительность дозирования. Процесс автоматизации процесса дозирования, в сущности, заключается в выполнении роботом алгоритма движения

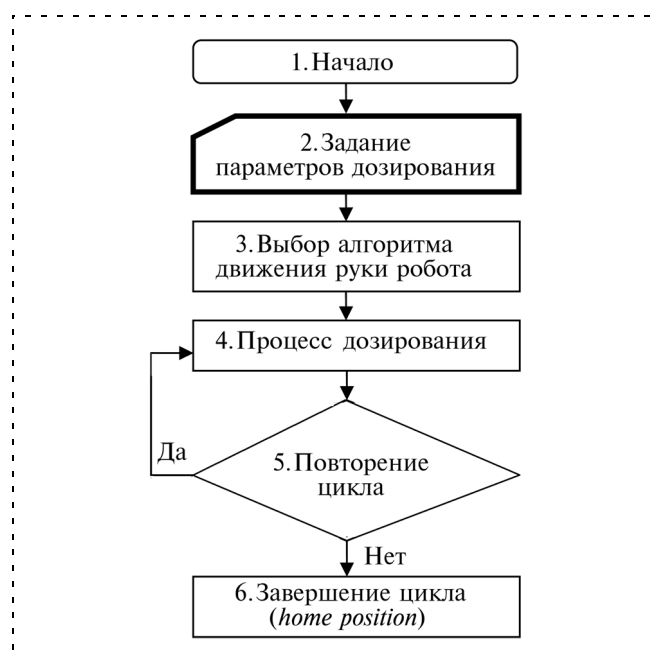


Рис. 2. Алгоритм процесса дозирования роботизированной пипетирующей станцией

руки с наконечником, который является циклическим и повторяющимся процессом. Робот, обладая жестко запрограммированной системой координат, точно обходит заданные на рабочем столе точки, выполняя дозирование.

Исходя из вышеописанного алгоритма можно заметить, что остается не решенной задача выбора оптимальных по точности и производительности параметров дозирования. Как уже отмечалось, все существующие пипетирующие станции требуют от оператора ввода значений параметров дозирования и не в состоянии предложить алгоритмы решения задачи выбора этих параметров.

Особенности управления процессом дозирования в пипетирующих станциях

Предлагаемые на рынке современные станции таких производителей, как *Tecan*, *Hamilton*, *Biohit*, *Corbett research*, теряют заявленную универсальность из-за отсутствия оптимизации выбора параметров дозирования в условиях большой номенклатуры дозируемых объемов.

Основными показателями эффективности работы станций дозирования являются точность дозирования и производительность. Данные параметры зависят от ряда неочевидных факторов, учет которых в сегодняшних моделях не ведется.

На точность дозирования влияют такие параметры, как: температура наконечника, температура дозируемого реактива, температура окружающей среды, вязкость дозируемого реактива, метод дозирования, скорость дозирования и аспирации и т. п., причем ряд этих параметров оказывают влияние друг на друга, и строгий учет их невозможен: к примеру, температура дозируемого реактива оказывает сильное влияние на вязкость. Из-за отличия реальных условий от идеальных при течении жидкости в простой экспоненциальной зависимости вязкости от температуры появляется поправка к температуре, подобная поправкам к давлению и объему в уравнении состояния реального газа [7]. Однако при температурах замерзания, испарения и критических параметрах зависимость вязкость — температура может меняться по очень сложному закону. В таких случаях надо рассматривать каждую конкретную жидкость и конкретный интервал температур. В реальных условиях производств нет возможности измерять температуру дозируемого реактива, которая к тому же в процессе дозирования меняется. Следовательно, использование жестких поправок на температуру и вязкость при выставлении параметров дозирования является неоправданным. Скорости дозирования и аспирации в этом случае имеют зависимость от вязкости, однако ввиду нечеткости определения вязкости реактива могут быть учтены только способом перебора. Таким образом, выбор параметров дозирования не является строгой математической задачей, основанной на жестких зависимостях параметров друг от

друга, а является лингвистической задачей выставления соответствия между параметрами. Поэтому пипетирующую станцию с точки зрения установки параметров дозирования можно считать "черным ящиком", который исходя из входных параметров процесса, указанных в алгоритме на рис. 2, определяет выходные параметры: скорость аспирации, скорость дозирования и задержку между этапами дозирования. На рис. 3 представлена модель "черного ящика".

В статье рассматривается пипетирующая станция *EVO Freedom 75* производства корпорации *Tecan*. Данная станция предназначена для выполнения всего многообразия лабораторных операций (дозирования, разведения, диспенсинга и т. д.). На производстве диагностических тест-систем ФГУН ЦНИИЭ Роспотребнадзора она используется для дозирования различной номенклатуры реагентов объемом от 30 до 980 мкл. Эта роботизированная станция относится к дискретным дозирующим устройствам без контроля величины дозы с использованием для создания нагнетания и всасывания технической жидкости (деионизированной воды).

Почему в наконечник дозатора входит точно заданное количество жидкости? Если наконечник дозатора помещен в жидкость, то образуется замкнутый объем, ограниченный внутренними стенками дозатора, поршнем (технической жидкостью со стороны поршня) и жидкостью со стороны наконечника. Как известно, для замкнутого объема выполняется закон $VP = \text{const}$, т. е. произведение замкнутого объема и давления газа в нем — величина постоянная. Следовательно, если мы увеличим объем путем перемещения поршня, то давление уменьшится и жидкость со стороны наконечника начнет всасываться до тех пор, пока давление внутри объема и вне него не выровняется. Таким образом, жидкость должна занять ровно тот объем, который освободил поршень.

Содержательной постановкой задачи является дозирование реактивов различного физико-химического состава в условиях изменяющегося температурного режима самого реактива и окружающей среды. Таким образом, использовать жесткие математические зависимости между скоростью дозирования и параметрами реактива не представляется возможным. Следует использовать эмпирические данные, полученные от специалистов, лаборантов и технологов: чем более вязкий реактив и малый объем дозирования, тем скорость аспирации и дозирования должны быть меньше. Также на производительность и точность, которые являются основными показателями при работе, влияет задержка, происходящая после этапов аспирации и дозирования соответственно.



Рис. 3. Пипетирующая станция как объект управления

Для решения поставленной задачи использовался аппарат нечеткого логического вывода, который позволяет получать заключения в виде нечетких множеств, соответствующих текущим значениям входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечетких операций.

Основные положения построения нечетких моделей принятия решений

В большинстве случаев на практике системы нечеткого логического вывода используются для решения задач управления различными объектами или процессами. В этом случае построение нечеткой модели основывается на формальном представлении характеристик исследуемой системы в терминах лингвистических переменных. И ввиду того, что кроме алгоритма управления основными понятиями систем управления являются входные и выходные переменные, именно они рассматриваются как лингвистические переменные при формировании базы правил в системах нечеткого логического вывода.

Нечеткая логика — в основном многозадачная логика, которая позволяет определять промежуточные значения между стандартными оценками подобно Да/Нет, Истина/Ложь, и т. д. Понятия подобно "довольно близко" или "очень быстро" могут быть сформулированы математически и обработаны компьютером.

Нечетким множеством (*fuzzy set*) \bar{A} на универсальном множестве U называется совокупность пар $(\mu_A(u), u)$, где $\mu_A(u)$ — степень принадлежности элемента $u \in U$ к нечеткому множеству \bar{A} . Степень принадлежности — это число из диапазона $[0, 1]$. Чем выше степень принадлежности, тем с большей мерой элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества. Если универсальное множество состоит из конечного числа элементов $U = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, тогда нечеткое множество \bar{A} записывается в виде $\bar{A} = \sum_{i=1}^k \mu_A(u_i)/u_i$. В случае непрерывного множества U используют обозначение $\bar{A} = \int_U \mu_A(u)/u$. Знаки \sum и \int в этих формулах означают совокупность пар $\mu_A(u)$ и u .

Нечеткие контроллеры — наиболее важные приложения нечеткой теории. Они работают иначе, чем стандартные контроллеры; вместо дифференциальных уравнений в них используются экспертные знания, чтобы описать систему (система нечетких заключений). Эти знания могут быть выражены очень простым способом, с использованием лингвистических переменных.

Система нечетких заключений состоит в основном из пяти функциональных блоков:

- блока фаззификации, преобразующего численные входные значения в степени соответствия лингвистическим значениям. Функции принадлежности, определенные на входных переменных, применяются к их фактическим значениям для определения степени истинности каждой предпосылки каждого правила;
- баз данных, в которых определены функции принадлежности нечетких множеств, используемых в нечетких правилах;
- баз правил, содержащих набор нечетких правил типа "если—то";
- блока принятия решений, совершающих операции вывода на основании имеющихся правил. Вычисленное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. Это приводит к одному нечеткому подмножеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. Здесь же все нечеткие подмножества, назначенные к каждой переменной вывода (во всех правилах), объединяются вместе, чтобы формировать одно нечеткое подмножество для каждой переменной вывода;
- блока дефаззификации, который преобразует нечеткие результаты вывода в численные значения.

Нечеткой базой знаний (*fuzzy knowledge base*) о влиянии факторов, заданных множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, на значение параметра y называется совокупность логических высказываний типа [3]:

ЕСЛИ $(x_1 = a_1^{j1})$ И $(x_2 = a_2^{j1})$ И...И $(x_n = a_n^{j1})$

ИЛИ $(x_1 = a_1^{j2})$ И $(x_2 = a_2^{j2})$ И...И $(x_n = a_n^{j2})$

ИЛИ $(x_1 = a_1^{jk_j})$ И $(x_2 = a_2^{jk_j})$ И...И $(x_n = a_n^{jk_j})$,

ТО $y = d_j$, для всех $j = \overline{1, m}$,

где a_i^{jp} — нечеткий терм, которым оценивается переменная x_i в строчке с номером jp ($p = \overline{1, k}$); k_j — число строчек-конъюнкций, в которых выход y оценивается нечетким термом $d_j, j = \overline{1, m}$; m — число термов, используемых для лингвистической оценки выходного параметра y .

С помощью операций \cup (ИЛИ) и \cap (И) нечеткую базу знаний представляют в более компактном виде:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j} \left[\bigcap_{i=1}^n (x_i = a_i^{jp}) \right] \mapsto y = d_j, j = \overline{1, m},$$

n — число терм-множеств входной величины.

На основе данной базы знаний необходимо сделать вывод о соответствии текущего входа выходному значению. Алгоритмов выполнения данной процедуры разработано много, но основными двумя являются:

1) нечеткий логический вывод по алгоритму Мамдани, который выполняется по нечеткой базе знаний, где значения входных и выходной переменных заданы нечеткими множествами;

2) нечеткий логический вывод по алгоритму Сугено (иногда говорят алгоритм Такаги-Сугено), который выполняется по нечеткой базе знаний, где заключения правил d_j задаются не нечеткими термами, а линейной функцией от входа:

$$d_j = b_{j,0} + \sum_{i=1}^n b_{j,i} x_i,$$

где $b_{j,i}$ — некоторые числа.

Алгоритм Мамдани исторически первый и не требует поиска линейной зависимости между входом и выходом, поэтому применим в недетерминированных задачах управления более широко. Алгоритм Мамдани считается универсальным аппроксиматором.

Действие алгоритма наглядно иллюстрирует следующий пример [8]. Некоторая система описывается нечеткой базой правил:

1. Если x есть A , тогда w есть D .

2. Если y есть B , тогда w есть E .

3. Если z есть C , тогда w есть F .

Здесь x, y, z — имена входных переменных, w — имя переменной вывода, а A, B, C, D, E, F — заданные функции принадлежности. Процедура получения логического вывода продемонстрирована на рис. 4.

Предполагается, что входные переменные приняли некоторые четкие значения — x_0, y_0, z_0 . Исходя из функций принадлежности A, B, C находятся степени истинности $\alpha(x_0), \alpha(y_0), \alpha(z_0)$ для предпосылок каждого из трех приведенных выше правил. Далее происходит "отсекание" функций принадлежности заключений правил (т. е. D, E, F) на уровнях $\alpha(x_0), \alpha(y_0), \alpha(z_0)$. На этапе логического вывода проводится объединение усеченных функций принадлежности по выбранному алгоритму, в результате чего получается комбинированное нечеткое множество, описываемое функцией принадлежности $\mu_z(w)$ и соответствующее логическому выводу для выходной переменной w . На завершающем этапе значение выходной переменной дефаззифицируется по одному из многих существующих алгоритмов.

Таким образом, в соответствии с методикой построения нечетких систем необходимо совершить следующие шаги:

1) выбрать тип нечеткого логического вывода (Мамдани или Сугено) в зависимости от предъявленных требований к системе;

2) определить число входных переменных по числу влияющих на выходные характеристики системы факторов;

3) определить число выходных переменных;

4) задать пределы входных и выходных переменных;

5) в зависимости от требований по быстродействию, точности, производительности определить вид и тип функции принадлежности;

6) определить число интервалов, на которые разбиваются области принадлежности входных и выходных переменных, т. е. число лингвистических переменных;

7) задать качественные характеристики лингвистических переменных, т. е. их числовые значения;

8) задать таблицу нечетких правил в лингвистических переменных.

Выполнение некоторых этих этапов сопряжено с определенными трудностями и в целом громоздко. Для облегчения разработки нечетких контроллеров на рынке предложен ряд графических интерфейсов, одним из которых является пакет инструментов MATLAB Fuzzy Logic Toolbox. С помощью этого пакета и решалась содержательная задача построения нечеткой модели задания параметров дозирования для автоматизированной пипетирующей станции *EVO Freedom 75*.

Разработка и построение нечеткой модели принятия решения по заданию параметров дозирования

Как уже отмечалось, модель имеет три входные переменные: объем дозы (V_{probe}), вязкость ($vyazkost$), температура (t_{probe}). Исходя из технологических особенностей пипетирующей станции объем дозирования может быть выбран из диапазона 30...980 мкл. Вязкость реактива — неизмеряемая величина и оценивается эмпирически процентным содержанием глицерина. Температура имеет диапазон изменений от 0 до 30 °С. Выходными же переменными являются скорость дозирования (ϑ_{disp}), скорость аспирации (ϑ_{asp}) и задержка ($delay$). Скорость дозирования определяется параметрами шприцевого насоса на 1 мл, установленного на передней стенке пипетирующей станции, и имеет следующий конструктивный диапазон значений: от 0,05 мл/мин до 52,3 мл/мин (в расчетах используется диапазон от 0 до 872 мкл/с). Задержка принимает значения от 100 до 1000 мс [4].

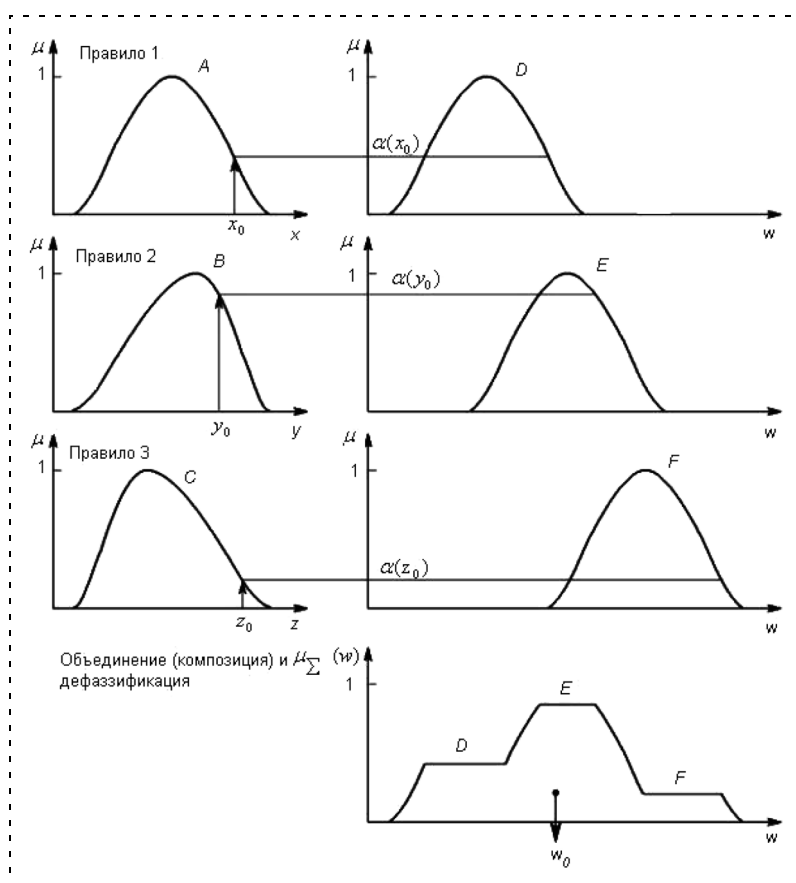


Рис. 4. Процедура логического вывода

Эмпирические знания в этой области представляются в форме следующих эвристических правил, которые применяются в случае ручного дозирования реактива лаборантом или технологом:

1. При очень маленьком объеме и очень высокой вязкости реактива и комнатной температуре скорость аспирации и дозирования низкие, а задержка средняя.

2. При большом объеме и вязком реактиве и высокой температуре скорость дозирования высокая, скорость аспирации средняя, а задержка малая.

В представленных условиях таких эвристических правил насчитывается 48. Эти правила образуют базу нечетких лингвистических правил, в которых входными переменными являются лингвистические переменные:

- "объем дозы", в качестве терм-множества которой будем использовать множество $T_1 = \{\text{очень маленькая (ОМ), маленькая (М), средняя (Ср), большая (Б)}\}$;
- "вязкость", в качестве терм-множества которой будем использовать множество $T_2 = \{\text{не вязкое (НВ), не очень вязкое (НОВ), вязкое (В), очень вязкое (ОВ)}\}$;
- "температура", в качестве терм-множества которой будем использовать множество $T_3 = \{\text{низкая (Н), комнатная (КОМН), высокая (В)}\}$.

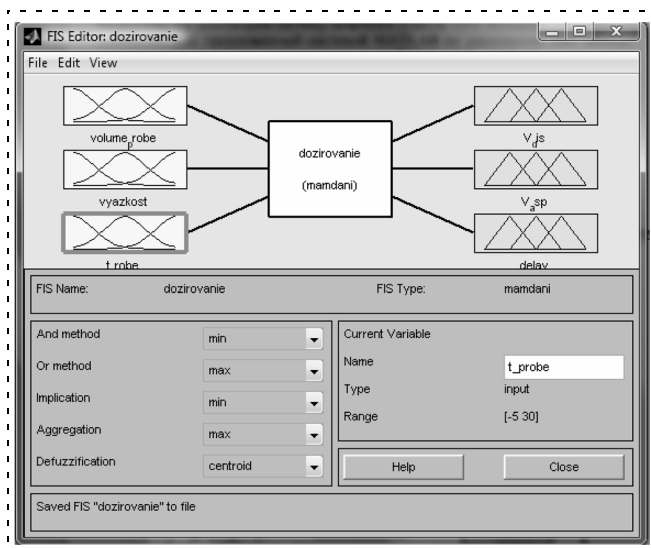


Рис. 5. Графическое представление редактора FIS после определения входных и выходных переменных разрабатываемой системы нечеткого вывода

Выходными же являются лингвистические переменные:

- "скорость дозирования", в качестве терм-множества которой будем использовать множество $T_4 = \{\text{низкая (Н), средняя (Ср), высокая (В)}\}$;
- "скорость аспирации", в качестве терм-множества которой будем использовать множество $T_5 = \{\text{низкая (Н), средняя (Ср), высокая (В)}\}$;
- "задержка", в качестве терм-множества которой будем использовать множество $T_6 = \{\text{маленькая (М), средняя (Ср), большая (Б)}\}$.

Разработка нечеткой модели (будем называть ее *dozirovanie*) была проведена с помощью графических средств системы MATLAB. Для этого в редакторе FIS были определены три входные переменные и три выходные (рис. 5).

Далее требовалось определить функции принадлежности термов для каждой из переменных системы нечеткого вывода. Для этой цели был использован редактор функции принадлежности системы MATLAB. В качестве функций выбирали кусочно-линейные функции, отвечающие требованиям максимизации точности и производительности [5].

Вид графического интерфейса редактора функции принадлежности после задания первой входной переменной изображен на рис. 6 (см. третью сторону обложки), аналогичным образом задавали остальные входные и все выходные переменные. Затем задавали 48 правил для разрабатываемой системы нечеткого вывода. Для этой цели использовали редактор правил системы MATLAB.

После этого можно было выполнить оценку построенной системы нечеткого вывода для задачи управления пипетирующей станцией EVO 75. С этой целью применяли программу просмотра правил системы MATLAB: вводили значения входных переменных для частного случая, когда объем дозы ра-

вен 660 мкл, вязкость определена на уровне 7 % глицерина, а температура равняется 20 °С. Процедура нечеткого вывода, выполненная системой MATLAB для разработанной нечеткой модели, выдала в результате следующие значения для выходных переменных: скорость дозирования равняется 757 мкл/с, скорость аспирации 757 мкл/с, а задержка 200 мс.

Процесс анализа и исследования построенной нечеткой модели включает в себя выполнение нечетких выводов для различных значений входных переменных и оценки полученных результатов в целях установления адекватности модели и внесения в нее необходимых изменений в случае несогласованности отдельных результатов.

Результаты, полученные с помощью данной модели, использовали при дозировании реактивов на производстве диагностических тест-систем при ФГУН ЦНИИЭ Роспотребнадзора. Результаты были адекватны выбранным по рекомендации технологов и специалистов значениям и в некоторых диапазонах объемов дозирования (более 500 мкл) увеличили производительность на 10...15 % при сохранении требуемой точности дозирования.

Для общего анализа разработанной нечеткой модели может оказаться полезной визуализация соответствующей поверхности нечеткого вывода (рис. 7, см. третью сторону обложки). Данная поверхность нечеткого вывода позволяет установить зависимость значений выходных переменных от значений входных переменных нечеткой модели системы управления скоростью дозирования пипетирующей станции EVO Freedom 75. Эта зависимость может послужить основой для программирования контроллера или аппаратной реализации соответствующего нечеткого алгоритма управления в форме таблицы решений. В дополнение к этому установление данной зависимости является, по сути, решением задачи, известной в классической теории управления как задача синтеза управляющих воздействий. При этом для решения данной задачи будут использоваться средства нечеткой логики и теории нечетких множеств.

Список литературы

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение для принятия приближенных решений. М.: Мир, 1976.
2. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
3. Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. <http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/index.php>.
4. Freedom EVO 75 Operating Manual ver. 1.0, 2004.
5. Кузнецов М. В. Разработка системы эффективного управления поиском согласованного положения деталей для роботизированных сборочных устройств на основе нечеткой логики: Дис. канд. техн. наук. М.: РГБ, 2005.
6. Безменов В. С. Разработка принципов и методов построения пневматических систем автоматизированного дозирования жидкостей: автореферат дис. Док. техн. наук. М., 2009.
7. Фогельсон Р. Л., Лихачев Е. Р. Температурная зависимость вязкости // Журнал технической физики. 2001. Т. 71. Вып. 8.
8. Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ

УДК 681.5.01

Н. В. Фалдин, д-р техн. наук, проф.,
А. Ю. Липатов, аспирант, **А. В. Моржов**, аспирант,
Тульский государственный университет
nvfaldin@yandex.ru

Синтез оптимального по быстродействию объемного силового гидропривода при задании ограничения на потребляемую мощность*

Излагается метод синтеза оптимального по быстродействию объемного силового гидропривода, работающего на инерционную нагрузку. Задача синтеза решается с учетом фазового ограничения на потребляемую приводом мощность. Применение метода позволяет при разработке гидроприводов использовать приводные двигатели меньшей мощности.

Ключевые слова: объемный гидропривод, оптимальный закон управления, быстродействие, ограничение мощности

Введение

Следящие гидроприводы с объемным регулированием скорости обычно используются в тех случаях, когда требуются большие мощности и большие крутящие моменты. В таких гидроприводах источником энергии является приводной двигатель, вращающий блок насосов переменной производительности. В качестве приводных применяются двигатели внутреннего сгорания, трехфазные электродвигатели переменного тока и др.

В следящих системах, в том числе в следящих гидроприводах, максимальная мощность потребляется в переходных процессах. Применение в гидроприводе оптимального по быстродействию закона управления, синтезированного с учетом заданного ограничения на потребляемую мощность, позволяет существенно уменьшить мощность приводного двигателя. Это особенно важно для разного рода автономных комплексов, так как ведет к значительному уменьшению веса и габаритных размеров привода. При этом, как показывают исследования, быстродействие привода, синтезированного с учетом фазового ограничения мощности, практически не отличается от быстродействия привода, при синтезе которого не учитывалось ограничение на потребляемую мощность.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-08-00332).

Гидропривод как объект управления представляет собой нелинейную систему высокого (восьмого) порядка. Синтез закона управления будем выполнять *базовым методом*. Этот метод следует использовать, если объект управления содержит звенья, имеющие большие и малые постоянные времени (можно выделить быстрые и медленные движения). Базовой называется система, которая получится, если приравнять нулю все малые постоянные времени. Синтез системы при этом выполняется по следующей схеме: сначала синтезируется оптимальный по быстродействию закон управления для базовой системы, а затем в полученном базовом законе управления приближенно учитывается влияние звеньев с малыми постоянными времени.

Базовая система обычно имеет невысокий порядок, и для нее удается сравнительно несложно синтезировать оптимальный закон управления. Базовый метод синтеза позволяет преодолеть серьезное препятствие, обусловленное высоким порядком динамической модели объекта управления. Получаемый при этом закон управления оказывается весьма близким к строго оптимальному.

Синтез базового закона управления

Динамическая модель гидропривода содержит звенья, постоянные времени которых разнесены в девяносто и более раз, т. е. для него вполне можно использовать базовый метод синтеза.

На рис. 1 представлена структурная схема базовой модели гидропривода. Здесь $G = 0,0067$; $L = 1 \cdot 10^{-11}$; $K = 9,29 \cdot 10^{-5}$; $T = 6,95$; $W = 2,23 \cdot 10^{-5}$; $D_1 = 0,52$; $D_2 = 32 \cdot 10^6$. Базовая система содержит два звена с ограничителями, один из которых ($|p| \leq D_2$) является безынерционным. Далее, поскольку ограничитель угла γ является *приводимым* [1], то в целях упрощения условий оптимальности будем при синтезе оптимального управления рассматривать ограничение $|\gamma| \leq D_1$ как фазовое.

Потребляемая гидроприводом мощность пропорциональна величине $|p_g|$ [2]. При синтезе оптимального закона управления будем использовать ограничение $|p\gamma| \leq D_3$, где $D_3 = \alpha \max|p\gamma| = \alpha D_1 D_2$ ($\alpha < 1$).

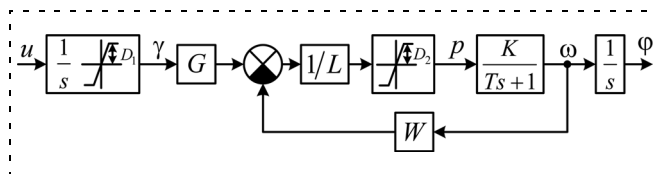


Рис. 1. Структурная схема базовой модели гидропривода

В соответствии со структурной схемой (рис. 1) движение объекта управления (базовой системы) при $|p| < D_2$ задается уравнениями

$$\frac{d\gamma}{dt} = u; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{T} \frac{G\gamma - W\omega}{L} - \frac{\omega}{T}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad (1)$$

а при $|p| = D_2$ — уравнениями

$$\frac{d\gamma}{dt} = u; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{T} (\pm D_2) - \frac{\omega}{T}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (2)$$

Переключение уравнений движения происходит при пересечении фазовой траекторией ограничивающих плоскостей

$$G\gamma - W\omega + LD_2 = 0; \quad G\gamma - W\omega - LD_2 = 0. \quad (3)$$

На управление u наложено ограничение

$$|u| \leq A. \quad (4)$$

Будем решать задачу о наискорейшем переводе фазовой точки системы (1), (2) из произвольного начального состояния в начало координат при условии, что на фазовые переменные наложены ограничения

$$-D_3 \leq p\gamma \leq D_3; \quad (5)$$

$$-D_1 \leq \gamma \leq D_1. \quad (6)$$

Оптимальное управление необходимо найти в виде синтезирующей функции.

Для определения оптимального управления и оптимальных траекторий воспользуемся необходимыми условиями оптимальности в форме принципа максимума [1, 3].

При $|p| < D_2$, т. е. в области

$$|G\gamma - W\omega| < LD_2, \quad (7)$$

функция Гамильтона задается равенством

$$H(\psi, \gamma, \omega, \varphi, u) = \psi_1 u + \psi_2 \left[\frac{K}{T} \left(\frac{G\gamma - W\omega}{L} \right) - \frac{\omega}{T} \right] + \psi_3 \omega, \quad (8)$$

а в области $|G\gamma - W\omega| \geq LD_2$ — равенством

$$H(\psi, \gamma, \omega, \varphi, u) = \psi_1 u + \psi_2 \left[\frac{K}{T} (\pm D_2) - \frac{\omega}{T} \right] + \psi_3 \omega. \quad (9)$$

Неравенства (5) и (6) выделяют в фазовом пространстве некоторую допустимую область, которую обозначим B . Положим для удобства, что граница области B задается уравнением

$$g(\gamma, \omega, \varphi) = 0. \quad (10)$$

Вид функции $g(\gamma, \omega, \varphi)$ (она является кусочно-непрерывной, кусочно-гладкой) легко находится из неравенств (5), (6).

В соответствии с принципом максимума при движении в открытом ядре области B оптимальное управление имеет вид

$$u = A \operatorname{sign} \psi_1(t). \quad (11)$$

При движении по границе области B управление $u(t)$ однозначно определяется из условия

$$P(\gamma, \omega, \varphi, u) = \frac{d}{dt} g(\gamma, \omega, \varphi) \equiv 0. \quad (12)$$

Производная $P(\gamma, \omega, \varphi, u)$ вычисляется в силу уравнений движения (1) или (2).

В зависимости от того, какое из условий — $|p| < D_2$ или $|p| = D_2$ — имеет место, вспомогательный вектор $\psi(t)$ при движении в открытом ядре области B задается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{KG}{TL} \psi_2; & \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{1}{TL} (KW + L) \psi_2 - \psi_3; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

или уравнениями

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0; \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{1}{T} \psi_2 - \psi_3; \quad \frac{d\psi_3}{dt} = 0. \quad (14)$$

Выпишем уравнения, задающие вспомогательный вектор $\psi(t)$ при движении по границе области B . Если в процессе движения выполняется неравенство $|p| < D_2$, то вектор $\psi(t)$ удовлетворяет уравнениям [3]

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{KG}{TL} \psi_2 + \frac{\psi_1 L}{2G\gamma - W\omega} \left[\frac{2G}{L} u - \right. \\ \left. - \frac{W}{LT} (2KG\gamma - KW\omega - L\omega) \right]; \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{W\psi_1}{2G\gamma - W\omega} \left(-u + \frac{KW\gamma}{LT} + \frac{\gamma}{T} \right) - \\ - \psi_3 + \frac{1}{TL} (KW + L) \psi_2; \\ \frac{d\psi_3}{dt} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

При выполнении условия $|p| = D_2$ (давление находится на ограничении) вектор $\psi(t)$ определяется уравнениями (14).

В каждой точке t^* входа оптимальной траектории на границу области B должно выполняться условие скачка

$$\psi(t^* + 0) = \psi(t^* - 0) + \mu \operatorname{grad} g(\gamma(t^*), \omega(t^*), \varphi(t^*)). \quad (16)$$

Условие скачка должно иметь место и в точках t^0 переключения уравнений движения:

$$\begin{aligned} \psi(t^0 + 0) &= \\ &= \psi(t^0 - 0) + \mu \operatorname{grad} (G\gamma(t^0) - W\omega(t^0) \pm LD_2). \end{aligned} \quad (17)$$

В равенствах (16) и (17) μ — некоторое число. В точках схода оптимальной траектории с границы области B в открытое ядро области вектор $\psi(t)$ остается непрерывным.

Равенства (11)—(17), если их дополнить соотношениями [1, 3]

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq 0, H(\psi(t), \gamma(t), \omega(t), \varphi(t), u(t)) = \text{const} \geq 0, (18)$$

задают полную систему необходимых условий оптимальности.

На рис. 2. изображены проекции на плоскость $\varphi = 0$ траекторий, задающих оптимальную поверхность переключения. Эта поверхность определяет оптимальное управление при движении фазовой точки в открытом ядре области B . Допустимая область B на рис. 2 выделена штриховкой. Прямые линии EQ и E_1Q_1 соответствуют уравнениям (3). Выше линии EQ $p = -D_2$, а ниже линии E_1Q_1 $p = D_2$.

При $|p| = D_2$, как следует из уравнения (2), время движения не зависит от управления, а полностью определяется конечным значением переменной ω . При движении в открытом ядре области B принцип максимума приводит к равенству $\psi_1(t) \equiv 0$. Поскольку при $|p| < D_2$ оптимальное управление задается равенством (11), то для упрощения оптимального закона управления будем на участках однозначности принимать управление равным $\pm A$.

На рис. 2 изображена траектория $MNCDEFGHJKO$, имеющая наиболее сложный вид. На этой траектории каждая из букв, кроме M и O , задает точку стыка [1]. Пусть, далее, точкам стыка соответствуют моменты времени t_1, t_2, \dots, t_{10} , причем точке N соответствует момент времени t_1 , точке C — t_2 и т. д. Покажем, что указанная траектория удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Для определения значения параметра μ в условиях скачка (16), (17) воспользуемся условием непрерывности функции Гамильтона в каждой точке стыка. Для точки C , например, это условие принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \psi_1^-(t_2)u^-(t_2) + \psi_2^-(t_2)\left(-\frac{K}{T}D_2 - \frac{\omega(t_2)}{T}\right) + \\ & + \psi_3^-(t_2)\omega(t_2) = (\psi_1^-(t_2) - D_2\mu_2)u^+(t_2) + \\ & + \psi_2^-(t_2)\left(-\frac{K}{T}D_2 - \frac{\omega(t_2)}{T}\right) + \psi_3^-(t_2)\omega(t_2). \end{aligned} \quad (19)$$

В равенстве (19) символами ψ_i^- , u^- обозначены пределы слева, а символом u^+ — предел справа. Из (19), принимая во внимание, что $u^+(t_2) = 0$, $u^-(t_2) = -A$, найдем

$$\psi_1(t_2 - 0) = 0. \quad (20)$$

Из (20) и (14) следует, что в интервале $t_1 < t < t_2$ $\psi_1(t) \equiv 0$.

Выполненный анализ позволил установить, что

$$\begin{aligned} & \psi_1(t_2 - 0) = \psi_1(t_4 - 0) = \psi_1(t_5) = \\ & = \psi_1(t_6 - 0) = \psi_1(t_8 - 0) = \psi_1(t_9) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Параметры μ_2, μ_4, μ_6 и μ_8 выбираются свободно, т. е. на их значения не наложены ограничения. Да-

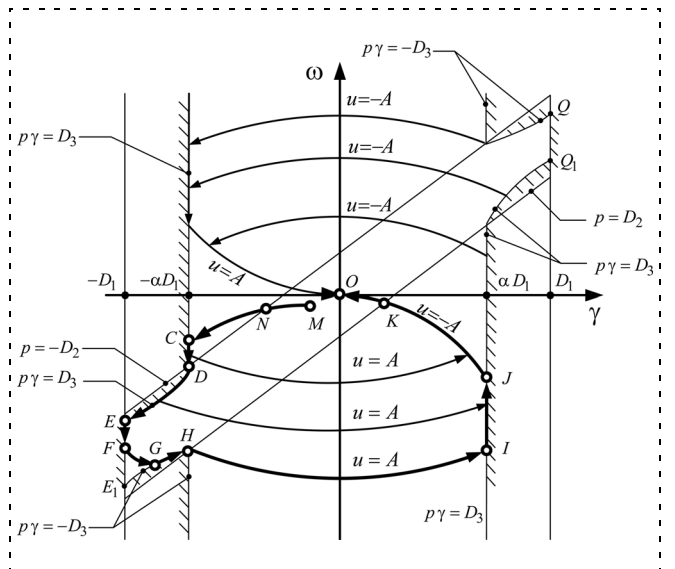


Рис. 2. Фазовые траектории, образующие поверхность переключения

лее, получены зависимости, задающие значения $\mu_1, \mu_3, \mu_7, \mu_{10}$, причем $\mu_1 = \mu_{10} = 0$.

Если задан начальный вектор $\psi(0)$, то уравнения (1), (2) и равенства (11)—(18) полностью определяют оптимальную траекторию. Для изображенной на рис. 2 траектории $MNCDEFGHJKO$ вектор $\psi(0)$ и неизвестные параметры μ_2, μ_4, μ_6 и μ_8 находятся из системы уравнений (21).

Обозначим $V^1(t)$ нормированную фундаментальную матрицу решений системы уравнений (13), а $V^2(t)$ — матрицу решений системы (14). При известном управлении $u(t)$ и соответствующей ему траектории движения уравнения (15) представляют собой систему однородных линейных уравнений с переменными коэффициентами. Нормированную фундаментальную матрицу решений данного уравнения обозначим $V^*(t_0, t)$, здесь t_0 — начальный момент, т. е. момент, с которого рассматривается решение уравнений (15).

Равенства (21) и условия скачка (16), (17) приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \psi_1(t_2 - 0) = R^T V^2(t_2 - t_1) V^1(t_1) \psi(0) = 0; \\ \psi_1(t_4 - 0) = R^T Q_5 \psi(0) + R^T p_5 \mu_2 = 0; \\ \psi_1(t_5) = R^T Q_3 \psi(0) + R^T V^1(t_5 - t_4) p_5 \mu_2 + \\ + R^T V^1(t_5 - t_4) M^4 \mu_4 = 0; \\ \psi_1(t_6 - 0) = R^T Q_7 \psi(0) + R^T p_7 \mu_2 + R^T p_6 \mu_4 = 0; \\ \psi_1(t_8 - 0) = R^T Q_9 \psi(0) + R^T p_8 \mu_2 + \\ + R^T p_9 \mu_4 + R^T V^2(t_8 - t_7) Q_8 M^6 \mu_6 = 0; \\ \psi_1(t_9) = R^T V^2(t_9 - t_8) Q_9 \psi(0) + \\ + R^T V^2(t_9 - t_8) p_8 \mu_2 + R^T V^2(t_9 - t_8) p_9 \mu_4 + \\ + R^T V^2(t_9 - t_7) Q_8 M^6 \mu_6 + R^T V^2(t_9 - t_8) M^8 \mu_8 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

В уравнениях (22) матрицы \mathbf{Q} задаются равенствами:

$$\mathbf{Q}_5 = \mathbf{V}^*(t_3, t_4) \left(\mathbf{Q}_2 - \frac{u(t_3+0)\mathbf{M}^2\mathbf{R}^T\mathbf{Q}_2}{Gu(t_3+0) + W\left(\frac{K}{T}D_2 - \frac{\omega(t_3)}{T}\right)} \right);$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{V}^2(t_3 - t_1)\mathbf{V}^1(t_1); \mathbf{Q}_3 = \mathbf{V}^1(t_5 - t_4)\mathbf{Q}_5;$$

$$\mathbf{Q}_7 = \mathbf{V}^1(t_6 - t_5)\mathbf{Q}_3;$$

$$\mathbf{Q}_8 = \frac{(u(t_7-0) - u(t_7+0))\mathbf{V}^*(t_6, t_7)\mathbf{M}^7\mathbf{R}^T\mathbf{V}^*(t_6, t_7)}{C(t_7)};$$

$$\mathbf{Q}_9 = \mathbf{V}^2(t_8 - t_7)(\mathbf{V}^*(t_6, t_7) + \mathbf{Q}_8)\mathbf{Q}_7;$$

$$C(t_7) = Gu(t_7 + 0) - W\left(\frac{K}{T}D_2 - \frac{\omega(t_7)}{T}\right). \quad (23)$$

Векторы ρ , \mathbf{R}^T и \mathbf{M} определяются соотношениями

$$\rho_5 = \mathbf{V}^*(t_3, t_4) \times$$

$$\times \left(\mathbf{V}^2(t_3 - t_2)\mathbf{M}^2 - \frac{\mathbf{M}^3\mathbf{R}^T\mathbf{V}^2(t_2 - t_3)\mathbf{M}^2u(t_3 + 0)}{Gu(t_3 + 0) + W\left(\frac{K}{T}D_2 - \frac{\omega(t_3)}{T}\right)} \right);$$

$$\rho_6 = \mathbf{V}^1(t_6 - t_4)\mathbf{M}^4; \rho_7 = \mathbf{V}^1(t_6 - t_4)\rho_5; \quad (24)$$

$$\rho_8 = \mathbf{V}^2(t_8 - t_7)(\mathbf{V}^*(t_6, t_7) + \mathbf{Q}_8)\rho_7;$$

$$\rho_9 = \mathbf{V}^2(t_8 - t_7)(\mathbf{V}^*(t_6, t_7) + \mathbf{Q}_8)\rho_6;$$

$$\mathbf{R}^T = (1, 0, 0); \mathbf{M}^2 = (-D_2, 0, 0)^T;$$

$$\mathbf{M}^3 = (G, -W, 0)^T; \mathbf{M}^4 = (-1, 0, 0)^T;$$

$$\mathbf{M}^6 = (2G\gamma - W\omega, -W\gamma, 0)^T|_{t=t_6};$$

$$\mathbf{M}^7 = (G, -W, 0)^T; \mathbf{M}^8 = (D_2, 0, 0)^T. \quad (25)$$

Условиями оптимальности (принципом максимума) вектор $\psi(t)$ определяется с точностью до постоянного положительного множителя. Так как на начальном участке MN оптимальное управление

$u = -A$, то в уравнениях (22) целесообразно положить $\psi_1(0) = -1$. В этом случае уравнения (22) представляют собой систему из шести неоднородных линейных уравнений относительно шести неизвестных: $\psi_2(0)$, $\psi_3(0)$, μ_2 , μ_4 , μ_6 , μ_8 .

Найденные из решения системы (22) начальный вектор $\psi(0)$ и "свободные" в условиях скачка значения параметра μ позволяют полностью определить вспомогательный вектор $\psi(t)$. Вектор $\psi(t)$ был рассчитан для изображенной на рис. 2 траектории $MN C D E F G H I J K O$ (начальные условия $\varphi(0) = 200$ рад, $\gamma(0) = \omega(0) = 0$). Проверка соотношений (11)–(18) показала, что данная траектория удовлетворяет всем условиям оптимальности, т. е. является оптимальной по быстродействию. Аналогичным образом можно показать оптимальность любой возможной траектории, задаваемой изображенной на рис. 2 поверхностью переключения и уравнением (12).

Обозначим

$$\varphi = f(\gamma, \omega) \quad (26)$$

уравнение изображенной на рис. 2 поверхности переключения. Оптимальный по быстродействию закон управления задается равенством

$$u = -A \text{sign}(\varphi - f(\gamma, \omega)) \quad (27)$$

при движении фазовой точки в открытом ядре области B и уравнением (12) — при движении по границе области B . Траектории, входящие в поверхность переключения, легко рассчитать, если воспользоваться принципом попятного движения Фельдбаума [4].

Объект управления содержит ограничитель угла поворота γ . Поэтому средствами управления необходимо обеспечить лишь фазовое ограничение (5). В целях упрощения оптимального закона управления движение по границе $|p\gamma| = D_3$ целесообразно осуществлять в скользящем режиме. В этом случае закон управления принимает наиболее простой вид

$$u = \begin{cases} -A \text{sign}(\varphi - f(\gamma, \omega)), & \text{если } |p\gamma| < D_3; \\ A \text{sign}(\varphi - f(\gamma, \omega)), & \text{если } |p\gamma| > D_3. \end{cases} \quad (28)$$

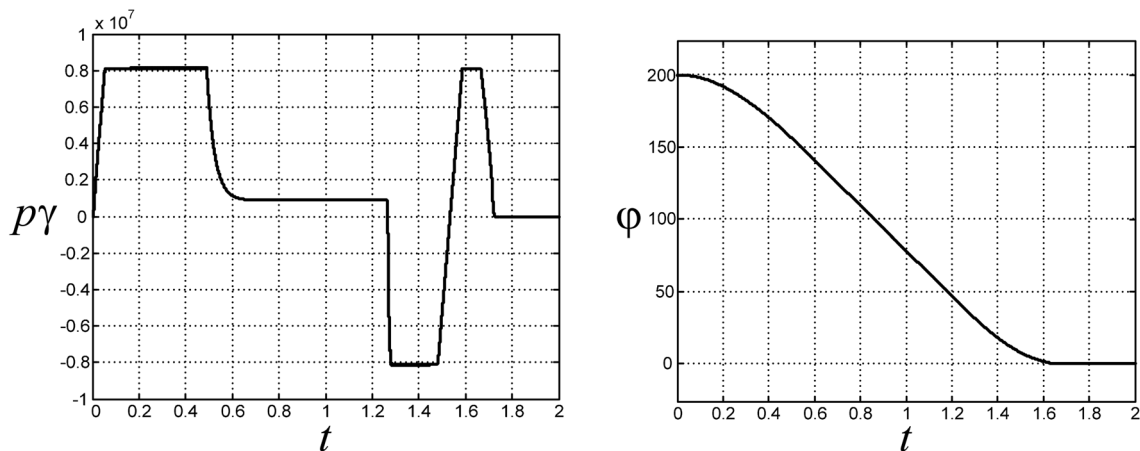


Рис. 3. Осциллограммы отработки начального рассогласования оптимальной базовой системой

После соответствующих расчетов поверхность переключения задается в виде дискретного набора чисел. При реализации оптимального регулятора для поверхности переключения желательно иметь аналитическое выражение. Приближенную аналитическую зависимость можно получить, воспользовавшись каким-либо из методов аппроксимации. В работе использовалась аппроксимация поверхности переключения двумерным полиномом вида

$$f(\gamma, \omega) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 C_{ij} \gamma^i \omega^j. \quad (29)$$

В силу нечетной симметрии поверхности переключения ($f(-\gamma, -\omega) = -f(\gamma, \omega)$) в равенстве (29) полагалось, что $C_{ij} = 0$, если $i + j$ — четное число. Для определения коэффициентов C_{ij} использовался метод наименьших квадратов.

На рис. 3 при $\alpha = 0,5$ и $A = 5$ изображены осциллограммы отработки синтезированной системой начального рассогласования 200 рад.

Из рис. 3 видно, что закон управления (28) обеспечивает четкое выполнение заданного ограничения на потребляемую мощность.

Оптимальный закон управления гидроприводом

Учтем в законе управления (28) влияние малых постоянных времени. Для этого будем последовательно присоединять к базовой системе звенья, содержащие малые постоянные времени. Способ учета малых постоянных времени предложен в [5] (см. также [1]).

Присоединим сначала к базовой системе звено, учитывающее динамику нарастания давления. Структурная схема объекта управления в этом случае имеет вид, представленный на рис. 4. Здесь $T_p = 0,071$.

Предложенный в [5] способ основан на предположении о том, что звено, содержащее малую постоянную времени, вносит в систему некоторое запаздывание. Для компенсации запаздывания необходимо в законе управления (28) фазовые переменные ω и φ упредить на величину запаздывания. Закон управления (28) принимает вид

$$u = \begin{cases} -\text{Asign} \left[\varphi + \omega \tau_1 - f \left(\gamma, \omega + \frac{1}{T} (Kp - \omega) \tau_1 \right) \right], \\ \text{если } |p\gamma| < D_3; \\ \text{Asign} \left[\varphi + \omega \tau_1 - f \left(\gamma, \omega + \frac{1}{T} (Kp - \omega) \tau_1 \right) \right], \\ \text{если } |p\gamma| > D_3. \end{cases} \quad (30)$$

Значение "эквивалентного" запаздывания τ_1 подбирается в процессе моделирования системы с законом управления (30).

На рис. 5 изображена структурная схема гидропривода как объекта управления.

Влияние звеньев с малыми постоянными времени T_x и T_i в законе управления (30) учитывается

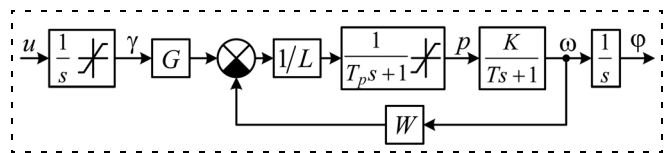


Рис. 4. Структурная схема, учитывающая динамику нарастания давления

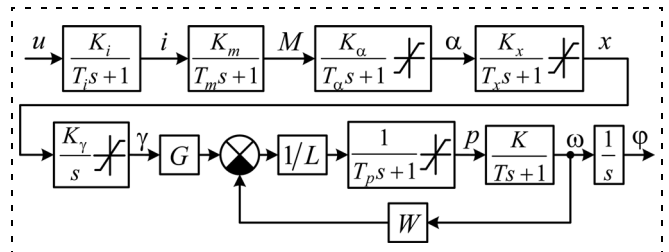


Рис. 5. Структурная схема объекта управления

рассмотренным выше способом. Постоянные времени T_α и T_m (они существенно меньше T_x и T_i) учитываются косвенно при выборе "эквивалентного" запаздывания τ_3 . Для объемного силового гидропривода учет в базовом законе управления динамических звеньев, относящихся к механизму управления и имеющих малые постоянные времени, подробно рассмотрен в [6].

Запишем для удобства закон управления (30) в виде

$$u = U(A, \gamma, p, \omega, \varphi). \quad (31)$$

Изложенная выше процедура приводит к следующему равенству:

$$u = U(A_1, \gamma_y, p_y, \omega_y, \varphi_y). \quad (32)$$

В законе управления (32) $A_1 = |u_{\max}|$; $\gamma_y, p_y, \omega_y, \varphi_y$ — упрежденные последовательно на τ_2 и τ_3 фазовые переменные. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \gamma_y &= \gamma + K_\gamma x (\tau_2 + \tau_3) + \frac{K_\gamma}{T_x} (k^* i - x) \tau_2 \tau_3; \\ p_y &= \left[p + \frac{1}{T_p} \left(\frac{1}{L} (G\gamma - W\omega) - p \right) \tau_3 \right] \left(1 - \frac{\tau_2}{T_p} \right) + \\ &+ \frac{1}{T_p L} \left[G(\gamma + K_\gamma x \tau_3) - W(\omega + \frac{1}{T} (Kp - \omega) \tau_3) \right] \tau_2; \\ \omega_y &= \left(\omega + \frac{1}{T} (Kp - \omega) \tau_3 \right) \left(1 - \frac{\tau_2}{T} \right) + \\ &+ \frac{K}{T} \left[p + \frac{1}{T_p} \left(\frac{1}{L} (G\gamma - W\omega) - p \right) \tau_3 \right] \tau_2; \\ \varphi_y &= \varphi + \omega (\tau_2 + \tau_3) + \frac{1}{T} (Kp - \omega) \tau_2 \tau_3; \quad k^* = K_m K_\alpha K_x. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что в соответствии со структурной схемой (рис. 5)

$$A = |x_{\max}| K_\gamma.$$

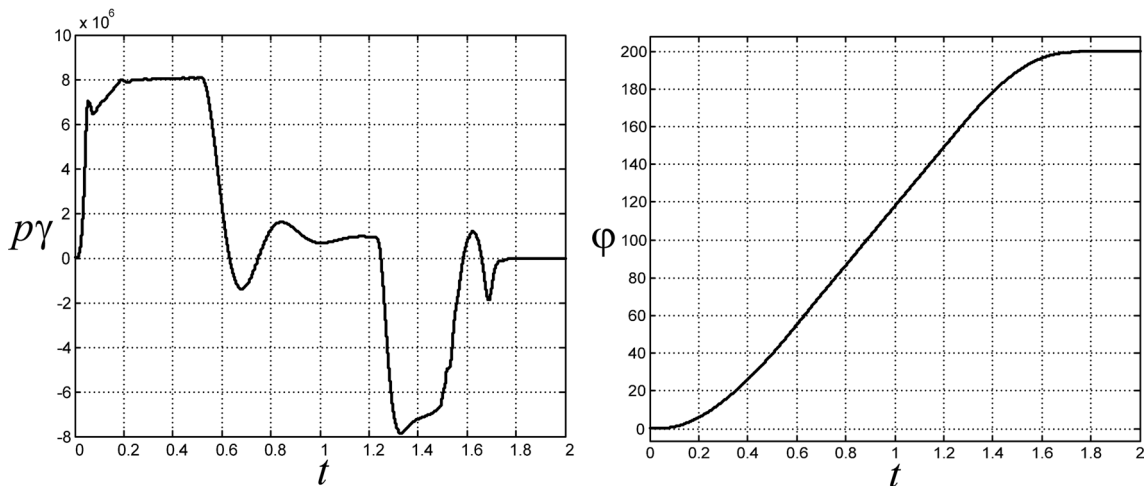


Рис. 6. Осциллограммы обработки ступенчатого входного сигнала

Закон управления (32) относится к автономной системе, т. е. ориентирован на обработку начальных рассогласований. Поскольку объект управления обладает астатизмом, то от закона (32) легко перейти с сохранением оптимальности к закону управления, ориентированному на обработку ступенчатых воздействий произвольной амплитуды. Для этого достаточно в законе управления (32) от фазовых координат перейти к ошибкам по соответствующим координатам и изменить знак управления.

Пусть входной сигнал $y = g$, где g — произвольное число. Легко установить, что ошибки по фазовым координатам задаются равенствами:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= y - \varphi, \quad \Delta\omega = -\omega, \quad \Delta p = -p, \\ \Delta\gamma &= -\gamma, \quad \Delta x = -x, \quad \Delta i = -i. \end{aligned} \quad (34)$$

Принимая во внимание сказанное выше, запишем закон управления, ориентированный на обработку входных воздействий:

$$u = -U(A_1, \Delta\gamma_y, \Delta p_y, \Delta\omega_y, \Delta\varphi_y). \quad (35)$$

Функции $\Delta\gamma_y$, Δp_y , $\Delta\omega_y$, $\Delta\varphi_y$ задаются равенствами (33), если в них i , x , γ , p , ω , φ заменить на ошибки (34) по соответствующим переменным.

На рис. 6 представлены осциллограммы обработки системой восьмого порядка ($\alpha = 0,5$ и $A_1 = 8$) ступенчатого входного сигнала $y(t) = 200 \cdot 1(t)$ рад. Осциллограммы получены с помощью компьютерного моделирования системы с законом управления (35).

Из сравнения осциллограмм, представленных на рис. 3 и 6, следует, что закон управления (35) обеспечивает практически ту же длительность переходного процесса, что и оптимальный закон управления (28). Такая же ситуация имеет место при любой амплитуде входного сигнала. Далее, выполняется также заданное ограничение на потребляемую приводом мощность.

Во избежание недоразумений отметим, что сравнение осциллограмм, представленных на рис. 3 и 6,

является вполне корректным. Дело в том, что фазовые траектории в автономном приводе с законом управления (32) отличаются от траекторий неавтономного привода с законом управления (35) при $\varphi(0) = g$ только знаком.

Таким образом, закон управления (35) решает поставленную задачу, т. е. обеспечивает минимальную длительность переходных процессов и заданное ограничение на потребляемую мощность.

Заключение

Разработанный метод синтеза позволяет при создании объемных силовых гидроприводов использовать приводные двигатели меньшей мощности, причем уменьшение мощности может быть весьма существенным. Привод имеет высокое быстродействие, что очень важно для разного рода автономных комплексов, работающих от автономных источников энергии, так как ведет к уменьшению веса, габаритных размеров и стоимости комплекса. Сам метод синтеза, если опустить выполненное выше обоснование оптимальности базового закона управления, является сравнительно несложным.

Список литературы

1. Пупков К. А., Фалдин Н. В., Егупов Н. Д. Методы синтеза оптимальных систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 510 с.
2. Гамынин Н. С. Гидравлический привод систем управления. М.: Машиностроение, 1972. 376 с.
3. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
4. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. М.: Физматгиз, 1959. 800 с.
5. Фалдин Н. В., Есипов А. Н. Приближенный способ учета при синтезе оптимальных систем малых постоянных времени // Изв. вузов. Электромеханика. 1984. № 3. С. 45–50.
6. Фалдин Н. В., Васютин Е. В. Оптимизация по быстродействию объемного силового гидропривода, работающего от автономного источника энергии // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 5. С. 26–32.

А. Т. Когут, канд. техн. наук, доц.,
Омский государственный университет
путей сообщения
lavruhinaa@gmail.com

Синтез приближенных алгоритмов двойного управления двигателями постоянного тока на основе процедур линеаризации

Рассматриваются двухступенчатые приближенные алгоритмы траекторного управления нелинейными динамическими объектами, описываемыми разностными уравнениями переменных состояния. Предлагаемые методы не требуют аналитического решения обратных задач динамики. Приводится пример применения разработанных алгоритмов при управлении напряжениями в обмотке возбуждения и якорной цепи двигателя постоянного тока.

Ключевые слова: нелинейный объект, траекторное управление, обратная задача динамики, приближенные алгоритмы, линеаризация, двухступенчатая процедура, двигатель постоянного тока

Введение

Проектирование систем с нелинейными динамическими объектами остается одной из самых сложных и до конца не решенных задач теории управления [1]. В электротехнических комплексах основным исполнительным элементом является электропривод, и для большинства технических приложений при необходимости стабилизации скорости или равновесного состояния он описывается достаточно простыми уравнениями второго порядка. Современные цифровые системы локальной автоматики для формирования управляющих воздействий используют микропроцессорные контроллеры, поэтому и модели будут дискретными. В классе дискретных моделей в качестве одного из перспективных направлений можно выделить синтез абсолютно управляемых систем с аperiodическим характером и конечным временем протекания переходных процессов [1, 2].

Основным методом является траекторное управление, когда выходной сигнал или переменные состояния объекта должны изменяться в соответствии с некоторой заданной или желаемой траекторией движения [1]. К такому классу относятся, в первую очередь, системы стабилизации и программного управления, но под желаемыми функциями можно понимать и выходные переменные эталонных моделей, и задающие воздействия операторов технологических процессов. Траекторное управление сводится к обратной задаче динамики [2, 3], решение которой в явной форме известно только для

линейных и аффинных объектов [2], а в общем случае требуется существование и аналитическое определение обратных функций [4].

При проектировании систем точное решение заменяется приближенными, основанными на различных схемах линеаризации нелинейной динамической модели объекта, учитывающих первые [4] и вторые частные производные по управлению [5]. Для практической реализации приближенных алгоритмов требуется существование только этих непрерывных производных, в то время как явная форма аналитического решения возможна в классе нелинейных функций, обладающих свойством диффеоморфизма [2]. При использовании микропроцессорных контроллеров в качестве дискретных устройств управления приближенные алгоритмы должны быть получены в виде достаточно просто программируемых рекуррентных выражений, поэтому под влиянием работы [6] материал излагается в скалярной форме.

Постановка задачи

Рассмотрим класс полностью наблюдаемых нелинейных объектов, описываемых разностными уравнениями состояния вида

$$x_1(k+1) = f_1[x_1(k), x_2(k)]; \quad (1)$$

$$x_2(k+1) = f_2[x_1(k), x_2(k), u_1(k), u_2(k)], \quad (2)$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$ — переменные состояния; $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^1$ — управляющие воздействия объекта; k — текущее значение дискретного времени (шаг принят равным единице); $f_1[x_1, x_2]$ — нелинейная функция; $f_2[x_1, x_2, u_1, u_2]$ — нелинейная дважды непрерывно дифференцируемая по u_1 и u_2 функция.

Этими уравнениями в работе [7] описывается двигатель постоянного тока при его управлении напряжениями возбуждения и якорной цепи, но их можно использовать и при его испытаниях методом взаимной нагрузки [8, 9].

Ставится задача синтеза управлений в виде закона обратной связи $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ и $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, обеспечивающих изменение переменных состояния x_1 и x_2 объекта в соответствии с некоторыми известными заданными или желаемыми траекториями движения $g_1(k+1)$ и $g_2(k+1)$. Таким образом, при траекторном управлении [1] должны выполняться равенства

$$g_1(k+1) = f_1[x_1(k), x_2(k)];$$

$$g_2(k+1) = f_2[x_1(k), x_2(k), u_1(k), u_2(k)]. \quad (3)$$

Аналитическое решение возможно при существовании обратных функций f^{-1} по аргументам u_1 и u_2 . Предлагается использовать приближенные

алгоритмы, основанные на схемах линеаризации $f_2(\cdot)$ и не требующие выполнения операции обращения, а также позволяющие получать в явном виде формулы для управлений, общие в рассматриваемом классе объектов.

Синтез приближенных алгоритмов траекторного управления нелинейными объектами

Допустим, что на k -м шаге для наблюдаемых переменных состояния известны текущие значения $x_1 = x_1(k)$, $x_2 = x_2(k)$, а для управлений — предыдущие $u_1 = u_1(k-1)$, $u_2 = u_2(k-1)$, тогда в формуле (3) можно нелинейную функцию $f_2(\cdot)$ заменить на ее линейную аппроксимацию вида

$$f_2^{(1)} = f_{20} + f_{21}'\delta u_1 + f_{22}'\delta u_2, \quad (4)$$

где $f_{20} = f_2[x_1, x_2, u_1, u_2]$; $f_{2i}' = \frac{\partial f_2[x_1, x_2, u_1, u_2]}{\partial u_i}$, $i = 1, 2$, при $x_1 = x_1(k)$; $x_2 = x_2(k)$; $u_1 = u_1(k-1)$; $u_2 = u_2(k-1)$.

Значения разностей управлений δu_1 и δu_2 определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= u_1^{(1)}(k) - u_1^{(1)}(k-1) \\ \text{и } \delta u_2 &= u_2^{(1)}(k) - u_2^{(1)}(k-1). \end{aligned}$$

Приближение (4) при $\delta u_1 \rightarrow 0$ и $\delta u_2 \rightarrow 0$ является линейным полиномом ряда Тейлора функции $f_2(\cdot)$, поэтому подставим (4) в формулу (3) и получим

$$g_2(k+1) = f_{20} + f_{21}'\delta u_1 + f_{22}'\delta u_2. \quad (5)$$

Уравнение (5) является линейным относительно неизвестных δu_1 и δu_2 , и его явное решение имеет вид

$$\delta u_1 = \frac{f_{21}'}{(f_{21}')^2 + (f_{22}')^2} [g_2(k+1) - f_{20}]; \quad (6)$$

$$\delta u_2 = \frac{f_{22}'}{(f_{21}')^2 + (f_{22}')^2} [g_2(k+1) - f_{20}]. \quad (7)$$

Проверка правильности вычислений выполняется путем подстановки δu_1 и δu_2 в формулу (5). Введем следующие обозначения:

$$K_1^{(1)} = \frac{f_{21}'}{(f_{21}')^2 + (f_{22}')^2}; \quad K_2^{(1)} = \frac{f_{22}'}{(f_{21}')^2 + (f_{22}')^2}.$$

Приближенные алгоритмы первого порядка, формирующие на k -м шаге управляющие воздействия $u_1(k)$ и $u_2(k)$, запишутся в рекуррентном виде:

$$\begin{cases} u_1^{(1)}(k) = u_1(k-1) + K_1^{(1)}[g_2(k+1) - f_{20}]; \\ u_2^{(1)}(k) = u_2(k-1) + K_2^{(1)}[g_2(k+1) - f_{20}]. \end{cases} \quad (8)$$

В формулах (8) нестационарные коэффициенты передачи регулятора первого порядка $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$ и параметр f_{20} зависят от текущих значений переменных состояния объекта $x_1(k)$ и $x_2(k)$, поэтому спроектированный алгоритм получен в виде закона обратной связи, т. е. реализуется в замкнутой системе.

Основной задачей траекторного управления является отслеживание объектом заданной программы движения, а применение приближенных алгоритмов (8) приводит к возникновению ошибки. Повысить точность системы можно, если использовать в формулах для регуляторов более близкую к нелинейной функции $f_2(\cdot)$ аппроксимацию, содержащую и вторые частные производные по управлениям u_1 и u_2 , т. е. квадратичный полином ряда Тейлора вида

$$\begin{aligned} f_2^{(2)} &= f_{20} + f_{21}'\Delta u_1 + f_{22}'\Delta u_2 + 0,5[f_{211}''\Delta u_1^2 + \\ &+ f_{222}''\Delta u_2^2 + f_{212}''\Delta u_1\Delta u_2 + f_{221}''\Delta u_2\Delta u_1], \end{aligned} \quad (9)$$

где $f_{2ij}'' = \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_i \partial u_j}$, $i, j = 1, 2$, при $x_1 = x_1(k)$; $x_2 = x_2(k)$; $u_1 = u_1(k-1)$; $u_2 = u_2(k-1)$.

Требуется, чтобы в выражении (9) разности $\Delta u_1 \rightarrow 0$ и $\Delta u_2 \rightarrow 0$, поэтому представим их следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= u_1^{(2)}(k) - u_1^{(2)}(k-1) \\ \text{и } \Delta u_2 &= u_2^{(2)}(k) - u_2^{(2)}(k-1). \end{aligned}$$

Проведем для слагаемых в квадратных скобках нелинейной части ряда (9) замену вида

$$\begin{aligned} \Delta u_1^2 &= \delta_1 \Delta u_1; \quad \Delta u_2^2 = \delta_2 \Delta u_2; \\ \Delta u_1 \Delta u_2 &= \delta_2 \Delta u_1; \quad \Delta u_2 \Delta u_1 = \delta_1 \Delta u_2. \end{aligned}$$

Будем полагать, что на момент вычисления $u_1^{(2)}$ и $u_2^{(2)}$ значения δ_1 и δ_2 известны и являются по-

стоянными величинами, поэтому приближение (9) можно представить в форме

$$f_2^{(2)} = f_{20} + [f_{21}' + 0,5(f_{211}''\delta_1 + f_{212}''\delta_2)]\Delta u_1 + \\ + [f_{22}' + 0,5(f_{222}''\delta_2 + f_{221}''\delta_1)]\Delta u_2 \\ \text{или } f_2^{(2)} = f_{20} + r_{21}\Delta u_1 + r_{22}\Delta u_2, \quad (10)$$

где $r_{21} = f_{21}' + 0,5(f_{211}''\delta_1 + f_{212}''\delta_2)$; $r_{22} = f_{22}' + 0,5(f_{222}''\delta_2 + f_{221}''\delta_1)$.

Аппроксимация (10) относительно неизвестных переменных Δu_1 и Δu_2 линейна и имеет вид, аналогичный приближению первого порядка (4), поэтому, используя основное равенство траекторного управления

$$g_2(k+1) = f_{20} + r_{21}\Delta u_1 + r_{22}\Delta u_2,$$

приближенный алгоритм второго порядка, определяющий управляющие воздействия $u_1(k)$ и $u_2(k)$, можно записать в виде рекуррентных процедур

$$\begin{cases} u_1^{(2)}(k) = u_1(k-1) + K_1^{(2)}[g_2(k+1) - f_{20}]; \\ u_2^{(2)}(k) = u_2(k-1) + K_2^{(2)}[g_2(k+1) - f_{20}]. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь нестационарные коэффициенты передачи регулятора второго порядка вычисляются в соответствии с выражениями

$$K_1^{(2)} = \frac{r_{21}}{r_{21}^2 + r_{22}^2}; \quad K_2^{(2)} = \frac{r_{22}}{r_{21}^2 + r_{22}^2}.$$

При реализации полученного устройства управления необходимо иметь или каким-то образом получить информацию о численных значениях δ_1 и δ_2 , так как они используются в формулах коэффициентов передачи $K_1^{(2)} = K_1^{(2)}(\delta_1, \delta_2)$ и $K_2^{(2)} = K_2^{(2)}(\delta_1, \delta_2)$. Для этих целей можно воспользоваться аналитическими выражениями регулятора первого порядка вида (6) и (7) и определять δ_1 и δ_2 следующим образом:

$$\delta_1 = \delta u_1 = K_1^{(1)}[g_2(k+1) - f_{20}] \\ \text{и } \delta_2 = \delta u_2 = K_2^{(1)}[g_2(k+1) - f_{20}].$$

При таком подходе приближенные алгоритмы (11) формирования на k -м шаге управляющих воздействий $u_1^{(2)}(k)$ и $u_2^{(2)}(k)$ представляют собой двухступенчатые процедуры. На первой ступени вычисляются δ_1 и δ_2 , а на второй — по известным значениям δ_1 и δ_2 рассчитываются коэффициенты

передачи $K_1^{(2)}$, $K_2^{(2)}$ и управления $u_1^{(2)}(k)$ и $u_2^{(2)}(k)$, которые и подаются на вход объекта замкнутой системы. В этом случае в выражения (11) вместо $u_1(k-1)$ и $u_2(k-1)$ должны входить соответственно $u_1^{(2)}(k-1)$ и $u_2^{(2)}(k-1)$.

Двухступенчатая процедура позволяет рационально использовать экономичные с вычислительной точки зрения алгоритмы первого порядка и более точные приближенные методы вида (11), но требующие определения вторых производных. Во время переходных процессов, когда в системе ошибки $e_1(k+1) = g_1(k+1) - x_1(k+1)$ и $e_2(k+1) = g_2(k+1) - x_2(k+1)$ достаточно большие, управление осуществляется по алгоритму второго порядка. Как только ошибки $e_1(k+1)$ и $e_2(k+1)$ перестанут превышать некоторый допустимый уровень $e^{\text{доп}}$, то в регуляторе уже реализуется алгоритм первого порядка, и управляющие воздействия $u_1(k)$ и $u_2(k)$ вычисляются по формулам (8).

В вынужденных режимах возникающие возмущения компенсируются алгоритмом второго порядка, как правило, за 1...2 шага. Это объясняется тем, что рассматриваемый класс систем траекторного управления при идеальном решении обратной задачи динамики является абсолютно управляемым с конечным временем протекания переходных процессов, равным порядку системы [1]. При двухступенчатой процедуре в формулах (8) и (11) под $u_1(k-1)$ и $u_2(k-1)$ понимаются предыдущие значения управляющих воздействий, реализованные регулятором либо первого, либо второго порядков в зависимости от величины ошибки в системе.

Применение приближенных алгоритмов в схеме двойного управления двигателем постоянного тока

Одной из важных областей практического применения разработанных приближенных алгоритмов является управление напряжениями двух источников, питающих электрические машины постоянного тока, включенные по методу взаимной нагрузки в системе их технического диагностирования. В соответствующей нормативной литературе [8] не оговаривается вид желаемой траектории изменения скорости вращения, поэтому предлагается исследовать двигатель постоянного тока, описываемый тем же классом уравнений объекта (1), но для которого получены и известны желаемые оптимальные траектории движения [7, 10].

Рассмотрим двигатель с независимым возбуждением, включенный в схему с двумя управляющими напряжениями, а именно подаваемым в обмотку возбуждения u_b и подаваемым в цепь якоря u_a . В таком случае, согласно работе [9], динамику изменения электрических и механических процессов

в двигателе постоянного тока можно описать следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} u_B = L_B \frac{di_B}{dt} + R_B i_B; \\ u_{\text{я}} = L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + R_{\text{я}} i_{\text{я}} + k_E(i_B) \omega; \\ J \frac{d\omega}{dt} = k_M(i_B) i_{\text{я}} - M_C, \end{cases} \quad (12)$$

где $i_B, i_{\text{я}}$ — токи в обмотке возбуждения и якоря; $L_B, L_{\text{я}}$ — индуктивности; $R_B, R_{\text{я}}$ — сопротивления соответствующих обмоток; ω — угловая скорость вращения вала двигателя; J — момент инерции вращающихся частей привода, приведенный к валу двигателя; $k_E(i_B), k_M(i_B)$ — параметры, зависящие от конструкции двигателя и тока i_B ; M_C — момент сопротивления.

При выполнении условий [9] $k_E(i_B) = c_E i_B$ и $k_M(i_B) = c_M i_B$ формулы (12) запишутся в операторном виде:

$$\begin{cases} i_B = \frac{u_B}{R_B(T_B p + 1)}; \\ i_{\text{я}} = \frac{u_{\text{я}} - c_E i_B \omega}{R_{\text{я}}(T_{\text{я}} p + 1)}; \\ \omega = \frac{c_M i_B i_{\text{я}} - M_C}{J p}, \end{cases} \quad (13)$$

где $T_B, T_{\text{я}}$ — постоянные времени для обмоток возбуждения и якоря; p — оператор дифференцирования.

Исследование свойств алгоритмов проводилось по имитационной модели двигателя, описываемого уравнениями (13), в которой учитывались реактивные моменты сухого $M_{\text{тр}}$ и вязкого трения γ , а также активный постоянный момент M_H , поэтому $M_C = M_H + M_{\text{тр}} \text{sign} \omega + \gamma \omega$. Проектирование законов управления осуществлялось на основе редуцированной модели при $T_{\text{я}} = 0, T_B = 0$ и $M_C = 0$. В этом случае для угла поворота φ и его скорости ω справедливы уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \omega; \\ \dot{\omega}(t) = -\alpha u_B^2 \omega + \beta u_B u_{\text{я}}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{c_M c_E}{J R_B^2 R_{\text{я}}}; \quad \beta = \frac{c_M}{J R_B R_{\text{я}}}.$$

В качестве требуемой траектории движения $g(t)$ предлагается выбрать функцию изменения угловой скорости вращения вала двигателя $\omega(t)$, полученную при оптимальном по времени переводе объекта (14) из некоторого начального состояния $\varphi(t_0) = \varphi_0, \omega(t_0) = \omega_0$ в конечное нулевое, т. е. $\varphi(T) = 0$ и

$\omega(T) = 0$ при $T \rightarrow \min$. Аналитические выражения оптимальной траектории получены в работах [7, 10] с использованием принципа максимума Понтрягина при ограничениях на управляющие воздействия

$$-U_{\text{н.я}} \leq u_{\text{я}} \leq U_{\text{н.я}} \text{ и } \lambda U_{\text{н.в}} \leq u_B \leq U_{\text{н.в}}.$$

Переходные режимы будут начинаться при $u_{\text{я}} = U_{\text{н.я}}$, если $\varphi(t_0) < 0$ и $\omega(t_0) < 0$, и такому начальному положению соответствует оптимальное управление, состоящее из четырех участков:

$$\begin{cases} u_{\text{я}} = U_{\text{н.я}}; u_B = U_{\text{н.в}}, \text{ если } \omega \leq \frac{U_{\text{н.я}}}{U_{\text{н.в}}} \frac{\beta}{2\alpha}; \\ u_{\text{я}} = U_{\text{н.я}}; u_B = \frac{\beta}{2\alpha} \frac{U_{\text{н.я}}}{\omega}, \\ \text{если } \frac{U_{\text{н.я}}}{U_{\text{н.в}}} \frac{\beta}{2\alpha} < \omega < \frac{U_{\text{н.я}}}{U_{\text{н.в}}} \frac{\beta}{2\alpha\lambda}; \\ u_{\text{я}} = U_{\text{н.я}}; u_B = \lambda U_{\text{н.в}}, \text{ если } \omega \geq \frac{U_{\text{н.я}}}{U_{\text{н.в}}} \frac{\beta}{2\alpha\lambda}; \\ u_{\text{я}} = -U_{\text{н.я}}; u_B = U_{\text{н.в}}, \\ \text{если } \varphi = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{U_{\text{н.в}}}{U_{\text{н.я}}} \omega + 1\right) - \omega. \end{cases} \quad (15)$$

Моделирование динамических процессов в двигателе по уравнениям (13) и определение желаемой траектории редуцированного объекта (14) с управлением вида (15) проводили при номинальных параметрах:

$$\begin{aligned} R_B &= 20,2 \text{ Ом}; R_{\text{я}} = 4,05 \text{ Ом}; \\ T_B &= 0,0015 \text{ с}; T_{\text{я}} = 0,008 \text{ с}; \\ J &= 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ c_M &= 0,048 \text{ Н} \cdot \text{м/А}; c_E = 0,048 \text{ В} \cdot \text{с/рад}. \end{aligned}$$

Для момента сопротивления использовали числовые значения

$$M_H = 0,02; M_{\text{тр}} = 0,016; \gamma = 5,12 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Вид требуемой траектории $g(t)$ изменения угловой скорости вращения вала двигателя $\omega(t)$ при $\lambda = 0,8$ приведен на рис. 1.

Интервал моделирования $t \in [0, t_N]$ разделен на три части, что позволяет исследовать поведение проектируемых систем в различных режимах. Пере-

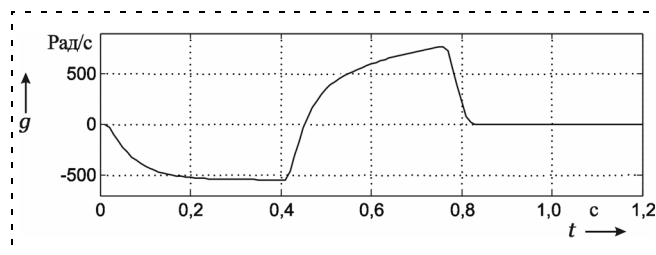


Рис. 1. Желаемая траектория изменения скорости

вод объекта из нулевого состояния $\varphi(0) = 0$, $\omega(0) = 0$ в начальную точку $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\omega(t_0) = \omega_0$ осуществляется по траектории изменения скорости двигателя, полученной при постоянном управляющем напряжении $u_B = U_{H,B}$ и скачкообразном $u_Y = U_{H,Y} \cdot 1(t)$. При $t \in [t_0, T]$ желаемая траектория $g(t)$ совпадает с оптимальной, а на интервале $t \in [T, t_N]$ функция $g(t) = 0$, и можно анализировать стабилизирующие возможности систем.

Приближенные алгоритмы предлагается сравнивать с результатами обработки желаемой траектории системой с двумя оптимально настроенными ПИД-регуляторами, управляющими напряжениями $u_1 = u_Y$ и $u_2 = u_B$. Параметры регуляторов определяли стандартными средствами имитационного моделирования по кривой переходного процесса, и были получены значения коэффициентов регулятора в якорной цепи

$$k_{Я}^П = 13,1; k_{Я}^И = 5,12; k_{Я}^Д = 0,32$$

и в обмотке возбуждения —

$$k_B^П = 3,73; k_B^И = 0,06; k_B^Д = 0,92.$$

Временные диаграммы желаемой траектории $g(t)$, полученной угловой скорости вращения вала двигателя $\omega(t)$, а также управляющих воздействий $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в системе с ПИД-регуляторами приведены на рис. 2.

Для приведения редуцированной модели (14) к рассматриваемому дискретному классу объектов (1) применим к производным $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{\omega}(t)$ формулы первой разности

$$\dot{\varphi}(t) \approx \frac{\varphi(k+1) - \varphi(k)}{T_0};$$

$$\dot{\omega}(t) \approx \frac{\omega(k+1) - \omega(k)}{T_0}$$

и проведем замену переменных: $x_1 = \varphi$ и $x_2 = \omega$. Тогда (14) преобразуется к виду

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T_0 x_2(k); \\ x_2(k+1) = x_2(k) - \alpha T_0 u_2^2(k) x_2(k) + \beta T_0 u_1(k) u_2(k), \end{cases}$$

где T_0 — шаг дискретизации.

В приближенных алгоритмах первого (8) и второго (11) порядков дискретные значения $g_2(k+1)$ определяются по желаемой траектории $g(t)$ изменения скорости вращения вала, а соответствующие

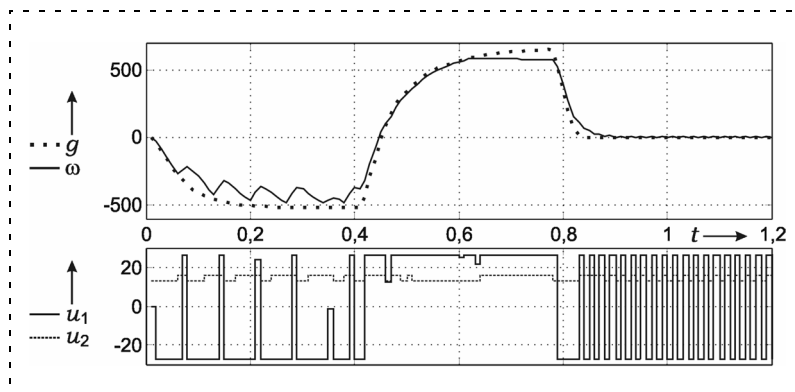


Рис. 2. Временные диаграммы моделирования системы с ПИД-регуляторами

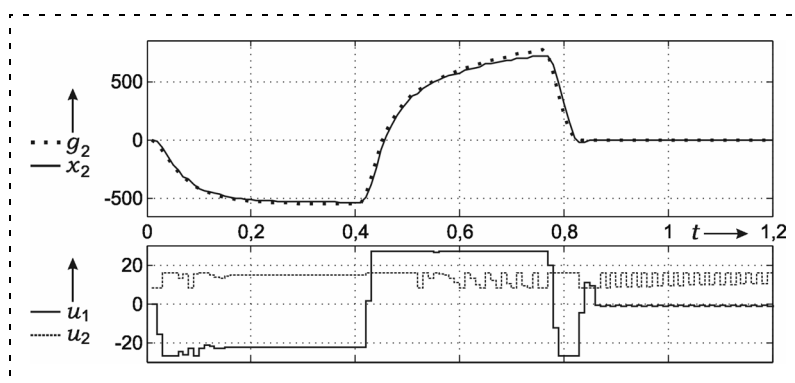


Рис. 3. Временные диаграммы моделирования системы с регулятором первого порядка

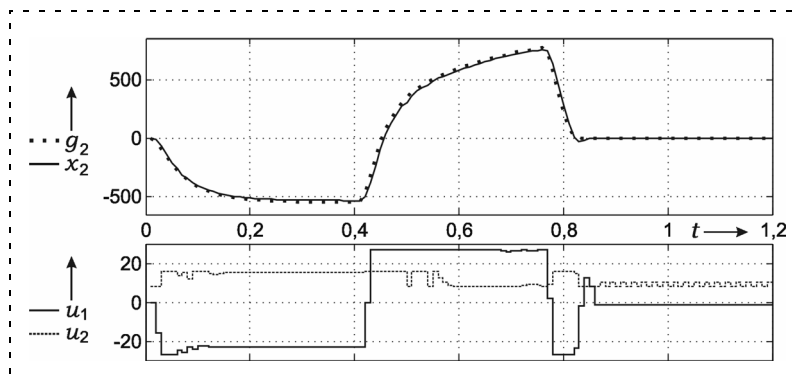


Рис. 4. Временные диаграммы моделирования системы с регулятором второго порядка

первые и вторые частные производные вычисляются по формулам:

$$f'_{21} = \beta T_0 u_2(k-1);$$

$$f'_{22} = -2\alpha T_0 u_2(k-1) x_2(k) + \beta T_0 u_1(k-1);$$

$$f''_{211} = 0; f''_{222} = -2\alpha T_0 x_2(k); f''_{212} = \beta T_0; f''_{221} = \beta T_0.$$

Временные диаграммы, отражающие изменения желаемой траектории $g_2(t)$, полученной координаты объекта $x_2(t)$, а также управляющих воздействий $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в системе с регулятором первого

порядка, приведены на рис. 3, а аналогичные процессы с регулятором второго порядка — на рис. 4.

Результаты имитационного моделирования показывают значительную ошибку в отработке желаемой траектории системой с ПИД-регулятором, а также возникновение автоколебательных процессов для управляющих напряжений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в режиме стабилизации положения равновесия. Системы с приближенными алгоритмами обеспечивают более высокую точность при отслеживании $g_2(k)$ и лучшее качество процессов управления, особенно в двухступенчатых схемах, учитывающих как первую, так и вторую производные линеаризуемой характеристики регулируемого объекта.

Заключение

В статье предлагается решать обратную задачу динамики траекторного управления нелинейным объектом, описываемым дискретными моделями, приближенными методами на основе процедур линеаризации путем разложения дважды непрерывно дифференцируемых функций в ряд Тейлора, учитывающих первые и вторые производные. Предлагаются алгоритмы вычисления управляющих воздействий в виде рекуррентных соотношений, которые достаточно просто программируются и реализуются в микропроцессорных системах. Приближенные алгоритмы являются двухступенчатыми и позволя-

ют рационально использовать более точные методы второго порядка, но требующие на каждом шаге управления большего времени для обработки информации. Показана реализация разработанных алгоритмов в системе электропривода постоянного тока с двумя управляющими напряжениями.

Список литературы

1. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука. 2000. 549 с.
2. **Ким Д. П.** Теория автоматического управления. Т. 2: Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2004. 464 с.
3. **Методы классической и современной теории автоматического управления. Синтез регуляторов систем автоматического управления /** Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2004. Т. 5. 784 с.
4. **Рубан А. И.** Адаптивное управление с идентификацией. Томск: Изд-во Томского университета, 1983. 170 с.
5. **Когут А. Т.** Полиномиальная аппроксимация в некоторых задачах оптимизации и управления. Омск: Омский гос. ун-т путей сообщения, 2003. 243 с.
6. **Бушуев А. В.** Полиномиальный подход к синтезу квазоптимального по быстродействию электропривода с переменной структурой // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 1. С. 18—21.
7. **Бор-Раменский А. Е., Сунн Цзянь.** Оптимальный следящий привод с двумя параметрами управления // Автоматика и телемеханика. 1961. № 2. С. 157—170.
8. **ГОСТ 11828—86.** Машины электрические вращающиеся. Общие методы испытаний. М.: Изд-во стандартов, 1986. 32 с.
9. **Терехов В. М., Осипов О. И.** Системы управления электроприводов. М.: Академия, 2005. 304 с.
10. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления. Оптимальные, многосвязные и адаптивные системы. Л.: Энергия. 1970. 328 с.

УДК 681.51

Л. В. Ганнель, канд. техн. наук,
servo control engineer, Anorad Israel, Israel
leonid.gannel@gmail.com

Анализ процессов управления линейными синхронными двигателями на основе быстродействующих синусоидальных усилителей мощности

Рассмотрены основные параметры быстродействующих усилителей мощности для синусоидальной коммутации синхронного (вентильного) двигателя.

Получены аналитические зависимости, проверенные при разработке линейной координатной оси, устанавливающие критерии выбора усилителей мощности для прецизионных мехатронных механизмов. Это позволяет как обеспечить высокую равномерность движения на малых скоростях при минимальных потерях в двигателе, так и сократить время выхода в позицию для позиционных мехатронных систем управления движением.

Ключевые слова: линейный синхронный двигатель, синусоидальный усилитель мощности, пульсации тока (силы)

Электропривод является основным элементом современных мехатронных систем управления движением, во многом определяющим их качественные показатели. Как известно [1], вентильные (синхронные) двигатели обеспечивают наиболее высокие плотность длительного момента (момент в единице объема) и энергетическую эффективность по сравнению с любым другим типом двигателя. Прецизионные механизмы предъявляют повышенные требования к равномерности линейного движения, что предопределяет применение "прямого" привода на базе линейных безжелезных двигателей U-образного типа. Отсутствие зубцового эффекта (cogging) у двигателей такого типа уменьшает пульсации скорости, что важно при движении на низких скоростях.

В этом случае повышенные требования предъявляются и к усилителям мощности ШИМ или линейным усилителям мощности, так как в этом случае качество процессов управления силой двигателя оказывает существенное влияние как на равномерность скорости в режиме сканирования/слежения,

так и на время позиционирования и потери в двигателе.

Целью данной статьи является рассмотрение особенностей и анализ основных показателей быстродействующих синусоидальных усилителей мощности для управления вентильными двигателями, предназначенными для прецизионных механизмов мехатронных систем.

Управление вентильным двигателем от синусоидального усилителя мощности

Под *вентильным двигателем* понимают синхронный двигатель со встроенным датчиком положения. Общепринятым является синхронный двигатель, имеющий три соединенные в "звезду" обмотки (без вывода средней точки) с числом пар полюсов от 4 до 8. Обозначим обмотки статора U , V , W в соответствии с общепринятыми в зарубежной литературе обозначениями.

В связи с повышенными требованиями к разрешению систем управления широкое применение находят линейные энкодеры с аналоговыми \sin/\cos -сигналами. В этом случае высокое разрешение (по положению) достигается за счет интерполяции — непосредственно контроллером управления движением (motion controller) — аналогового сигнала внутри периода (цикла) аналоговых сигналов. Отметим, что в этом случае даже при больших скоростях перемещения частота аналоговых сигналов энкодера не ограничена параметрами входного интерфейса контроллеров, что характерно при внешнем — по отношению к контроллеру — интерполировании аналоговых сигналов.

Синусоидальная коммутация вентильного двигателя

Под *синусоидальным усилителем мощности* будем понимать в дальнейшем усилитель мощности ШИМ или линейный усилитель мощности, реализующий синусоидальную коммутацию вентильного двигателя. Такая коммутация лишена основных недостатков трапецеидальной (шестишаговой, six-step) коммутации, применяемой для регулирования скорости при невысоких требованиях к эффективности и равномерности перемещения на низких скоростях, за счет более непрерывной и плавной коммутации вектора тока. Это достигается благодаря более высокому разрешению датчика положения ротора (обычно инкрементального энкодера) по сравнению с цифровыми датчиками Холла, имеющими только шесть фиксированных состояний на полный электрический период.

Наиболее эффективной является реализация синусоидальной коммутации с помощью контроллера управления движением (рис. 1). Коммутатор контроллера по амплитуде задания силы линейного двигателя и положению его ротора вырабатывает команды задания токов только для двух обмоток U и V , так как обмотки двигателя соединены "звездой". Токи в этих двух обмотках регулируются с помощью двух ПИ-регуляторов тока.

В этом случае внешний — по отношению к контроллеру — трехфазный синусоидальный усилитель мощности имеет два аналоговых входа для подключения сигналов ± 10 В задания токов двух обмоток U и V . Задание тока в третьей обмотке W определяется усилителем независимо от контролле-

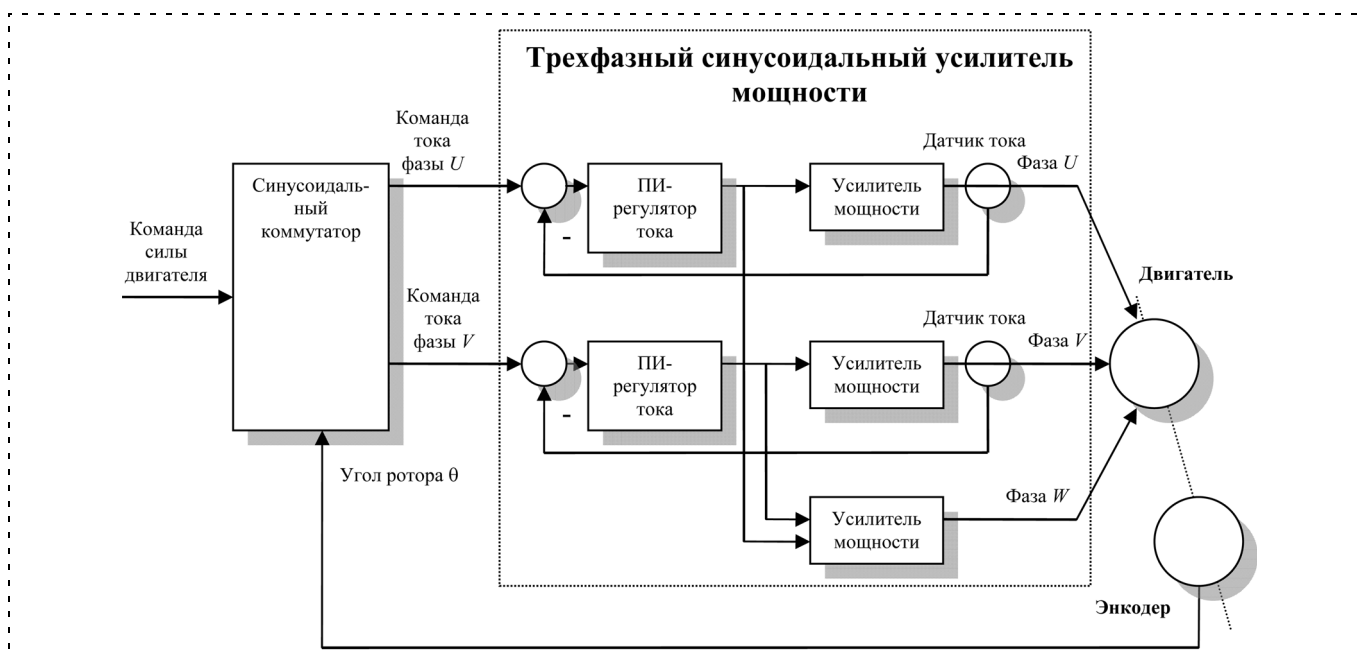


Рис. 1. Синусоидальная коммутация вентильного двигателя

ра как алгебраическая сумма токов обмоток U и V . В этом случае для токов обмоток справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} i_U &= i_{\max} \sin \theta; \quad i_V = i_{\max} \sin(\theta - 2\pi/3); \\ i_W &= -i_V - i_U, \end{aligned} \quad (1)$$

где i_U, i_V, i_W — токи обмоток; i_{\max} — амплитуда задания по току; θ — положение ротора, привязанное к противоЭДС обмотки U .

Отметим, что для привязки команд задания токов обмоток к положению ротора в случае применения инкрементального датчика положения ротора при каждом включении питания необходимо проводить процедуру начальной фазировки.

Структура выходного каскада усилителя мощности

Выходной каскад трехфазного синусоидального усилителя мощности представляет собой трехфазный мостовой преобразователь на полевых (MOSFET) или биполярных (IGBT) транзисторах. Питание выходного каскада осуществляется постоянным напряжением (DC Bus) от сети постоянного тока или от одно- или трехфазной сети переменного тока с помощью одно- или трехфазного выпрямителя в зависимости от требуемой мощности.

Для прецизионных применений с повышенными требованиями к излучаемым уровням шумов рекомендуется применять линейные — вместо ШИМ — силовые преобразователи. Обычно установленная (продолжительная) мощность таких линейных усилителей, габаритные размеры радиаторов охлаждения которых довольно значительны, не превышает 500 Вт. Следует также отметить преимущества таких преобразователей для управления двигателями с низкой индуктивностью, связанной с выполнением статора двигателя безжелезным.

Исследование влияния параметров синусоидального усилителя мощности на качество процесса управления двигателем

Обычно производители быстродействующих усилителей мощности с ШИМ (Elmo, АМС, Copley) или линейного (Eltrol, Varedan) типа приводят следующие показатели усилителей: диапазон напряжения питания, длительный/пиковый токи, полоса пропускания (Гц). Для усилителей с ШИМ указывают частоту ШИМ на двигателе и метод ШИМ: биполярный, униполярный или модифицированный униполярный (поочередный по терминологии [2]).

Полоса пропускания синусоидального усилителя мощности обычно значительно — не менее чем на порядок — превышает частоту вращения электрического оборота двигателя. Это справедливо для

быстродействующих усилителей с полосой пропускания не менее 2 кГц при управлении линейными двигателями со скоростями 3 м/с и электрическим оборотом* 60 мм. Частота вращения электрического оборота в таком случае не превышает 50 Гц.

К сожалению, показатели усилителей мощности, определяющие качество регулирования тока, такие как разбалансировка усиления по току для обмоток UV , относительное смещение напряжения постоянного тока обмоток UV и сдвиг фазы между токами обмоток статора и положением ротора, производители обычно не приводят.

Далее будет показано, как именно указанные показатели усилителей мощности влияют на качество процесса управления двигателем, а именно силой двигателя.

Расчетные формулы силы двигателя

При рассмотрении быстродействующих контуров тока воспользуемся следующими общепринятыми допущениями [3]:

1) при отношении полосы пропускания контура регулирования тока к частоте вращения электрического оборота более 10:1 фазовым запаздыванием, вносимым замкнутым контуром тока, можно пренебречь. Это позволяет рассматривать передаточную функцию контура тока в виде усилительного звена;

2) влиянием противоЭДС обмоток двигателя при рассмотрении контура тока можно пренебречь.

Расчетная формула для силы двигателя F в общем виде с учетом выбранных показателей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F &= K_{FU} i_U + K_{FV} i_V + K_{FW} i_W = \\ &= \left[K_{FU} \max \sin \theta [i_{U \max} \sin(\theta + \varphi_0) - i_0] + \right. \\ &+ K_{FV} \max \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) i_{V \max} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) + \\ &+ K_{FW} \max \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \left[i_{W \max} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) + \right. \\ &+ I_0 \left. \right] = \left[K_F \sin \theta [K_{IW} i_{U \max} \sin(\theta + \varphi_0) - i_0] + \right. \\ &K_F \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) K_{IW} i_{V \max} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) + \\ &+ K_F \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \left[K_{IW} i_{W \max} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) + i_0 \right] \left. \right], \quad (2) \end{aligned}$$

* Здесь и далее под электрическим оборотом (циклом, периодом) будем понимать длину полюсного деления, т. е. расстояние между одноименными полюсами магнитов статора двигателя.

где K_{FU} , K_{FV} , K_{FW} — постоянные коэффициенты усилий обмоток статора двигателя; i_U , i_V , i_W — токи обмоток; $K_{FU\max}$, $K_{FV\max}$, $K_{FW\max}$ — амплитуда постоянных коэффициентов усилий обмоток статора двигателя; $i_{U\max}$, $i_{V\max}$, $i_{W\max}$ — амплитуда токов обмоток; θ — положение ротора, привязанное к противоЭДС обмотки U ; φ_0 — сдвиг фазы тока по отношению к положению ротора θ ; i_0 — смещение напряжения постоянного тока.

Для симметричной машины постоянные сил обмоток и амплитуды токов обмоток равны, т. е. $K_{FU} = K_{FV} = K_{FW}$ и $i_{\max} = i_{U\max} = i_{V\max} = i_{W\max}$.

Введем для удобства дополнительные коэффициенты токов обмоток K_{IU} , K_{IV} , K_{IW} ($K_{IU} = K_{IV} = K_{IW} = 1$ для симметричной машины) и относительное смещение $i_0 = i_0/i_{\max}$.

Тогда уравнение (2) в самом общем виде примет вид

$$\begin{aligned}
 F &= K_{FU}i_{\max} \left[\sin \theta [K_{IU} \sin(\theta + \varphi_0) - i_0] + \right. \\
 &+ \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) K_{IV} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) + \\
 &+ \left. \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \left[K_{IW} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) + i_0 \right] \right] = \\
 &= K_{FU}i_{\max} \left\{ \frac{K_{IU}}{2} [\cos(-\varphi_0) - \cos(2\theta + \varphi_0)] + \right. \\
 &+ \frac{K_{IV}}{2} [\cos(-\varphi_0) - \cos(2\theta - \frac{4\pi}{3} + \varphi_0)] + \\
 &+ \frac{K_{IW}}{2} [\cos(-\varphi_0) - \cos(2\theta + \frac{4\pi}{3} + \varphi_0)] - \\
 &- \left. i_0 \sin \theta + i_0 \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) \right\} = \\
 &= K_{FU}i_{\max} \left\{ \frac{1}{2} (K_{IU} + K_{IV} + K_{IW}) \cos \varphi_0 + \right. \\
 &+ 1,74 i_0 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3} + \varphi_0\right) + \left[K_{IU} \cos(2\theta + \varphi_0) + \right. \\
 &+ \left. K_{IV} \cos\left(2\theta + \varphi_0 - \frac{4\pi}{3}\right) + K_{IW} \cos\left(2\theta + \varphi_0 + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \left. \right\}. (3)
 \end{aligned}$$

Для идеального усилителя ($K_{IU} = K_{IV} = K_{IW} = 1$, $\varphi_0 = 0$, $i_0 = 0$) $F = \frac{3}{2} K_{FU}i_{\max} = K_F i_{\max}$, где K_F — постоянная силы двигателя.

Рассмотрим далее влияние каждого параметра в отдельности.

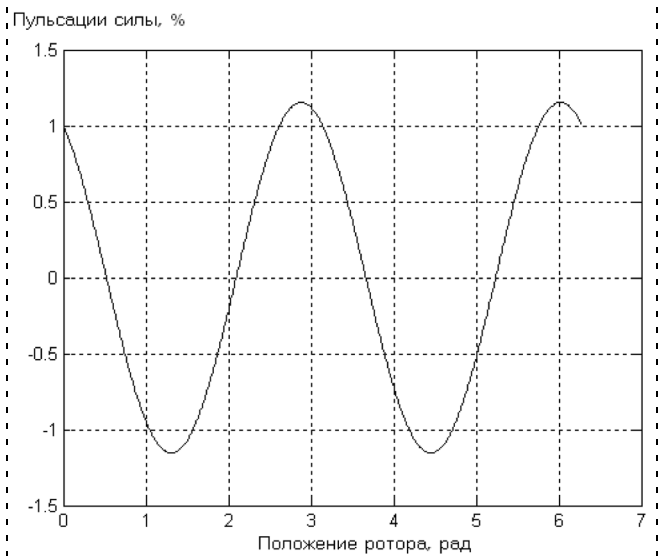


Рис. 2. Пульсации момента внутри одного электрического оборота при 5%-м разбалансе усиления обмоток UV

Анализ качества процесса управления силой двигателя

1. При ненулевом сдвиге фазы тока по отношению к положению ротора θ (т. е. $\varphi_0 \neq 0$, $i_0 = 0$, $K_{IU} = K_{IV} = K_{IW} = 1$) амплитуда постоянной силы двигателя изменяется как функция $\cos \varphi_0$. Однако даже при 10%-м сдвиге фазы тока по отношению к положению ротора (из-за, например, неточной начальной фазировки) амплитуда уменьшается всего на 1,5 %.

2. Разбалансировка усиления между обмотками UV ($K_{IU} \neq K_{IV}$, $\varphi_0 = 0$, $i_0 = 0$) с учетом выражений (1) приводит к обратной разбалансировке VW при том же усилении по фазе V , т. е. если $K_{IU} = K_{IV} \pm \Delta K$ и $K_{IV} = 1$, то $K_{IW} = K_{IW} \mp \Delta K$. В этом случае (рис. 2) возникают пульсации тока с частотой, соответствующей двойной частоте вращения электрического оборота (f_E) и амплитудой, пропорциональной величине разбалансировки ΔK . Разбалансировка усиления для современных усилителей не превышает 5 %.

3. Смещение напряжения постоянного тока в одной из обмоток ($i_0 \neq 0$, $\varphi_0 = 0$, $K_{IU} = K_{IV} = K_{IW} = 1$) приводит к пульсациям тока с частотой, соответствующей частоте вращения электрического оборота, и амплитудой, пропорциональной смещению i_0 . Уровень смещения для современных усилителей не превышает 1 %.

Результаты эксперимента

Экспериментальные исследования были проведены для оси координатного стола с линейным безжелезным U-образным двигателем типа LZ-030-120

(Anorad) с линейным датчиком положения BL-57 (Sony), управляемым трехфазным синусоидальным линейным усилителем мощности LSA от контроллера MC-800 (оба — Mega-F).

На рис. 3 (вверху) приведен график изменения тока линейного двигателя на скорости 60 мм/с в пределах электрического цикла, равного 60 мм. На рис. 3 (внизу) показана переменная контролле-

ра, соответствующая электрическому циклу, где полному электрическому циклу 0...60 мм соответствует значение переменной в пределах 0...1000.

Амплитуда пульсаций с частотой 1 Гц, соответствующей основной частоте f_E , как следует из частотного анализа тока на рис. 4, составляет менее 2%. Пульсации с двойной частотой ($2f_E$) практически отсутствуют. Наличие пульсаций с частотами более $2f_E$ связано с неидеальностью характеристик линейного двигателя (неидеальностью магнитного поля противо-ЭДС) и неравномерностью нагрузки линейных направляющих перемещаемой оси из-за их относительно низкой жесткости.

Заключение

Рассмотрены основные параметры быстродействующих синусоидальных усилителей мощности, определяющие качество процесса управления линейным вентильным двигателем. Показано, что современные усилители обеспечивают низкий уровень пульсаций силы двигателя и тем самым позволяют достичь высокой равномерности вращения на малых скоростях при минимальных потерях в двигателе. Также следует отметить, что пониженные пульсации силы линейного двигателя уменьшают ошибку по положению, что, в свою очередь, сокращает время позиционирования.

Список литературы

1. Овчинников И. Е. Вентильные электрические двигатели и привод на их основе: Курс лекций. СПб.: Корона-Век, 2006. 336 с.
2. Гольц М. Е., Гудзенко А. Б., Остреров В. М. и др. Быстродействующие электроприводы постоянного тока с широтно-импульсными преобразователями. М.: Энергоатомиздат, 1986. 184 с.
3. Башарин А. В., Новиков В. А., Соколовский Г. Г. Автоматическое управление электроприводами. Л.: Энергоатомиздат, 1982. 392 с.

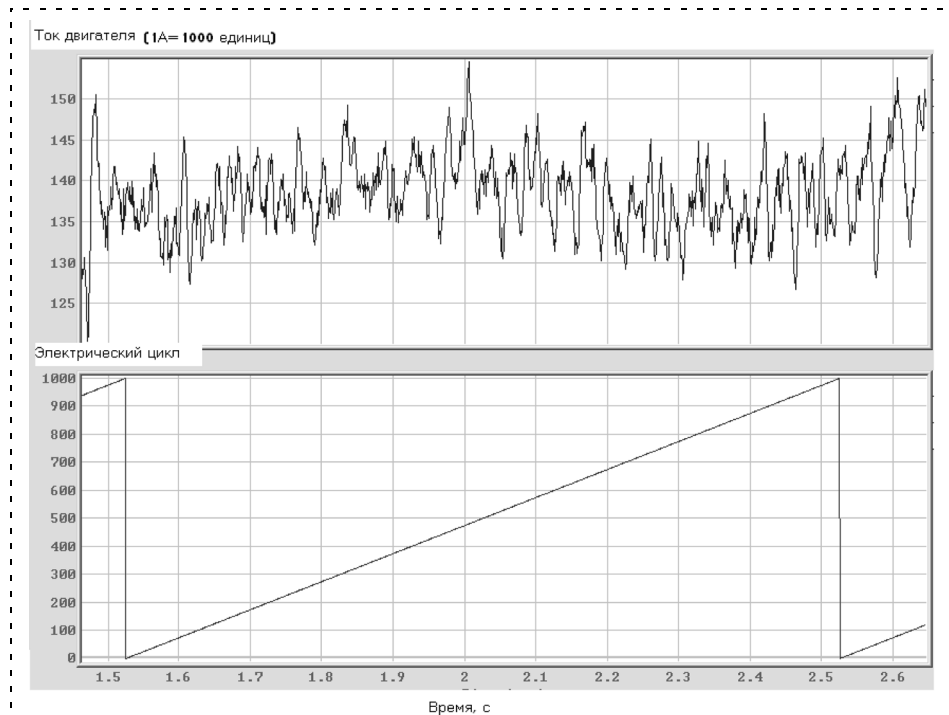


Рис. 3. Пульсации тока двигателя на скорости 60 мм/с внутри электрического цикла

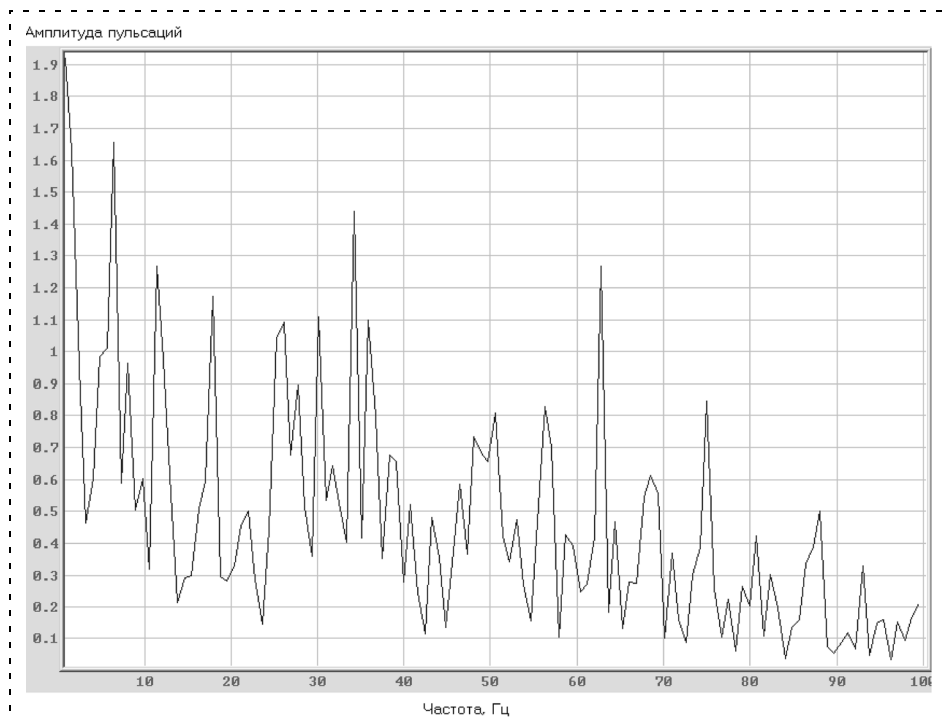


Рис. 4. Частотный анализ пульсаций тока

УДК 681.51:007.52:631.324

С. Л. Зенкевич, д-р физ.-мат. наук, проф.,
 Научно-учебный центр "Робототехника"
 МГТУ им. Н. Э. Баумана,
П. В. Космачев, вед. специалист,
 войсковая часть 68240
 zenkev@bmstu.ru

Управление движением мобильного робота в неподвижную точку

Рассматривается решение задачи параметрического синтеза закона управления движением мобильного колесного робота по плоскому рельефу. Цель управления состоит в движении в неподвижную в абсолютной системе координат предварительно заданную точку. Рассматриваются уравнения движения, учитывающие динамические характеристики робота, а также наличие приводов ведущих колес. Проведенная линеаризация позволяет получить линейную стационарную модель объекта управления и выбрать на основании нее значение параметра, обеспечивающего аperiodический характер траектории движения. Приведены результаты экспериментов, проведенных на реальном мобильном роботе.

Ключевые слова: мобильный робот, уравнения движения робота, закон управления, параметрический синтез

Введение

Управление движением мобильного робота (МР) в автоматическом режиме является весьма важной задачей. Современные тенденции развития робототехнических систем состоят в оснащении их множеством сенсорных систем (лазерными сканирующими дальномерами, системами технического зрения, инерциальными навигационными системами и т. д.), окончательной целью использования которых является полное или частичное автоматическое функционирование робота. В конечном счете результатом использования данных сенсорных систем чаще всего является осмысленное и целенаправленное движение МР.

В данной статье исследуется один из основных алгоритмов управления движением робота, а именно движение в заданную точку. Эта целевая точка может быть, в частности, указана оператором на плане местности, либо построена роботом в процессе движения, либо предварительно введена оператором. Целевая точка может быть также вычислена МР как одна из промежуточных точек, спрямляющих распланированную траекторию. В любом из перечисленных выше случаев требуется обеспечить

приемлемое качество траектории движения робота. Учет только кинематических свойств МР в рассматриваемом случае не приводит к успеху, поэтому необходимо использовать уравнения движения, построенные на основе динамической модели МР.

Динамические модели МР исследовали в работах [1, 2]. Рассматриваемая в данной статье задача состоит в параметрическом синтезе закона управления, т. е. в выборе параметра, обеспечивающего устойчивость и приемлемое качество траектории.

Кинематическая и динамическая модели колесного МР

Пусть колесный МР движется по плоской горизонтальной поверхности. При этом целью управления является обеспечение движения в неподвижную (в абсолютной системе координат) точку, направление движения на которую робот измеряет в собственной системе координат, используя имеющиеся на борту системы очувствления. Приведем здесь результаты, полученные в работах [1, 2, 3].

На рис. 1 изображен колесный МР с соответствующими системами координат.

В точках L и R расположены колеса, оси вращения которых совпадают с отрезком LR , длина которого равна W . С платформой МР жестко связана подвижная система координат $O_1x_1y_1$ с началом в точке O_1 , расположенной посередине отрезка LR , и осью x_1 , направленной по оси симметрии платформы перпендикулярно отрезку LR в направлении

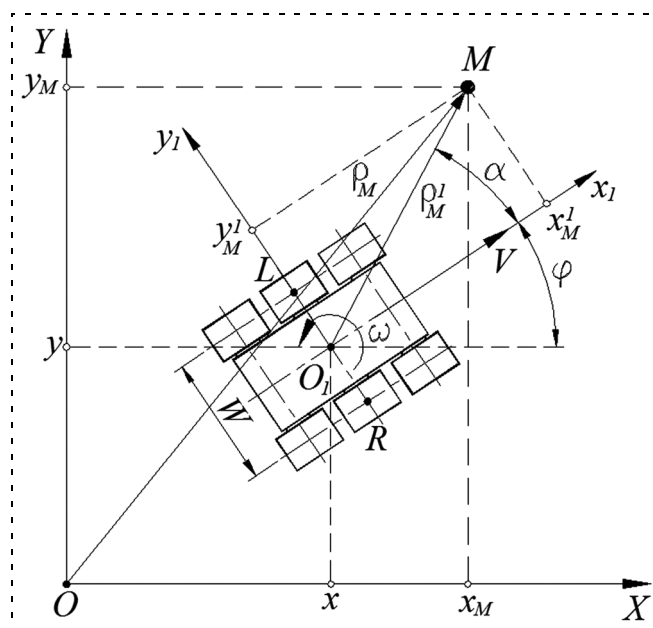


Рис. 1. Модель движения МР

движения робота. Тогда положение платформы робота как твердого тела задается тройкой чисел φ, x, y , где φ — угол между осью x_1 и осью X абсолютной системы координат; x, y — декартовы координаты точки O_1 в абсолютной системе координат OXY .

Кинематическая модель в принятых обозначениях будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi; \\ \dot{y} = V \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} = \omega, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2}(V_R + V_L); \\ \omega = \frac{1}{W}(V_R - V_L). \end{cases} \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка относительно фазового вектора с компонентами (x, y, φ) . Линейные скорости правого V_R и левого V_L колес являются управлениями и, заданные тем или иным образом (как функции времени или как функции фазовых координат), определяют движение МР со скоростью V .

Приведем теперь уравнения движения МР с учетом динамических свойств робота, а также исполнительной системы [3]. Будем считать, что исполнительная система МР представляет собой два электромеханических привода на базе двигателей постоянного тока, каждый из которых приводит в движение ведущие колеса правого и левого бортов шасси транспортного средства робота. Тогда уравнения, связывающие компоненты фазового вектора с управляющими напряжениями, будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi; \\ \dot{y} = V \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} = \omega; \\ \dot{V} = -b\omega^2 + \frac{1}{\rho m}(\tau_R + \tau_L); \\ \dot{\omega} = \frac{bm\omega V}{i_z} + \frac{W}{2\rho i_z}(\tau_R - \tau_L); \\ \dot{\tau}_L = -\frac{R_M}{2L}\tau_L - \frac{i_p^2 k_M k_{\Gamma\Gamma} k_y}{L\rho} \left(V - \frac{\omega W}{2} \right) + \\ + \frac{i_p k_M k_y}{L} U_Y^L; \\ \dot{\tau}_R = -\frac{R_M}{2L}\tau_R - \frac{i_p^2 k_M k_{\Gamma\Gamma} k_y}{L\rho} \left(V + \frac{\omega W}{2} \right) + \\ + \frac{i_p k_M k_y}{L} U_Y^R, \end{cases} \quad (3)$$

где V и ω — линейная и угловая скорости движения МР соответственно; m — масса робота; b — расстояние между началом связанной системы координат и центром масс робота; ρ — радиус колеса МР; i_z — момент инерции робота относительно оси z_i в связанной системе координат; τ_R и τ_L — моменты, развиваемые исполнительными двигателями правого и левого бортов МР; L — индуктивность обмотки якоря; U_Y^L и U_Y^R — напряжения, подаваемые на обмотку якоря; k_M — коэффициент, связывающий ток и развиваемый двигателем момент; i_p — передаточное отношение редуктора; R_M — сопротивление обмотки якоря исполнительного двигателя; $k_{\Gamma\Gamma}$ — коэффициент передачи тахогенератора; k_y — коэффициент усилителя мощности.

При этом угловые скорости правого и левого колес, угловая и линейная скорости робота связаны соотношениями (линейной скоростью робота мы называем скорость начала связанной системы координат)

$$\begin{cases} \omega_R = \frac{1}{\rho} \left(V + \frac{\omega W}{2} \right); \\ \omega_L = \frac{1}{\rho} \left(V - \frac{\omega W}{2} \right). \end{cases}$$

Соотношения (3) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений седьмого порядка с фазовым вектором $(x, y, V, \varphi, \omega, \tau_R, \tau_L)^T$ и вектором управления $(U_Y^R, U_Y^L)^T$.

Сделаем теперь следующие предположения. Будем считать, что при движении МР на плоскости вдоль гладкой программной траектории управляющие моменты ведущих колес, развиваемые электродвигателями, изменяются незначительно (это допущение часто используют при исследовании электромеханических систем), т. е. $\dot{\tau}_L = \dot{\tau}_R = 0$. Это допущение позволяет понизить порядок системы до пятого.

Кроме того, примем следующий способ вычисления управляющих напряжений, подаваемых на приводы ведущих колес МР:

$$\begin{cases} U_Y^L = U_d - U_\alpha; \\ U_Y^R = U_d + U_\alpha, \end{cases} \quad (4)$$

где $U_d = \text{const}$ — напряжение, обеспечивающее заданную линейную скорость движения МР; U_α — напряжение, управляющее угловой скоростью движения МР, в зависимости от угла рассогласования α между продольной осью робота и направлением на объект M с координатами (x_M, y_M) в абсолютной системе координат.

Выберем теперь следующий закон управления:

$$U_\alpha = k\alpha, \quad (5)$$

где k — некоторый параметр; α — угол между продольной осью робота и направлением на объект.

Тогда окончательно уравнения управляемого объекта с учетом (5) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\varphi; \\ \dot{y} = V\sin\varphi; \\ \dot{\varphi} = \omega; \\ \dot{V} = -b\omega^2 + \frac{1}{\rho m}(-2\mu V + 2\delta U_d); \\ \dot{\omega} = \frac{bm\omega V}{i_z} + \frac{W}{2\rho i_z}(-\mu\omega W + 2\delta k\alpha), \end{cases} \quad (6)$$

где $\alpha = \arctg\left(\frac{y_M}{x_M}\right) - \varphi$; $\mu = \frac{2i_p^2 k_{M\Gamma} k_y}{R_{MP}}$; $\delta = \frac{2i_p k_{Mk} k_y}{R_{MP}}$.

Соотношения (6) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений пятого порядка, описывающую движение МР на плоскости под действием напряжений U_Y^R и U_Y^L , подаваемых на якорные обмотки двигателей правого и левого бортов и формируемых в соответствии с соотношениями (4), (5).

Задача состоит в том, чтобы выбрать параметр k , обеспечивающий приемлемое качество траектории движения МР в целевую точку.

Параметрический синтез закона управления

Полученные уравнения движения МР представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений пятого порядка, что значительно осложняет задачу дальнейшего анализа системы и выбора необходимого коэффициента k для реализации алгоритма вычисления управляющего напряжения U_α . Поэтому для выбора коэффициента k проведем линеаризацию уравнений движения с тем, чтобы можно было использовать классические методы анализа линейных стационарных систем.

Выберем в качестве программной траектории следующего вида:

$$\begin{cases} x^* = \frac{\delta U_0}{\mu} t; y^* = 0; \varphi^* = 0; \\ V^* = \frac{\delta U_0}{\mu}; \omega^* = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, мы предполагаем, что точка M , в которую движется робот, расположена на оси Ox связанной системы координат (т. е. $y_M = 0$), что не снижает общности подхода.

Тогда уравнения в приращениях относительно программной траектории (7) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = \Delta V; \\ \Delta \dot{y} = 0; \\ \Delta \dot{\varphi} = \Delta \omega; \\ \Delta \dot{V} = -\frac{2\mu}{\rho m} \Delta V; \\ \Delta \dot{\omega} = -\frac{W\delta k}{\rho i_z x_M} \Delta y - \frac{W\delta k}{\rho i_z} \Delta \varphi - \frac{W^2 \mu}{2\rho i_z} \Delta \omega. \end{cases} \quad (8)$$

Продифференцировав третье уравнение системы (8) по времени и учитывая пятое уравнение системы (8), получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\Delta \ddot{\varphi} + \frac{W^2 \mu}{2\rho i_z} \Delta \dot{\varphi} + \frac{W\delta k}{\rho i_z} \Delta \varphi = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) описывает управляемое движение робота, состоящее во вращении вокруг начала системы координат OXY , при этом закон управления имеет вид (5), где $\alpha = -\Delta\varphi$ в силу выбора начальных условий. Характеристический многочлен дифференциального уравнения (9) имеет следующий вид:

$$\lambda^2 + \frac{W^2 \mu}{2\rho i_z} \lambda + \frac{W\delta k}{\rho i_z} = 0. \quad (10)$$

Проанализируем теперь зависимость расположения корней от коэффициента k . Нетрудно видеть, что выполняются следующие соотношения:

$$k < 0 \text{ — система неустойчива;}$$

$0 < k < \frac{W^3 \mu^2}{16\rho \delta i_z}$ — аperiodический характер переходного процесса;

$k > \frac{W^3 \mu^2}{16\rho \delta i_z}$ — колебательный характер переходного процесса.

Апробация полученных результатов

Для проверки достоверности проведенных теоретических исследований и расчетов по определению параметров разработанного алгоритма управления было проведено компьютерное моделирование процессов движения МР в вычислительной среде MathCAD 14. При этом использовалась модель объекта управления в форме (6).

Апробация разработанного алгоритма управления проведена на макетном образце автономного МР (рис. 2, см. вторую сторону обложки), оборудованного программными и аппаратными средствами, в состав которых входит лазерный скани-

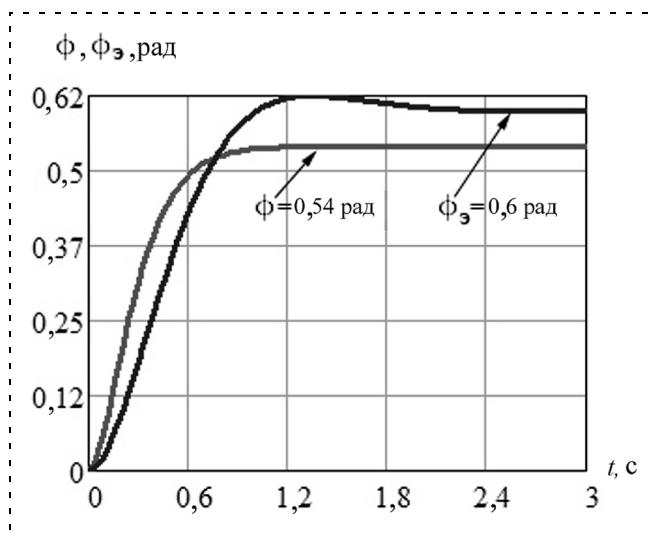


Рис. 3. Графики изменения угловой ориентации МР при $k = 7$

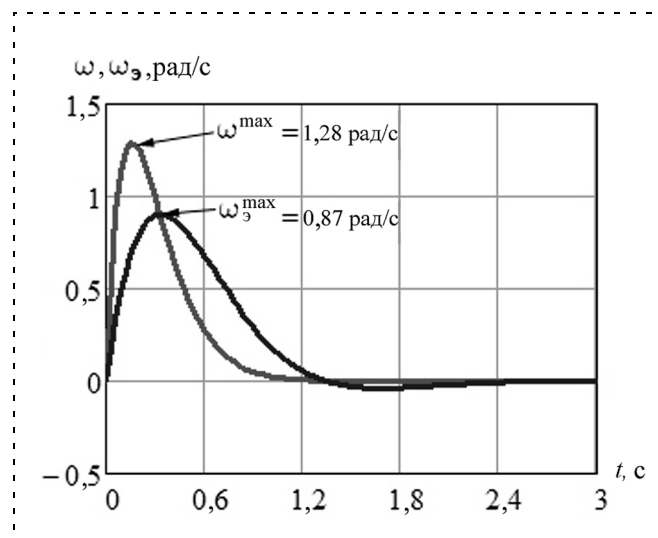


Рис. 4. Графики изменения угловой скорости движения МР при $k = 7$

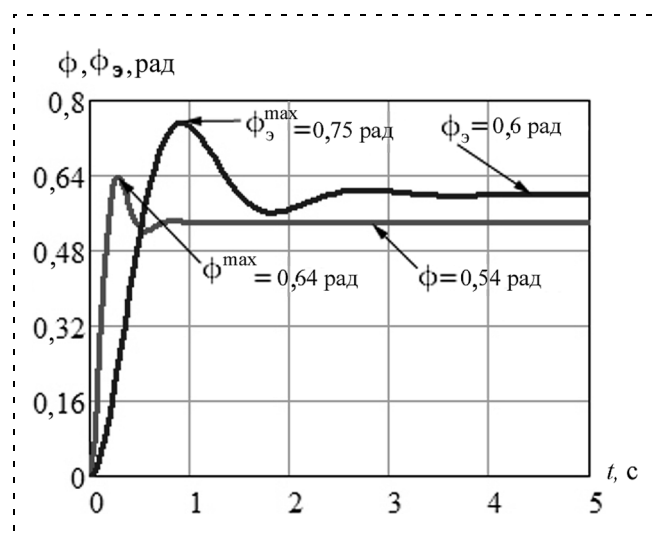


Рис. 5. Графики изменения угловой ориентации МР при $k = 15$

рующий дальномер "SICK LMS200". В качестве бортовой вычислительной машины используется встраиваемый компьютер в формате "PC104" под управлением операционной системы "Linux/Debian".

Эксперименты проводили с использованием робота, имеющего следующие параметры, входящие в состав уравнений движения (6): $m = 30$ кг; $i_z = 4,2$ кг·м²; $\mu = 56,7$; $\delta = 4,4$; $W = 500$ мм, $\rho = 87$ мм, $b = 0$; цель заключалась в исследовании движения робота с различными значениями коэффициента k . При выбранных параметрах объекта управления значение критического параметра составляет $k = \frac{W^3 \mu^2}{16 \rho \delta i_z} = 8$.

На первом этапе исследовали только вращательное движение робота с нулевой линейной скоростью. При проведении экспериментов считали, что в начальный момент времени центр связанной с МР системы координат совпадает с центром неподвижной системы координат, а продольная ось робота совпадает с осью абсцисс неподвижной системы координат, т. е. $\varphi(0) = 0$. Координаты заданной точки M , к которой необходимо осуществлять движение, равны $x_M = 5$ м, $y_M = 3$ м. При заданных условиях угол между продольной осью робота и направлением на точку M составляет $\alpha = 0,54$ рад.

1. Рассмотрим движение МР при значении параметра управления $k = 7$. Результаты эксперимента представлены на рис. 3 и 4.

На рис. 3 представлены результаты процесса изменения угловой ориентации макетного образца МР при отработке входного воздействия — угла рассогласования между начальным угловым положением робота и направлением на точку M . Здесь и далее обозначены: $\varphi(t)$, $\omega(t)$ — результаты, полученные при проведении компьютерного моделирования на математической модели МР; $\varphi_э(t)$, $\omega_э(t)$ — результаты, полученные на макетном образце автономного МР. Из анализа графика $\varphi_э(t)$ видно, что система устойчива и кривая по форме соответствует результатам, полученным при проведении численного эксперимента $\varphi(t)$.

Переходный процесс является аperiodическим, и перерегулирование равно приблизительно 14 %. Как видно из графиков, реальная система обладает меньшим быстродействием, и время переходного процесса составляет примерно 2,2 с. В установившемся режиме система обрабатывает входное воздействие со статическим отклонением (установившейся ошибкой в управлении), равным 0,06 рад, что составляет 11 % от номинального значения и является допустимым для робототехнических систем данного класса.

На рис. 4 представлены результаты процесса изменения угловой скорости движения МР.

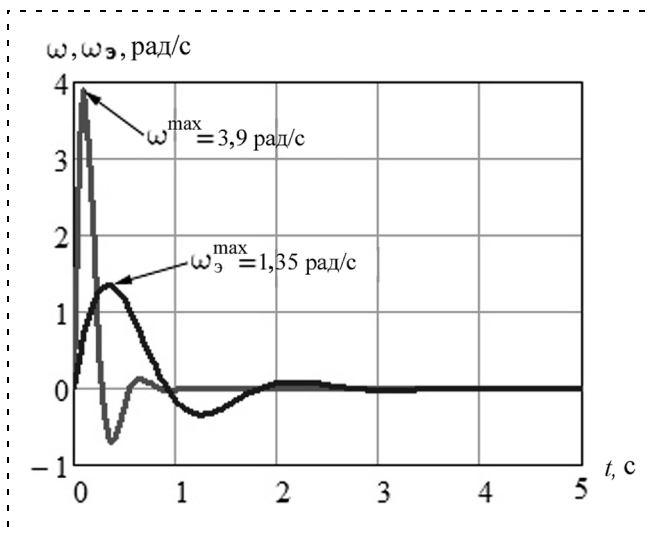


Рис. 6. Графики изменения угловой скорости движения МР при $k = 15$

Из представленных графиков видно, что по форме переходной процесс $\omega_э(t)$ соответствует результатам численного эксперимента $\omega(t)$. Система при данном алгоритме управления является устойчивой, статической и обладает аperiodическими свойствами.

2. Рассмотрим движение МР при значении параметра управления $k = 15$.

Результаты эксперимента показаны на рис. 5 и 6.

Из представленных графиков видно, что по форме кривые $\phi_э(t)$ и $\omega_э(t)$ в основном соответствуют результатам, полученным при проведении численных экспериментов ($\phi(t)$ и $\omega(t)$). Система является устойчивой и статической, но переходные процессы протекают с большей колебательностью, и максимальное перерегулирование $\phi_э(t)$ равно приблизительно 38 % (максимальное перерегулирование $\phi(t)$

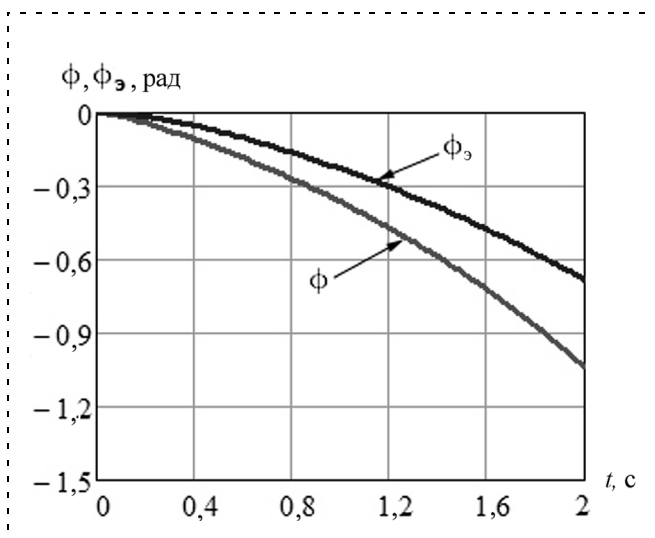


Рис. 7. Графики изменения угловой ориентации МР при $k = -7$

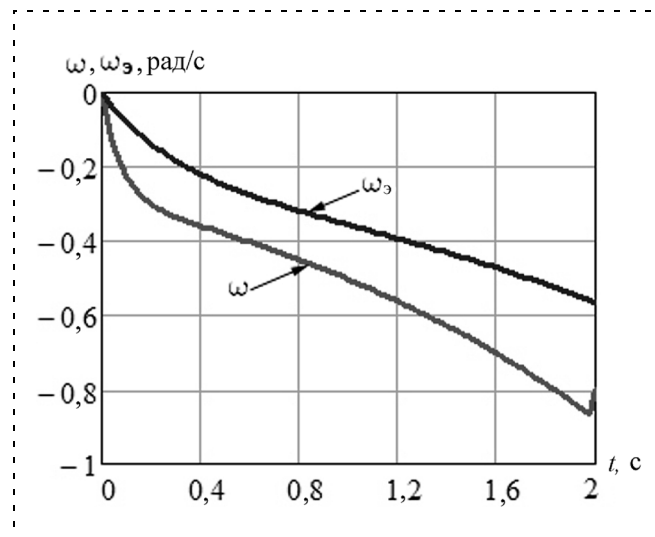


Рис. 8. Графики изменения угловой скорости движения МР при $k = -7$

составляет 18 %). Реальная система обладает меньшим быстродействием, и время переходного процесса составляет примерно 4 с. Как и в первом случае, в установившемся режиме система обрабатывает входное воздействие со статическим отклонением, равным 0,06 рад.

3. Рассмотрим движение МР при значении параметра управления $k = -7$. Результаты эксперимента представлены на рис. 7 и 8.

Из представленных графиков видно, что переходные процессы $\phi_э(t)$ и $\omega_э(t)$ являются расходящимися, и реальная система неустойчива при данном параметре управления. Указанные результаты соответствует кривым $\phi(t)$ и $\omega(t)$, полученным при проведении численных экспериментов.

На втором этапе проводили моделирование движения робота к объекту до достижения контак-

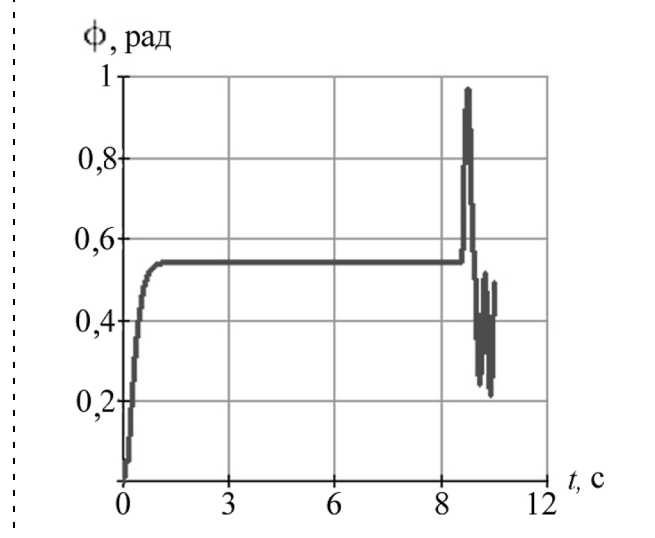


Рис. 9. График изменения угловой ориентации МР

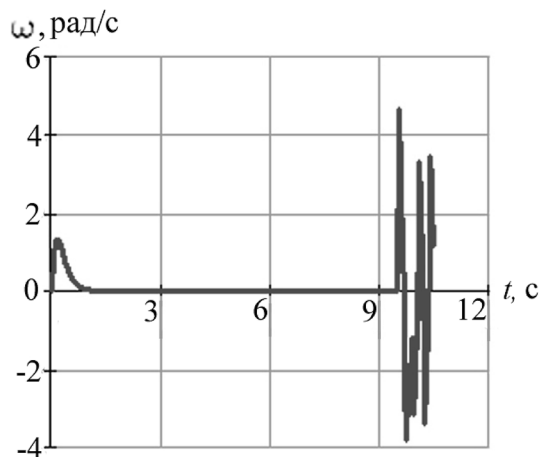


Рис. 10. График изменения угловой скорости движения МР

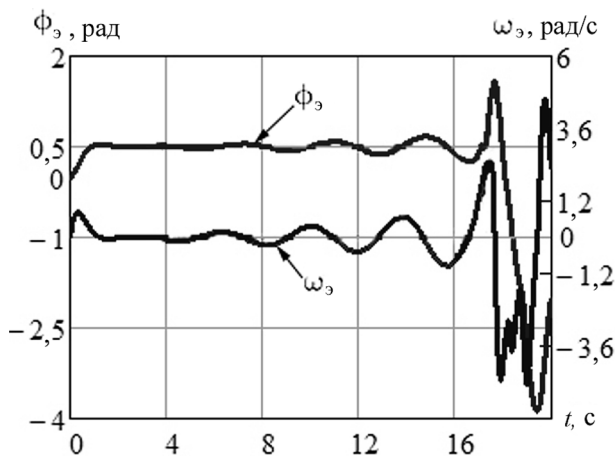


Рис. 11. Графики изменения угловой ориентации и угловой скорости движения макетного образца МР

та с ним. При этом управление угловой скоростью осуществляли с помощью представленного в работе алгоритма, управление же линейной скоростью обеспечивал стандартный режим разгона/торможения.

Движение МР осуществлялось к стационарной точке M , которая в неподвижной системе координат имеет следующие координаты: $x_M = 10$ м, $y_M = 5$ м.

При заданных условиях угол между продольной осью робота и направлением на точку M составляет $\alpha = 0,46$ рад.

В данном эксперименте рассматривали перемещение макетного образца МР при значении параметра алгоритма управления угловой скоростью

движения $k = 7$, при котором получены положительные результаты предыдущего эксперимента.

Результаты эксперимента представлены на рис. 9—11. На рис. 9 и 10 представлены результаты процесса изменения угловой ориентации $\varphi(t)$ и угловой скорости движения $\omega(t)$, полученные с использованием математической модели МР.

На рис. 11 представлен процесс движение макетного образца МР.

Из анализа приведенных графиков видно, что на начальном этапе и в установившемся режиме переходные процессы по форме в основном соответствуют проведенным расчетам. Только на конечном этапе при достижении роботом заданной точки M возникают короткопериодические колебания. Указанные колебания вызваны тем, что вблизи целевой точки резко увеличивается угол между продольной осью робота и направлением на объект. Этот эффект хорошо известен в системах самонаведения.

Заключение

В работе рассмотрен метод выбора параметра закона управления, обеспечивающий аperiodический характер переходного процесса при движении робота в заданную точку на плоской поверхности. Предлагаемый метод учитывает динамические свойства объекта управления, а также параметры приводов. Выделены три области значения параметров, при которых траектория движения к целевой точке неустойчива, имеет аperiodический или колебательный характер. Полученные результаты позволяют найти первые приближения значений параметра закона управления: более точные значения необходимо искать в окрестности найденного параметра на основе экспериментов с реальными образцами мобильных роботов.

Список литературы

1. Девянин Е. А. О движении колесных роботов. Труды конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 1998, стр. 169—200.
2. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г. Неголономная динамика мобильных роботов и ее моделирование в реальном времени. Труды конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 1998, стр. 107—123.
3. Зенкевич С. Л., Назарова А. В. Система управления мобильного робота. Вестник МГТУ, серия "Приборостроение", 2006, № 3, стр. 31—51.
4. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 479 с.
5. Пупков К. А., Егупов Н. Д. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления. Том 1. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 655 с.



ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



Управление и информатика в авиакосмических и морских системах



Главный редактор:

ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСЕЕВ В. В.
БЕЛОКОНОВ И. В.
БУКОВ В. Н.
ВАСИЛЬЕВ В. И.
ГОДУНОВ В. А.
ГУРЕВИЧ О. С.
ГУРСКИЙ Б. Г.
ЕФИМОВ В. В.
ЗАЙЦЕВ А. В.
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.
НЕСТЕРОВ В. А.
ОХТИЛЕВ М. Ю.
ПАНКРАТОВ В. М.
РАСПОПОВ В. Я.
САБО Ю. И.
СТЕПАНОВ О. А.
СОЛДАТКИН В. М.
ТЕРЯЕВ Е. Д.
ФИЛИМОНОВ Н. Б.
ШИРЯЕВ В. И.
ШКОЛИН В. П.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧУГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

**Сильвестров М. М., Федоров А. В., Котицын Л. О.,
Бегичев Ю. И., Наумов А. И.**

Концепция построения эргатического комплекса управления многоцелевыми беспилотными летательными аппаратами 62

Сапунков Я. Г.

Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS -переменных 73

М. М. Сильвестров, д-р техн. наук, проф.,
А. В. Федоров, **Л. О. Котицын**,
 ФГУП "НИИ авиационного оборудования",
Ю. И. Бегичев, канд. техн. наук, доц.,
А. И. Наумов, канд. техн. наук, проф.,
 ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина,
 Москва
 IASO@inbox.ru

Концепция построения эргатического комплекса управления многоцелевыми беспилотными летательными аппаратами

Рассматриваются концепция построения и архитектура эргатического комплекса управления многоцелевыми беспилотными летательными аппаратами (МБПЛА), синтез контуров управления МБПЛА методом характеристических параметров, эргатический интерфейс комплекса управления и корреляционная экстремальная система навигации по геофизическим полям Земли.

Ключевые слова: эргатический комплекс управления, эргатический интерфейс, траекторное маневрирование, диалоговый моделирующий стенд, информационно-управляющее поле, мнемокадр, текстовые предупреждающие и уведомляющие сообщения, рабочие места оператора-летчика и оператора полезной нагрузки, модули "эталонного траекторного маневрирования" и интеллектуальной поддержки операторов, характеристическая постоянная времени, запас устойчивости

Введение

В последние годы успешное использование беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в ряде боевых операций привело к тому, что создание комплексов БПЛА стало одной из наиболее быстро развивающихся отраслей авиационно-космической промышленности во многих странах мира. Известно, например, что в ходе операции "Буря в пустыне" БПЛА коалиционных сил совершили более 530 вылетов, общий налет составил около 1700 часов. При этом потери исчислялись 28 аппаратами, включая 12, которые были сбиты. Из 40 БПЛА Pioneer, используемых вооруженными силами США, 24 были повреждены, но 18 из них оказались пригодными для ремонта и только два относились к боевым потерям [6].

В настоящее время отечественные и зарубежные (в том числе и американские) специалисты сошлись во мнении, что устойчивая надежная высокоточная навигация беспилотных летательных аппаратов, основанная только на спутниковой радионавигационной системе, в настоящее время и в отдаленной перспективе не может быть обеспечена.

Альтернативным вариантом является создание интегрированных бортовых навигационных комплексов БПЛА, использующих автономные устой-

чивые каналы получения навигационной информации, к числу которых, в первую очередь, относятся корреляционно-экстремальные навигационные системы по физическим полям Земли, используемые в *эргатических комплексах управления многоцелевыми беспилотными летательными аппаратами*. Данные системы при потенциальной точности порядка десятков метров обладают такими важными качествами, как большая зона действия, характеризующаяся объемом эталонного информационного обеспечения, высокая (а для ряда физических полей Земли — абсолютная) помехозащищенность и автономность функционирования.

По числу решаемых задач комплексы БПЛА не только дополняют пилотируемые летательные аппараты, но и выступают в качестве альтернативы последним. В настоящее время наметилась тенденция создания полностью автономных БПЛА, полет которых от взлета до посадки проходит в автоматическом режиме, но даже в этом случае необходимость в операторе-человеке полностью не пропадает. Связано это с целым рядом проблем и, в первую очередь, с непрерывно меняющейся оперативно-тактической обстановкой, а также с наличием сбоев и отказов в бортовом оборудовании БПЛА.

Очевидно, что при современном уровне развития техники и даже в отдаленной перспективе повысить эффективность применения БПЛА можно за счет разработки и создания эргатических комплексов управления (ЭКУ) беспилотными летательными аппаратами.

Для создания и отработки эргатического комплекса управления многоцелевыми беспилотными летательными аппаратами (МБПЛА) предлагается использовать эргономическую методологию [1, 2, 4], основанную на принципах обеспечения рационального согласования совокупных свойств взаимодействия человека-оператора, техники и образа цели управления, которые могут реконфигурироваться в зависимости от изменения задач, условий и факторов, определяющих эффективность эргатического комплекса управления.

В соответствии с этой методологией при формировании заданных сигналов, параметров и динамики изменения образа цели управления, командно-лидерной информации и сигнализации предупреждения опасных состояний целесообразно использовать модули "эталонного траекторного маневрирования" и интеллектуальной поддержки операторов.

При этом модулем "эталонного траекторного маневрирования" формируются:

- модели процессов рационального (желаемого) управления и боевого применения;
- информация о заданных параметрах пространственного положения и движения;
- информация о критических состояниях, предпринимая действия по устранению критических состояний,

что обеспечивает представление оператору образа цели управления в виде отображения заданного (желаемого) пространственного положения "лидера" и изменения его конфигурации в соответствии с принципом управления "делай, как я".

Модулем интеллектуальной поддержки экипажа обеспечивается:

- экспертное прогнозирование опасных состояний траекторного маневрирования;
- интеллектуальная поддержка оператора в особых случаях полета и при выводе объекта из опасных состояний полета в соответствии с эталонной моделью управления;
- формирование и выдача для отображения на кадре навигационно-тактической обстановки целесообразных вариантов полетного задания, целераспределения, управления группой, выхода на цель, отражения "угрозы";
- формирование и выдача текстовых предупреждающих и уведомляющих сообщений и информации о состоянии и функционировании общесамолетного оборудования (силовой установки, систем механизации крыла, положения шасси, гидро- и пневмосистем, топливной системы).

В соответствии с этой методологией предлагается концепция построения и архитектура эргатического комплекса управления группой МБПЛА. В качестве объекта управления была использована модель БПЛА, общий вид которого представлен на рис. 1.

В состав эргатического комплекса управления (ЭКУ) группой МБПЛА входят:

- ◆ группа МБПЛА с интегрированными комплексами бортового оборудования;
- ◆ интегрированный наземный пункт управления (ИНПУ) в составе:
 - рабочего места оператора-летчика с системой дистанционного командно-лидерного управления;

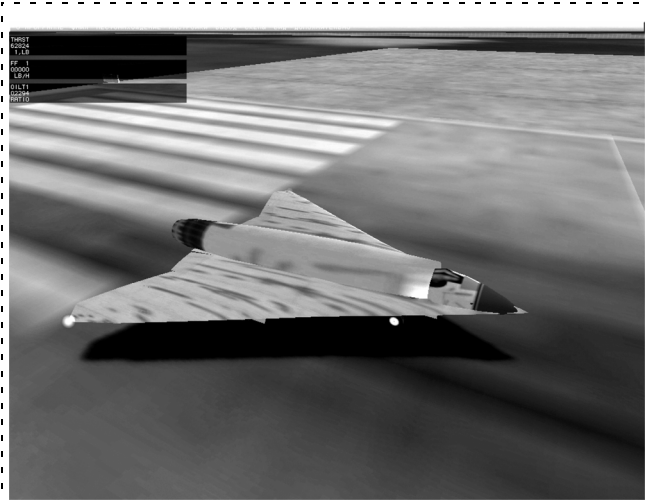


Рис. 1. Общий вид исследуемого МБПЛА типа "Скат" разработки РСК "МиГ"

- рабочего места оператора полезной нагрузки;
- информационно-управляющей системы с интерфейсными блоками;
- комплексной системы связи наземного пункта управления с беспилотными летательными аппаратами;
- модуля подготовки полетного задания;
- ◆ *мобильный, размещаемый на пилотируемом ЛА, пункт контроля, корректировки и управления полетом МБПЛА в составе:*
 - многофункциональных индикаторов с мнемокадрами навигационно-тактической информации, аэронавигационной карты и дистанционного управления траекторным маневрированием группы МБПЛА;
 - пульта управления режимами целеуказания и коррекции;
 - многофункциональной ручки, формирующей сигналы управления группой МБПЛА;
- ◆ *транспортно-пусковая система в составе:*
 - автотранспортного средства;
 - системы электроснабжения;
 - манипулятора;
 - стартового устройства и аэрофинишера, размещаемых на прицепе;
- ◆ *автоматизированная система обучения и тренажа операторов и технического персонала в составе:*
 - процедурного тренажера;
 - унифицированного специализированного тренажера.

Перечисленные составляющие ЭКУ МБПЛА электрически связаны между собой и конструктивно объединены в единую механическую, внешне защищенную, мобильную конструкцию пункта управления с возможностью обеспечения совместной и раздельной работы операторов по управлению ведущим и взаимодействующими беспилотными летательными аппаратами.

Интегрированный комплекс бортового оборудования БПЛА в составе своей функциональной архитектуры содержит:

- ✓ бортовой комплекс средств связи с ИНПУ и другими МБПЛА;
- ✓ систему ввода и хранения полетного задания;
- ✓ систему навигации;
- ✓ систему автоматического и автоматизированного управления полетом;
- ✓ систему автоматического управления силовой установкой;
- ✓ систему автоматического управления полезной нагрузкой;
- ✓ общесамолетные системы (СЭС, топливную, пневмо- и гидро- и т. п.)

Транспортно-пусковая система обеспечивает транспортировку, старт и посадку МБПЛА, а также осуществляет наземное обеспечение полетов.

Структура эргатического комплекса управления МБПЛА приведена на рис. 2.

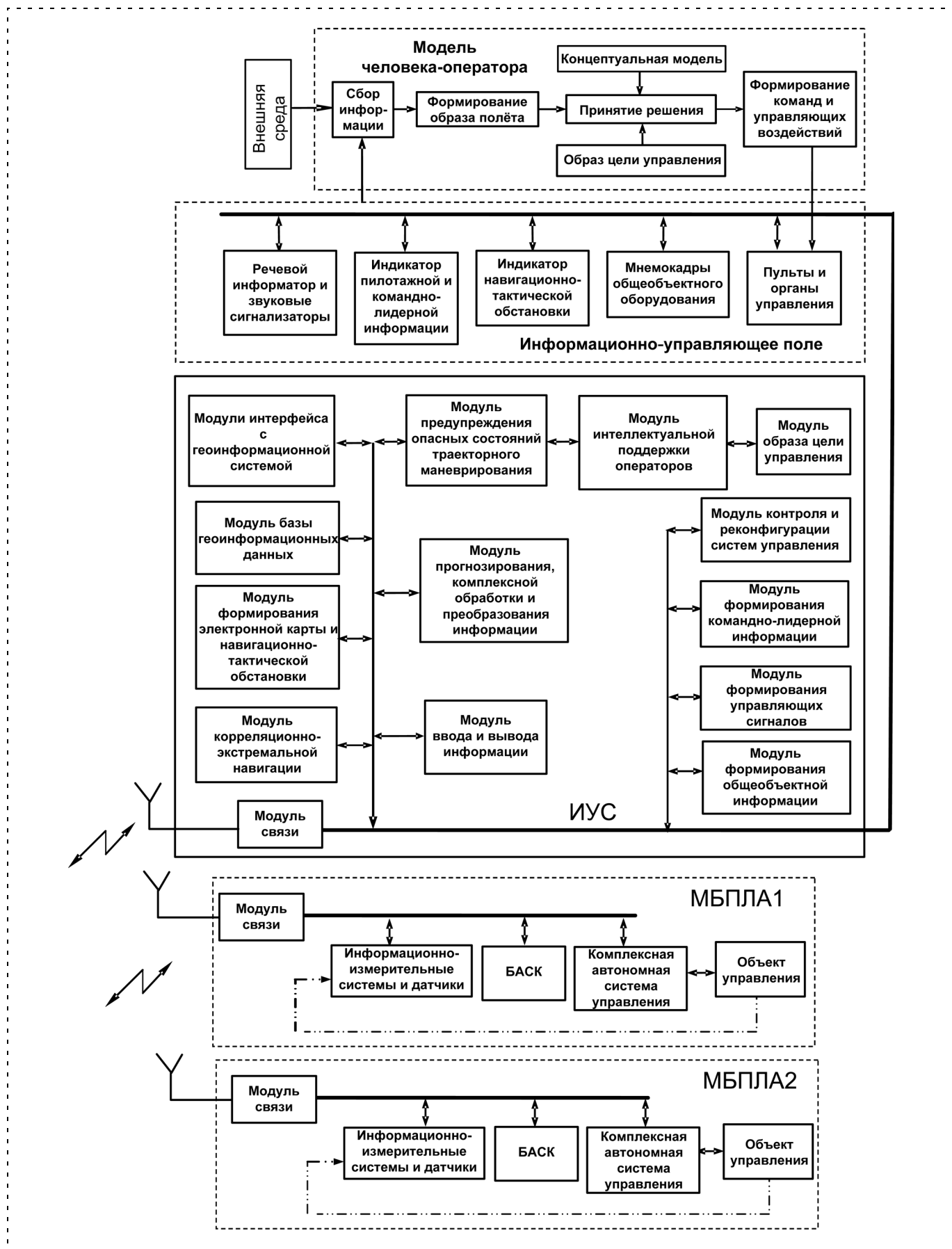


Рис. 2. Структура эргатического комплекса управления многоцелевыми беспилотными летательными аппаратами

ЭКУ МБПЛА обеспечивает:

- автоматизированное проведение предполетных и послеполетных операций по подготовке МБПЛА;
- автоматизированную подготовку полетного задания для МБПЛА;
- управление полетом одиночного МБПЛА или группы взаимодействующих МБПЛА на всех этапах полета от взлета до посадки;
- ручное автоматизированное управление отдельными МБПЛА (в случае необходимости) с помощью системы дистанционного командно-лидерного управления [1];
- тренировку операторов в условиях моделирования полета и применения летательных аппаратов.

Применение системы дистанционного командно-лидерного управления в составе ЭКУ МБПЛА, как ожидается, позволит повысить безаварийность и эффективность полетов, расширить возможности авиационного комплекса за счет создания новых информационно-управляющих полей (ИУП) операторов, позволяющих видеть одновременно главные пилотажные параметры, внешнюю обстановку и опасные состояния траекторного маневрирования и осуществлять эффективное управление группой МБПЛА в экстремальных условиях. Информационно-емкие ИУП позволят также формировать адекватные управляющие воздействия при полетах на режимах высокоточного маневрирования при заходе на посадку и посадке на необорудованные площадки в сложных условиях.

На режимах ручного автоматизированного управления оператор-летчик использует органы управления, в состав которых входят:

- ручка управления, формирующая сигналы по каналам тангажа и крена;
- педали, формирующие сигналы по каналу рыскания (курса);
- рычаг управления силовой установкой.

Вместо двухканальной ручки управления и педалей может быть применена трехступенная (трехканальная) ручка управления.

Пульт управления режимами содержит кнопки, кноппели и задатчики для обеспечения целеуказания, перемещения подвижной марки по дисплеям ИУП, привязки к месту посадки (ориентир), формирования сигналов заданного курса, высоты, скорости полета и курса виртуальной взлетно-посадочной полосы.

Кроме приведенных на рис. 2 модулей информационно-управляющая система (ИУС) может содержать также следующие программные модули:

- самолетовождения и диспетчеризации управления летательными аппаратами при групповом полете;
- эталонных моделей траекторного управления;
- формирования псевдообъемного отображения внешней обстановки;

- оценки опасных состояний и вывода МБПЛА из опасных состояний;
- подготовки полетного и тренировочного задания;
- коррекции полетной информации;
- построения виртуальной глиссады и посадки по виртуальной глиссаде;
- модуля обучающей информации.

Функционирование системы обеспечивается взаимодействием всех перечисленных программных модулей.

В состав комплекса МБПЛА кроме приведенных на рис. 2 модулей связи с наземным пунктом управления и со взаимодействующими летательными аппаратами могут входить телевизионная система, оптико-электронные визирные устройства, система автономной автоматической навигации, а также система автоматического управления полезной нагрузкой.

Функционально не выделенное на рис. 2 рабочее место оператора полезной нагрузки и управления тренировкой операторов содержит:

- ✓ многофункциональные индикаторы для отображения цифровой картографической, телевизионной и оптико-электронной информации, псевдообъемного отображения внешней визуальной обстановки и обучающей информации;
- ✓ пульт управления полезной нагрузкой;
- ✓ блок формирования полетного задания.

Для управления МБПЛА могут быть использованы следующие принципы: автономного управления, дистанционного пилотирования в особых случаях полета и эталонного маневрирования при изменении целевых задач, а также их комбинация.

Автономная система управления обеспечивает полет, возвращение и посадку МБПЛА по программе, введенной в бортовой комплекс перед вылетом.

Система дистанционного пилотирования используется как резервная и обеспечивает управление МБПЛА в случае проявления отказов в основной автономной (автоматической) системе управления. При этом под дистанционным пилотированием подразумевается как передача команд траекторного управления, так и непосредственное автоматизированное пилотирование в зависимости от внешних условий и характера отказов (повреждений) системы управления МБПЛА.

Для решения задач применения предполагается комбинированный способ управления, при котором МБПЛА следуют в район применения автономно, по программе, а в случае необходимости принятия решения на применение используют информационный канал для получения поддержки от оператора.

При формировании командно-лидерной информации использована концепция управления маневрированием с помощью единой системы управления вектором скорости, функционирующая в соответствии с целями управления за счет использования эталонных моделей полета и эталонов маневриро-

вания для решения различных задач в штатных и особых случаях полета. При этом эталоны маневрирования формируются как вычислителем наземного пункта управления, так и бортовым комплексом МБПЛА. С наземного пункта управления передается команда на изменение эталона управления.

При автономном маневрировании одной из актуальных задач является задача увода МБПЛА от столкновения с объектами рельефа местности. С этой целью на борту формируется заданный угол наклона траектории $\theta_{\text{зад}}$, значение которого определяется пересеченностью поверхности Земли (рельефа местности). Контур управления должен обеспечить отработку текущим углом наклона траектории θ заданного значения $\theta_{\text{зад}}$ с учетом ограничений на перегрузку n_y и угол атаки α БПЛА. При этом должны быть выполнены требования к качеству переходного процесса, а именно максимальное быстродействие и необходимый запас устойчивости системы.

Синтез контуров управления МБПЛА методом "характеристических полиномов" и "характеристических постоянных времени"

Метод "характеристических полиномов" и "характеристических постоянных времени" обеспечивает формирование законов управления и заданных величин при ограниченной информации о характеристиках проектируемого БПЛА, а также снижение затрат на синтез коэффициентов в законах управления. Если система с постоянными параметрами полностью управляема по входам f , то передаточная функция от любого входа f_j к любой координате вектора состояния x_i

$$\frac{x_i(p)}{f_j(p)} = \frac{E_{ij}(p)}{D(p)},$$

где p — параметр преобразования по Лапласу, содержит характеристический полином замкнутого контура управления $D(p)$. Числители $E_{ij}(p)$ зависят от точки приложения возмущения.

Поскольку на замкнутую систему действуют возмущения, приложенные к различным точкам контура управления, выбор параметров системы будем проводить только на основе рассмотрения характеристических параметров, вытекающих из характеристического полинома $D(p)$.

Характеристический полином (ХП) замкнутого контура управления линейной системы может быть представлен в виде

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

где n — порядок системы; a_i — коэффициенты характеристического полинома, $i = \overline{0, \dots, n}$.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести две формы характеристического полинома:

- правую, когда свободный член равен единице: $a_n = 1$;

- левую, в которой коэффициент при высшей степени оператора p равен единице: $a_0 = 1$.

Характеристические постоянные времени.

Поскольку размерность оператора производной $p = d/dt \text{ с}^{-1}$, то из структуры характеристического полинома следует, что отношение соседних коэффициентов a_i и a_{i+1} имеет размерность времени. Введем понятие массива T_i характеристических постоянных времени (ХПВ):

$$T_i = \frac{a_i}{a_{i+1}} \quad (i = \overline{0, \dots, n-1}).$$

Очевидно, что размерность T_i массива равна порядку системы n . Будем считать, что расположение ХПВ является *нормальным*, если большему номеру элемента массива соответствует большая постоянная времени.

При нормальном расположении ХПВ наименьшая постоянная времени T_0 характеризует внутренний контур, а наибольшая ХПВ T_{n-1} характеризует внешний контур и быстродействие всей системы. Если свободный член равен единице ($a_n = 1$), то коэффициенты ХП равны произведению характеристических постоянных времени (ХПВ):

$$a_i = \prod_{j=0}^{n-1} T_j.$$

Расчет коэффициентов ХП по известным ХПВ выполняется следующим образом:

- для правой формы ХП: $a_n = 1$, $a_i = T_i a_{i+1}$;
- для левой формы ХП: $a_0 = 1$, $a_{i+1} = \frac{a_i}{T_i}$.

Анализ систем высокого порядка ($n > 4$) ведется методом аппроксимации ХП совокупностью полиномов, каждый из которых имеет меньший порядок. Например, систему 6-го порядка можно аппроксимировать тремя подсистемами 4-го порядка. Первая подсистема содержит группу левых ХПВ исходной системы T_i ($i = \overline{0, \dots, 3}$) и аппроксимирует быстрые движения, а третья (внешняя) подсистема содержит группу правых ХПВ исходной системы T_i ($i = \overline{2, \dots, 5}$) и аппроксимирует движения выходной координаты, в частности время процесса и перерегулирование.

Для типового летательного аппарата пара меньших постоянных времени T_0 и T_1 характеризует внутренний контур второго порядка, а пара больших T_{n-2} , T_{n-1} — внешний контур 2-го порядка, которые в общем случае представляют собой колебательные звенья.

Анализ устойчивости замкнутого контура и качества переходных процессов приводит к необходимости введения безразмерных характеристических параметров, равных расстоянию между сосед-

ними характеристическими временами: $C_i = \frac{T_{i+1}}{T_i}$,
 $i = \overline{0, \dots, n-2}$.

Очевидно, что размерность множества C_i на единицу меньше порядка системы и равна $n - 1$. При заданном множестве C_i задача синтеза (обратная задача) решается с помощью соотношений

$$T_{i+1} = T_i C_i (i = \overline{0, \dots, n-2}),$$

если известна наименьшая ХПВ T_0 , и соотношений

$$T_i = T_{i+1}/C_i (i = n-2, \dots, 0),$$

если известна наибольшая ХПВ T_{n-1} .

В этом случае могут быть полностью определены характеристические параметры, в том числе коэффициенты ХПВ, а значит, и структура замкнутого контура управления.

Запас устойчивости (z_u) по произвольному параметру q определяется как соотношение предельного значения параметра q_{\max} или q_{\min} к текущему его значению. Если на границу устойчивости системы выводит рост параметра q , то запас устойчивости определяется из выражения $z_u = q_{\max}/q$; если же на границу устойчивости выводит уменьшение этого параметра, то запас устойчивости находится из выражения $z_u = q/q_{\min}$. Следовательно, для устойчивых систем запас устойчивости есть число, превышающее единицу.

Для системы 4-го порядка границу устойчивости, исходя из определителя Гурвица, дает условие:

$$\Gamma = \frac{1}{C_{20}} + \frac{1}{C_{31}},$$

где $C_{20} = \frac{T_2}{T}$ и $C_{31} = \frac{T_3}{T_1}$ — отношение постоянных времени.

Запас устойчивости определяется формулой

$$z_{u03} = \frac{1}{1/C_{20} + 1/C_{31}}.$$

Если все участки имеют равные длины $C_i = L$, то $C_{20} = C_{31} = 2L$, и запас устойчивости равен длине участка: $z_u = L$. В частности, двукратный запас устойчивости обеспечивает система с расположением ХПВ через одну октаву ($L = 2$), а запас устойчивости, равный $z_u = 2,5$, обеспечивает система с расстояниями между ХПВ $L = 2,5$.

Расчет запаса устойчивости систем высокого порядка ($n > 4$) определяется как минимальный из запасов устойчивости подсистем 4-го порядка:

$$z_{u06} = \min(z_{u03}, z_{u14}, z_{u26}).$$

Сопоставление характеристического полинома системы второго порядка

$$D(p) = T_0 p^2 + T_1 p + 1$$

с обычным представлением колебательного звена

$$D(p) = T^2 p^2 + 2\xi T p + 1,$$

где T — постоянная времени, ξ — коэффициент демпфирования, позволяет сделать вывод, что для уменьшения перерегулирования по выходной координате в системах высокого порядка длину правого участка (т. е. в области больших постоянных времени) целесообразно увеличить до значений $C_e = C_{n-2} = 2,3 \dots 2,5$, соответствующих коэффициенту затухания ξ более 0,8.

Структурная схема линеаризованного контура управления углом наклона траектории. Решение большого числа задач управления траекторией может быть осуществлено за счет выдерживания заданного угла наклона траектории. Управление углом наклона траектории позволяет решить как задачу стабилизации заданной (постоянной) высоты полета, так и задачу управления высотой полета (стабилизации изменяющейся высоты полета). В частности, актуальной является задача удаления БПЛА от поверхности Земли (в целях предотвращения столкновения), именуемая в дальнейшем "задачей увода БПЛА".

При выполнении логического условия увода формируется заданный угол наклона траектории $\theta_{\text{зад}}$. Контур управления должен обеспечить отработку заданного значения $\theta_{\text{зад}}$ с учетом ограничений на перегрузку n_y и угол атаки α БПЛА. При этом должны быть выполнены требования к качеству переходного процесса, а именно требования к максимальному быстродействию и необходимому запасу устойчивости системы.

Рассмотрим некоторые особенности контура управления углом наклона траектории. Линеаризованное уравнение моментов БПЛА в отклонениях может быть представлено в виде

$$\dot{\omega}_z = -a_{m_z}^{\omega_z} \omega_z - a_{m_z}^{\alpha} \alpha - a_{m_z}^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + a_{m_z}^{\delta_B} \delta_B,$$

где ω_z — угловая скорость относительно связанной оси БПЛА OZ ; α — отклонение угла атаки от балансировочного положения; $\dot{\alpha}$ — производная угла атаки (скос потока); δ_B — отклонение руля высоты от балансировочного положения.

Известно, что коэффициенты $a_{m_z}^{\omega_z}$, $a_{m_z}^{\alpha}$, $a_{m_z}^{\dot{\alpha}}$, $a_{m_z}^{\delta_B}$ являются переменными по режимам полета. Линеаризованная связь между отклонением угла атаки и приращением может быть представлена в виде $n_y = n_y^{\alpha} \alpha$.

Связь между отклонением угла атаки и угловой скоростью может быть выражена зависимостью

$$\alpha = \omega_z / (p + b_{\alpha}),$$

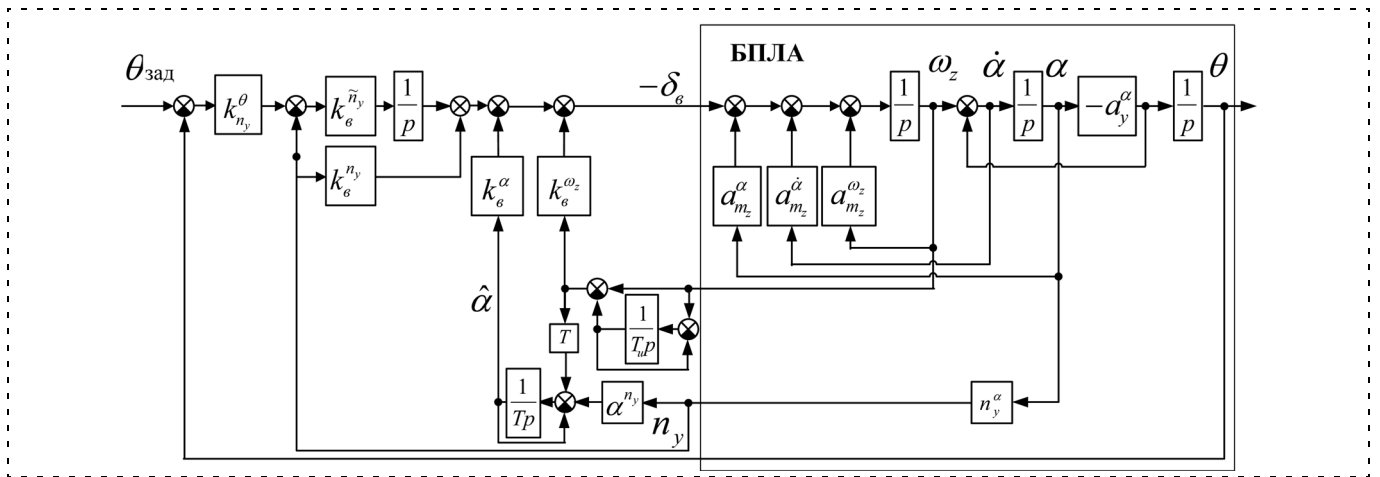


Рис. 3. Замкнутый контур управления углом наклона траектории θ

где коэффициент $b_\alpha = \frac{n_y^\alpha V}{g}$, а его обратная величина $T_\alpha = \frac{1}{b_\alpha}$ является постоянной времени, характеризующей динамическую связь между угловыми скоростями связанной ω_z и скоростной ω_{za} систем координат:

$$\omega_{za} = \frac{1}{T_\alpha p + 1} \omega_z$$

(p — оператор дифференцирования).

При отсутствии крена $\dot{\theta} = \omega_{za}$. Постоянная времени также зависит от режима полета.

Закон управления в случае управления углом наклона траектории может быть записан в виде

$$\delta_{в.зад} = -k_B^{\omega_z} \omega_z - k_B^\alpha \alpha + \delta_{в.т},$$

где $k_B^{\omega_z}$, k_B^α — коэффициенты закона управления.

Вспомогательный сигнал $\delta_{в.т}$ сформирован из заданной $n_{узад}$ и текущей n_y перегрузок, включает пропорциональную и интегральную составляющие:

$$\delta_{в.т} = \frac{\tilde{n}_y}{p} (n_{узад} - n_y) - k_B^{n_y} n_y.$$

Заданная перегрузка определяется в соответствии с назначением замкнутой системы как рассогласование между заданным и текущим углами наклона траектории:

$$n_{узад} = k_{n_y}^\theta (\theta_{зад} - \theta).$$

Использование приведенных зависимостей позволяет получить структурную схему контура управления, приведенную на рис. 3. Система имеет шестой порядок в соответствии с числом интеграторов в контуре.

Синтез замкнутого контура управления углом наклона траектории. Для удобства объяснения методики синтеза контура управления введем следующие упрощения:

- отклонение органов управления БПЛА примем в масштабе отклонения угла атаки;
- в задаче синтеза влияние скоса потока рассматривать не будем (оценку перенесем на этап моделирования);
- влияние привода рассмотрим на следующем этапе, что позволяет объединить естественные ($-a_{m_z}^{\omega_z} \omega_z - a_{m_z}^\alpha \alpha$) и искусственные ($-k_B^{\omega_z} \omega_z - k_B^\alpha \alpha$) обратные связи по угловой скорости и углу атаки;
- шумы датчиков учитывать не будем, оценку угла атаки $\hat{\alpha}$ примем равной углу атаки.

В этом случае порядок замкнутого контура управления снизится до четвертого.

Синтез контура управления высотой полета на режиме автоматического увода БПЛА от опасного сближения с Землей может быть выполнен следующим образом.

Прежде всего, необходимо получить характеристический портрет системы, а именно наименьшее (опорное) значение ХПВ исходя из характеристик системы управления с приводами рулевых органов с учетом нелинейностей, обеспечивающей запас устойчивости и необходимое качество демпфирования в условиях наличия изгибных колебаний конструкции БПЛА.

Рассмотрим высокочастотную часть контура, исключив интегралы угла наклона траектории и заданной перегрузки и сохранив суммарные обратные связи по угловой скорости и углу атаки.

Аппроксимируя сервопривод системы управления колебательным звеном вида

$$W_{пр}(p) = \frac{1}{a_0^{пр} p^2 + a_1^{пр} p + 1},$$

получим характеристический полином 4-го порядка, коэффициенты которого равны

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^{\text{пр}}; \\ a_1 &= a_0^{\text{пр}}(S1 + S1_{\text{зад}}) + T_1^{\text{пр}}; \\ a_2 &= a_0^{\text{пр}}(S2 + S2_{\text{зад}}) + T_1^{\text{пр}}(S1 + S1_{\text{зад}}) + 1; \\ a_3 &= T_1^{\text{пр}}(S2 + S2_{\text{зад}}) + S1 + S1_{\text{зад}}; \\ a_4 &= S2 + S2_{\text{зад}}, \end{aligned}$$

где $a_0^{\text{пр}} = T_0^{\text{пр}} T_1^{\text{пр}}$; $S1 = b_\alpha + a_{m_z}^{\omega_z}$; $S2 = a_{m_z}^\alpha + b_\alpha a_{m_z}^{\omega_z}$;
 $S1_{\text{зад}} = a_{m_z}^{\delta_B} k_B^{\omega_z}$; $S2_{\text{зад}} = a_{m_z}^{\delta_B} (k_B^\alpha + b_\alpha k_B^{\omega_z})$.

Если принять числовые значения параметров САУ с приводом и объекта следующими: $T_0^{\text{пр}} = 0,05$;

$T_1^{\text{пр}} = 0,11$; $b_\alpha = 1$; $\alpha^{n_y} = 2,5$, то в результате расчетов получим:

- характеристические времена $T = \{0,0444; 0,0956; 0,217; 0,5\}$;
- участки $C = \{2,15; 2,27; 2,30\}$;
- запас устойчивости $z_u = 1/(T_0/T_2 + T_1/T_3) = 2,53$.

Для синтеза контура управления уводом в области низких частот будем использовать в качестве наименьшей ХПВ среднее значение между наибольшими ХПВ (0,217; 0,5), полученными в области высоких частот, которое положим равным $T_0 = 0,25$ с, при этом полагаем, что $a_0 = 1$.

Расстояниями между соседними характеристическими временами (длиной трех участков) задаемся исходя из желаемого запаса устойчивости и требования к величине перерегулирования, например, $C = \{2,25; 2,25; 2,4\}$. Такой выбор позволяет получить запас устойчивости $z_u = 2,25$ и перерегулирование порядка 5 %.

Расчет характеристических времен выполняется по общей формуле (6) и дает множество $T = \{0,25; 0,5625; 1,27; 3,04\}$.

Далее из выражения (4) могут быть рассчитаны соответствующие коэффициенты характеристического полинома замкнутого контура, что дает множество $a = \{1,0; 4,0; 7,1; 5,62; 1,85\}$. Характеристи-

ческий портрет замкнутой системы полностью определен.

Структурная схема желаемого замкнутого контура управления высотой в маловысотном полете представлена на рис. 4.

Замыкание контура управления перегрузкой позволяет получить выражение для передаточной функции от заданной перегрузки к текущей в виде

$$W_{n_y}^{n_y \text{ зад}}(p) = \frac{k_B^{n_y} n_y^\alpha a_{m_z}^\alpha}{p \left((p + a_{m_z}^{\omega_z})(p + b_\alpha) + a_{m_z}^{\alpha*} \right) + k_B^{n_y} n_y^\alpha a_{m_z}^\alpha}.$$

Если не учитывать динамику привода, то замыкание контура управления углом наклона траектории приводит к характеристическому полиному системы 3-го порядка, в котором

$$a_1 = a_{m_z}^{\omega_z*} + b_\alpha; a_2 = a_{m_z}^{\alpha*} + a_{m_z}^{\omega_z*} b_\alpha; a_3 = k_B^{n_y} n_y^\alpha / a_{m_z}^\alpha.$$

Для управляемой переменной $T_3 = V/(gk_{n_y}^\theta)$.

Результатом синтеза являются выражения для коэффициентов закона управления, полученные из предыдущих равенств:

$$a_{m_z}^{\omega_z*} = a_1 - b_\alpha; a_{m_z}^{\alpha*} = a_2 - a_{m_z}^{\omega_z*} b_\alpha;$$

$$k_B^{n_y} = \frac{a_3}{n_y^\alpha a_{m_z}^\alpha}; k_{n_y}^\theta = \frac{V}{gT_3}.$$

Для получения числовых значений требуется знание параметров объекта, например,

$$T_\alpha = 1; b_\alpha = 1/T_\alpha; n_y^\alpha = 0,4;$$

тогда $a_{m_z}^{\omega_z*} = 3$; $a_{m_z}^{\alpha*} = 4,11$; $a_{m_z}^\alpha = 0,072$; $k_B^\alpha = 1,3$;

$k_B^{n_y} = 3,42$; $k_{n_y}^\theta = 6,71$.

Исключение из полученной суммы естественных обратных связей по угловой скорости и углу атаки, присущих данному объекту, а также коррекция

с учетом соотношения эффективностей $\frac{a_{m_z}^{\alpha*}}{a_{m_z}^\alpha}$ (на

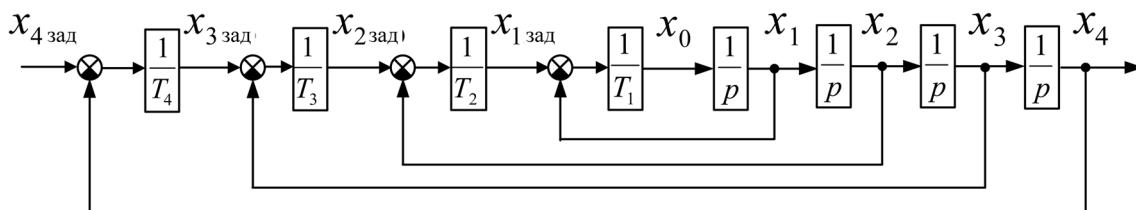


Рис. 4. Структурная схема желаемого замкнутого контура управления высотой в маловысотном полете

предыдущих этапах предполагалось $a_{m_z}^{\alpha*} = a_{m_z}^{\delta_B} a_{m_z}^{\alpha}$) дают параметры закона управления, которые должны быть реализованы в законе управления.

Ограничение перегрузки и угла атаки БПЛА. Процесс увода выполняется большую часть времени на предельной для режима автоматического управления перегрузке, а на малых скоростях — на предельном угле атаки. В целях ограничения перегрузки и угла атаки на заданную перегрузку накладывается ограничение:

$$n_{y\max}^{ay} = \max[\min[(n_y^{\text{доп}} - 1)K_{\text{САУ}} + 1], 4), 1.2],$$

где $n_y^{\text{доп}}$ — допустимая нормальная перегрузка БПЛА; $n_{y\max}^{ay}$ — максимальная нормальная перегрузка автоматического управления; $K_{\text{САУ}}$ — отношение хода органа управления углом тангажа ($OУ_9$) на кабрирование к его полному ходу.

Задача предупреждения столкновения и увода от препятствия должна решаться из любого пространственного положения БПЛА. В связи с этим требованием переходим от линейной задачи к нелинейной, используя рассчитанные ранее ХПВ и передаточные числа. Заданная перегрузка может быть сформирована следующим образом.

В зоне углов по крену $\gamma = \pm 70^\circ$ ($\cos\gamma > 0,3$):

$$n_y^{\text{зад}} = \left(\frac{V_a}{T_3 g} (\theta_{\text{зад}} - \theta) + \cos\theta \right) \frac{1}{\cos\gamma},$$

где $\theta_{\text{зад}}$ — заданный угол наклона траектории, зависящий от пересеченности рельефа; θ — текущий угол наклона траектории; V_a — скорость полета; T_3 — характеристическая постоянная времени.

В зоне углов крена, близких к перевернутому положению ($\cos\gamma \leq 0,3$), заданная перегрузка задается равной единице: $n_y^{\text{зад}} = 1,0$.

Таким образом, синтез контура управления высотой полета на режиме автоматического увода БПЛА от опасного сближения с Землей с учетом ограничений перегрузки и угла атаки завершен. Предложенная методика позволяет легко расширить контур для управления высотой полета и обеспечить астатизм управления за счет использования интегралов по перегрузке и высоте полета, что позволяет говорить о возможности автономного автоматического полета БПЛА и повышения уровня интеллекта КБО за счет решения задачи предотвращения столкновения с рельефом и, в общем случае, с любыми объектами, обнаруженными бортовыми обзорно-прицельными системами.

Здесь предполагается, что автоматический контур увода БПЛА работает либо автономно, либо совместно с контуром автоматизированного дистан-

ционного управления, обеспечивая безопасность полета за счет не зависящего от оператора вмешательства в управление при наличии опасного сближения с препятствиями или другими ЛА. Актуальной является задача удаления БПЛА от поверхности Земли (в целях предотвращения столкновения), именуемая в дальнейшем "задачей увода БПЛА".

Формирование логического признака "увод" может быть реализовано с использованием пространственной модели траекторного движения БПЛА для прогноза траектории на заданный интервал времени вперед и базы геоинформационных данных, позволяющей восстановить поле высот рельефа местности в окрестности прогнозируемой траектории движения БПЛА. При выполнении условия опасного сближения прогнозируемой траектории с земной поверхностью формируется заданный угол наклона траектории $\theta_{\text{зад}}$, значение которого определяется пересеченностью поверхности Земли (рельефа местности).

Ключевыми моментами в данном случае являются: точность определения траекторных параметров движения БПЛА, вычислительная экономичность модели движения для прогноза траектории на заданный интервал времени вперед и база геоинформационных данных.

В качестве модели прогноза траекторного движения ЛА могут быть использованы аналитические модели, получаемые при фиксации текущих векторов перегрузки и угловой скорости вращения БПЛА. Так, если фиксируются векторы в связанной системе координат, то мы получаем так называемый спиральный прогноз, который дает следующие расчетные соотношения для координат местоположения БПЛА:

$$\begin{bmatrix} x_{gc}(t) \\ y_{gc}(t) \\ z_{gc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{gc}(t_0) \\ y_{gc}(t_0) \\ z_{gc}(t_0) \end{bmatrix} + \varepsilon(t_0) \left\{ \begin{bmatrix} V_{kx}(t_0) \\ V_{ky}(t_0) \\ V_{kz}(t_0) \end{bmatrix} \Delta t - \right.$$

$$\left. - 0,5g\Delta t^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{21}(t_0) \\ \varepsilon_{22}(t_0) \\ \varepsilon_{23}(t_0) \end{bmatrix} + gF_2(t) \begin{bmatrix} n_x(t_0) \\ n_y(t_0) \\ n_z(t_0) \end{bmatrix} \right\},$$

$$F_2(t) = 0,5\Delta t^2 E - \left(\frac{1 - \cos(|\omega|\Delta t)}{|\omega|^2} \right) \Omega + \frac{1}{|\omega|^2} \left((0,5\Delta t^2 - \frac{1 - \cos(|\omega|\Delta t)}{|\omega|^2}) \Omega^2 \right).$$

Здесь E — единичная (3×3)-матрица; $[x_{gc}(t) \ y_{gc}(t) \ z_{gc}(t)]^T$ — вектор линейных координат центра масс БПЛА в прямоугольной системе координат базы геоинформационных данных;

$[V_{kx}(t_0) V_{ky}(t_0) V_{kz}(t_0)]^T$ — вектор скорости поступательного движения объекта в проекции на оси связанной системы координат; t_0 — текущий момент времени (начало прогноза); Δt — интервал прогнозирования; $[n_x(t) n_y(t) n_z(t)]^T$ — вектор перегрузки БПЛА в проекциях на оси связанной системы координат; g — ускорение силы тяжести; ω — модуль угловой скорости вращения в связанных осях; $\varepsilon(t_0)$ — матрица направляющих косинусов перехода от системы координат базы геоинформационных данных к связанной; Ω — матрица Пуассона, составленная из компонент вектора угловой скорости вращения:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Другим возможным вариантом модели прогноза может быть так называемый траекторный прогноз, полученный при аналогичных предположениях, но относительно проекций векторов перегрузки и угловой скорости вращения в траекторной системе координат [7, 8].

Для дистанционного командно-лидерного управления в особых случаях полета и обеспечения эта-

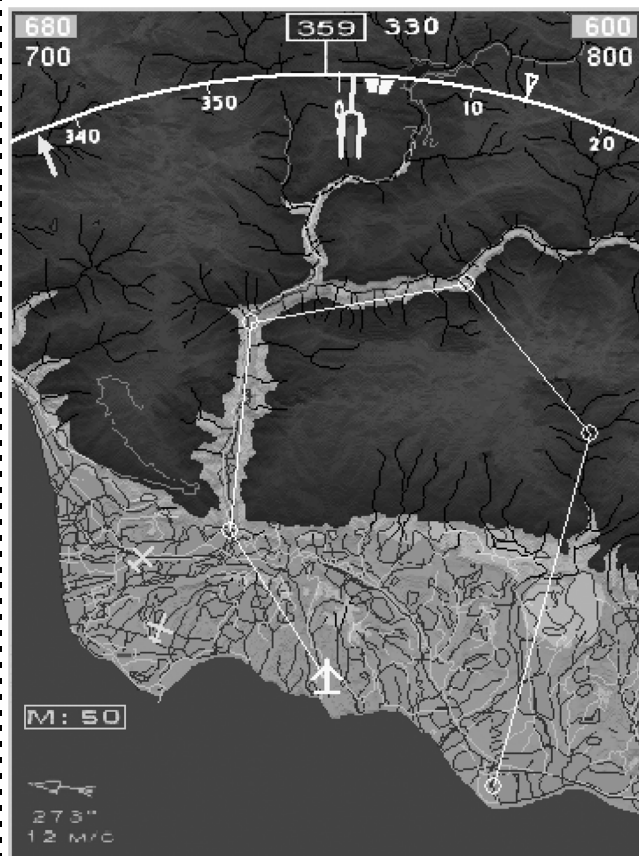


Рис. 6. Навигационный индикатор с аэронавигационной картой и псевдообъемным изображением рельефа местности

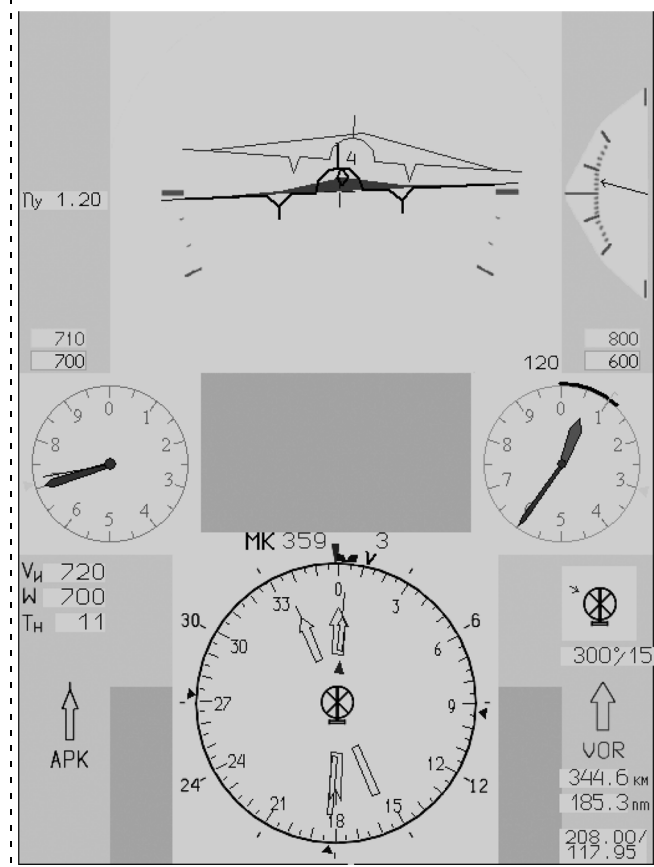


Рис. 5. Пилотажный индикатор для режимов траекторного управления МБПЛА, целеуказания, захода на посадку и посадки

лонного маневрирования при изменении целевых задач в ИУС комплекса предлагается использовать эргатический интерфейс, содержащий информационные кадры рабочих мест операторов:

- пилотажного индикатора для режимов траекторного управления БПЛА, целеуказания, захода на посадку и посадки (рис. 5);
- навигационного индикатора, на котором отображена аэронавигационная карта с псевдообъемным изображением рельефа местности в зоне полета МБПЛА (рис. 6);
- мнемокадра общеобъектного оборудования МБПЛА (рис. 7),

которые дают возможность одновременно видеть главные пилотажные параметры, внешнюю обстановку и опасные состояния траекторного маневрирования и позволяют оператору формировать адекватные управляющие воздействия при полетах в режимах высокоточного маневрирования в мало-высотном полете над сложным рельефом местности, захода на посадку и посадки на необорудованное место посадки в сложных условиях, обеспечить управление групповым взаимодействием МБПЛА, обеспечить оперативный маневр применением МБПЛА, а также позволяют контролировать ис-

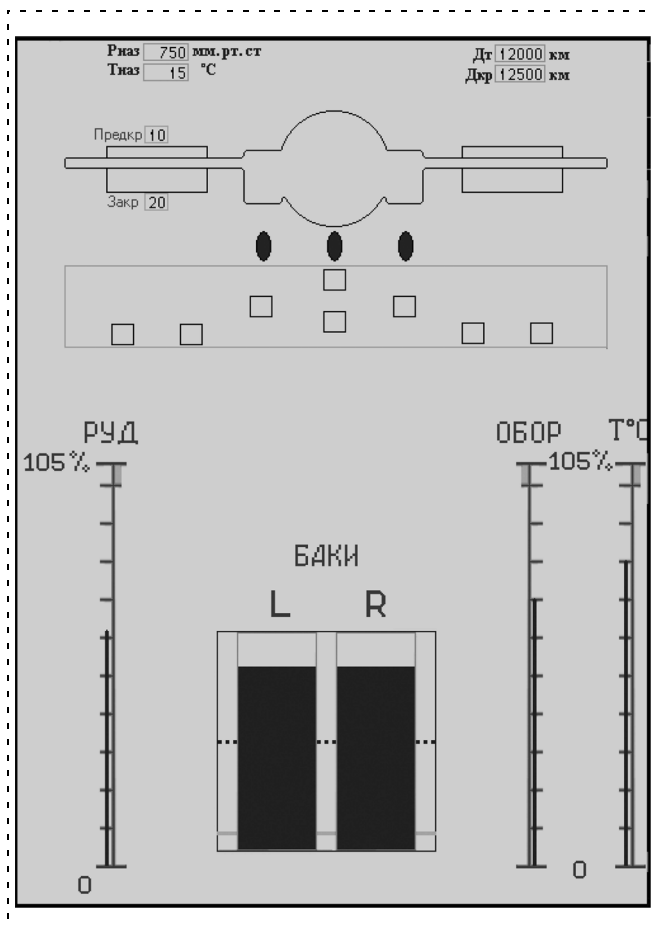


Рис. 7. Мнемокадр общесамолетного оборудования БПЛА

правность и правильность функционирования бортовых комплексов МБПЛА (обнаруживать сбои в алгоритмическом и программном обеспечении) на протяжении всего этапа применения МБПЛА.

Использование исходных картографических данных в формате геоинформационной системы (ГИС) "Интеграция" позволяет оперативно подготовить бортовую цифровую модель рельефа района. Применение слоев для хранения и вывода картографической информации дает возможность изменения генерализации отображения карты как при смене масштаба карты, так и принудительно по требованию оператора. Моделирование местности с использованием ГИС позволяет проводить отработку навыков управления ЛА применительно к конкретному району местности.

Для периодической коррекции координат местоположения беспилотного летательного аппарата в его бортовом комплексе необходимо иметь *модуль корреляционно-экстремальной навигации (КЭН)* по полю высот рельефа местности по совокупности измерений бортовыми датчиками абсолютной и геометрической высот полета и бортовой цифровой матрицы высот рельефа местности района полетов [1].

В контур КЭН входят следующие структурные единицы комплекса бортового оборудования МБПЛА, имеющие цифровой выход по измеряемым (определяемым) параметрам:

- "грубая" навигационная система, определяющая координаты местоположения МБПЛА с позиционными (и, возможно, со скоростными) ошибками;
- система воздушных сигналов, измеряющая абсолютную высоту полета МБПЛА и вертикальную скорость;
- радиовысотомер, измеряющий геометрическую высоту полета МБПЛА (стереоскопическая оптическая система измерения геометрической высоты полета);
- гироскопические датчики, измеряющие углы крена и тангажа МБПЛА.

Аппаратные вычислительные средства контура КЭН включают в себя:

- специализированный вычислитель, быстродействие которого обеспечивает реализацию алгоритма КЭН в реальном масштабе времени;
- внешнее запоминающее устройство большой емкости для хранения матрицы высот рельефа местности в районе полетов (из состава бортовой геоинформационной системы);
- линии связи, обеспечивающие информационный обмен с заданной плотностью потока данных.

Для каждого боевого беспилотного авиационного комплекса и особенно для МБПЛА в современных условиях приобретает первостепенное значение защитная функция, которая должна решаться активным методом на основе боевого противодействия. Защита должна быть построена на базе своевременного обнаружения ракетного нападения и активного поражения атакующей ракеты. Только такой вид авиационной противоракетной обороны может рассматриваться как один из базовых факторов, определяющих живучесть проектируемых МБПЛА. Доминирующими параметрами активной защиты становятся информационное обеспечение данными об окружающей обстановке и эффективность боевых средств защиты.

Результаты экспериментальных исследований

В соответствии с разработанной методологией исследований и эргономического сопровождения жизненного цикла эргатических комплексов управления БПЛА проведены экспериментальные исследования на диалоговом моделирующем стенде.

Результаты моделирования контура управления выводом маневренного самолета из опасного состояния столкновения с горным рельефом местности и полетом над сглаженным рельефом на заданной безопасной высоте с использованием картографической информации, а также высокоточным маневрированием в маловысотном полете подтвер-

ждают целесообразность создания и использования предлагаемого метода синтеза и использования его при разработке комплекса управления.

Проведена сравнительная оценка систем автоматизированного управления на режимах высокоточного маневрирования на этапе посадки в условиях наличия бокового ветра и при ограниченных размерах посадочной площадки. Посадка с аэрофинишером сокращает длину пробега с 500 до 50 м.

Список литературы

1. Сильвестров М. М., Бегичев Ю. И., Варочко А. Г., Чернышов В. А. и др. Эргатические интегрированные комплексы летательных аппаратов / Под ред. М. М. Сильвестрова. М.: Фиалил Воениздата, 2007. 510 с.
2. Чернышов В. А., Сильвестров М. М. Методология создания и концепция построения эргатического интегрированного комплекса управления многофункционального маневренного самолета / Под ред. М. М. Сильвестрова. Тверь: Триада, 2009. 216 с.

3. Буков В. Н., Сильвестров М. М., Бегичев Ю. И. Принципы и архитектура эргатических интегрированных комплексов управления беспилотными летательными аппаратами. Человеческий фактор в авиации и космонавтике: подготовка кадров // Сб. науч. тр. / Под ред. А. А. Меденкова. М.: Полет, 2008. С. 6—13.

4. Сильвестров М. М., Чернышов В. А. Современная методология и концептуальные основы построения эргатического интегрированного комплекса управления многоцелевого маневренного самолета // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 7. С. 53—62.

5. Управление и поведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М. Н. Красильщикова и Г. Г. Себрякова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

6. Исламов В. Беспилотники: сто лет в воздухе // Независимое военное обозрение. № 32 (583). 11—17 сентября 2009.

7. Красовский А. А. Метод быстрого численного интегрирования одного класса динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. № 1.

8. Наумов А. И. Применение аналитических прогнозирующих моделей в системах управления летательных аппаратов и авиационных тренажерах // Автоматика и телемеханика. 2001. № 7. С. 178—187.

УДК 301.15.15.07.02

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц.,
ИПТМУ РАН, г. Саратов
iptmuran@san.ru

Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS -переменных

С помощью принципа максимума Понтрягина в KS -переменных решаются задачи о мягкой и жесткой встречах двух космических аппаратов. Функционал, определяющий качество процесса управления, учитывает время процесса и интегральную величину импульсов тяги. С использованием предельного перехода строится решение для задачи с импульсной тягой. Приводятся результаты расчета оптимальных управлений для вывода аппарата с импульсной тягой на заданную некомпланарную орбиту.

Ключевые слова: оптимальное управление, космический аппарат, ограниченная и импульсная тяга, мягкая и жесткая встречи, переменные Кустаанхеймо-Штифеля

Постановка задачи

В [1] были введены новые переменные Кустаанхеймо-Штифеля, в которых движение точки в поле гравитации при отсутствии возмущений описывается системой линейных дифференциальных уравнений. В этих переменных [2] решена задача оптимального управления о встрече космических аппаратов в линейной постановке, когда в начальный момент аппараты находятся близко друг к другу. Надо отметить, что задачи оптимального управления движением космических аппаратов рассмат-

ривались многими авторами, в частности в [3]. Но в этих работах использовались переменные векторы положения и скорости. Применение переменных Кустаанхеймо-Штифеля позволяет создать более эффективные алгоритмы для решения краевых задач, к которым принцип максимума Понтрягина сводит решение задач оптимального управления.

Движение КА с массой m под действием силы гравитационного притяжения к центру с массой M и управляющей силы mp рассматривается в инерциальной системе координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой совпадает с центром притяжения. В этой системе координат положение центра масс КА определяется вектором* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, скорость — вектором $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, управляющая сила, отнесенная к единице массы КА, — вектором $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Для регуляризации уравнений движения используются переменные Кустаанхеймо-Штифеля (KS -переменные) $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$, которые связаны с векторами \mathbf{x} и \mathbf{v} соотношениями [1, 2]

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{u}; \quad \mathbf{v} = \frac{2}{r} \mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{s}; \quad r = |\mathbf{x}| = u^2,$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{vmatrix}$; T — знак транспонирования.

* Здесь и далее векторы набраны полужирным шрифтом, а их модули — светлым шрифтом (если \mathbf{x} — вектор, то $x = |\mathbf{x}|$).

Переменная h определяет полную энергию единицы массы КА

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\gamma M}{r},$$

где γ — гравитационная постоянная. Переменная τ связана со временем t соотношением

$$\frac{dt}{d\tau} = u^2. \quad (1)$$

На управляющий вектор \mathbf{p} налагается ограничение

$$|\mathbf{p}| \leq p_{\max}. \quad (2)$$

Неуправляемый аппарат A движется по эллиптической орбите под действием силы гравитационного притяжения к центру M . Ставится задача об оптимальном управлении движением КА, которое обеспечивает мягкую или жесткую встречу, в зависимости от варианта задачи, с неуправляемым аппаратом A и сообщает минимальное значение функционалу

$$I = \int_0^{t_k} (\alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{p}|) dt, \quad \alpha_i = \text{const} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где t_k — конечный момент времени, который заранее не задается.

Если обозначить R — характерное расстояние в области движения КА, то можно ввести безразмерные переменные и параметры \mathbf{u}^* , \mathbf{s}^* , h^* , τ^* , t^* , \mathbf{p}^* , α_2^* , p_{\max}^* по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= R^{1/2} \mathbf{u}^*; \quad \mathbf{s} = (\gamma M)^{1/2} \mathbf{s}^*; \quad h = \frac{\gamma M}{R} h^*; \\ \tau &= \left(\frac{R}{\gamma M}\right)^{1/2} \tau^*; \quad t = R \left(\frac{R}{\gamma M}\right)^{1/2} t^*; \quad \mathbf{p} = \frac{\gamma M}{R^2} \mathbf{p}^*; \\ \alpha_2 &= \frac{R^2}{\gamma M} \alpha_2^*; \quad p_{\max} = \frac{\gamma M}{R^2} p_{\max}^*. \end{aligned}$$

Далее будут использоваться только безразмерные величины, верхний индекс "*" над которыми опускается. Движение неуправляемого аппарата A в безразмерных KS -переменных определяется через новую независимую переменную τ_A соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_A &= \mathbf{C} \cos(k\tau_A) + \mathbf{D} \sin(k\tau_A); \\ \mathbf{s}_A &= k(\mathbf{D} \cos(k\tau_A) - \mathbf{C} \sin(k\tau_A)); \\ k &= \left(-\frac{1}{2} h_A\right)^{1/2}; \quad h_A = -(C^2 + D^2)^{-1} < 0; \\ t &= \int_{\tau_{Aн}}^{\tau_A} (\mathbf{u}_A)^2 d\tau_A; \quad \tau_A \geq \tau_{Aн}; \quad \mathbf{C} = \text{const}; \quad \mathbf{D} = \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения движения управляемого КА с учетом τ_A в безразмерных KS -переменных можно записать в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \mathbf{s}; \quad \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = \frac{1}{2} h\mathbf{u} + \frac{1}{2} u^2 \mathbf{P}(\mathbf{u})\mathbf{p}; \\ \frac{dh}{d\tau} &= 2(\mathbf{s}, \mathbf{P}(\mathbf{u})\mathbf{p}); \quad \frac{d\tau_A}{d\tau} = \frac{u^2}{(\mathbf{u}_A(\tau_A))^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее уравнение в системе (5) устанавливает такую связь между τ_A и τ , чтобы физическое время t при определении его из уравнений (1) и (4) было одинаковым. Ограничение на управляющий параметр \mathbf{p} в безразмерных переменных сохраняет вид (2).

Для системы (5) известны первые интегралы [1]

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}, \mathbf{s}) &= u_0 s_1 - u_1 s_0 + u_2 s_3 - u_3 s_2 = 0; \\ hu^2 - 2s^2 + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Начальное состояние управляемого КА и начальное значение τ_A определяются соотношениями при $\tau = 0$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_H, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_H, \quad h = h_H, \quad \tau_A = \tau_{Aн}. \quad (7)$$

В конечный момент времени $\tau = \tau_K$, который заранее не задается, управляемая система (5) в пространстве $(\mathbf{u}, \mathbf{s}, h, \tau_A)$ в случае мягкой встречи должна находиться на многообразии

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\Gamma(\mathbf{u}(\tau_K))\mathbf{u}(\tau_K) &= \mathbf{P}^\Gamma(\mathbf{u}_A(\tau_A(\tau_K)))\mathbf{u}_A(\tau_A(\tau_K)); \\ \mathbf{P}^\Gamma(\mathbf{u}(\tau_K))\mathbf{s}(\tau_K) &= \mathbf{P}^\Gamma(\mathbf{u}_A(\tau_A(\tau_K)))\mathbf{s}_A(\tau_A(\tau_K)), \end{aligned} \quad (8)$$

а в случае жесткой встречи — на многообразии

$$\mathbf{P}^\Gamma(\mathbf{u}(\tau_K))\mathbf{u}(\tau_K) = \mathbf{P}^\Gamma(\mathbf{u}_A(\tau_A(\tau_K)))\mathbf{u}_A(\tau_A(\tau_K)). \quad (9)$$

При решении задачи о встрече аппаратов величину $\tau_{Aн}$ можно положить равной нулю, а в случае задачи о выводе КА на орбиту, задаваемой соотношениями (4), значение $\tau_{Aн}$ заранее не задается и подлежит определению в процессе решения задачи. Функционал (3) в безразмерных KS -переменных запишется в виде

$$I = \int_0^{\tau_K} (\alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{p}|) u^2 d\tau. \quad (10)$$

Решение задачи с помощью принципа максимума Понтрягина

Функция Гамильтона-Понтрягина для управляемой системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} H &= -(\alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{p}|) u^2 + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + \\ &+ \left(\mathbf{v}, \frac{1}{2} h\mathbf{u} + \frac{1}{2} u^2 \mathbf{P}(\mathbf{u})\mathbf{p} \right) + 2\eta(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})\mathbf{p}) + \vartheta \frac{u^2}{(\mathbf{u}_A(\tau_A))^2}. \end{aligned}$$

Сопряженные переменные $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, η , ϑ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\tau} &= 2(\alpha_1 + \alpha_2|\mathbf{p}|)\mathbf{u} - \frac{1}{2}h\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \mathbf{P}(\mathbf{u})\mathbf{p})\mathbf{u} - \\ &- \frac{1}{2}u^2\mathbf{P}(\mathbf{v})\mathbf{p} - 2\eta\mathbf{P}(\mathbf{s})\mathbf{p} - 2\vartheta \frac{\mathbf{u}}{(u_A(\tau_A))^2}; \\ \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} &= -\boldsymbol{\mu} - 2\eta\mathbf{P}(\mathbf{u})\mathbf{p}; \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{u}); \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = 2\vartheta u^2 \frac{(\mathbf{u}_A, \mathbf{s}_A)}{(u_A^2)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из последнего уравнения системы (11) получим

$$\vartheta = Q(u_A(\tau_A))^2, \quad (12)$$

где Q — произвольная константа.

Согласно условию максимума для функции H оптимальное управление \mathbf{p}_{opt} выражается через фазовые и сопряженные переменные по формулам

$$\mathbf{p}_{\text{opt}} = p_{\text{opt}} \frac{\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}}{|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}; \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2}u^2\mathbf{v} + 2\eta\mathbf{s}, \quad (13)$$

при этом

$$p_{\text{opt}} = \begin{cases} p_{\text{max}}, & \text{если } |\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}| \geq \alpha_2 u^2; \\ 0, & \text{если } |\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}| < \alpha_2 u^2. \end{cases} \quad (14)$$

На правом подвижном конце траектории при $\tau = \tau_k$ должны выполняться условия трансверсальности. В случае мягкой встречи они имеют вид

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = 0; \quad l(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0; \quad \eta = 0; \\ \vartheta + (\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

а в случае жесткой встречи

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) = 0; \quad \mathbf{v} = 0; \quad \eta = 0; \\ \vartheta + (\mathbf{u})^{-2}(\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}^T(\mathbf{u}_A(\tau_A))\mathbf{s}_A(\tau_A)) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) получены соответственно из (8) и (9) методом неопределенных множителей Лагранжа.

Кроме того, так как τ_k заранее не задается, то при $\tau = \tau_k$

$$H_{\text{opt}}|_{\tau_k} = 0. \quad (17)$$

В случае задачи о выводе КА на орбиту величина $\tau_{\text{АН}}$ заранее не задается, по этой причине левый конец траектории для управляемой системы (5) оказывается подвижным, и на нем при $\tau = 0$ должно вы-

полняться условие трансверсальности $\vartheta = 0$. В этом случае из (12) следует, что $\vartheta \equiv 0$.

Принцип максимума сводит решение задачи оптимального управления к решению краевой задачи для фазовых и сопряженных переменных. В случае мягкой встречи необходимо решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (5), (11), в которых управляющий параметр \mathbf{p} определяется согласно (13), (14), с начальными условиями (7) при $\tau = 0$ и граничными условиями (8), (15), (17) при $\tau = \tau_k$ или с граничными условиями (9), (16), (17) при $\tau = \tau_k$ в случае жесткой встречи. В случае задачи об оптимальном управлении выводом КА на заданную орбиту необходимо решать краевую задачу для той же системы уравнений с начальными условиями (7) при $\tau = 0$, в которых условие для τ_A заменено условием $\vartheta = 0$, и граничными условиями (8), (15), (17) при $\tau = \tau_k$.

Первые интегралы

Кроме билинейной формы $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, которая определена в (6), введем билинейные формы следующих видов:

$$\begin{aligned} l_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_0b_2 - a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1; \\ l_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_0b_3 - a_3b_0 + a_2b_1 - a_1b_2; \\ l_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2. \end{aligned}$$

Система уравнений (5), (11), в которых управляющий параметр \mathbf{p} определяется согласно (13), (14), кроме первых интегралов (6) имеет также следующие интегралы:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = 0; \\ l_i(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l_i(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = C_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{\vartheta}{(u_A(\tau_A))^2} = Q = \text{const}; \quad H_{\text{opt}}(\tau) \equiv 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (15), (16) и (18) следует, что первое условие трансверсальности из (15) и первое условие из (16) можно заменить условием

$$l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = 0$$

при $\tau = 0$, т. е. перенести это условие с правого конца траектории на левый. Аналогично условие (17) можно перенести на левый конец траектории.

Движение КА на пассивном и активном этапах

Для системы уравнений (5), (11) на этапе движения, когда $p_{\text{opt}} \equiv 0$, можно записать общее решение. Вид общего решения зависит от значения h . В случае $h < 0$ КА движется по эллиптической орбите, в случае $h > 0$ — по гиперболической орбите, при $h = 0$ — по параболической орбите.

Случай $h < 0$.

$$h = -2Z^2 < 0; \mathbf{u} = \mathbf{A}\cos(Z\tau) + \mathbf{B}\sin(Z\tau);$$

$$\mathbf{s} = Z[\mathbf{B}\cos(Z\tau) - \mathbf{A}\sin(Z\tau)];$$

$$(A^2 + B^2)\tau + \frac{1}{2}Z^{-1}(A^2 - B^2)\sin(2Z\tau) -$$

$$- Z^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\cos(2Z\tau) = (C^2 + D^2)\tau_A +$$

$$+ \frac{1}{2}k^{-1}(C^2 - D^2)\sin(2k\tau_A) - k^{-1}(\mathbf{C}, \mathbf{D})\cos(2k\tau_A) + T;$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mathbf{E}Z + (\alpha_1 - Q)(\mathbf{A}Z^{-1} + \mathbf{B}\tau)]\sin(Z\tau) -$$

$$- [\mathbf{G}Z + (\alpha_1 - Q)(\mathbf{B}Z^{-1} - \mathbf{A}\tau)]\cos(Z\tau);$$

$$\vartheta = Qu_A^2(\tau_A);$$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{E} + \tau Z^{-1}(\alpha_1 - Q)\mathbf{B}]\cos(Z\tau) +$$

$$+ [\mathbf{G} - \tau Z^{-1}(\alpha_1 - Q)\mathbf{A}]\sin(Z\tau);$$

$$\eta = -\frac{1}{4}[(\mathbf{A}, \mathbf{E}) + (\mathbf{B}, \mathbf{G})]\tau - \frac{1}{8}Z^{-1}\left\{(\mathbf{A}, \mathbf{E}) -$$

$$- (\mathbf{B}, \mathbf{G}) + (\alpha_1 - Q)Z^{-1}\left[2(\mathbf{A}, \mathbf{B})\tau -$$

$$- \frac{1}{2}Z^{-1}(A^2 - B^2)\right]\right\}\sin(2Z\tau) + \frac{1}{8}Z^{-1}\{(\mathbf{A}, \mathbf{G}) +$$

$$+ (\mathbf{B}, \mathbf{E}) - (\alpha_1 - Q)Z^{-1}[(A^2 - B^2)\tau +$$

$$+ (\mathbf{A}, \mathbf{B})Z^{-1}]\}\cos(2Z\tau) + F. \quad (19)$$

Четырехмерные векторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{G}$ и скалярные величины Z, T, F являются произвольными постоянными, значения которых выбираются на каждом пассивном этапе движения. Произвольная постоянная Q является общей для всего процесса управления.

В случае $h > 0$ решения для фазовых и сопряженных переменных имеют вид, аналогичный (19), но с гиперболическими функциями, а в случае $h \equiv 0$ фазовые и сопряженные переменные выражаются через полиномы относительно τ .

Подставляя (13), (14) в уравнения системы (5) и (11), получим систему дифференциальных уравнений для определения фазовых и сопряженных переменных на этапе, когда тяга максимальна:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{s}; \quad \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = \frac{1}{2}h\mathbf{u} + \frac{1}{2}\frac{p_{\max}u^4}{|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}\left[\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^d l(\mathbf{v}, \mathbf{u})\right];$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2\frac{p_{\max}u^2}{|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}(\mathbf{s}, \mathbf{q}); \quad \frac{d\tau_A}{d\tau} = \frac{u^2}{(\mathbf{u}_A(\tau_A))^2};$$

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\tau} = p_{\max}\left\{\left[2\alpha_2 - \frac{u^2}{|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}\left((\mathbf{v}, \mathbf{q}) - \frac{1}{2}(l(\mathbf{v}, \mathbf{u}))^2\right) -$$

$$- \frac{q^2}{|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}\right]\mathbf{u} - \frac{u^2 l(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{2|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}\mathbf{q}^d\right\} + 2(\alpha_1 - Q)\mathbf{u} - \frac{1}{2}h\mathbf{v};$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = -\boldsymbol{\mu} - 2\frac{p_{\max}u^2\eta}{|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}\left[\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^d l(\mathbf{v}, \mathbf{u})\right];$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \vartheta = Q(\mathbf{u}_A(\tau_A))^2. \quad (20)$$

Векторы $\mathbf{u}^d, \mathbf{q}^d$ ортогональны соответственно к \mathbf{u}, \mathbf{q} и выражаются через них по формулам

$$\mathbf{u}^d = (u_1, -u_0, u_3, -u_2); \quad \mathbf{q}^d = (q_1, -q_0, q_3, -q_2).$$

Отметим, что, согласно (13), (14), уравнения (20) имеют место при условии, что

$$|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}| = \sqrt{u^2 q^2 - (l(\mathbf{u}, \mathbf{q}))^2} \geq \alpha_2 u^2. \quad (21)$$

Для предельного перехода к импульсной тяге необходимо знать производные по τ от величин $\mathbf{q}, l(\mathbf{v}, \mathbf{u}), (\mathbf{s}, \mathbf{q}), (\mathbf{v}, \mathbf{q})$, которые входят в правые части уравнений системы (20):

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = (\mathbf{u}, \mathbf{s})\mathbf{v} - \frac{1}{2}u^2\boldsymbol{\mu} - (\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{s} + \eta h\mathbf{u};$$

$$\frac{dl(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{d\tau} = -l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{v}, \mathbf{s});$$

$$\frac{d(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{d\tau} = \frac{p_{\max}u^4}{2|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}\left[q^2 - \frac{1}{4}u^2(l(\mathbf{v}, \mathbf{u}))^2\right] +$$

$$+ (\mathbf{u}, \mathbf{s})(\mathbf{s}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2}u^2(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}) - s^2(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2}h(\mathbf{u}, \mathbf{q}) + h\eta(\mathbf{u}, \mathbf{s});$$

$$\frac{d(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{d\tau} = -\frac{p_{\max}u^2\eta}{|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}\left[q^2 - \frac{1}{4}u^2(l(\mathbf{v}, \mathbf{u}))^2\right] - (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) +$$

$$+ v^2(\mathbf{u}, \mathbf{s}) - \frac{1}{2}u^2(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) - (\mathbf{v}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{s}) + \eta h(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (22)$$

Решение импульсной задачи оптимального управления

При неограниченном возрастании p_{\max} решение рассмотренной выше задачи будет стремиться к решению задачи об оптимальном управлении движением КА с импульсной тягой [3]. Если через K_i обозначить безразмерную величину импульса тяги, отнесенного к единице массы КА, то она будет связана с размерной величиной изменения вектора скорости $|\Delta\mathbf{v}_i|$ под действием импульса соотношением

$$|\Delta\mathbf{v}_i| = (\gamma MR^{-1})^{1/2} K_i.$$

Для импульсной задачи в безразмерных переменных аналогом функционала (10) будет функционал

$$I = \alpha_1 t_k + \alpha_2 \sum_{i=1}^n K_i,$$

где t_k — время процесса управления, n — число импульсов. Величины t_k , n заранее не задаются. Момент сообщения импульса тяги τ_i , согласно (13) и (21), определяется из условия

$$|\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}| = \alpha_2 u^2,$$

которое можно привести к виду

$$q^2 - \frac{1}{4} u^2 (l(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 - \alpha_2^2 u^2 = 0. \quad (23)$$

Направление вектора тяги в момент сообщения импульса совпадает с направлением вектора $\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{q}$.

Из уравнений систем (20), (22) следует, что при предельном переходе к импульсной тяге в момент сообщения импульса переменные \mathbf{u} , τ_A , η , ϑ , \mathbf{q} , $l(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ остаются непрерывными, а переменные \mathbf{s} , h , $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{v} , (\mathbf{s}, \mathbf{q}) , (\mathbf{v}, \mathbf{q}) испытывают скачок. Обозначим $\Delta \mathbf{s}$, Δh , $\Delta \boldsymbol{\mu}$, $\Delta \mathbf{v}$ изменение переменных \mathbf{s} , h , $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{v} при сообщении импульса K_i . Вычисляя интегралы от правых частей уравнений системы (20) на промежутке действия тяги и выполняя предельный переход к импульсной тяге, получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{s} &= \frac{1}{2\alpha_2} \left[\mathbf{q} - \frac{1}{2} l(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \mathbf{u}^d \right] K_i; \quad \Delta h = 2 \frac{(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\alpha_2 u^2} K_i + \frac{1}{2} K_i^2; \\ \Delta \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{\alpha_2 u^2} \left\{ \left[\frac{q^2}{u^2} - (\mathbf{v}, \mathbf{q}) + \alpha_2 \eta K_i \right] \mathbf{u} - \frac{1}{2} l(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \mathbf{q}^d \right\} K_i; \\ \Delta \mathbf{v} &= -2 \frac{\eta}{\alpha_2 u^2} \left[\mathbf{q} - \frac{1}{2} l(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \mathbf{u}^d \right] K_i. \end{aligned} \quad (24)$$

Значения всех величин в правых частях соотношений (24) вычисляются непосредственно перед сообщением импульса. Из условия, что для оптимального процесса $H_{\text{opt}} \equiv 0$, следует, что во время всего движения, исключая моменты сообщения импульса тяги, выполняется соотношение

$$(-\alpha_1 + Q)u^2 + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + \frac{1}{2} h(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \equiv 0. \quad (25)$$

Если момент сообщения импульса не совпадает с начальным или конечным моментом времени, то перед моментом сообщения импульса, кроме соотношения (23), должно выполняться соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{q^2}{u^2} (\mathbf{u}, \mathbf{s}) + \frac{u^2}{2} l(\mathbf{v}, \mathbf{u}) l(\mathbf{v}, \mathbf{s}) + \\ & + \left(\mathbf{q}, \left[\frac{1}{2} u^2 \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \mathbf{s} - (\mathbf{u}, \mathbf{s}) \mathbf{v} - \eta h \mathbf{u} \right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Между двумя последовательными моментами сообщения импульса, т. е. на пассивных участках движения, фазовые и сопряженные переменные определяются соотношениями (19). Произвольные постоянные в этих соотношениях определяются по значениям переменных после момента сообщения импульса.

Первые интегралы, полученные ранее для случая ограниченной тяги, имеют место и для импульсной тяги.

Полученные выше соотношения позволяют свети решение задачи оптимального управления с импульсной тягой к решению краевой задачи.

Рассмотрим сначала задачу о мягкой встрече в случае, когда импульсы сообщаются только в начальный и конечный моменты времени. В этой задаче неизвестными являются значения сопряженных переменных $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{v} , η при $\tau = 0$, величины Q , τ_K и значения импульсов K_H и K_K , т. е. имеются две векторные и пять скалярных неизвестных величин. В скалярной форме всего 13 неизвестных. Для определения этих величин имеются следующие условия: граничные условия (8), условия трансверсальности (15), условие (23) при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_K$, условие (25), которое можно выполнить при любом $\tau \in (0, \tau_K)$. Всего получается в скалярной форме 13 условий.

Если решение задачи оптимального управления содержит импульсы во внутренних точках, то для определения "момента" сообщения импульса τ_i и значения величины предыдущего импульса служат условия (23) и (25).

При решении задачи о выводе КА на орбиту появляется новая неизвестная величина $\tau_{\text{АН}}$, а величина $Q = 0$ согласно условию трансверсальности.

При решении задачи о жесткой встрече из числа неизвестных исключается импульс в конечный момент времени K_K и опускается условие (23) при $\tau = \tau_K$, а условия (8) и (15) заменяются условиями (9) и (16) при $\tau = \tau_K$.

Рассмотрим оптимальный переход КА с круговой орбиты Земли радиуса R на орбиту, которая определяется следующими значениями безразмерных векторных элементов \mathbf{C} и \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,6; \quad C_1 = 3,5; \quad C_2 = 0,3; \quad C_3 = 0,0; \\ D_0 &= 0,0; \quad D_1 = 0,2; \quad D_2 = 1,5; \quad D_3 = 0,4. \end{aligned}$$

Конечная орбита определяется следующими классическими элементами орбиты: большая полуось в безразмерных переменных равна 7,5751, эксцентриситет 0,6774, угол наклона орбиты 24,5183°, долгота восходящего узла 354,0429°, угловое расстояние до перицентра 177,3082°.

В начальный момент положение и скорость управляемого КА в декартовой системе координат

Безразмерные значения первого и второго импульсов

| α_1 | 0,0 | 0,1 | 0,25 | 0,35 | 0,5 | 0,75 |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| K_H | 0,2022 | 0,2339 | 0,3380 | 0,4190 | 0,5413 | 0,7326 |
| K_{H1} | 0,0143 | -0,1008 | -0,2499 | -0,3447 | -0,4787 | -0,6789 |
| K_{H2} | 0,1897 | 0,1938 | 0,1996 | 0,2027 | 0,2085 | 0,2181 |
| K_{H3} | 0,0684 | 0,0836 | 0,1104 | 0,1250 | 0,1428 | 0,1680 |
| K_K | 0,4139 | 0,4297 | 0,4929 | 0,5526 | 0,6532 | 0,8248 |
| K_{K1} | -0,0165 | 0,0994 | 0,2502 | 0,3460 | 0,4809 | 0,6826 |
| K_{K2} | -0,2669 | -0,2795 | -0,2981 | -0,3109 | -0,3297 | -0,3606 |
| K_{K3} | -0,3160 | -0,3109 | -0,3023 | -0,2983 | -0,2944 | -0,2904 |

Таблица 2

Элементы переходной орбиты КА, время движения и функционал

| α_1 | 0,0 | 0,1 | 0,25 | 0,35 | 0,5 | 0,75 |
|-------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Большая полуось | 1,7248 | 1,7931 | 2,0505 | 2,3867 | 3,4475 | 36,8387 |
| Эксцентриситет | 0,4204 | 0,4487 | 0,5412 | 0,6224 | 0,7553 | 0,9793 |
| Угол наклона орбиты | 3,293° | 4,066° | 5,260° | 5,934° | 6,740° | 7,854° |
| Угловое расстояние до перигея | -2,327° | 15,593° | 33,781° | 42,049° | 50,462° | 58,476° |
| Время движения | 6,6873 | 5,6274 | 4,6424 | 4,1702 | 3,6405 | 3,0507 |
| Функционал | 0,6161 | 1,2264 | 1,9915 | 2,4311 | 3,0147 | 3,8454 |

Таблица 3

Координаты положения и скорости в момент подхода КА к конечной орбите

| α_1 | 0,0 | 0,1 | 0,25 | 0,35 | 0,5 | 0,75 |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| x_1 | -2,4270 | -2,4250 | -2,4232 | -2,4217 | -2,4196 | -2,4164 |
| x_2 | 0,2908 | 0,2993 | 0,3172 | 0,3278 | 0,3414 | 0,3623 |
| x_3 | 0,0167 | 0,0210 | 0,0292 | 0,0341 | 0,0403 | 0,0500 |
| v_1 | -0,0854 | -0,2034 | -0,3582 | -0,4563 | -0,5943 | -0,8006 |
| v_2 | -0,4800 | -0,4670 | -0,4479 | -0,4349 | -0,4156 | -0,3841 |
| v_3 | -0,0276 | -0,0327 | -0,0412 | -0,0452 | -0,0491 | -0,0530 |

$Mx_1x_2x_3$ в безразмерных переменных определяется соотношениями:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 0.$$

Для рассматриваемой задачи оптимальное управление состоит из двух импульсов: первый импульс сообщается в начальный момент времени, а второй — в момент пересечения КА заданной орбиты. Расчеты проводили для случая, когда безразмерный весовой множитель $\alpha_2 = 1$, а α_1 принимает значения: 0,0; 0,1; 0,25; 0,35; 0,5; 0,75.

Из табл. 1 видно, что значения импульсов и их первые координаты заметно изменяются при изменении α_1 , а вторые и третьи координаты изменяются менее заметно.

Долгота восходящего узла переходной орбиты равна нулю согласно начальному положению КА. Из табл. 2 видно, что с увеличением значения α_1 все классические элементы и значение функционала увеличиваются, а время движения уменьшается.

Из табл. 3 видно, что при заданных параметрах конечной орбиты изменение значения α_1 мало влияет на координаты положения КА в момент пересечения им конечной орбиты, но заметно влияет на скорость, с которой КА подходит к конечной орбите. Вектор скорости КА после сообщения ему второго импульса мало зависит от значения α_1 . В частности, при $\alpha_1 = 0$ этот вектор скорости имеет следующие безразмерные координаты:

$$v_1 = -0,1180, v_2 = -0,7447, v_3 = -0,3434.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 05-01-00347, 08-01-00310).

Список литературы

1. Штифель Е., Шейфиле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
2. Сапунков Я. Г. Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космич. иссл. 1996. Т. 34. Вып. 4. С. 428—433.
3. Ильин В. А., Кузмак Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов М.: Наука, 1976.

CONTENTS

- Fursov V. A.** Conformed Identification of the Controlled Object with a Small Number of Observations 2
In this paper we consider an identification algorithm for determination of controlled object model with a small number of observations. The idea of the method is searching of the most noise-free observations by the algorithm based on the estimates conformity principle. We use the function of mutual closeness of the estimates for small dimension subsystems as a conformity criterion. The examples showing efficiency of the method are given.
Keywords: identification, small number of observation, estimates conformity
- Tsykunov A. M.** Keeping up Systems for Linear Plants with Delay Control 9
Tasks of construction of keeping up systems for linear plants with delay control with compensation of external disturbance are considered. Numerical examples and results of their modeling are resulted.
Keywords: the forecast, the reference model, disturbing influence, observer
- Ushakov A. V., Tsventarnyi A. Yu.** Creation of Polynomial Dynamic Model in the Problem of Modal Control by Complex External Stochastic Influence 14
The problem of creation the bank of analytical representations of dispersions output and error polynomial dynamic models of the continuous systems functioning in the conditions of complex external stochastic influence resolve. Results are illustrated by a synthesis algorithm of modal control of continuous object on preset values of dispersions output or error.
Keywords: polynomial dynamic model, modal control, complex external stochastic influence, relative variances and frequencies, asymptotic representation
- Sedov A. V., Trishechkin E. V.** The New Approach for the Estimation of the Account of High-Frequency Components at a Choice of the Sampling Frequency of a Signal 20
The problem of the estimation of correctness of a choice of the sampling frequency of a signal in control and inspection systems from the point of view of the account of the basic high-frequency components is considered. The new approach for the realization of such estimation directly during measurement of samples of a signal is offered. The offered new approach provides higher speed of calculation, demands smaller number of additional measurements and possesses the best sensitivity in comparison with traditional approaches.
Keywords: digital systems, the spectrum of a signal, the sampling frequency, the aliasing, the criterion of the account of high-frequency components of signal the adaptive sampling
- Romanov A. M.** Higher Orders Derivatives Estimation in Digital Control Systems in Conditions of Sensor Noise 25
The problem of obtaining estimates of higher orders derivatives in the digital control systems is discussed. A method for estimating the derivatives based on the approximation of the sensor readings with functional Taylor series is introduced. The results of experiments confirming the effectiveness of the proposed method in comparison with the method of multiple numerical differentiation are shown.
Keywords: derivative estimation, digital systems, sensor processing
- Ivanov E. B.** System of Support of Decision-Making on Management of Blast-Furnaces Process 29
Necessity of automation of handling and developing processes of the automated control systems in an metallurgical industry is determined by increasing of labour productivity, enlarging power of the process equipment, increasing a technological level of the fundamental production assets, especially their primarily part, complicating technological processes, increasing the responsibility for abidance of work safety.
The expert system is a software product filled by experts in which the artificial intellect is used as the typical logic rules. The expert system work is set according the algorithm alike intellective process.
The given device is applied for the difficulties of the description of complex processes, absence of any other descriptions. Controlling is carried out on the basis of the obtained knowledge of observable parameters of system by change of control parameters.
Keywords: system of support of decision-making, blast process, prevention of emergencies
- Antonov A. N., Arshansky M. M.** A Fuzzy Model of Decision-Making System for Choosing the Parameters of Dispensing Liquid Handling System EVO Freedom 75. 33
For the decision of a problem of the task of parameters of dispensing of liquid reagents liquid handling system offers uses of a fuzzy logic conclusion. A task in view of construction of fuzzy model of the task of parameters. For its decision the fuzzy algorithm of Mamdani is used.
Keywords: fuzzy logic, a logic conclusion, algorithm of Mamdani, liquid handling system, dispensing
- Faldin N. V., Lipatov A. Yu., Morzhov A. V.** The Synthesis of the Time Optimal Fluid Power Drive in View of Power Consumption Limitation 39
The method of synthesis of the time optimal fluid power drive working on the inertial load is set forth. The synthesis problem is solved with taking into account constraint on the state of the drive power consumption. Application of this method at the stage of fluid power drive designing makes it possible to use lower-power drive motors.
Keywords: fluid power drive, optimal control, time response criteria, power limitation

- Kogut A. T.** Direct Current Motor Dual Control Approximate Algorithms Synthesis on the Basis of Linearization Procedure 45
Contains two-step approximate algorithms for trajectory control nonlinear dynamic objects described by difference equations for state variables. The methods under review doesn't involves analytical solution of mechanics inverse problem. Gives a devised algorithms application examples of exciting coil and motor armature circuit voltage control for direct current motors.
Keywords: nonlinear object, trajectory control, mechanics inverse problem, approximate algorithms, linearization, two-step procedure, direct current motor
- Gannel L. V.** Analyses of Operation of Linear Permanent Magnet Brushless Motors Controlled from Fast Sinusoidal Current Servo Amplifiers 50
Paper presents analyses of force performance of linear permanent magnet brushless motor controlled by current mode sinusoidal power amplifier. Obtained analytical expressions, allow defining criteria for choosing of such amplifiers for high precision mechatronics' applications. And therefore that leads to reaching both high smoothness of low velocities and short time for point-to-point positioning with min motor power losses.
Keywords: linear permanent magnet brushless motor, sinusoidal power amplifier, sinusoidal commutation, current (force) ripple
- Zenkevich S. L., Kosmachev P. V.** Control of Mobile Robot, Moving to Immobile Point 55
In the proposed article the method of parameter syntheses of control law is considered. The mobile wheel-driven robot - task is to travel to the predefined immobile (in the absolute coordinates) point. The discussed problem is how to control of robot wheels in order to ensure the proper trajectory quality. Both the dynamical model of mobile robot and DC motors models are taken into account. Linearization of robot trajectory along the program one allows to obtain the linear equations and to use the powerful methods of theory of linear systems control. The experimental results are also presented.
Keywords: mobile robot, dynamics, linearization, controllow
- Silvestrov M. M., Fiodorov A. V., Kotitsyn L. O., Begichev Yu. I., Naumov A. I.** Concept of Building an Ergatic Control System for Multipurpose Unmanned Air Venicles 62
The paper discusses the building concept and the architecture of an ergatic control system for multi-purpose unmanned air vehicles (MUAV), synthesis of MUAV control loops with the characteristic parameter method, an ergatic interfase for the control system, and a correlative extreme navigation system, using the Earth geophysical field.
Keywords: ergatic control system, ergatic interfase, trask maneuvering, interactive simulator, information management field, mnemonic frame, warning and caution text messages, pilot and payload operator workstations, "reference track maneuvering" and intellectual operator support modules, characteristic time constant, stability margin
- Sapunkov Ya. G.** The Solution of the Spacecraft Optimum Control Problems with Limited and Impulse Force Using KS-Variables 73
The problems of soft and hard meeting of two spacecrafts are solved with the help of the Pontryagin maximum principle in KS-variables. Functional, which determines a quality of control process takes into account a time of process and integral value of impulse thrusts. Solution for the problem with impulse thrust is constructed with using the limit. Results of the calculation of optimal controls for the launch apparatus with impulse thrust into given noncoplanar orbit are present.
Keywords: optimal control, spacecraft, limited and impulse force, soft and hard encounter, Kustaanheimo-Stiefel variables

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Дизайнер *Т. Н. Погорелова.*

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Е. В. Комиссарова.*

Сдано в набор 28.12.2009. Подписано в печать 10.02.2010. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
 Усл. печ. л. 9,8. Уч.-изд. л. 10,90. Заказ 155. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
 телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
 Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Отпечатано в ООО "Подольская Периодика". 142110, Московская обл., г. Подольск, ул. Кирова, 15