

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 5 (110)

май

2010

Редакционный совет:

КУЗНЕЦОВ Н. А.
МАКАРОВ И. М.
МАТВЕЕНКО А. М.
ПЕШЕХОНОВ В. Г.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М.
ФЕДОРОВ И. Б.

Главный редактор:

ТЕРЯЕВ Е. Д.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В.
ПУТОВ В. В.
ЮЩЕНКО А. С.

Выпускающий редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б.

Ответственный секретарь:

ПЕТРИН К. В.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М.
БОГАЧЕВ Ю. П.
БУКОВ В. Н.
ВОСТРИКОВ А. С.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г.
ГОЛУБЯТНИКОВ И. В.
ИВЧЕНКО В. Д.
ИЛЬЯСОВ Б. Г.
КАЛЯЕВ И. А.
КОЛОСОВ О. С.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г.
КУЗЬМИН Н. Н.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.
ЛЕОНОВ Г. А.
ЛЁВИН Б. А.
ЛОХИН В. М.
НОРЕНКОВ И. П.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е.
РАПОПОРТ Э. Я.
РАССАДКИН Ю. И.
РАЧКОВ М. Ю.
РЕЗЧИКОВ А. Ф.
СЕБРЯКОВ Г. Г.
СИГОВ А. С.
СИРОТКИН О. С.
СОЙФЕР В. А.
ТИМОФЕЕВ А. В.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф.
ФУРСОВ В. А.
ХИМЕНКО В. И.
ЮРЕВИЧ Е. И.
ЮСУПОВ Р. М.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧУГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Еремин Е. Л., Кван Н. В., Семичевская Н. П. Робастное управление нелинейными объектами с наблюдателем полного порядка и быстродействующей эталонной моделью 2
- Стебулянин М. М. Алгоритм асимптотической стабилизации в целом интервальных квадратичных систем с неограниченным управлением 7

**МЕХАТРОННЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ:
КОНТРОЛЬ, ИДЕНТИФИКАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ**

(65 лет кафедре "Системы управления и информатика" СПбГУИТМО)

- Арановский С. В., Бардов В. М. Алгоритм идентификации параметров системы "двигатель—двухмассовый механизм" 15
- Дударенко Н. А., Полякова М. В., Ушаков А. В. Алгебраическая постановка задачи контроля системного вырождения сложных технических систем 18
- Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В., Мотылькова М. М., Рабыш Е. Ю., Рюхин В. Ю., Мансурова О. К. Синтез статических регуляторов в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами методами модального управления 23
- Колюбин С. А., Пыркин А. А. Адаптивное управление маятником с инерционным маховиком 28

КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

- Чебурахин И. Ф., Цурков В. И. Логическое управление и обработка информации в мехатронных системах 33
- Перепелкин Е. А., Черных М. С. Пропорционально-интегральный регулятор системы управления перегрузкой узла компьютерной сети 38

КОНТРОЛЬ И ДИАГНОСТИКА В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

- Жирибок А. Н., Якшин А. С. Решение задачи аккомодации к дефектам технических систем, заданных структурными схемами 42
- Александрова Т. В., Громаков Е. И. Робастная процедура диагностики мехатронных устройств кабельного производства с использованием контрольных карт 48
- Беленький Л. Б., Боровик С. Ю., Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Уменьшение длительности получения информации о смещениях торцов лопаток 53

**Журнал в журнале
"УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА
В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"**

- Ванин А. В. Статистический метод оценки качества поисковых траекторий при слежении за искусственными спутниками Земли 61
- Аверьянов А. М., Бобров М. С., Чекушкин В. В. Параметрическое задание кинематики движения воздушного объекта на участке маневрирования 67
- Бабак Л. Н., Щербатюк А. Ф. Некоторые методы оценивания состояния водных акваторий с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов 74
- Contents 79

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 62-504.6

Е. Л. Еремин, д-р техн. наук, проф.,
Тихоокеанский государственный университет,
Н. В. Кван, аспирант,
Н. П. Семичевская, канд. техн. наук, доц.
Амурский государственный университет
ereminel@mail.ru, kvannv@mail.ru

Робастное управление нелинейными объектами с наблюдателем полного порядка и быстродействующей эталонной моделью¹

Рассматривается итерационная процедура синтеза алгоритмов следящих систем управления с неявной эталонной моделью и стационарным наблюдателем переменных состояний одного класса нелинейных объектов с запаздыванием.

Ключевые слова: быстрая явно-неявная эталонная модель, нелинейный объект, робастная система управления, имитационное моделирование

Введение

Исследование нелинейных динамических систем является актуальной проблемой современной теории управления. В данной статье рассматривается решение задачи синтеза нелинейных робастных алгоритмов на основе критерия гиперустойчивости [1] для класса нелинейных объектов с запаздыванием, функционирующих в условиях априорной неопределенности, подобные которым встречаются, например, при исследовании работы химических реакторов [2].

Желаемая динамика в нелинейных системах управления может задаваться динамическим эталоном, в частности, с помощью так называемой явно-неявной эталонной модели, содержащей комбинацию апериодического звена 1-го порядка (явная часть) и линейного компенсатора $(n - 1)$ -го порядка (неявная часть), формируемого на выходе объекта управления [3].

Известно [4], что в условиях априорной неопределенности существуют определенные трудности в аналитическом синтезе высококачественных следящих систем управления с неявной эталонной моделью. Поэтому предлагается использовать двух-итерационную процедуру синтеза контура управ-

ления. Вначале аналитически разрабатываются алгоритмы робастных систем управления с быстрой явно-неявной эталонной моделью на основе критерия гиперустойчивости В. М. Попова, а затем в ходе имитационного моделирования систем управления осуществляется переход к системе управления с неявной эталонной моделью. Отметим, что при достижении упрощения технической реализации системы управления обеспечивается и сохранение желаемого качества ее функционирования.

При проектировании робастных систем часто приходится сталкиваться с проблемой получения информации о недоступных измерению переменных состояниях объекта, необходимых для формирования закона управления в замкнутой системе. Один из подходов к решению таких проблем связан с использованием дополнительных устройств — наблюдателей. Например, по аналогии с работами [5—7] авторами был использован наблюдатель полного порядка.

Математические модели системы управления и постановка задачи

Пусть динамика нелинейного объекта управления в пространстве состояний, действующего в условиях априорной параметрической неопределенности, описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_{\xi}(x, t) + D_{\xi}(t)x(t - \tau) + bu(t) + f_{\xi}(t); \quad (1)$$

$$y(t) = L^T x(t) = x_1; \quad x(\zeta) = \varphi(\zeta); \quad \zeta \in [-h; 0], \quad \xi \in \Xi,$$

где $x^T(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ — вектор состояния; $y(t)$ — вектор выхода; $L^T = (1, 0, \dots, 0)$ — матрица выхода; $u(t)$ — скалярное управление; $\tau = \text{const} > 0$ — известное запаздывание; $\varphi(\theta) \in C_{\tau}$ — начальная функция; C_{τ} — пространство ограниченных непрерывных функций; $D_{\xi}(t)$ — нестационарная матрица при запаздывающем аргументе вида $D_{\xi}(t) = b\sigma^T(t)$, $\sigma^T(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$, где каждая компонента σ_i — ограниченная нестационарная функция, такая что $|\sigma_i| \leq \sigma_{0i}^2 = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$; $f_{\xi}^T(t) = [0, \dots, 0, f_n(t)]$ — постоянно действующее возмущение; $|f_n(t)| \leq f_0^2 = \text{const}$; ξ — набор неизвестных параметров, принадлежащих известному множеству Ξ ; $b^T = [0, \dots, 0, 1]$ — вектор при управляющем воздействии. Предполагается, подобно [2], что нелинейная векторная функция $A_{\xi}(x, t, \tau)$ представима в виде

$$A_{\xi}(x, t) = (A_{\xi} + b\alpha_{\xi}^T(x) + b\beta_{\xi}^T)x(t), \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" в рамках проекта "Адаптивные и робастные системы управления сложными динамическими с запаздыванием" (регистрационный номер: 2.1.2/373).

где $A_\xi = A$ — стационарная матрица, имеющая следующее представление:

$$A = A_M + b\chi_0^T, \quad (3)$$

где A_M — желаемая матрица; χ_0 — некоторый стационарный вектор; $\alpha_\xi(x) = \alpha(x)$ — нелинейная векторная функция, такая что $\alpha^T(x) = (x_{k_1}^{\alpha_1}(t), \dots, x_{k_n}^{\alpha_n}(t))$,

$0 < \alpha_i < 1, i = \overline{1, n}$; $\beta_\xi(t) = \beta(t)$ — нестационарная векторная функция, такая что $\beta^T(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$, где каждая компонента β_i — ограниченная нестационарная функция: $|\beta_i| \leq \beta_{0i}^2 = \text{const}, i = \overline{1, n}$.

Пусть требуемая динамика явно-неявной эталонной модели задана уравнениями

$$\frac{dz_M(t)}{dt} = a_0 z_M(t) + a_0 r(t); y_M(t) = z_M(t), \quad (4)$$

где $x_M(t), z_M(t), r(t) \in R$ — соответственно эталонная переменная, обобщенный выход и задающее воздействие; $a_0 = \text{const} > 0$ — достаточно большое число. Такую эталонную модель будем называть *быстрой явно-неявной эталонной моделью* (БЭМ). Следуя [5], БЭМ (4) можно представить следующим образом:

$$\frac{dx_M(t)}{dt} = A_M x_M(t) + br(t); z_M(t) = g^T x_M(t), \quad (5)$$

где $x_M(t) \in R^n$ — вектор состояния эталона; A_M — стационарная матрица состояния, являющаяся гурвицевой; $z_M(t) \in R$ — обобщенный выход эталона, $g^T = [g_1, g_2, \dots, g_n] = a_0[a_0^{n-1}, \theta_{n-2}a_0^{n-2}, \dots, 1]$,

$$\theta_i = \frac{k!}{(k-i)!i!}.$$

Очевидно, что передаточная функция БЭМ, представленной в виде (4) или (5), имеет вид

$$W_{\text{БЭМ}}(s) = g^T(sE - A_M)^{-1}b = \frac{g^T(sE - A_M)^+ b}{\det(sE - A_M)} = \frac{a_0}{s + a_0}.$$

Для системы управления (1), (2), (5) введем в рассмотрение ошибку

$$e(t) = x_M(t) - x(t)$$

и типовое математическое описание вида

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= A_M e(t) + b\mu(t); \\ v(t) &= g^T e(t) = g^T(x_M(t) - x(t)); \\ \mu(t) &= r(t) - u(t) - \chi_0^T x(t) - \alpha^T(x)x(t) - \\ &\quad - \beta^T(t)x(t) - \sigma^T(t)x(t - \tau) - f_n(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $v(t)$ — обобщенный выход системы управления; $\mu(t)$ — видоизмененное управление. Однако система управления (5), (6) технически не реализуема. Дей-

ствительно, за исключением переменной $x_1(t)$, другие элементы вектора $x(t)$ измерению недоступны, следовательно, обеспечить работоспособность системы управления (5), (6) можно, только осуществив восстановление недостающих переменных состояния.

Оценку вектора $x(t)$ будем проводить по наблюдениям за текущим изменением выхода объекта $y(t)$, используя аналогично [3—5] наблюдатель полного порядка

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A_* \bar{x}(t) + bu(t) + Ny(t);$$

$$\bar{y}(t) = L^T \bar{x}(t) = \bar{x}_1(t); \bar{z}(t) = \bar{g}^T \bar{x}(t), \quad (7)$$

где $\bar{x}(t) \in R^n$ — вектор состояния наблюдателя; $\bar{z}(t) \in R$ — обобщенный выход наблюдателя; $A_* = (A_M - NL^T)$ — матрица состояния наблюдателя, собственные числа которой получают заданные значения за счет соответствующей матрицы N ; значения элементов матрицы N вычисляются из условия равенства соответствующих коэффициентов полиномов

$$\det(sE - A_*) \text{ и } \det(sE - A_M + NL^T); \bar{g} = gK^{-1},$$

где K — коэффициент согласования в установившемся режиме значений $\bar{z}(t)$ и $z_M(t)$, который определяется соотношением

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} g^T(sE - A_*)^{-1}N = -g^T A_*^{-1}N.$$

Как показано в [6], чтобы обеспечить быстрый темп стабилизации невязки $\bar{e}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, корни характеристического уравнения $(sE - A_*)$ должны лежать существенно левее корней характеристического уравнения $(sE - A_M)$, что для матриц A_M и A_* всегда выполнимо. При этом асимптотическое поведение невязки $\bar{e}(t)$ будет удовлетворять соотношению $\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{e}(t) = 0$, что позволяет в системе управления (5), (6), учитывая (7), заменить вектор состояния $x(t)$ его оценкой $\bar{x}(t)$ и получить технически реализуемые уравнения обобщенного выхода и видоизмененного управления:

$$\begin{aligned} v(t) &= g^T e(t) = g^T(x_M(t) - \bar{x}(t)); \\ \mu(t) &= r(t) - u(t) - \chi_0^T \bar{x}(t) - \alpha^T(\bar{x})\bar{x}(t) - \\ &\quad - \beta^T(t)\bar{x}(t) - \sigma^T(t)\bar{x}(t - \tau) - f_n(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, если при решении соответствующей задачи синтеза алгоритмов системы управления (5), (6) использовать математическое описание (5), (8) и уравнение (7), дающее оценку $\bar{x}(t)$, то алгоритмы, полученные для системы управления (5), (7), (8), будут применимы для систем (5)—(7), а значит, для системы (1), (2), (4), (7).

Требуется для системы (6), функционирующей в условиях априорной неопределенности парамет-

ров $\xi \in \Xi$ и начальных условий $x(0)$, определить явный вид закона управления

$$u(t) = u(r(t), x(t)) \quad (9)$$

таким образом, чтобы имело место выполнение предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - \bar{x}(t)\| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - x(t)\| \leq \bar{\delta}_x^2; \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - \bar{y}(t)| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - y(t)| \leq \bar{\delta}_y^2,$$

где $\bar{\delta}_x^2, \bar{\delta}_y^2 = \text{const}$ — некоторые относительно малые числа.

Синтез робастного закона управления

Синтез алгоритма системы управления (5), (8) будем проводить на основе критерия гиперустойчивости.

Условие строгой положительной определенности для вещественной части частотной передаточной функции $W(j\omega)$ стационарной части системы (6) выполнено, поскольку для апериодического звена первого порядка всегда имеет место частотное неравенство

$$\text{Re } W(j\omega) = \text{Re } g^T(j\omega E - A_M)^{-1} b = \frac{a_0}{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}} > 0, \quad (11)$$

$$\forall \omega \in (-\infty, +\infty).$$

Для нелинейной нестационарной части исследуемой системы обеспечим выполнение модифицированного интегрального неравенства В. М. Попова [8]

$$\eta(0, t) = - \int_0^t \mu(s) v(s) Q(s) ds \geq -\gamma^2 = \text{const}, \quad \forall t > 0, \quad (12)$$

что непосредственно связано с синтезом явного вида закона управления $u(t)$. Для упрощения процедуры построения алгоритма $u(t)$ представим его в виде семи составляющих и оценим каждую составляющую в отдельности:

$$\eta(0, t) = \sum_{i=1}^7 \eta_i(0, t) = \sum_{i=1}^7 \mu_i(s) v(s) Q_i(s) \geq -\gamma_0^2 = \text{const},$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1(0, t) &= - \int_0^t r(s) v(s) Q_1 ds = - \int_0^t r(s) v(s) |v(s)| ds \pm \\ &\pm \gamma_1 \int_0^t |r(s)| |v(s)|^2 ds \geq -\gamma_1 \int_0^t |r(s)| |v(s)|^2 ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(0, t) &= \int_0^t \chi_0^T \bar{x}(s) v(s) Q_2 ds = \int_0^t \chi_0^T \bar{x}(s) v(s) |v(s)| ds \pm \\ &\pm \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{2i} |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds \geq - \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{2i} |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_3(0, t) &= \int_0^t \alpha^T(s) \bar{x}(s) v(s) Q_3(s) ds = \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{\alpha_i}(s) \bar{x}_i(s) v(s) |v(s)| ds \pm \\ &\pm \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_{3i} (|\bar{x}_{k_i}(s)|^{\alpha_i+1} + 1) |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds \geq \\ &\geq - \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_{3i} (|\bar{x}_{k_i}(s)|^{\alpha_i+1} + 1) |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, n$ — константа, по которой суммирование не проводится, а выполняется выбор переменной в нелинейной функции;

$$\begin{aligned} \eta_4(0, t) &= \int_0^t \beta(s) \bar{x}(s) v(s) Q_4(s) ds = \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \beta_i(s) \bar{x}_i(s) v(s) |v(s)| ds \pm \\ &\pm \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_{4i} \beta_{i0}^2 |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds \geq - \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{4i} |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma}_{4i} = \gamma_{4i} \beta_{i0}^2$;

$$\begin{aligned} \eta_5(0, t) &= \int_0^t \sigma^T(s) \bar{x}(s - \tau) v(s) Q_5(s) ds = \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \sigma_i(s) \bar{x}_i(s - \tau) v(s) |v(s)| ds \pm \\ &\pm \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{5i} \sigma_{i0}^2 |\bar{x}_i(s - \tau)| |v(s)|^2 ds \geq - \int_0^t \gamma_{5i} |\bar{x}_i(s - \tau)| |v(s)|^2 ds; \\ \eta_6(0, t) &= \int_0^t f_n(s) v(s) Q_6(s) ds = \int_0^t f_n(s) v(s) |v(s)| ds \pm \\ &\pm \tilde{\gamma}_6 \int_0^t f_0^2 |v(s)|^2 ds \geq -\tilde{\gamma}_6 \int_0^t f_0^2 |v(s)|^2 ds = -\gamma_6 \int_0^t |v(s)|^2 ds; \\ \eta_7(0, t) &= \int_0^t u(s) v(s) Q_7 ds, \end{aligned}$$

где $Q_i(t) = |v(t)|$, $i = \overline{1, 6}$; $Q_7 = 1$.

Таким образом, получаем оценку интеграла $\eta(0, t)$:

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &\geq -\gamma_1 \int_0^t |r(s)| |v(s)|^2 ds - \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_{2i} |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds - \\ &- \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_{3i} (|\bar{x}_{k_i}(s)|^{\alpha_i+1} + 1) |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds - \\ &- \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{4i} |\bar{x}_i(s)| |v(s)|^2 ds - \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_{5i} |\bar{x}_i(s - \tau)| |v(s)|^2 ds - \\ &- \gamma_6 \int_0^t |v(s)|^2 ds + \int_0^t u(s) v(s) ds = -\gamma_1 \int_0^t |r(s)| |v(s)|^2 ds - \end{aligned}$$

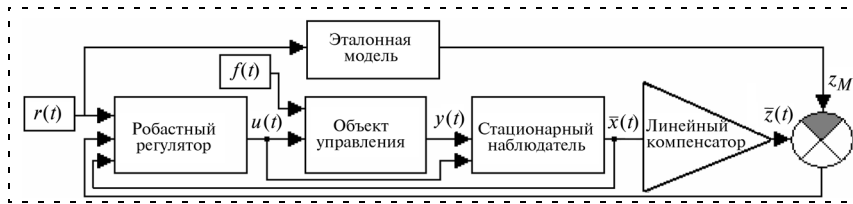


Рис. 1. Структурная схема робастной системы управления

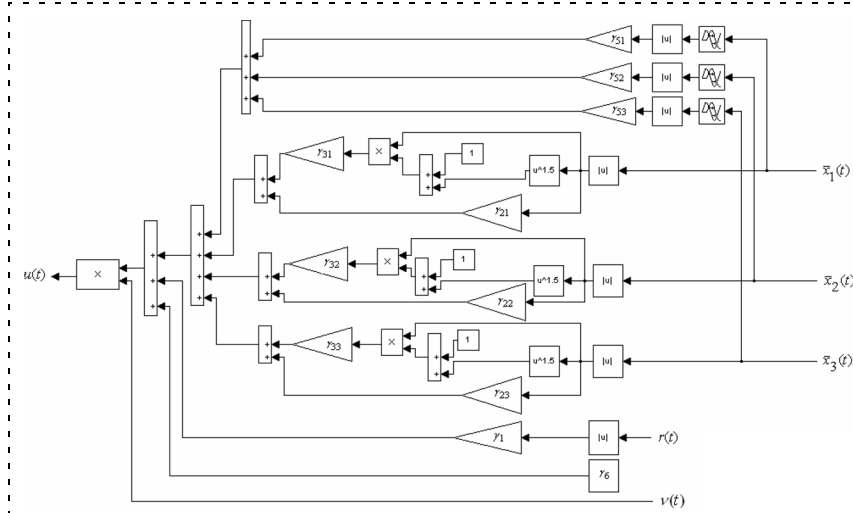


Рис. 2. Структурная схема робастного регулятора

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{2i} |\bar{x}_i(s) \|v(s)|^2 ds - \int_0^n \sum_{i=0}^n \gamma_{3i} (|\bar{x}_{k_i}(s)|^{\alpha_i+1} + 1) \times \\
 & \quad \times |\bar{x}_i \|v(s)|^2 ds - \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_{5i} |\bar{x}_i(s - \tau) \|v(s)|^2 ds - \\
 & \quad - \gamma_6 \int_0^t |v(s)|^2 ds + \int_0^t u(s) v(s) ds,
 \end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma}_{2i} = \gamma_{2i} + \tilde{\gamma}_{4i}$, так как сгруппированы интегральные оценки $\eta_2(0, t)$ и $\eta_4(0, t)$ или

$$\begin{aligned}
 & \eta(0, t) \geq \int_0^t (u(s) \text{sign}(v(s)) - \gamma_1 |r(s) \|v(s)| - \\
 & - \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{2i} |\bar{x}_i \|v(s)| - \sum_{i=1}^n \gamma_{3i} (|\bar{x}_i(s)|^{\alpha_i+1} + 1) |\bar{x}_i(s) \|v(s)| - \\
 & - \gamma_{5i} |\bar{x}_i(s - \tau) \|v(s)| - \gamma_6 |v(s)|) |v(s)| ds.
 \end{aligned}$$

Для получения явного вида закона управления $u(t)$ вида (9) при выполнении условий (10) приравняем к нулю подынтегральное выражение, стоящее в скобках. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 u(t) = & (\gamma_1 |r(t)| + \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{2i} |\bar{x}_i(t)| + \sum_{i=1}^n \gamma_{3i} (|\bar{x}_i(t)|^{\alpha_i+1} + \\
 & + 1) |\bar{x}_i(t)| + \sum_{i=1}^n \gamma_{5i} |\bar{x}_i(t - \tau)| + \gamma_6 |v(t)|). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Полученный закон управления не нарушает интегрального условия

$$\eta(0, t) = 0 \geq -\gamma^2 = \text{const}, \forall t > 0.$$

Итак, в системе (6), (13) достигнуто выполнение поставленной цели управления (10). Поскольку для системы выполнены частотное и интегральное неравенства (11) и (12), то система управления (6), (13) гиперустойчива, и, следовательно, достижимы предельные условия (10). Кроме того, поскольку цели управления (10) имеют место при любых начальных значениях $x(0)$ и в условиях априорной неопределенности $\xi \in \Xi$, то система управления (6), (13) является робастной в рассматриваемом классе Ξ .

Так как система (6), (13) и система (1)–(3), (5), (7), (13) эквиваленты, то последняя также будет робастной в заданном классе Ξ , и в ней будут достижимы цели управления (10). Структурные схемы робастной системы управления с БЭМ и наблюдателем, а также робастного регулятора представлены на рис. 1 и 2 соответственно.

Пример

Имитационное моделирование синтезированной робастной системы управления (1), (2), (4), (13) проводили с использованием математического пакета MATLAB в среде визуального моделирования Simulink.

В описании объекта управления с запаздыванием по состоянию ($\tau = 1$) вида (1) нелинейно-нестационарные функции были следующими:

$$\begin{aligned}
 A^T(x, t) = & (x_2(t), x_3(t), -2,5x_1(t) + \\
 & + 0,66 \sin 2,4t + \sqrt{|x_1|} x_1 + 0,5x_2(t) + \sin 5,6t + \\
 & + \sqrt{|x_2|} x_2 - 8,5x_3(t) + 1,5 \sin 7,8t + \sqrt{|x_3|} x_3);
 \end{aligned}$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 + 1,5 \sin 0,07\pi t & -5 + \sin 2,2\pi t & 4 + 1,2 \sin 0,8\pi t \end{pmatrix},$$

а сам объект был подвержен постоянно действующему возмущению

$$f_3(t) = 0,1 \sin(0,08t), |f_3(t)| \leq f_0^2 = 0,1.$$

Задающее воздействие $r(t)$ в системе (1), (2), (4), (7), (13) формировалось в виде

$$r(t) = 0,6 |0,5 - 0,1 \cos(0,025\pi t)|,$$

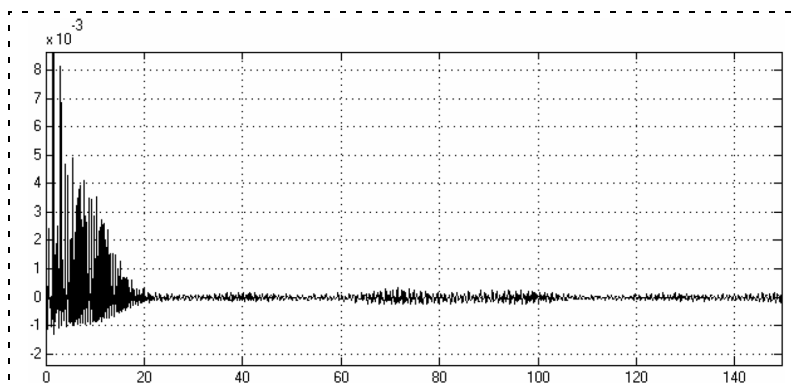


Рис. 3. Динамика ошибки $\bar{e}(t)$

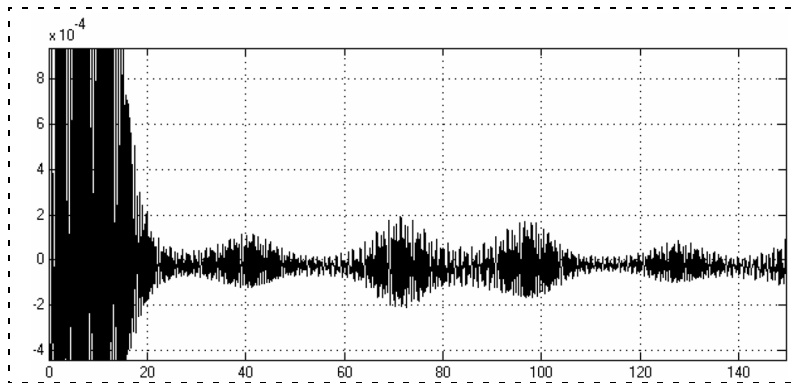


Рис. 4. Динамика рассогласования ($e_{\text{БЭМ}}(t) - e_{\text{НЭМ}}(t)$)

а параметры робастного регулятора (13) были выбраны следующими:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 70, \gamma_{21} = 220, \gamma_{22} = 209, \gamma_{23} = 170, \\ \gamma_{31} &= 105, \gamma_{32} = 90, \gamma_{33} = 85, \\ \gamma_{51} &= 158, \gamma_{52} = 140, \gamma_{53} = 135, \gamma_6 = 200. \end{aligned}$$

В эталонной модели (5) коэффициент a_0 выбран равным 10, что соответствует заданию для матрицы A_M собственных чисел $s_{M1} = s_{M2} = s_{M3} = 10$. В таком случае, рассматривая динамические свойства модели (5) по отношению к поведению $r(t)$, эталонную модель можно считать быстродействующей.

Для наблюдателя (7) собственные числа матрицы A_* заданы лежащими существенно левее собственных чисел матрицы A_M : $s_{*1} = s_{*2} = s_{*3} = -50$. При таких матрицах A_* , A_M и известной матрице L^T из выполнения условия $\det(sE - A_*) = \det(sE - A_M + NL^T)$ можно рассчитать значения как элементов матрицы $N^T = [N_1, N_2, N_3] = [120, 3600, -20000]$, так и коэффициента согласования K , а также числовые значения элементов вектора $\bar{g}^T$, необходимых для вычисления обобщенного выхода наблюдателя $\bar{v}(t)$, которые примут следующие значения:

$$\begin{aligned} K &= -g^T A_*^{-1} N = 512; \\ \bar{g}^T &= g^T K^{-1} = (1,9531 \quad 0,3906 \quad 0,0195). \end{aligned}$$

При анализе динамических характеристик системы управления при полученных параметрах наблюдателя хорошо видно, что система (1), (2), (4), (13) в условиях априорной неопределенности имеет достаточно малую ошибку $\bar{e}(t)$ (рис. 3).

Обратим внимание на то, что структурная схема системы (1), (2), (4), (13) допускает существенное упрощение, поскольку БЭМ (4) — быстродействующая и $v_M(t) \approx r(t)$, то системе управления (1), (2), (4), (13) в качестве альтернативы можно противопоставить систему (1), (2), (13). Последнее означает строгое выполнение условия $v_M(t) = r(t)$, что фактически эквивалентно замене БЭМ на неявную эталонную модель (НЭМ). Действительно, рассматривая в процессе имитационного моделирования величину динамического рассогласования ошибок в системах (1), (2), (4), (13) и (1), (2), (13), можно обоснованно утверждать (рис. 4), что предложенное упрощение правомочно, так как значение рассогласования ($e_{\text{БЭМ}}(t) - e_{\text{НЭМ}}(t)$) достаточно мало, хотя при этом ошибка в системе с неявной эталонной моделью несущественно больше.

Заключение

В статье предложен способ построения робастного закона управления для одного класса нелинейно-нестационарных объектов с запаздыванием по состоянию, обеспечивающий достаточно высокие показатели качества в следящей системе управления с неявной эталонной моделью и стационарным наблюдателем полного порядка.

Список литературы

1. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970.
2. Вольтер Б. В., Сальников И. Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. М.: Химия, 1981. 200 с.
3. Еремин Е. Л. Робастные алгоритмы нестационарных систем управления с явно-неявной эталонной моделью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2001. № 3. <http://www.neva.ru/journal>
4. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.
5. Борцов Ю. А., Поляхов Н. Д., Путов В. В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
6. Краснова С. А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. М.: ИПУ им. В. А. Трапезникова, 2003.
7. Еремин Е. Л., Кван Н. В., Семичевская Н. П. Робастное управление нелинейным объектом со стационарным наблюдателем и быстродействующей эталонной моделью // Информатика и системы управления. 2008. № 4 (18). С. 122–130.
8. Еремин Е. Л., Галаган Т. А., Семичевская Н. П. Нелинейное робастное управление нестационарными объектами. Благовещенск: Изд. Амурский гос. ун-т, 2006.

М. М. Стебулянин, канд. техн. наук, доц.,
Московский государственный
технологический университет "Станкин"
mmsteb@rambler.ru

Алгоритм асимптотической стабилизации в целом интервальных квадратичных систем с неограниченным управлением

Теоретически обоснован алгоритм стабилизации в нуле произвольной квадратичной системы с интервальностью параметров. Алгоритм основан исключительно на элементарной алгебре и ориентирован на "автоматическое" решение задач стабилизации движения механических систем в условиях частичной неопределенности. Синтез управляющих воздействий проводится в классе гладких функций без учета возможных амплитудных ограничений.

Ключевые слова: стабилизация, управление, алгоритм, функция Ляпунова, интервальная неопределенность, форма переменных

Введение

Значительная часть литературы по стабилизации объектов регулирования с неопределенностью содержит материал по линейным и квазилинейным системам. Для нелинейных объектов известны принцип бинарности [1, 2], прямой метод Ляпунова [3–5], оптимальное координирование [6], построение систем сравнения [7], экстремальное управление при декомпозициях [8] и др. В большинстве случаев система управления объектом имеет переменные параметры. С инженерной точки зрения предпочтительны общие методы, позволяющие достичь искомого результата при минимальных вычислительных затратах.

В данной статье рассмотрен алгоритм асимптотической стабилизации квадратичных интервальных систем произвольной размерности без наложенных ограничений. Особенность алгоритма состоит в том, что он построен целиком на элементарной алгебре, и потому вычислительные затраты на его программную реализацию незначительны.

Постановка задачи

Дан объект с возмущенным движением, описываемым следующей квадратичной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{w}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}(t) w_j + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \gamma_{kl}^{(i)}(t) w_k w_l + \varphi_i(w, t),$$

$$w \in R^m, i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где w_i — возмущенные переменные; $\varphi_i(\cdot)$ — искомые функции этих переменных, называемые ниже *управлениями*; t — время.

Неизвестные (в общем случае переменные) значения коэффициентов $\lambda_{ij}(t)$, $\gamma_{kl}^{(i)}(t)$ ограничены "в углах":

$$\lambda_{ij}^{\min} < \lambda_{ij}(t) < \lambda_{ij}^{\max}, \quad \gamma_{kl}^{\min} < \gamma_{kl}^{(i)}(t) < \gamma_{kl}^{\max},$$

$$0 < t < \infty. \quad (2)$$

Задачей управления объектом является асимптотическая стабилизация системы (1) в нуле. К такой постановке может быть сведена, например, задача управления движением многосвязной механической системы в условиях неточного знания параметров.

Назовем стабилизацию системы ε жесткой, если выполнено неравенство: $\max_i \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| < \varepsilon, 0 < t < \infty$. Ве-

личина ε может рассматриваться как косвенная характеристика сложности реализации обратных связей системы; $\varepsilon = 0$ характеризует обратные связи с постоянными коэффициентами.

Требуется при отсутствии ограничений на $\varphi_i(\cdot)$ решить задачу при $\varepsilon = 0$.

Весь вектор состояния w является измеримым.

Лемма о формах

Метод построения функций Ляпунова из класса форм четных степеней описан в работе [9]. Приводимый ниже материал можно рассматривать в контексте данной работы.

Будем считать управления φ_i стационарными и выберем их из условия отрицательно определенной полной производной на решениях (1) функции Ля-

пунова $V(w) = \sum_{i=1}^m w_i^2$. Это означает решение относительно φ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, при всех w следующего неравенства:

$$\sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}(t) w_j + \sum_{i=1}^m w_i \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \gamma_{kl}^{(i)}(t) w_k w_l +$$

$$+ \sum_{i=1}^m w_i \varphi_i(w) \leq 0, \quad (3)$$

причем равенство должно достигаться только при $w = 0$.

Введем обозначение. Функцию k переменных $w_1, \dots, w_k$ вида $f(w) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}$,

где $a_{i_1, \dots, i_n}$ — коэффициенты, назовем формой n -го порядка и обозначим с помощью четырех символов:

$Fr_k^n(w)$. Здесь приняты следующие правила обозначения:

- 1) первая буква любой формы всегда F ;
- 2) две формы равны тождественно, если соответственно одинаковы все их символы;
- 3) если какой-либо символ одной формы не равен соответствующему символу другой, то даже при ра-

венстве остальных символов коэффициенты этих форм в общем случае никак не связаны друг с другом.

Для последующего понимания доказательства, приведенного в **Приложении**, уточним следующее. Символ r по отдельности не выражает вектор коэффициентов формы; он введен только для дополнительной "степени свободы" в ее обозначении. Так, векторы коэффициентов форм Fr_k^n и Fr_k^m при $m \neq n$ могут быть в соответствии с правилом 3) никак не связаны друг с другом, равно как и коэффициенты форм Fr_k^n и Fr_l^n при $l \neq k$ либо форм Fr_k^n и Fp_k^n . Однако, если все символы двух форм равны соответственно, то по правилу 2) это означает *тождественное равенство* форм.

Если коэффициенты $a_{i_1, \dots, i_n}$ имеют интервальную неопределенность, то форму назовем нестрогой и обозначим $\tilde{F}r_k^n(w)$; иначе форма — строгая.

Справедлива следующая **Лемма**.

Для данной нестрогой формы 3-го порядка $\tilde{F}r_m^3(w)$ переменного $w \in R^m$ всегда можно построить такие строгие формы $Fr_m^2(w)$, $Fr_m^4(w)$, что функция $\psi(w) = Fr_m^2(w) + Fr_m^4(w) - \tilde{F}r_m^3(w)$ будет положительно определенной.

Обозначим некоторое число c из интервала (c_1, c_2) через $(c_1 \rightarrow c_2)$ и без ограничения общности зададим форму $\tilde{F}r_m^3(w)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{F}r_m^3 = & \sum_{i=1}^m (a_i^{\min} \rightarrow a_i^{\max}) w_i^3 + \\ & + \sum_{j=2}^m w_j^2 \sum_{i=1}^{j-1} (g_{ji}^{\min} \rightarrow g_{ji}^{\max}) w_i + \\ & + \sum_{j=2}^m w_j \sum_{i=1}^{j-1} (a_{ji}^{\min} \rightarrow a_{ji}^{\max}) w_i^2 + \\ & + \delta(m) \sum_{j=3}^m w_j \sum_{i=2}^{j-1} \sum_{l=1}^{i-1} (b_{jil}^{\min} \rightarrow b_{jil}^{\max}) w_i w_l, \quad (4) \\ \delta(m) = & 0, m = 2; \delta(m) = 1, m \geq 3. \end{aligned}$$

Будем при этом полагать $Fr_n^0 = a = \text{const}$, $Fr_0^n = 0$ при любом n .

Тогда лемме удовлетворяет формула

$$\begin{aligned} Fr_m^2 + Fr_m^4 = & \sum_{k=1}^m [(1 + 2w_k^2)(\alpha_k w_k^2 + w_k Fr_{k-1}^1) + \\ & + (1 + w_k^2)Fs_{k-1}^2]; \quad (5) \end{aligned}$$

$$Fr_{k-1}^1 = \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\alpha}_{ki} w_i, \quad \tilde{\alpha}_{ki} = \frac{g_{ki}^{\min} + g_{ki}^{\max}}{2},$$

$$\alpha_k > \max(2, |a_k^{\min}|, |a_k^{\max}|) + 1;$$

$$\begin{aligned} Fs_{k-1}^2 = & \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{c'_{ki}} w_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{c''_{ki}} w_i \right)^2 + \\ & + \sum_{k>i>j} \beta_{kij} (w_i^2 + w_j^2) = \\ = & \sum_{i=1}^{k-1} \chi_{ki} w_i^2 + \sum_{k>i>j} \chi_{kij} w_i w_j + \sum_{k>i>j} \beta_{kij} (w_i^2 + w_j^2); \end{aligned}$$

$$c'_{ki} \geq \max(|a_{ki}^{\min}|, |a_{ki}^{\max}|, \tilde{\alpha}_{ki}^2); \quad c''_{ki} = \frac{(g_{ki}^{\max} - g_{ki}^{\min})^2}{4};$$

$$\begin{aligned} \beta_{kij} > & \max \left(\frac{|b_{kij}^{\min} - 2\sqrt{c'_{ki} c'_{kj}}|}{2}, \frac{|b_{kij}^{\max} - 2\sqrt{c'_{ki} c'_{kj}}|}{2}, \right. \\ & \left. \frac{|\alpha_{ki} \alpha_{kj} - 2\sqrt{c'_{ki} c'_{kj}}|}{2} \right) + 2\sqrt{c''_{ki} c''_{kj}}; \end{aligned}$$

$$\chi_{ki} = c'_{ki} + c''_{ki}, \quad \chi_{kij} = 2(\sqrt{c'_{ki} c'_{kj}} + \sqrt{c''_{ki} c''_{kj}}).$$

Доказательство леммы и формулы (5) приведены в **Приложении**.

Алгоритм построения управлений

Вернемся к рассмотрению неравенства (3). В нем обозначим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m w_s \sum_{i=1}^m \lambda_{ij}(t) w_j = & \tilde{F}r_m^2(w); \\ \sum_{i=1}^m w_i \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \gamma_{kij}^{(i)} w_k w_j = & \tilde{F}r_m^3(w). \quad (6) \end{aligned}$$

Представив $\phi_i(w) = \phi_i'(w) + \phi_i''(w)$, выберем ϕ_i' , ϕ_i'' из следующих условий соответственно:

$$- \sum_{i=1}^m w_i \phi_i'(w) = Ft_m^2(w) \geq \tilde{F}r_m^2(w); \quad (7)$$

$$- \sum_{i=1}^m w_i \phi_i''(w) = Fl_m^2(w) + Fl_m^4(w) \geq \tilde{F}r_m^3(w), \quad (8)$$

при этом равенства должны достигаться только при $w = 0$.

Для решения (7) запишем согласно (1), (2):

$$\begin{aligned} \tilde{F}r_m^2(w) = & \sum_{i=1}^m (\lambda_{ii}^{\min} \rightarrow \lambda_{ii}^{\max}) w_i^2 + \\ & + \sum_{i \neq j} (\lambda_{ij}^{\min} \rightarrow \lambda_{ij}^{\max}) w_i w_j \quad (9) \end{aligned}$$

и применим подход в соответствии с (П8) (см. **Приложение**). Получим:

$$\begin{aligned} Ft_m^2(w) &= (\sum_i \sqrt{c_i} w_i)^2 + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} (w_i^2 + w_j^2) = \\ &= (\sum_i \sqrt{c_i} w_i)^2 + \sum_{i > j} (\beta_{ij} + \beta_{ji}) (w_i^2 + w_j^2); \\ c_i &\geq \max(|\lambda_{ii}^{\min}|, |\lambda_{ii}^{\max}|), \\ \beta_{ij} + \beta_{ji} &> \max\left(\frac{|\lambda_{ij}^{\min} - 2\sqrt{c_i c_j}|}{2}, \frac{|\lambda_{ij}^{\max} - 2\sqrt{c_i c_j}|}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

После этого представим решение (7) в виде

$$-\varphi'_i(w) = (c_i + \sum_{j \neq i} (\beta_{ij} + \beta_{ji})) w_i + \sqrt{c_i} \sum_{j \neq i} \sqrt{c_j} w_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Для выполнения (8) сначала применим формулу (5). Сумму форм представим в виде

$$\begin{aligned} Ft_m^2(w) + Ft_m^4(w) &= \sum_i a_{ii} w_i^2 + \sum_{i > j} b_{ij} w_i w_j + \sum_i s_i w_i^4 + \\ &+ \sum_{i > j} r_{ij} w_i^3 w_j + \sum_{i \neq j} g_{ij} w_i^2 w_j^2 + \sum_{i > j > k} \lambda_{ijk} w_i^2 w_j w_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Все коэффициенты в (12) вычисляются в соответствии с (5).

Далее предложим частное решение неравенства (8) по формуле

$$\begin{aligned} -\varphi''_k(w) &= a_{kk} w_k^2 + \sum_{j \neq k} \frac{b_{kj}}{2} w_j + \\ &+ s_k w_k^3 + w_k^2 \sum_{k > j} \frac{r_{kj}}{2} w_j + \sum_{k < j} \frac{r_{jk}}{2} w_j^3 + \\ &+ w_k \sum_{j \neq k} \frac{g_{kj}}{2} w_j^2 + \sum_{k > i > j} \frac{\lambda_{kij}}{3} w_k w_i w_j + \\ &+ \sum_{j > k > i} \frac{\lambda_{jki}}{3} w_j^2 w_i + \sum_{j > i > k} \frac{\lambda_{jik}}{3} w_j^2 w_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Окончательно получаем $\varphi_i(w)$, $i = 1, \dots, m$, в виде суммы зависимостей (11) и (13).

Пример

В целях сокращения объема статьи пример должен относиться к наиболее простому случаю, но при этом полностью иллюстрировать теоретический результат. На примере системы с двумя переменными этого не достичь, так как тогда в (4) пришлось бы положить $\delta(m) = 0$, что привело бы к существенному упрощению и потере некоторых вычисляемых параметров. Поэтому рассмотрим пример системы третьего порядка.

Требуется управлениями $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, стабилизировать в нуле следующую дифференциальную систему переменного $x \in R^3$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 \rightarrow 3)x_1 + (2 \rightarrow 4)x_2 + (3 \rightarrow 5)x_3 + \\ &+ (0 \rightarrow 3)x_1^2 + (-1 \rightarrow 1)x_2^2 + (-1 \rightarrow 0)x_3^2 + \\ &+ (1 \rightarrow 2)x_1 x_2 + (-2 \rightarrow 1)x_2 x_3 + \varphi_1(x); \\ \dot{x}_2 &= (0 \rightarrow 1)x_2 + (-5 \rightarrow -2)x_3 + \\ &+ (-7 \rightarrow 0)x_1 x_3 + (1 \rightarrow 2)x_1^2 + \varphi_2(x); \\ \dot{x}_3 &= (2 \rightarrow 5)x_1 + (-1 \rightarrow 0)x_2 + (0 \rightarrow 1)x_2^2 + \\ &+ (-2 \rightarrow 2)x_1 x_2 + (-5 \rightarrow -3)x_1 x_3 + \varphi_3(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Решение. В соответствии с (6) составляем формы $\tilde{F} r_3^2(x)$, $\tilde{F} r_3^3(x)$ из равенства $\tilde{F} r_3^2(x) + \tilde{F} r_3^3(x) = \sum_i x_i (\dot{x}_i - \varphi_i(x))$.

После приведения однородных членов получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F} r_3^2(x) &= (1 \rightarrow 3)x_1^2 + (0 \rightarrow 1)x_2^2 + (2 \rightarrow 4)x_1 x_2 + \\ &+ (5 \rightarrow 10)x_1 x_3 + (-6 \rightarrow -2)x_2 x_3; \\ \tilde{F} r_3^3(x) &= (0 \rightarrow 3)x_1^3 + (-1 \rightarrow 1)x_1 x_2^2 + \\ &+ (2 \rightarrow 4)x_1^2 x_2 + (-6 \rightarrow -3)x_1 x_3^2 + \\ &+ (0 \rightarrow 1)x_2^2 x_3 + (-11 \rightarrow 3)x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычислим сначала $Ft_m^2(w) \geq \tilde{F} r_m^2(w)$ при $m = 3$ в соответствии с (7). Для этого запишем коэффициенты, входящие в (9), для формы $\tilde{F} r_3^2$ в (15):

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{\min} &= 1, \lambda_{11}^{\max} = 3, \lambda_{22}^{\min} = 0, \lambda_{22}^{\max} = 1, \\ \lambda_{12}^{\min} &= 2, \lambda_{12}^{\max} = 4, \lambda_{13}^{\min} = 5, \lambda_{13}^{\max} = 10, \\ \lambda_{23}^{\min} &= -6, \lambda_{23}^{\max} = -2, \lambda_{33}^{\min} = \lambda_{33}^{\max} = 0. \end{aligned}$$

Теперь по формулам (10) находим для данных коэффициентов:

$$\begin{aligned} c^1 &= 3,1 \geq \max(1; 3); c_2 = 1,1 \geq \max(1; 0); \\ c_3 &= 0 \geq \max(0; 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{12} + \beta_{21} &= 0,9 > \max(0,5|2 - 2\sqrt{3,1 \cdot 1,1}|; \\ &0,5|4 - 2\sqrt{3,1 \cdot 1,1}|) = 0,8465; \end{aligned}$$

$$\beta_{13} + \beta_{31} = 5,1 > \max(0,5|5 - 0|; 0,5|10 - 0|);$$

$$\beta_{23} + \beta_{32} = 3,1 > \max(0,5|-6 - 0|; 0,5|-2 - 0|).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Ft_3^2(x) &= (\sqrt{3,1} x_1 + \sqrt{1,1} x_2)^2 + 0,9(x_1^2 + x_2^2) + \\ &+ 5,1(x_1^2 + x_3^2) + 3,1(x_2^2 + x_3^2). \end{aligned}$$

Затем по (11) определяем части управлений $\varphi'_i(w)$, $i = 1, 2, 3$:

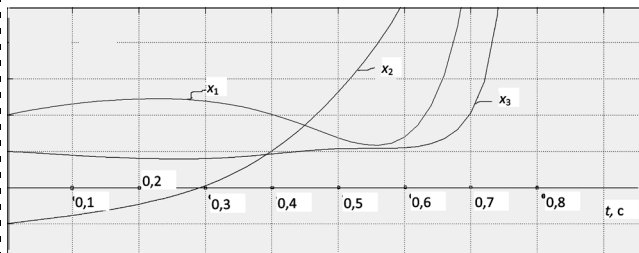
$$\begin{aligned}\varphi'_1(x) &= -[c_1 + (\beta_{12} + \beta_{21}) + (\beta_{13} + \beta_{31})]x_1 - \\ &- \sqrt{c_1}(\sqrt{c_2}x_2 + \sqrt{c_3}x_3) = -9,1x_1 - 1,85x_2; \\ \varphi'_2(x) &= -[c_2x_2 + (\beta_{21} + \beta_{12}) + (\beta_{23} + \beta_{32})]x_2 - \\ &- \sqrt{c_2}(\sqrt{c_1}x_1 + \sqrt{c_3}x_3) = -5,1x_2 - 1,85x_1; \\ \varphi'_3(x) &= -[c_3 + (\beta_{31} + \beta_{13}) + (\beta_{32} + \beta_{23})]x_3 - \\ &- \sqrt{c_3}(\sqrt{c_1}x_1 + \sqrt{c_2}x_2) = -8,2x_3.\end{aligned}\quad (16)$$

Теперь представим коэффициенты формы $\tilde{F}r_3^3(x)$ в соответствии с (4):

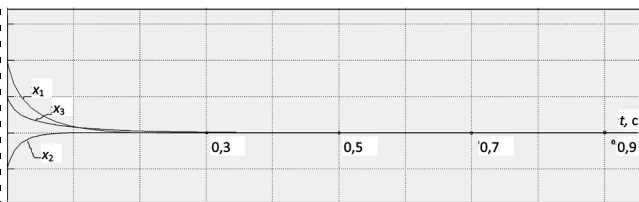
$$\begin{aligned}a_1 &= (0 \rightarrow 3), a_2 = a_3 = 0; \\ g_{21} &= (-1 \rightarrow 1), g_{31} = (-6 \rightarrow -3), g_{32} = 0; \\ a_{21} &= (2 \rightarrow 4), a_{31} = 0, a_{32} = (0 \rightarrow 1); b_{321} = (-11 \rightarrow 3)\end{aligned}$$

и вычислим коэффициенты, участвующие в зависимости (5):

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 4,1 > \max(0; 3; 2) + 1; \\ \alpha_2 &= \alpha_3 = 3,1 > \max(0, 0, 2) + 1; \\ \tilde{\alpha}_{21} &= 0,5(1 - 1) = 0; \\ \tilde{\alpha}_{31} &= 0,5(-3 - 6) = -4,5; \tilde{\alpha}_{32} = 0; \\ c'_{21} &= 4,1 > \max(2; 4, 0); \\ c''_{21} &= 1,1 > 0,25(1 + 1)^2; \chi_{21} = 5,2; \\ c'_{31} &= 20,26 > \max(0; 0; 4,5^2); \\ c''_{31} &= 2,26 > 0,25(-3 + 6)^2; \chi_{31} = 22,52;\end{aligned}$$



а)



б)

Собственное (а) и стабилизированное (б) решения системы (14)

$$c'_{32} = 1,1 \geq \max(0; 1; 0); c''_{32} = 0; \chi_{32} = 1,1;$$

$$\begin{aligned}\beta_{321} &= 10,3 > \max(0,5|-11 - 2\sqrt{20,26 \cdot 1,1}|; \\ &0,5|3 - 2\sqrt{20,26 \cdot 1,1}|; 0,5|0 - 2\sqrt{20,26 \cdot 1,1}|) + \\ &+ 2\sqrt{2,26} \cdot 0;\end{aligned}$$

$$\chi_{321} = 2(\sqrt{20,26 \cdot 1,1} + \sqrt{2,26 \cdot 0}) = 9,44.$$

Далее, с помощью этих коэффициентов вычисляем формы в (5):

$$Fr_1^1 = \tilde{\alpha}_{21}x_1 = 0; Fr_2^1 = \tilde{\alpha}_{31}x_1 + \tilde{\alpha}_{32}x_2 = -4,5x_1;$$

$$Fs_2^2 = \chi_{21}x_1^2 = 5,2x_1^2;$$

$$\begin{aligned}Fs_2^2 &= \chi_{31}x_1^2 + \chi_{32}x_2^2 + \chi_{321}x_1x_2 + \beta_{321}(x_1^2 + x_2^2) = \\ &= 32,82x_1^2 + 9,44x_1x_2 + 11,4x_2^2.\end{aligned}$$

Окончательно по (5) получаем (в конечном результате в скобки заключены суммы, соответствующие группам слагаемых в (12)):

$$\begin{aligned}Fr_3^2(x) + Fr_3^4(x) &= (1 + 2x_1^2)(\alpha_1x_1^2 + x_1Fr_0^1) + \\ &+ (1 + x_1^2)Fs_0^2 + (1 + 2x_2^2)(\alpha_2x_2^2 + x_2Fr_1^1) + \\ &+ (1 + x_2^2)Fs_1^2 + (1 + 2x_3^2)(\alpha_3x_3^2 + x_3Fr_2^1) + \\ &+ (1 + x_3^2)Fs_2^2 = (1 + 2x_1^2)(4,1x_1^2 + x_1 \cdot 0) + \\ &+ (1 + x_1^2) \cdot 0 + (1 + 2x_2^2)(3,1x_2^2 + x_2 \cdot 0) + \\ &+ (1 + x_2^2) \cdot 5,2x_1^2 + (1 + 2x_3^2)(3,1x_3^2 + x_3 \cdot (-4,5x_1)) + \\ &+ (1 + x_3^2)(32,82x_1^2 + 9,44x_1x_2 + 11,4x_2^2) = \\ &= (42,12x_1^2 + 14,5x_2^2 + 3,1x_3^2) + \\ &+ (9,44x_1x_2 - 4,5x_1x_3) + (8,2x_1^4 + 6,2x_2^4 + 6,2x_3^4) - \\ &- 9x_1x_3^3 + (5,2x_1^2x_2^2 + 32,82x_1^2x_3^2 + 11,4x_2^2x_3^2) + \\ &+ 9,44x_1x_2x_3^2.\end{aligned}$$

На основании (13) вычисляем части управлений φ''_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\varphi''_1 &= -42,12x_1 - 4,72x_2 + 2,25x_3 - 8,2x_1^3 + \\ &+ 4,5x_3^3 - 2,6x_1x_2^2 - 16,41x_1x_3^2 - 3,147x_2x_3^2; \\ \varphi''_2 &= -14,5x_2 - 4,72x_1 - 6,2x_2^3 - 2,6x_2x_1^2 - \\ &- 5,7x_2x_3^2 - 3,147x_1x_3^2; \\ \varphi''_3 &= -3,1x_3 + 2,25x_1 - 6,2x_3^3 + 4,5x_3^2x_1 - \\ &- 16,41x_1^2x_3 - 5,7x_2^2x_3 - 3,147x_1x_2x_3.\end{aligned}\quad (17)$$

В результате управления $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, получаем в виде сумм соответственных зависимостей в (16) и (17) с постоянными параметрами.

На рисунке показан результат моделирования собственных ($\varphi_i(x) \equiv 0$) и стабилизированных полученными управлениями решений системы (14) с случайным набором коэффициентов. Приведенный результат подтверждает справедливость формул (5), (11), (13).

Выводы

- Любая интервальная квадратичная дифференциальная система без ограничений на управления асимптотически 0-жестко стабилизируется в нуле.
- Стабилизирующие управления можно получить в классе элементарных функций переменных состояния на основе универсальной формулы, что позволяет "автоматически" найти решение задачи стабилизации конкретной квадратичной системы.

Приложение

Доказательство леммы

Используем метод математической индукции. При $m = 1$ утверждение верно, так как для данного a_3 можно подобрать такие $a_4, a_2 > 0$, что $a_3^2 - a_4 a_2 < 0$, $\psi(w \neq 0) = a_4 w^4 - a_3 w^3 + a_2 w^2 > 0$, $\psi(0) = 0$.

Пусть утверждение верно для $m - 1$, докажем его справедливость для любого m .

Будем полагать $Fr_n^0 = a = \text{const}$, $Fr_0^n = 0$ при любом n . Очевидно, что

$$Fr_{n+1}^k = Fr_n^k + w_{n+1} Fr_{n+1}^{k-1}, k \geq 1. \quad (\text{П1})$$

Аналогичное равенство справедливо и для нестрогих форм.

Составим сравнение: $Fr_m^2 + Fr_m^4 \wedge \tilde{F} r_m^3$ и преобразуем его по (П1):

$$Fr_{m-1}^2 + w_m Fr_m^1 + Fr_{m-1}^4 + w_m Fr_m^3 \wedge \tilde{F} r_{m-1}^3 + w_m \tilde{F} t_m^2. \quad (\text{П2})$$

Полагая $Fr_{m-1}^2 = Fa_{m-1}^2 + Fs_{m-1}^2$, выберем Fa_{m-1}^2, Fr_{m-1}^4 из условия

$$Fa_{m-1}^2 + Fr_{m-1}^4 \geq \tilde{F} r_{m-1}^3, \quad (\text{П3})$$

что по допущению индукции можно сделать, при этом левая часть неравенства будет являться положительно определенной функцией аргумента

$$w_* = (w_1 \dots w_{m-1})^T.$$

Представляя $Fr_m^3 = w_m Fk_m^2 + w_m^2 Fp_m^1$; $\tilde{F} t_m^2 = \tilde{F} t_{m-1}^2 + w_m \tilde{F} t_m^1$, приходим с учетом (П3) к сравнению:

$$Fs_{m-1}^2 + w_m Fr_m^1 + w_m^2 Fk_m^2 + w_m^3 Fp_m^1 \wedge w_m \tilde{F} t_{m-1}^2 + w_m^2 \tilde{F} t_m^1. \quad (\text{П4})$$

Выберем форму Fk_m^2 из условия $Fk_m^2 = Fs_{m-1}^2 + w_m Fp_m^1$, полагая при этом $Fr_m^1 = Fp_m^1$, и перепишем (П4) в виде

$$(w_m^2 + 1)Fs_{m-1}^2 + (2w_m^3 + w_m)Fr_m^1 \wedge w_m \tilde{F} t_{m-1}^2 + w_m^2 \tilde{F} t_m^1 \leq |w_m| \tilde{F} t_{m-1}^2 + w_m^2 \tilde{F} t_m^1. \quad (\text{П5})$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} Fr_m^1 &= Fr_{m-1}^1 + \alpha_m w_m + \gamma w_m, \gamma > 1; \\ \tilde{F} t_m^1 &= \tilde{F} t_{m-1}^1 + (a_m^{\min} \rightarrow a_m^{\max}) w_m; \\ \tilde{F} t_{m-1}^1 &= \sum_{i=1}^{m-1} (g_{mi}^{\min} \rightarrow g_{mi}^{\max}) w_i \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

и потребуем выполнения неравенства

$$\alpha_m > \max(2, |a_m^{\min}|, |a_m^{\max}|). \quad (\text{П6a})$$

В интервалах $(g_{mi}^{\min}, g_{mi}^{\max})$ зафиксируем числа

$$\tilde{\alpha}_{mi} = \frac{g_{mi}^{\min} + g_{mi}^{\max}}{2} \text{ и представим:}$$

$$\begin{aligned} Fr_{m-1}^1 &= \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{\alpha}_{mi} w_i; \\ \tilde{F} t_{m-1}^1 - Fr_{m-1}^1 &= \tilde{F} x_{m-1}^1, \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

$$\text{где } \tilde{F} x_{m-1}^1 = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{g_{mi}^{\min} - g_{mi}^{\max}}{2} \rightarrow \frac{g_{mi}^{\max} - g_{mi}^{\min}}{2} \right) w_i.$$

Положим далее в (П5) $Fs_{m-1}^2 = Fc_{m-1}^2 + Fd_{m-1}^2$.

Форму Fc_{m-1}^2 выберем из условий:

- 1) Fc_{m-1}^2 положительно определена;
- 2) $Fc_{m-1}^2 \geq \max(|\tilde{F} t_{m-1}^2|, [Fr_{m-1}^1]^2)$,

а для формы Fd_{m-1}^2 потребуем:

- 1) Fd_{m-1}^2 положительно определена;
- 2) $Fd_{m-1}^2 \geq [\tilde{F} x_{m-1}^1]^2$,

при этом неравенства в пунктах 2 также положительно определены по w_* .

Правило построения Fc_{m-1}^2 следует из решения неравенства

$$Fc_{m-1}^2 > \pm Fz_{m-1}^2,$$

где Fz_{m-1}^2 — некоторая заданная (в общем случае нестрогая) форма.

Выполняется:

$$\begin{aligned} \pm Fz_{m-1}^2 &= \pm \sum_i (q_i^{\min} \rightarrow q_i^{\max}) w_i^2 \pm \\ &\pm \sum_{i>j} (p_{ij}^{\min} \rightarrow p_{ij}^{\max}) w_i w_j \leq \sum_i |q_i^*| w_i^2 \pm \\ &\pm \sum_{i>j} (p_{ij}^{\min} \rightarrow p_{ij}^{\max}) w_i w_j \leq \sum_i c_i w_i^2 \pm \\ &\pm \sum_{i>j} (p_{ij}^{\min} \rightarrow p_{ij}^{\max}) w_i w_j = (\sum_i \sqrt{c_i} w_i)^2 \pm \\ &\pm \sum_{i>j} ((p_{ij}^{\min} \rightarrow p_{ij}^{\max}) \mp 2\sqrt{c_i c_j}) w_i w_j \leq \\ &\leq (\sum_i \sqrt{c_i} w_i)^2 + \sum_{i>j} \beta_{ij} (w_i^2 + w_j^2) = Fy_{m-1}^2; \quad (\text{П8}) \end{aligned}$$

$$c_i \geq |q_i^*| = \max(|q_i^{\min}|; |q_i^{\max}|);$$

$$\beta_{ij} > \max\left(\frac{|p_{ij}^{\min} \mp 2\sqrt{c_i c_j}|}{2}, \frac{|p_{ij}^{\max} \mp 2\sqrt{c_i c_j}|}{2}\right).$$

При этом функция $Fy_{m-1}^2 \mp Fz_{m-1}^2$ положительно определена по w_* .

Поскольку под формой $\pm Fz_{m-1}^2$ в (П8) надо рассматривать как $\pm \tilde{F} t_{m-1}^2$, так и $[Fr_{m-1}^1]^2$, получаем форму Fc_{m-1}^2 в виде:

$$\begin{aligned} Fc_{m-1}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{c'_i} w_i\right)^2 + \sum_{i>j} \beta'_{mij} (w_i^2 + w_j^2); \\ c'_i &\geq \max\left(|a_{mi}^{\min}|; |a_{mi}^{\max}|; \frac{(g_{mi}^{\min} + g_{mi}^{\max})^2}{4}\right); \\ \beta'_{mil} &> \max\left(\frac{|b_{mil}^{\min} \mp 2\sqrt{c'_{mi} c'_{ml}}|}{2}, \right. \\ &\left. \frac{|b_{mil}^{\max} \mp 2\sqrt{c'_{mi} c'_{ml}}|}{2}, \frac{|\tilde{\alpha}_{mi} \tilde{\alpha}_{ml} - 2\sqrt{c'_{mi} c'_{ml}}|}{2}\right). \quad (\text{П9}) \end{aligned}$$

В соответствии с (П8) получаем результат для формы Fd_{m-1}^2 :

$$Fd_{m-1}^2 = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{c''_i} w_i\right)^2 + \sum_{i>j} \beta_{ij}'' (w_i^2 + w_j^2);$$

$$c''_i = \frac{(g_{mi}^{\max} - g_{mi}^{\min})^2}{4};$$

$$\beta_{ij}'' > \frac{1}{2} (g_{mi}^{\max} - g_{mi}^{\min})(g_{mj}^{\max} - g_{mj}^{\min}) = 2\sqrt{c''_i c''_j}. \quad (\text{П10})$$

При выполнении (П9), (П10) перейдем от (П5) к системе сравнений:

$$\begin{aligned} (w_m^2 - |w_m| + 1)Fc_{m-1}^2 + (2w_m^3 - w_m^2 + w_m)Fr_{m-1}^1 + \\ + w_m^2(2\alpha_m w_m^2 - (\alpha_m^{\min} \rightarrow g_{mm}^{\max})w_m + \alpha_m) \wedge 0; \quad (\text{П11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w_m^2 + 1)Fd_{m-1}^2 - w_m^2 \tilde{F} x_{m-1}^{(1)} + \\ + \gamma w_m^2 (2w_m^2 + 1) \wedge 0. \quad (\text{П12}) \end{aligned}$$

Оценим (П11). Поскольку

$$\begin{aligned} Fc_{m-1}^2 &= [Fr_{m-1}^1]^2 + \delta(w_*); \delta(w_*) > 0; \\ w_* &\neq 0, \delta(0) = 0, \quad (\text{П13}) \end{aligned}$$

то, обозначая $Fr_{m-1}^1 = u$, перейдем к сравнению

$$\begin{aligned} (w_m^2 - |w_m| + 1)u^2 + w_m(2w_m^2 - w_m + 1)u + \\ + w_m^2(2\alpha_m w_m^2 - (a_m^{\min} \rightarrow a_m^{\max})w_m + \alpha_m) \wedge 0. \quad (\text{П14}) \end{aligned}$$

Очевидно, при всех w выполняется условие $w_m^2 - |w_m| + 1 > 0$. Запишем дискриминант

$$\begin{aligned} D &= -4(w_m^2 - |w_m| + 1)w_m^2(2w_m^2\alpha_m - \\ &- (a_m^{\min} \rightarrow a_m^{\max})w_m + \alpha_m) + w_m^2(2w_m^2 - w_m + 1)^2. \end{aligned}$$

При выполнении (П6а) и $w_m \neq 0$ будем иметь $D < 0$. Действительно, учитывая, что выполняется условие

$$\begin{aligned} 2w_m^2\alpha_m - (a_m^{\min} \rightarrow a_m^{\max})w_m + \alpha_m \geq 2w_m^2\alpha_m - \\ - \alpha_m|w_m| + \alpha_m, \text{ выполним сравнение } \left(w_m^2 - \frac{w_m}{2} + \right. \\ \left. + 0,5\right)^2 \wedge (w_m^2 - |w_m| + 1)(2w_m^2\alpha_m - \alpha_m|w_m| + \alpha_m). \end{aligned}$$

При $t > 0$, $\alpha_m > 2$ справедливо неравенство

$$\left(t^2 + \frac{t}{2} + 0,5\right)^2 < \alpha_m(t^2 - t + 1)(2t^2 - t + 1),$$

и, следовательно, при $w_m \neq 0$ имеем $D < 0$, что приводит (П11) к знаку $>$.

При $w_m = 0$ будет $D = 0$, но при этом (П14) вследствие (П13) обращается в равенство только при $w^* = 0$. Нетрудно видеть, что сравнение (П12) ведет себя аналогично при $\gamma > 1$.

Отсюда следует, что при сделанных по ходу доказательства выборах форм сравнение (П4) имеет знак $>$ (больше) везде, кроме $w = [w' \ w_m]^T = 0$.

Условно обозначим $Fr_n^{2+4} = Fr_n^2 + Fr_n^4$ и рассмотрим первую разность последовательности $\{Fr_n^{2+4}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Общий член $\Delta(Fr_n^{2+4})$ последовательности первой разности, как нетрудно заметить, выражается формулой, соответствующей левой части сравнения (П5) с учетом (П6). Отсюда на основании равенства $Fr_m^{2+4} = Fr_0^{2+4} + \sum_{n=1}^m \Delta(Fr_n^{2+4})$ получаем формулу (5) основного раздела. Лемма доказана.

Список литературы

1. Емельянов С. В. Новые типы обратной связи. Синтез нелинейного управления в условиях неопределенности // В кн.:

С. В. Емельянов. Избранные труды по теории управления. М.: Наука, 2006. С. 14–29.

2. Emelyanov S. V. Binary control systems. Moscow: IRIMS, 1984. 312 p.

3. Молчанов А. П., Пятницкий Е. С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 5–15.

4. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // Автоматика и телемеханика. 1964. № 7. С. 1017–1029.

5. Смирнов Е. Я., Павликов В. Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В. Управление движениями механических систем. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985. 312 с.

6. Шаршеналиев Ж. Ш., Миркин Б. М., Лыченко Н. М. Проектирование децентрализованного координированного управления нелинейными системами с интервальными неопределенностями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 12. С. 21–27.

7. Леонов Г. А. Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений // В кн.: Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. К 80-летию со дня рождения В. А. Якубовича. Под ред. А. Х. Гелига, Г. А. Леонова, А. Л. Фрадкова. М.: Физматлит, 2008. С. 373–408.

8. Пятницкий Е. С. Принцип декомпозиции в управлении механическими и электромеханическими системами. // Известия АН. Техническая кибернетика. 1990. № 6. С. 4–15.

9. Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакшин П. В. Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992. С. 302.

Поздравляем Юбилера!



Ректору Московского государственного университета приборостроения и информатики, заведующему кафедрой "Автоматизированные системы управления и обработки информации", члену редколлегии журнала "Мехатроника, автоматизация, управление", лауреату премии Правительства РФ, доктору технических наук, профессору

**Игорю Владимировичу
ГОЛУБЯТНИКОВУ**

исполнилось 50 лет

И. В. Голубятников — известный ученый в области мехатроники и информационных технологий, создатель одной из отечественных научных школ в области информационной безопасности, является автором более 300 научных трудов, в том числе 10 монографий. Уделяет большое внимание подготовке научных кадров: им подготовлено 15 кандидатов и 8 докторов наук.

Игорь Владимирович является Советником РФ первого класса, председателем Совета ректоров Восточного административного округа г. Москвы, а также членом Совета директоров предприятий ВАО г. Москвы, сертифицированным специалистом и преподавателем Microsoft.

Профессор Голубятников И. В. ведет активную научно-организационную работу, являясь членом редколлегии ряда журналов, председателем двух специализированных докторских советов, председателем организационного комитета Международной научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные проблемы приборостроения, информатики и экономики" и оргкомитета международного молодежного фестиваля мобильных роботов.

Талантливый ученый и педагог, высококвалифицированный специалист, чуткий, отзывчивый и обаятельный человек, Игорь Владимирович пользуется глубоким уважением учеников, коллег, товарищей.

Сердечно поздравляем юбиляра, желаем ему крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов на благо российской науки и техники.

Редакционный совет, редколлегия и редакция журнала.



МЕХАТРОННЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: КОНТРОЛЬ, ИДЕНТИФИКАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ (65 лет кафедре "Системы управления и информатика" СПбГУИТМО)

В 2010 г. исполняется 65 лет со дня основания в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики кафедры "Системы управления и информатика" (до 2001 г. — кафедра автоматики и телемеханики), организованной одновременно с основанием факультета электроприборостроения, со временем переименованного в радиотехнический. Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и одновременно первого декана факультета электроприборостроения профессора Марка Львовича Цуккермана. На кафедру автоматики и телемеханики ИТМО, в отличие от существовавших к тому времени кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М. И. Калинина (ныне СПбГПУ) и ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина) (ныне СПбГЭТУ ("ЛЭТИ")), была возложена задача по подготовке специалистов в области автоматизации и телемеханизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности.

Научная школа кафедры СУИ начала формироваться в 60—70-х гг. при содействии профессоров кафедры И. П. Пальтова, Ю. А. Сабина и доцента Е. А. Танского усилиями коллег новой возрастной и научной мировоззренческой формации в лице доцента В. В. Лаврентьева, профессоров В. Н. Дроздова, А. В. Ушакова, В. В. Григорьева и И. В. Мирошника, организовавших в 1970 г. постоянно действующий научный семинар "Современные проблемы теории управления". В настоящее время кафедра объединяет тесно сотрудничающие между собой научные коллективы, возглавляемые профессорами В. В. Григорьевым, А. В. Ушаковым, В. О. Никифоровым, А. А. Бобцовым, доцентами В. И. Бой-

ковым и С. В. Быстровым. Системная методология научной школы кафедры опирается на возможности методов Ляпунова, оптимизации и матричного формализма, заложенного в уравнениях Ляпунова, Сильвестра и Риккати, а также методов современной теории нелинейных систем, модального, робастного и адаптивного управления; области научных интересов кафедры охватывают как классические, так и новые направления теории управления.

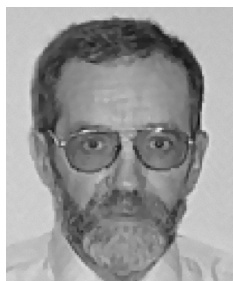
Научные результаты кафедры СУИ имеют богатую национальную и зарубежную библиографию. Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и в трудах международных конференций. Ученые кафедры опубликовали более 100 монографий и учебников, около 200 методических и учебных пособий. Ученые кафедры являются авторами более 550 изобретений. Кафедра поддерживает научные контакты с 20 техническими зарубежными университетами. Начиная с 1950-х гг. на кафедре функционирует аспирантура и докторантура, более 180 их выпускников получили степень кандидата наук, а 25 — ученую степень доктора наук, причем 15 из них защитили диссертации за последние десять лет. В настоящее время в аспирантуре кафедры обучается 20 человек, а в докторантуре — двое.

На седьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов.

А. А. Бобцов, В. В. Григорьев, А. В. Ушаков



БОБЦОВ
Алексей Алексеевич —
заведующий кафедрой
(с 2010 г.)



ГРИГОРЬЕВ
Валерий Владимирович —
заведующий кафедрой
(1990—2010 гг.)



САБИНИН
Юрий Алексеевич —
заведующий кафедрой
(1970—1990 гг.)



ТАНСКИЙ
Евфимий Апполонович —
заведующий кафедрой
(1959—1970 гг.)



ЦУККЕРМАН
Марк Львович —
заведующий кафедрой
(1945—1959 гг.)

С. В. Арановский, науч. сотр.,

В. М. Бардов, студент,

Санкт-Петербургский университет
информационных технологий, механики и оптики
rhnd@mail.ru

Алгоритм идентификации параметров системы "двигатель—двухмассовый механизм"¹

Рассматривается проблема идентификации параметров системы "двигатель — двухмассовый механизм" при известной структуре объекта и неизвестных параметрах передаточной функции. Идентификация проводится по результатам эксперимента на готовой к работе установке. Предложенный подход использует измерения только выходной переменной, не требует информации о медианных значениях параметров, не накладывает ограничений на дрейф параметров и позволяет получить высокую скорость оценивания параметров. Приводится пример, иллюстрирующий основные шаги предложенного алгоритма, а также результаты математического моделирования, иллюстрирующие работоспособность рассматриваемого подхода.

Ключевые слова: двигатель, двухмассовый механизм, идентификация, адаптивный идентификатор, метод наименьших квадратов

Введение

В настоящее время для решения широкого круга задач используются оптико-электронные комплексы, телескопы которых наводятся и длительное время удерживаются на объектах наблюдения с суммарной погрешностью в единицы угловых секунд. Основные функциональные характеристики таких комплексов в значительной степени определяются реальной точностью слежения за наблюдаемыми объектами. В решении подобных задач важную роль играет опорно-поворотное устройство (ОПУ), оси которого представляются в процессе моделирования и проектирования электроприводов, как правило, двухмассовыми механизмами.

При разработке подобных комплексов важной задачей является полная автоматизация процессов настройки электроприводов с требуемой точностью. Эти настройки проводятся как во время сборки и монтажа телескопа на испытательном стенде, так и на полигоне, в условиях случайно изменившихся вследствие транспортировки и новой сборки ОПУ параметров системы в целом. К таким параметрам относятся: люфты и зазоры, смещение центров масс нагрузок ОПУ, моменты инерции навесного оборудования, электрические параметры двигателя и др. Решение задачи автоматизации настройки возможно

с использованием процедуры идентификации параметров подсистемы "двигатель—ось ОПУ". Суть процедуры идентификации в рамках поставленной нами задачи сводится к получению реальных, определенных в результате эксперимента на готовой к работе установке, параметров электрического двигателя, его нагрузки с учетом упругих связей, например, частот механических резонансов, моментов инерции. В дальнейшем результаты процедуры идентификации используются для автоматизации расчета параметров регуляторов. Кроме того, для придания замкнутой системе свойства адаптивности к изменениям параметров объекта следует выбрать алгоритм, позволяющий проводить идентификацию в реальном времени и на основании результатов вносить коррективы в работу регулятора.

Существуют различные подходы к решению задачи параметрической идентификации [1—3], в том числе метод локальной адаптации, метод скоростного градиента и его вариации, а также ряд других. Несмотря на простоту реализации метода локальной адаптации, его недостатком является обеспечение сходимости только при малом отклонении идентифицируемых параметров от истинных значений, что требует повышенного внимания к начальным условиям. Кроме того, метод локальной адаптации функционирует только в условиях квазистационарности и сильно зависит от режимов работы системы. Градиентные методы являются более развитыми и, как следствие, более распространенными, однако они также обладают рядом недостатков: сложностью разработки, зависимостью процесса идентификации и времени схождения от выбора функции качества. Кроме того, использование градиентных методов часто требует измерения всех переменных состояния объекта или же накладывает ограничения на объект.

Кроме указанных методов существует широкий класс подходов, основанных на предположении об известности медианных значений идентифицируемых параметров и ограниченности их дрейфа, причем данные подходы варьируются в зависимости от "широты" области дрейфа.

Предложенный в данной работе подход является развитием идей, представленных в [4, 5], и их приложением к вопросу идентификации параметров двухмассового электромеханического объекта в реальном времени. Предложенный подход обладает следующими преимуществами:

- использует измерения только выходной переменной;
- имеет высокое быстродействие;
- не требует знаний медианных значений параметров;
- не имеет ограничений на область дрейфа параметров и начальные условия за исключением их конечности;
- прост в реализации.

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Санкт-Петербурга для студентов и аспирантов и гранта РФФИ № 09-08-00139-а.

Постановка задачи

В данной статье в качестве рассматриваемого объекта выступает система "двигатель — двухмассовый механизм". Обобщенная структурная схема такой системы приведена на рис. 1 [6].

Здесь w_1 — угловая скорость первой массы оси; w_2 — угловая скорость второй массы оси; u — обобщенное управляющее воздействие, имеющее размерность скорости холостого хода; M_1 — электромагнитный момент двигателя; M_{12} — момент, обусловленный нежесткостью конструкции оси; c_{12} — коэффициент жесткости; J_1, J_2 — моменты инерции соответственно первой и второй масс; β — жесткость механической характеристики двигателя; T_e — электрическая постоянная времени двигателя.

Данное структурное описание легко может быть преобразовано к передаточной функции, в которой выходом является измеряемая угловая скорость первой массы:

$$y(t) = w_1(t) = \frac{b_2 p^2 + b_0}{p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} u(t), \quad (1)$$

где

$$p = \frac{d}{dt}; \quad b_2 = \beta / (J_1 T_e); \quad b_0 = c_{12} \beta / (J_1 J_2 T_e);$$

$$a_3 = 1/T_e; \quad a_2 = (T_e(J_1 + J_2)c_{12} + J_2 \beta) / (J_1 J_2 T_e);$$

$$a_1 = c_{12} / (J_1 T_e); \quad a_0 = c_{12} \beta / (J_1 J_2 T_e).$$

Сформулируем задачу идентификации параметров объекта как задачу синтеза алгоритма идентификации, обеспечивающего для любых параметров $b_2, b_0, a_3, a_2, a_1, a_0$ формирование таких оценок этих параметров, что

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |b_i - \hat{b}_i| = 0, i = \overline{0, 2}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |a_j - \hat{a}_j| = 0, j = \overline{0, 3}. \end{cases} \quad (2)$$

Основной результат

Перепишем выражение (1) следующим образом:

$$a(p)u = b(p)y, \quad (3)$$

где $a(p) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$, $b(p) = b_2 p^2 + b_0$.

Введем в рассмотрение гурвицев полином четвертой степени с единичным коэффициентом при старшей степени:

$$\phi(p) = (p + \alpha)^4 = p^4 + \phi_3 p^3 + \phi_2 p^2 + \phi_1 p + \phi_0, \quad (4)$$

где $\alpha > 0$.

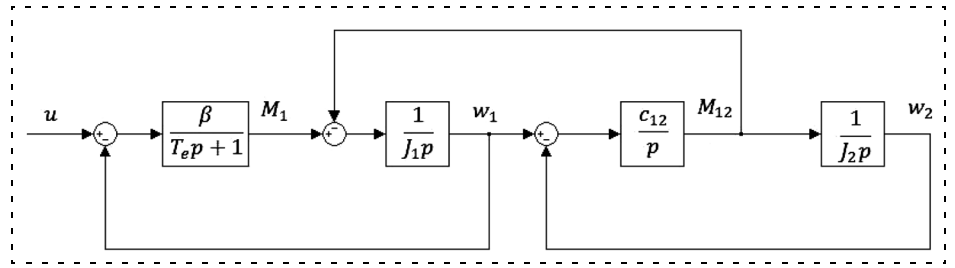


Рис. 1. Обобщенная структурная схема

Сформируем следующий полином:

$$a_1(p) = \phi(p) - a(p) = (\phi_3 - a_3)p^3 + (\phi_2 - a_2)p^2 + (\phi_1 - a_1)p + (\phi_0 - a_0). \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), можно записать:

$$\phi(p)y = a_1(p)y + b(p)u,$$

$$y = \frac{a_1(p)}{\phi(p)} y + \frac{b(p)}{\phi(p)} u. \quad (6)$$

Введем дополнительные переменные, представляющие собой пропущенные через фильтр $\frac{1}{\phi(p)}$ сигналы y и u :

$$\xi_1 = \frac{1}{\phi(p)} y; \quad \xi_2 = \frac{1}{\phi(p)} u. \quad (7)$$

Подставляя (5) и (7) в (6), получим:

$$y = a_1(p)\xi_1 + b(p)\xi_2 = (\phi_3 - a_3)\ddot{\xi}_1 + (\phi_2 - a_2)\ddot{\xi}_1 + (\phi_1 - a_1)\dot{\xi}_1 + (\phi_0 - a_0)\xi_1 + b_2\ddot{\xi}_2 + b_0\xi_2 = \psi^T \theta, \quad (8)$$

где

$$\begin{cases} \psi = \text{col}\{\xi_1^{(3)}, \xi_1^{(2)}, \xi_1^{(1)}, \xi_1, \xi_2^{(2)}, \xi_2\}; \\ \theta = \text{col}\{(\phi_3 - a_3), (\phi_2 - a_2), (\phi_1 - a_1), (\phi_0 - a_0), b_2, b_0\}. \end{cases} \quad (9)$$

В выражении (9) в векторе-столбце ψ собраны доступные измерению переменные, а в векторе-столбце θ — неизвестные параметры.

Замечание. Нетрудно видеть, что для идентификации параметров объекта достаточно решить задачу идентификации параметров вектора θ .

Для идентификации неизвестных параметров в модели (8) могут быть использованы различные алгоритмы. Например, в работах [5, 6] был предложен алгоритм вида

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= K\psi(t)\psi^T(t)(\theta - \hat{\theta}(t)) = \\ &= K\psi(t)y(t) - K\psi(t)\psi^T(t)\hat{\theta}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $K = K^T > 0$ — диагональная матрица постоянных коэффициентов. Для данного алгоритма была доказана его применимость для решения рассматриваемой задачи.

Также для идентификации параметров в модели (8) может быть использован подход, известный как метод наименьших квадратов. Этот метод отличается существенно большей вычислительной сложностью, однако он обладает высокой точностью и робастностью по отношению к возмущениям в измерениях. Рассмотрим этот метод подробнее. Предположим, что имеется N отсчетов. Тогда для выражения (8) можно записать:

$$[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]^T = [\psi_1^T \ \psi_2^T \ \dots \ \psi_N^T]^T \theta$$

или

$$Y = \Psi^T \theta. \quad (11)$$

Тогда получаем:

$$\hat{\theta} = (\Psi \Psi^T)^{-1} \Psi Y. \quad (12)$$

С ростом числа отсчетов N выражение (12) будет обеспечивать сходимость параметров к их истинным значениям в том случае, если матрица $\Psi \Psi^T$ не вырождена. Это условие будет выполнено, если входной управляющий сигнал является "частотно богатым" (см. подробнее в монографии [7]).

Для проведения идентификации в реальном времени может использоваться итеративная версия алгоритма (12), позволяющая обновлять оценку параметров при получении каждого нового отсчета и не требующая хранения значений всех отсчетов.

Пример

Для иллюстрации работоспособности алгоритма проведем моделирование. В качестве идентифицируемого объекта выберем систему "двигатель — двухмассовый механизм" со следующими параметрами:

$$c_{12} = 5,46 \cdot 10^8, \ J_1 = 415, \ J_2 = 83 \ 685, \\ \beta = 16 \cdot 10^4, \ T_e = 16 \cdot 10^{-4}.$$

Данный объект можно представить в виде (1), вычислив соответствующие параметры:

$$a_3 = 625, \ a_2 = 1,563 \cdot 10^6, \ a_1 = 8,223 \cdot 10^8, \\ a_0 = 1,572 \cdot 10^9, \ b_2 = 2,409 \cdot 10^5, \ b_0 = 1,572 \cdot 10^9.$$

Введем гурвицев полином 4-й степени

$$\phi(p) = (p + 1)^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1.$$

Тогда в соответствии с (5)

$$a_1(p) = (4 - a_3)p^3 + (6 - a_2)p^2 + (4 - a_1)p + (1 - a_0).$$

Теперь сформируем вектор неизвестных и подлежащих идентификации параметров:

$$\theta = \text{col}\{(4 - a_3), (6 - a_2), (4 - a_1), (1 - a_0), b_2, b_0\}.$$

Далее в соответствии с выражением (7) запишем:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3; \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4; \\ \dot{\xi}_4 = -\xi_1 - 4\xi_2 - 6\xi_3 - 4\xi_4 + y; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2; \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_3; \\ \dot{\zeta}_3 = \zeta_4; \\ \dot{\zeta}_4 = -\zeta_1 - 4\zeta_2 - 6\zeta_3 - 4\zeta_4 + u \end{cases}$$

и сформируем вектор измеряемых параметров

$$\psi = \text{col}\{\xi^{(3)}, \xi^{(2)}, \xi^{(1)}, \xi, \zeta^{(2)}, \zeta\}.$$

Для идентификации неизвестных параметров будем использовать метод наименьших квадратов: проведем моделирование объекта, представленного передаточной функцией вида (1) и параметрами, представленными выше. При моделировании будем

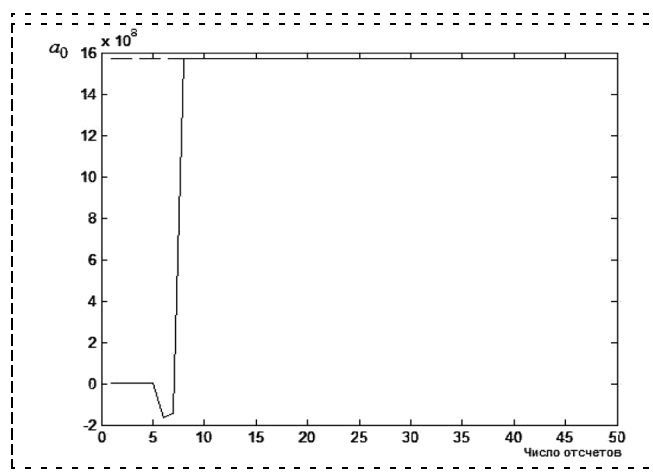


Рис. 2. Оценка параметра a_0

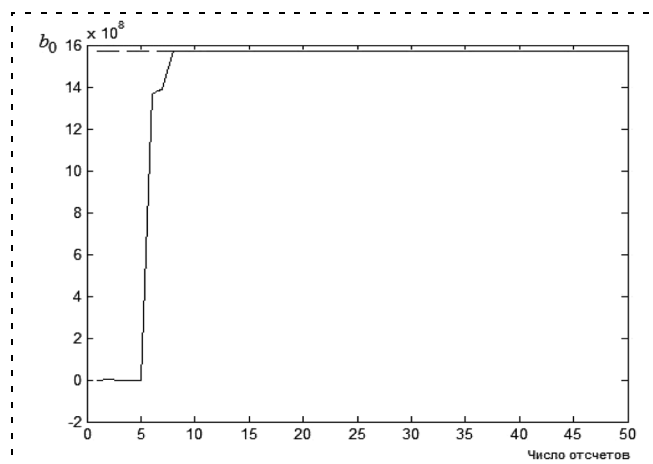


Рис. 3. Оценка параметра b_0

сохранять отсчеты, соответствующие значениям ψ и u с шагом в 0,001 с. В качестве задающего сигнала выберем меандр с амплитудой 1 и периодом 1 с, время моделирования выберем равным 1 с. Таким образом, по окончании моделирования мы имеем 1000 отсчетов. Сформировав в соответствии с (11) матрицу Ψ^T и вектор Y , получим оценку $\hat{\theta}$ согласно выражению (12). Проведенные моделирование и вычисления показали, что все оценки параметров сходятся к своим истинным значениям, причем скорость сходимости достаточно велика. В связи с ограниченным форматом статьи приведем только два графика из шести. На рис. 2 и 3 приведены графики для параметров a_0 и b_0 соответственно, истинные значения параметров отмечены штриховой линией. В целом, по результатам эксперимента можно считать, что оценка параметров достигает истинного (расчетного) значения за время, равное 50 отсчетам, т. е. в данном примере за 0,05 с.

Заключение

В статье был предложен подход, позволяющий проводить идентификацию параметров системы двигателя — "двухмассовый механизм" при известной структуре системы по результатам эксперимента на готовой к работе установке. Результатом идентификации являются параметры передаточной функции объекта. Предложенный подход обладает

следующими преимуществами: в работе используются измерения только выходной переменной объекта, но не ее производных, высокая скорость оценивания параметров, отсутствует ограничение на область дрейфа параметров, не требуется знать меандрированные значения параметров. Работоспособность предложенного алгоритма подтверждается как аналитическими выкладками, так и результатами моделирования.

Список литературы

1. Борцов Ю. А., Поляхов Н. Д., Путов В. В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. / Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984. 216 с.
2. Борцов Ю. А., Соколовский Г. Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. Л.: Энергоатомиздат, 1992. 288 с.
3. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990.
4. Арановский С. В., Бобцов А. А., Кремлев А. С., Лукьянова Г. В. Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3.
5. Арановский С. В., Бобцов А. А., Кремлев А. С., Лукьянова Г. В., Николаев Н. А. Идентификация частоты смещенного синусоидального сигнала // АИТ. 2008. № 9.
6. Ключев В. И. Теория электропривода: Учеб. для вузов. М.: Энергоатомиздат, 2001. 704 с.
7. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.

УДК 62.50

Н. А. Дударенко, канд. техн. наук, доц.,

М. В. Полякова, аспирант,

А. В. Ушаков, д-р техн. наук, проф.,

Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики
Dudarenko@yandex.ru

Алгебраическая постановка задачи контроля системного вырождения сложных технических систем

Рассматривается проблема контроля системного вырождения сложных технических систем в алгебраической постановке. Поставленная задача решается количественно с помощью функционалов вырождения, сконструированных на спектре сингулярных чисел критериальных матриц. Представлены методы конструирования критериальных матриц сложной технической системы.

Ключевые слова: технические системы, вырожденные системы, оценка вырождения, качественные показатели вырождения, сингулярные значения, критериальные матрицы

Постановка задачи

Исследование задачи вырождения сложных технических систем позволяет выделить три ее постановочные версии: функциональное вырождение, физическое вырождение и системное вырождение.

Первая постановка предполагает, что сложная техническая система (СТС) типа "многомерный вход — многомерный выход" (МВМВ) является функционально вырожденной в силу естественной необходимости функционирования ее агрегатных компонентов как единого целого. Наиболее наглядными примерами таких процессов являются технологические процессы по обработке материальных потоков, состоящих в формировании и подаче ленточного материала в листопрокатном производстве [1], в производстве бумаги и тканей, процессы динамической юстировки многокомпонентных оптических и радиооптических систем, в организации заготовительных процессов в составе "бесскладовых" технологических производств и т. д. Примерами таких процессов являются процессы по обслуживанию движения строим подвижных технических средств, управляемых антропокомпонентами-операторами (строй самолетов, вертолетов,

автомобилей и т. п.), и автономных антропокомпонентов (строй военнослужащих, спортсменов и т. п.).

Вторая постановка задачи вырождения предполагает сохранение способности нормального функционирования технологического оборудования системы МВМВ-типа в условиях, когда экзогенный поток заявок из-за смены поколения технологии или экономических факторов иссякает и даже исчезает полностью.

Третья постановка задачи вырождения, названная системной, решает задачу вырождения систем МВМВ-типа, вызванную организационными причинами, приводящими к неправильному распределению заявок по входам, неправильному согласованию их динамики с динамикой сепаратных каналов, а также неудачно назначенными связями между сепаратными каналами [2]. При этом система может вырождаться структурно, когда из ее состава выпадает некоторый функциональный элемент. Также вырождение системы может происходить по причине параметрической природы, когда неудачно организованы связи между каналами системы, неудачно назначены показатели характеристик этих связей, когда неудачно сформированы полосы пропускания каналов, а в случае, если система имеет дискретную природу, неудачно назначены и распределены по каналам интервалы дискретности и т. д.

В данной статье рассматривается третья постановочная версия задачи вырождения.

Проблема контроля вырождения

Контроль вырождения как показателя свойств системы МВМВ-типа осуществляется в основном в установившемся режиме функционирования системы, а задача контроля вырождения решается на основе априорных оценок возможной склонности проектируемой системы МВМВ-типа к вырождению.

Математически вырождение означает сокращение размерности образа линейного оператора, реализуемого СТС, который отображает "пространство намерений" в "пространство осуществляемых реализаций", т. е. изменение ранга этого оператора. Ранг оператора является целочисленной характеристикой. В связи с этим нужен такой инструмент, который позволил бы непрерывно оценивать появляющуюся в системе тенденцию к возможному ее вырождению. Этот инструмент строится на использовании сингулярного разложения [3, 4] критериальных матриц, позволяющего конструировать функционалы вырождения, с помощью которых можно оценить склонность системы к вырождению.

Технология контроля вырождения сложных технических систем МВМВ-типа основывается на использовании сепаратных и глобальных функционалов вырождения, конструируемых на спектре

сингулярных чисел матрицы линейного (локально линейного) оператора СТС, отображающего входное пространство целевых намерений в выходное пространство их реализаций.

Представляемый авторами инструментальный аппарата функционалов вырождения позволяет дать числовую оценку близости сложной динамической технической системы МВМВ-типа к частичной или полной потере работоспособности.

Технология контроля системного вырождения СТС сформировалась как двухфазный процесс. В первой фазе конструируются функционалы вырождения критериальных матриц, во второй фазе конструируются критериальные матрицы.

Функционалы вырождения и их свойства

Пусть сложная динамическая система МВМВ-типа сведена путем векторно-матричных преобразований к линейной алгебраической задаче вида:

$$\eta(w) = N(w, \theta)\chi(w), \quad (1)$$

где $N(w, \theta)$ — $(m \times m)$ -матрица для любых w, θ ; $\eta(w), \chi(w)$ — p -мерные векторы; θ — p -мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N .

Для контроля вырождения воспользуемся аппаратом функционалов вырождения J_{Dv} [5], которые строятся на спектре сингулярных чисел α_j ($j = \overline{1, m}$) матрицы N , таких что

$$\sigma_\alpha\{N\} = \{\alpha_j = |\mu_j^{1/2}|; \mu_j, j = \overline{1, m} : \det(\mu I - N^T N) = 0\}, \quad (2)$$

и удовлетворяют соотношению

$$J_{Dv} = \alpha_v / \alpha_1, \quad v = \overline{m, 1}. \quad (3)$$

Функционалы вырождения обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Функционалы вырождения J_{Dv} для всех v в силу (3) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq J_{Dv} \leq 1. \quad (4)$$

Свойство 2. Умножение критериальной матрицы N на скаляр в непараметризованной или параметризованной форме (γ или $\gamma(\rho)$) не меняет спектра ее функционалов вырождения.

Свойство 3. Умножение критериальной матрицы N на ортогональную матрицу слева или справа не меняет ее функционалов вырождения.

Свойство 4. Глобальный функционал вырождения критериальной матрицы N совпадает с глобальным функционалом вырождения ее инверсии N^{-1} . Данное свойство опирается на свойство числа обусловленности, которое в случае использования спектральных норм критериальной матрицы является величиной, обратной глобальному функционалу вырождения.

Свойство 5. Глобальный функционал вырождения J_G прямой матрицы N и обратной ей N^{-1} совпадают, т. е. выполняется соотношение

$$J_G(N) = J_G(N^{-1}). \quad (5)$$

В целях демонстрации наглядной геометрической интерпретации функционалов вырождения воспользуемся сингулярным разложением матрицы (SVD-процедурой) [3, 4], тогда матрица N запишется в виде

$$N = U_N \Sigma_N V_N^T, \quad (6)$$

где $\Sigma_N = \text{diag}\{\alpha_j; j = \overline{1, m}\}$ — матрица с сингулярными числами на главной диагонали, построенная по правилу убывания их значений с ростом индекса j ; U_N и V_N — матрицы, соответственно, левого и правого сингулярных базисов $U_N U_N^T = U_N^T U_N = I$, $V_N V_N^T = V_N^T V_N = I$, для которых выполняется соотношение

$$N V_{Nj} = \alpha_j U_{Nj}, j = \overline{1, p}. \quad (7)$$

Векторно-матричное соотношение (7) придает исходной линейной алгебраической задаче (1) геометрическую наглядность, которая состоит в том, что вектор $\chi = V_{Nj}$ ($j = \overline{1, p}$) единичной нормы отражается в подпространство, натянутое на j -й элемент U_{Nj} левого сингулярного базиса U_N так, что соответствующий ему вектор имеет норму, равную α_j . Таким образом, единичная сфера в пространстве, натянутом на векторы V_{Nj} , отображается в эллипсоид, натянутый на левый сингулярный базис, с длиной полуосей, определяемой сингулярными числами матрицы N .

Спектр функционалов вырождения J_{Dv} в отличие от числа $C\{N\}$ обусловленности матрицы N , которое в вычислительных процедурах используется для оценки близости матрицы к ее вырождению, позволяет тонко зафиксировать всю картину вырождения задачи (1). Так, по мере обнуления сингулярных чисел α_v происходит сплющивание эллипсоида, который строится с помощью задачи (1) при отображении сферы $\|\chi(w)\| = 1$, последовательно вдоль каждой из осей этого эллипсоида. При $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_v = 0$ ($v = \overline{m, 2}$) эллипсоид вырождается в отрезок прямой, при этом задача (1) оказывается на границе глобального вырождения, и, наконец, при $\alpha_v = 0$ ($v = \overline{m, 1}$) эллипсоид вырождается в точку и фиксируется глобальное вырождение задачи (1).

В качестве примера рассмотрим реализацию матрицы N размерности два на два в виде $N = U_N \Sigma_N V_N^T$,

где $U_N = \begin{bmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix}$ — матрица левого сингуляр-

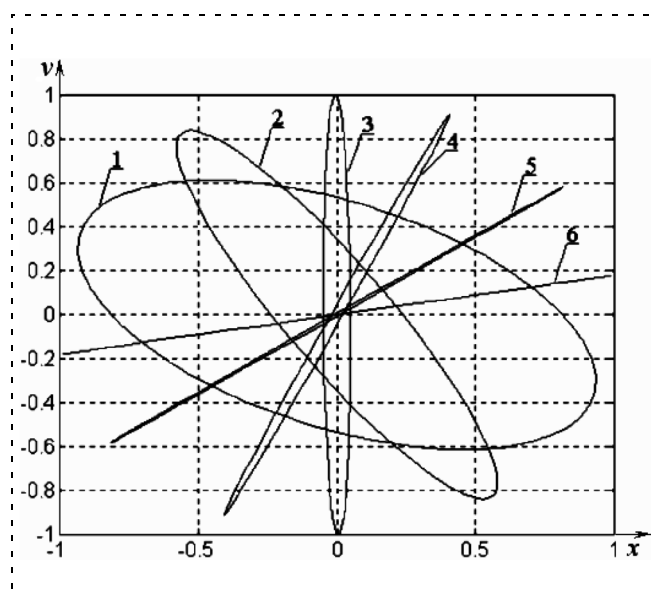
ного базиса, $V_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — матрица правого сингу-

лярного базиса, такие что главная ось эллипсоида развернута на угол μ относительно оси абсцисс; $\Sigma_N = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ — диагональная матрица с сингулярными числами α_1 и α_2 . Для наглядной иллюстрации результатов предлагаемого примера угол μ выберем различным.

Исследуемые матрицы $N_j, j = \overline{1, 6}$, для фиксированных значений μ_j и соответствующие им глобальные функционалы вырождения сведем в таблицу.

Результаты отображения $y = Nx$ единичной сферы $x = \text{col}\{\cos \beta, \sin \beta\}$, где $0 \leq \beta \leq 2\pi$, в эллипсоид для реализации матриц N_j с различными глобальными функционалами вырождения $J_G\{N_j\}$ приведены на рисунке.

j	N_j	μ_j , рад	$J_G(N)$
1	$\begin{bmatrix} -0,9111 & -0,2061 \\ 0,4121 & -0,4556 \end{bmatrix}$	9	0,5
2	$\begin{bmatrix} 0,5551 & 0,1664 \\ -0,8318 & 0,1110 \end{bmatrix}$	43	0,2
3	$\begin{bmatrix} 0,0044 & 0,0500 \\ -1,0000 & 0,0002 \end{bmatrix}$	11	0,05
4	$\begin{bmatrix} 0,4081 & -0,0183 \\ 0,9129 & 0,0082 \end{bmatrix}$	20	0,02
5	$\begin{bmatrix} 0,8142 & -0,0029 \\ 0,5806 & 0,0041 \end{bmatrix}$	120	0,005
6	$\begin{bmatrix} -0,9844 & 0 \\ -0,1761 & 0 \end{bmatrix}$	85	0



Отображение единичной сферы в эллипсоид для различных значений глобального функционала вырождения $J_G\{N_j\}$:

1 — $J_G\{N_1\} = 0,5$; 2 — $J_G\{N_2\} = 0,2$; 3 — $J_G\{N_3\} = 0,05$; 4 — $J_G\{N_4\} = 0,02$; 5 — $J_G\{N_5\} = 0,005$; 6 — $J_G\{N_6\} = 0$

На рисунке наглядно просматривается процесс "сплющивания" эллипсоида в прямую линию с уменьшением глобального функционала вырождения матрицы N .

Спектр сингулярных чисел и сконструированный на нем спектр функционалов системного вырождения матрицы N указывают механизм численного контроля процесса вырождения при вариации параметра θ с помощью контроля функционалов вырождения.

Таким образом, процесс вырождения алгебраической задачи можно отслеживать по последовательному обнулению функционалов вырождения J_{Dv} матрицы $N(w, \theta)$, которую будем именовать критериальной.

Критериальные матрицы и методы их конструирования

Формирование критериальных матриц линейных операторов в зависимости от постановки задачи контроля системного вырождения в форме его "экспресс-оценки" или в более детализированной форме с учетом вида потока входных заявок детерминированного или стохастического характера опирается на матричный формализм: алгоритма Фаддеева—Леве́рье, аппарата грамианов представлений, матричных коэффициентов разложения вектора выхода системы по производным вектора задающего воздействия, а также уравнений Сильвестра и Ляпунова для случаев конечномерного и стохастического представлений входных заявок. При этом каждый из перечисленных способов имеет свое пользовательское приложение.

Процедуру конструирования критериальных матриц рассмотрим на примере системы следующего вида:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(0); y(t) = Cx(t), \quad (8)$$

где x, g, y — векторы состояния, задающего воздействия и выхода соответственно; $x \in R^n$, $g, y \in R^m$; F, G, C — матрицы состояния системы, входа и выхода непрерывного объекта управления соответственно, согласованные по размерности с размерностью векторов x, g и y так, что $F \in R^{n \times n}$, $G, C^T \in R^{n \times m}$. Для оценки склонности сложной технической системы (8) к вырождению рассмотрим случай, когда $g(t)$ есть конечномерная векторная функция, задаваемая в форме

$$\dot{z}(t) = Ez(t); z(0) = z(t)|_{t=0}; g(t) = Pz(t), \quad (9)$$

где $z \in R^l$, $E \in R^{l \times l}$, $P \in R^{m \times l}$ — соответственно вектор состояния, матрицы состояния и выхода источника задающего конечномерного воздействия (ИЗКВ). Матрица P удовлетворяет условию $PP^T = I$. ИЗКВ

выбирается минимальной размерности, но такой, чтобы ее выход

$$g(t) = Pz(t), \text{ где } z(t) = e^{Et}z(0), \quad (10)$$

на множестве начальных состояний $z(0)$ адекватно представлял весь класс конечномерных задающих воздействий системы.

Аналитические представления для переменных $x(t)$ и $y(t)$ системы (8) сформируем с помощью положений следующего утверждения.

Утверждение 1. Если матрицы динамической системы МВМВ-типа (8) и ИЗКВ (9) связаны матричным уравнением Сильвестра [6]

$$TE - FT = GP, \quad (11)$$

то решение системы (8) может быть представлено в форме

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + (Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0); \quad (12)$$

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{Ft}x(0) + C(Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0). \quad (13)$$

Доказательство утверждения 1 строится на использовании структурного объединения системы (8) и модели ИЗКВ (9), которое представляет собой автономную систему с вектором состояния $\tilde{x}(t) = \text{col}\{x, z\}$ и имеет векторно-матричное описание

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{F}\tilde{x}(t); \tilde{x}(0) = \text{col}\{x(0), z(0)\}; \\ x(t) &= \tilde{C}_x\tilde{x}(t); y(t) = \tilde{C}_y\tilde{x}(t), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & GP \\ 0 & E \end{bmatrix}; \tilde{C}_x = [I_{n \times n} \ 0_{n \times l}]; \tilde{C}_y = [C \ 0_{m \times l}]. \quad (15)$$

Для переменных $x(t)$ и $y(t)$ системы (8) на основе представления (14) можно записать

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{C}_x e^{\tilde{F}t} \tilde{x}(0); y(t) = \tilde{C}_y e^{\tilde{F}t} \tilde{x}(0); \\ \tilde{x}(0) &= \tilde{x}(0)|_{t=0}. \end{aligned} \quad (16)$$

При вычислении матричной экспоненты $e^{\tilde{F}t}$ запишем матрицу $\tilde{F}$ (15) в форме

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad (17)$$

в которой использован факт зависимости матричных компонентов в виде уравнения Сильвестра (11).

Запишем матричную экспоненту в виде матричного степенного ряда

$$e^{\tilde{F}t} = I + \tilde{F}t + \frac{1}{2!} \tilde{F}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \tilde{F}^3 t^3 + \dots + \frac{1}{p!} \tilde{F}^p t^p, \quad (18)$$

в котором для степеней матрицы $\tilde{F}$ с учетом (17) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= \begin{bmatrix} F TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix}; \\ \tilde{F}^2 &= \tilde{F} \tilde{F} = \begin{bmatrix} F TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F^2 FTE - F^2 T + TE^2 - FTE \\ 0 & E^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F^2 TE^2 - F^2 T \\ 0 & E^2 \end{bmatrix}; \\ \tilde{F}^3 &= \tilde{F}^2 \tilde{F} = \begin{bmatrix} F^2 TE^2 - F^2 T \\ 0 & E^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F^3 TE^3 - F^3 T \\ 0 & E^3 \end{bmatrix}; \\ &\vdots \\ \tilde{F}^p &= \tilde{F}^{p-1} \tilde{F} = \begin{bmatrix} F^{p-1} TE^{p-1} - F^{p-1} T \\ 0 & E^{p-1} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} F TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^p TE^p - F^p T \\ 0 & E^p \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Подстановка (19) в матричный степенной ряд (18) позволяет представить матричную экспоненту $e^{\tilde{F}t}$ в форме

$$e^{\tilde{F}t} = \begin{bmatrix} e^{Ft} Te^{Et} - e^{Et} T \\ 0 & e^{Et} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Подстановка (20) в (16) с учетом соотношений (15) приводит к представлениям (12) и (13).

Раскроем содержание матрицы T . Для этой цели сравним выражение (10) для $z(t)$ и выражение (12) для $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$, что позволяет записать соотношение

$$x_y(t) = Tz(t). \quad (21)$$

Таким образом, матрица T является матрицей подобия установившейся составляющей вектора состояния системы МВМВ-типа (8) вектору состояния ИЗКВ.

Для формирования критериальных матриц отношения "вход—выход" непрерывной динамической

системы МВМВ-типа при конечномерном экзогенном задающем воздействии рассмотрим подробнее решение (13):

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{Ft}x(0) + C(Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0).$$

Это решение содержит все компоненты движения системы по выходу: свободное $y_{св}(t)$ и вынужденное $y_{в}(t)$ движения, переходное движение $y_{п}(t)$ и движение $y_y(t)$ в установившемся режиме:

$$\left. \begin{aligned} y_{св}(t) &= Ce^{Ft}x(0) = N_{св}(t)x(0); \\ y_{в}(t) &= C(Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0) = N_{в}(t)z(0); \\ y_{п}(t) &= -Ce^{Ft}Tz(0) = N_{п}(t)z(0); \\ y_y(t) &= CTe^{Et}z(0) = N_y(t)z(0). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Соотношения (22) являются основой для конструирования банка критериальных, параметризованных временем, матриц. Конкретное представление критериальной матрицы определяется моделью системы МВМВ-типа (8), видом экзогенного задающего воздействия, определяющего пару матриц (E, P) и, как следствие, решением матричного уравнения Сильвестра (11) в виде матрицы T . Конкретный выбор критериальной матрицы из банка (22) определяется предметом исследования.

Решение задачи контроля системного вырождения сложных технических систем в алгебраической постановке позволило разработать инструментарий контроля системного вырождения СТС, позволяющий дать числовую оценку близости сложной динамической технической системы МВМВ-типа к частичной или полной потере работоспособности. По существу обнаружилась возможность количественной оценки такого качественного показателя сложных систем, как робастность сложных систем в смысле показателя J_{Dv} относительно системных параметров.

Список литературы

1. Система управления лентопротяжным механизмом / Власенко В. А., Мирошник И. В., Сабинин Ю. А., Ушаков А. В. и др. // Электротехн. пром. Серия Электропривод. 1977. Вып. 5/58.
2. Лаврентьев В. В., Ушаков А. В. К вопросу о синтезе перекрестных связей, обеспечивающих синхронную работу параллельно включенных агрегатов // Приборы и системы автоматики. Тр. ЛИТМО. Вып. 85. Л.: ЛИТМО, 1975.
3. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления / Пер. с англ. М.: Мир, 1999.
5. Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учеб. пособ. / Под ред. А. В. Ушакова. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1973.

А. А. Бобцов, д-р техн. наук, декан,
С. В. Быстров, канд. техн. наук, доц.,
В. В. Григорьев, д-р техн. наук, зав. каф.,
М. М. Мотылькова, аспирант, мл. науч. сотр.,
Е. Ю. Рабыш¹, аспирант,
В. Ю. Рюхин, канд. техн. наук, доц.,
 Санкт-Петербургский государственный
 университет информационных технологий,
 механики и оптики (СПбГУИТМО),
О. К. Мансурова, канд. техн. наук, доц.
 Санкт-Петербургский Северо-Западный
 заочный технический университет
 bobtsov@mail.itmo.ru

Синтез статических регуляторов в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами методами модального управления*

Описана разработанная на основе метода эталонной модели для дискретных динамических систем с периодически изменяющимися коэффициентами процедура синтеза модальных управлений на основе решения периодических матричных уравнений типа Сильвестра, обеспечивающих управление в замкнутой системе с требуемыми показателями качества переходных процессов.

Ключевые слова: системный анализ и синтез, управление в технических системах, дискретные системы

Введение. При синтезе систем автоматического управления разработчиком необходимо придать синтезированной системе определенные свойства, которые заданы в виде набора показателей качества. Обычно к системе предъявляются требования по значению времени переходного процесса, перерегулирования и показателя точности, характеризующего максимальное значение нормы вектора ошибки в установившемся режиме [1]. Задача проектирования регуляторов заключается в выработке такого управления, которое обеспечивает в замкнутой системе желаемую совокупность показателей качества [2, 3].

Современная теория линейных систем автоматического управления основана на использовании метода пространства состояний. Среди различных направлений, основанных на этом методе, можно выделить одно, получившее большое распространение в инженерной практике [4]. Оно связано с методами модального управления, т. е. методами формирования коэффициентов обратных связей, обеспечивающих в замкнутой системе заранее выбранное распределение корней характеристического полинома.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-08-00857-а.

В теории аналитического конструирования регуляторов основополагающим является тот принцип, что закон управления есть функция состояния проектируемой системы [5].

Постановка задачи синтеза регуляторов для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. При синтезе регуляторов будем считать, что получены дискретные модели объекта управления (ОУ) и внешних воздействий (ВВ). Пусть исходный ОУ с периодически изменяющимися коэффициентами описывается уравнениями;

$$\left. \begin{aligned} x((mk+i)+1) &= A_{i+1}x(mk+i) + B_{i+1}u(mk+i); \\ y(mk+i) &= C_{i+1}x(mk+i); \\ y_{\text{и}}(mk+i) &= C_{\text{и},i+1}x(mk+i); \\ e(mk+i) &= g(mk+i) - y(mk+i), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где x — вектор состояния ОУ, $x \in R^n$; y — вектор регулируемых переменных, $y \in R^l$; $y_{\text{и}}$ — вектор измеряемых переменных вектора состояния, $y_{\text{и}} \in R^{l_1}$, $l_1 < n$; u — управляющее воздействие на систему, $u \in R^l$; g — вектор внешних воздействий, $g \in R^l$; e — вектор ошибки, $e \in R^l$; $m = 0, 1, 2, \dots$ — дискретные моменты времени; k — интервал периодичности; $i = 0, 1, \dots, k-1$ — номер временного шага системы внутри интервала периодичности; A_{i+1} — периодическая матрица описания ОУ на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $n \times n$; B_{i+1} — периодическая матрица входов ОУ по управляющему воздействию на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $n \times l$; C_{i+1} — периодическая матрица выходов ОУ на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $l \times n$; $C_{\text{и},i+1}$ — периодическая матрица измерений ОУ на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $l_1 \times n$. На каждом шаге $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности отсутствует дублирование измерений, т. е. $\text{rank } C_{\text{и},i+1} = l_1$.

Действие на ОУ внешних сигналов отражается заданием модели ВВ с уравнениями движения

$$\left. \begin{aligned} \xi((mk+i)+1) &= \Gamma_g \xi(mk+i), \quad i = \overline{0, k-1}; \\ g(mk+i) &= H_g \xi(mk+i); \\ g_{\text{и}}(mk+i) &= H_{\text{и}} \xi(mk+i), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где ξ — вектор состояния ВВ, $\xi \in R^q$; Γ_g — матрица, определяющая вид внешних воздействий, размерности $q \times q$; H_g — матрица выходов модели ВВ размерности $l \times q$; $g_{\text{и}}$ — вектор измеряемых внешних воздействий, $g_{\text{и}} \in R^{q_1}$, $q_1 \leq q$; $H_{\text{и}}$ — матрица измерений модели ВВ размерности $q_1 \times q$. Для определенности положим, что измеряются компоненты вектора ошибки $e(mk+i)$, $i = \overline{0, k-1}$, и величины, образующие вектор $y_{\text{и}}(mk+i)$, $i = \overline{0, k-1}$, связан-

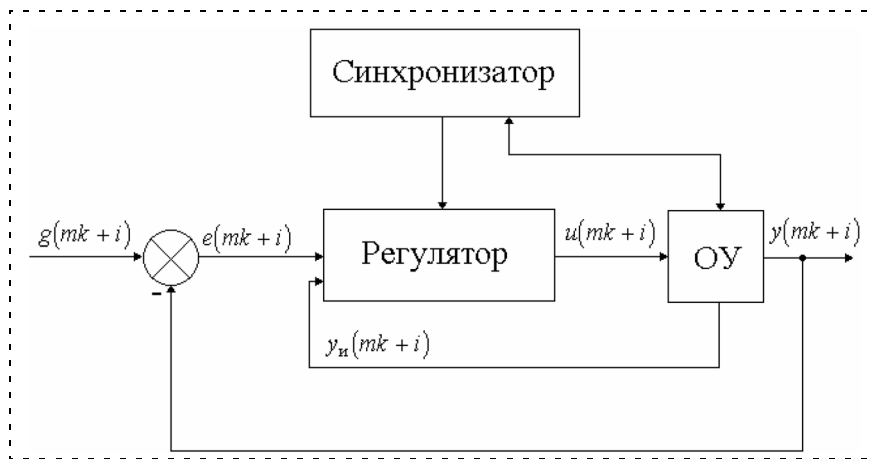


Рис. 1. Функциональная схема дискретной схемы с периодически изменяющимися коэффициентами с регулятором

ные посредством матрицы $C_{i,i+1}$, $i = \overline{0, k-1}$, с вектором состояния ОУ.

Векторы $e(mk + i)$, $y_{\text{и}}(mk + i)$ и $g_{\text{и}}(mk + i)$, $i = \overline{0, k-1}$, образуют составной вектор измерений

$$y_z(mk + i) = \begin{bmatrix} e(mk + i) \\ y_{\text{и}}(mk + i) \\ g_{\text{и}}(mk + i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{i+1} & H_g \\ C_{i,i+1} & 0 \\ 0 & H_{\text{и}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(mk + i) \\ \xi(mk + i) \end{bmatrix} = C_{z,i+1} \begin{bmatrix} x(mk + i) \\ \xi(mk + i) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (3)$$

Матрицу $C_{z,i+1}$, определяющую измеряемые переменные на $(i + 1)$ -м шаге внутри интервала периодичности, будем называть периодической матрицей измерений. Положим, что на каждом шаге $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности ОУ полностью управляем по входам, характеризуемым матрицами B_{i+1} , т. е. пары матриц (A_{i+1}, B_{i+1}) являются полностью управляемыми, и полностью наблюдаем по выходу $y_{\text{и}}(mk + i)$, т. е. пары матриц $(A_{i+1}, C_{i,i+1})$ являются полностью наблюдаемыми, а, кроме того, совместная модель ОУ и ВВ, определяемая выражениями (1) и (2), наблюдаема по выходу $y_z(mk + i)$.

Совокупность требуемых показателей качества, предъявляемых к проектируемой системе, обозначим J_c . К проектируемой системе могут предъявляться требования в виде набора величин времени $t_{\text{п}}$ переходного процесса, перерегулирования σ и показателя точности $\delta_{\text{т}}$, характеризующего максимальное значение нормы вектора ошибки в установившемся режиме при воздействиях вида (2), т. е. $J_c = \{t_{\text{п}}, \sigma, \delta_{\text{т}}\}$. Совокупность показателей качества назначается при анализе свойств ОУ и цели функционирования системы [6].

Задача аналитического конструирования регулятора для ОУ вида (1), к которому приложены внешние воздействия вида (2), заключается в выборе

структуры и параметров регулятора, вырабатывающего по информации, поступающей с измерителей $y_z(mk + i)$, управление $u(mk + i)$, $i = \overline{0, k-1}$, обеспечивающее проектируемой системе требуемую совокупность показателей качества J_c . На рис. 1 изображена функциональная схема САУ с регулятором. На каждом шаге внутри интервала периодичности входами регулятора являются различные сигналы с измерителей информации ОУ ($y_{\text{и}}(mk + i)$, $i = \overline{0, k-1}$) и внешних воздействий, выходами — управляющие сигналы, поступающие на соответствующие входы ОУ.

Текущие значения векторов состояния ОУ и ВВ дают полную информацию об ОУ и внешних воздействиях в данный момент времени и включают в себя предысторию о поведении системы в прошлом [7]. Поэтому законы управления, вырабатываемые регуляторами, являются функциями состояний ОУ и ВВ. Если все переменные вектора состояния моделей ОУ (модели ВВ) доступны для измерения, то будем считать данные модели моделями с полной информацией. В случае ОУ и ВВ с полной информацией стационарный регулятор вырабатывает закон управления как линейную функцию состояний:

$$u(mk + i) = -K_{i+1}x(mk + i) + K_{\xi,i+1}\xi(mk + i), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (4)$$

где K_{i+1} — периодическая матрица линейных обратных связей (ЛОС) по состояниям ОУ на $(i + 1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $l \times n$; $K_{\xi,i+1}$ — периодическая матрица линейных связей по состояниям модели ВВ на $(i + 1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $l \times q$. Регуляторы, вырабатывающие закон управления вида (4), будем называть статическими регуляторами, так как их структура состоит из пропорциональных звеньев со связями, которые определяются структурой матриц K_{i+1} и $K_{\xi,i+1}$, $i = \overline{0, k-1}$, формирующих пропорциональные связи.

Рассмотрим методы синтеза статических регуляторов, реализующих законы управления вида (4). Статический регулятор реализует данный закон управления по информации о значении измеряемых величин $y_z(mk + i)$, $i = \overline{0, k-1}$. Если мы располагаем моделями ОУ и ВВ с полной информацией ($l_1 = n - 1$, $q_1 = q$), то набор измеряемых величин позволяет однозначно определить все состояния ОУ и ВВ, так как в данном случае матрица измерений $C_{z,i+1}$, $i = \overline{0, k-1}$, имеет полный ранг [8].

При этом регулятор реализует закон управления вида (4) в следующей форме:

$$u(mk + i) = -[K_{e,i+1}, \bar{K}_{i+1}, -K_{g,i+1}] \begin{bmatrix} e(mk + i) \\ y_{\text{и}}(mk + i) \\ g_{\text{и}}(mk + i) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (5)$$

где $[-K_{e,i+1}, \bar{K}_{i+1}, -K_{g,i+1}] = [K_{i+1}, K_{\xi,i+1}] C_{z,i+1}^{-1}$; $K_{e,i+1}$ — периодическая матрица линейных обратных связей по ошибке на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности; $\bar{K}_{i+1}$ — периодическая матрица линейных обратных связей по состояниям $\bar{x} = [x_{l+1} \dots x_n]^T$ на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности; $K_{g,i+1}$ — периодическая матрица линейных обратных связей по внешним воздействиям на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности.

Тогда уравнение движения замкнутой системы принимает вид

$$\left. \begin{aligned} x((mk + i) + 1) &= F_{i+1}x(mk + i) + \\ &+ B_{i+1}K_{e,i+1}g(mk + i) + B_{i+1}K_{g,i+1}g_{\text{и}}(mk + i); \\ y(mk + i) &= C_{i+1}x(mk + i); \quad i = \overline{0, k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $F_{i+1} = A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}$ — периодическая матрица описания замкнутой системы на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности.

Из описания замкнутой системы можно сделать вывод, что составляющие закона управления вида (4), реализуемого статическим регулятором, по-разному влияют на динамические свойства замкнутой системы. Первая составляющая, использующая информацию об ОУ, изменяет только свойства матрицы замкнутой системы, обеспечивая желаемое качество переходных процессов, и влияет на показатели точности. Введение второй составляющей, использующей информацию о внешних воздействиях, не изменяет матрицу замкнутой системы и, следовательно, в большей мере влияет на установившуюся составляющую переходных процессов. Эта составляющая предназначена для повышения точностных свойств системы. Необходимость ее введения определяется при проектировании конкретной системы после нахождения матрицы ЛОС по состояниям ОУ. Если с помощью найденной матрицы ЛОС невозможно обеспечить требуемые точностные показатели качества, тогда вводятся дополнительные линейные связи по состояниям внешних воздействий.

Проектирование линейных статических регуляторов для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами заключается в нахождении таких матриц K_{i+1} и $K_{\xi,i+1}$, $i = \overline{0, k-1}$, которые обеспечивают в замкнутой системе желаемые динамические показатели качества.

Синтез модальных управлений для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Под модальным управлением понимается изменение собственных движений замкнутой системы, а следовательно, и корней характеристического полинома с помощью управляющих воздействий в целях достижения требуемых показателей качества [4]. Связь корней характеристического полинома с требуемыми показателями качества основывается на использовании стандартных полиномов, определяющих коэффициенты характеристического полинома проектируемой системы [1]. Стандартные полиномы задают эталонную модель системы, обладающую желаемыми показателями качества. Поэтому синтез статического регулятора с помощью метода модальных управлений состоит в задании эталонной модели с желаемыми свойствами и нахождении матрицы ЛОС по состояниям ОУ, т. е. закона управления, обеспечивающего в замкнутой системе те же самые корни характеристического полинома, что и в эталонной модели.

Для многомерных систем (в отличие от систем с одним входом и одним выходом) задача модального управления может иметь не единственное решение [9, 10]. Это связано с тем, что различные законы управления могут обеспечить желаемые моды, так как различные входы могут воздействовать на одни и те же моды. Метод модального управления достаточно хорошо связан с показателями качества процессов, такими как перерегулирование и время переходного процесса, и в меньшей мере — с точностными показателями качества [11].

Рассмотрим синтез модальных управлений (синтез П-регулятора) для дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами по заданным показателям качества переходных процессов, т. е. поставим следующую задачу для системы

$$\left. \begin{aligned} x((mk + i) + 1) &= A_{i+1}x(mk + i) + B_{i+1}u(mk + i); \\ y(mk + i) &= C_{i+1}x(mk + i); \\ e(mk + i) &= g(mk + i) - y(mk + i), \quad i = \overline{0, k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где все переменные и матрицы имеют тот же смысл, что и для ОУ (1): спроектировать закон управления вида

$$u(mk + i) = -K_{i+1}x(mk + i), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (8)$$

где все переменные и матрицы имеют тот же смысл, что и в уравнении (4); $K_{i+1} = [K_{e,i+1}; \bar{K}_{i+1}]$; $K_{e,i+1}$ — периодическая матрица ЛОС по ошибке на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $l \times l$; $\bar{K}_{i+1}$ — периодическая матрица ЛОС по состояниям $\bar{x} = [x_{l+1} \dots x_n]^T$ на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности размерности $l \times (n-l)$.

Закон управления вида (8) должен обеспечивать в замкнутой системе желаемые динамические показатели качества. Уравнения движения замкнутой системы с проектируемым регулятором относи-

тельно переходной составляющей, по которой и определяются динамические показатели качества (время переходного процесса, перерегулирование), в соответствии с уравнением (6) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_{\Pi}((mk+i)+1) &= F_{i+1}x_{\Pi}(mk+i), \\ y_{\Pi}(mk+i) &= C_{i+1}x_{\Pi}(mk+i); \\ i &= \overline{0, k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $F_{i+1} = A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}$ — периодическая матрица описания замкнутой системы на $(i+1)$ -м шаге внутри интервала периодичности.

Рассмотрим поведение уравнения движения системы (9) на каждом шаге через интервал периодичности k , которое в этом случае принимает вид системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_{\Pi}((mk+i)+k) &= \tilde{F}_{i+1}x_{\Pi}(mk+i); \\ y_{\Pi}(mk+i) &= C_{i+1}x_{\Pi}(mk+i); \\ i &= \overline{0, k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $\tilde{F}_{i+1} = \prod_{j=i+1}^{k+1} F_{k+2i+1-j}$ — периодическая обобщенная матрица описания $(i+1)$ -го уравнения движения замкнутой системы через интервал периодичности k . На интервале периодичности k система (9) не является системой с периодически изменяющимися коэффициентами, и ее можно рассматривать как линейную стационарную дискретную систему, которая описывается k уравнениями.

Так как мы свели задачу построения регулятора для нестационарной системы к задаче синтеза регулятора для стационарной системы, это позволяет нам воспользоваться методом модального управления для синтеза линейных стационарных обратных связей, т. е. закона управления вида (8), который должен обеспечивать для матриц $\tilde{F}_{i+1}$, $i = \overline{0, k-1}$, наперед заданный желаемый характеристический полином.

В соответствии с исходной системой (9) назначим эталонную модель:

$$\left. \begin{aligned} z_3((mk+i)+1) &= \Gamma_3 z_3(mk+i); z_3(0); \\ v_3(mk+i) &= -H_3 z_3(mk+i); i = \overline{0, k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где z_3 — вектор состояния эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора x системы (7); v_3 — вектор выхода эталонной модели, размерность которого совпадает с размерностью вектора u системы (7); Γ_3 — матрица описания эталонной модели размерности $n \times n$; H_3 — матрица выхода эталонной модели размерностью $l \times n$. Рассмотрим поведение системы (11) через интервал периодичности:

$$\left. \begin{aligned} z_3((mk+i)+k) &= \tilde{\Gamma}_3 z_3(mk+i); z_3(i); \\ v_3(mk+i) &= -H_3 z_3(mk+i), i = \overline{0, k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\tilde{\Gamma}_3 = \Gamma_3^k$ — обобщенная матрица эталонной модели через интервал периодичности; $z_3(i) = \Gamma_3^i z_3(0)$ —

вектор обобщенных начальных состояний $(i+1)$ -го уравнения движения эталонной модели через интервал периодичности. Через интервал периодичности система (11) не является системой с периодически изменяющимися коэффициентами, и ее можно рассматривать как линейную стационарную дискретную систему, которая описывается k уравнениями.

Заданием матрицы Γ_3 определяются желаемые собственные числа замкнутой системы (11), которые будут одинаковы на каждом шаге $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности и удовлетворяют характеристическому уравнению матрицы описания эталонной модели $\det[\Gamma_3 - \lambda I] = 0$. Выберем матрицу Γ_3 таким образом, чтобы обеспечить желаемый характеристический полином матрицы $\tilde{\Gamma}_3$ системы (12), т. е. если $\lambda_j^*, j = \overline{1, n}$, — собственные числа матрицы Γ_3 , а $\lambda_j, j = \overline{1, n}$, — собственные числа матрицы Γ_3 , то

$$\lambda_j = k\sqrt[k]{\lambda_j^*}, j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

При назначении эталонной модели матрицу H_3 выбирают из условия полной наблюдаемости пары матриц $(\tilde{\Gamma}_3, H_3)$.

Искомые матрицы ЛОС K_{i+1} должны обеспечивать на каждом шаге $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности совпадение собственных чисел матриц $\tilde{F}_{i+1}$, определяющих свойства замкнутой системы через интервал периодичности, с собственными числами матрицы $\tilde{\Gamma}_3$ эталонной модели (12). При условии полной управляемости на каждом шаге $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности пар матриц (A_{i+1}, B_{i+1}) всегда существуют матрицы K_{i+1} , которые обеспечивают замкнутой системе через интервал периодичности произвольно назначенный характеристический полином.

Положим, что в любой дискретный момент времени m на каждом шаге $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности любая траектория движения $x_{\Pi}(mk+i)$ замкнутой системы (10) с точностью до линейного преобразования подобна траектории движения $z_3(mk+i)$ эталонной модели (12), т. е.

$$x_{\Pi}(mk+i) = M_{i+1}z_3(mk+i), i = \overline{0, k-1}, \quad (14)$$

где M_{i+1} — периодическая неособая матрица, т. е. существует матрица M_{i+1}^{-1} , определяющая линейное преобразование, размерности $n \times n$. Подставим введенное преобразование (14) в замкнутую систему (10). Тогда с учетом системы (12) получим

$$M_{i+1}^{-1} \tilde{F}_{i+1} M_{i+1} = \tilde{\Gamma}_3, i = \overline{0, k-1}. \quad (15)$$

Собственные числа матрицы $\tilde{\Gamma}_3$ задают желаемые корни характеристического полинома замкнутой системы, а собственные числа матриц $\tilde{A}_{i+1}$, $i = \overline{0, k-1}$, определяют собственные числа характеристического полинома обобщенной исходной разомкнутой системы. Логично предположить, что собственные числа характеристического полинома обобщенной разомкнутой системы не пересекаются с желаемыми собственными числами характеристического полинома замкнутой системы через интервал периодичности. Искомая периодическая матрица ЛОС статического регулятора K_{i+1} , $i = \overline{0, k-1}$, определяется следующим образом:

$$K_{i+1} = H_3 M_{i+1}^{-1}, i = \overline{0, k-1}. \quad (16)$$

Вычисление матрицы линейного преобразования в случае существования матриц $\tilde{A}_{i+1}^{-1}$, $i = \overline{0, k-1}$, проводится на основе k матричных рекуррентных процедур

$$M_{i+1}(m+1) = \tilde{A}_{i+1}^{-1} (M_{i+1}(m) \tilde{\Gamma}_3 + D_{i+1});$$

$$i = \overline{0, k-1}, \quad (17)$$

отдельно для каждого шага $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности. В том случае, если матрица $\tilde{A}_{i+1}^{-1}$, $i = \overline{0, k-1}$, не существует, тогда вычисление проводится на основе k матричных рекуррентных процедур

$$M_{i+1}(m+1) = (\tilde{A}_{i+1} M_{i+1}(m) + D_{i+1}) \tilde{\Gamma}_3^{-1};$$

$$i = \overline{0, k-1}. \quad (18)$$

Рекуррентное выражение (17) более предпочтительно для использования, чем выражение (18), так как оно дает значительно более хорошие результаты по сходимости рекуррентной процедуры к решению при использовании вычислительной техники.

Таким образом, алгоритм синтеза пропорциональных управлений (П-регулятора) на основе метода модального управления для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами содержит следующие этапы:

1) проверка на каждом шаге $i = \overline{0, k-1}$ внутри интервала периодичности пар матриц (A_{i+1}, B_{i+1}) на полную управляемость;

2) формирование эталонных моделей (12) и (11) по заданным показателям качества (времени переходного процесса t_n и перерегулированию σ);

3) решение k алгебраических матричных уравнений типа Сильвестра относительно матриц M_{i+1} , $i = \overline{0, k-1}$, на основе матричных рекуррентных процедур (17) или (18);

4) вычисление k искомых матриц ЛОС статического регулятора K_{i+1} , $i = \overline{0, k-1}$, по уравнению (16).

На рис. 2 изображена функциональная схема дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами с П-регулятором.

Рассмотрим формирование эталонной модели по заданным показателям качества. Задание эталонных моделей для непрерывных систем выполняется с помощью стандартных полиномов, значения коэффициентов которых определяют по заданным показателям качества [4]. Так как мы рассматриваем дискретную систему с периодически изменяющимися коэффициентами через интервал периодичности, т. е. когда она является стационарной, то мы по аналогии с дискретными стационарными системами можем построить эталонную модель типа (12), задав желаемые собственные числа характеристического полинома для непрерывной системы, по заданным показателям качества, а затем пересчитать их в желаемые полюса для дискретной стационарной системы.

Заключение. Рассмотренный метод синтеза модальных управлений позволяет синтезировать закон управления, который обеспечивает в замкнутой дискретной системе с периодически изменяющимися коэффициентами желаемый характеристический полином. Желаемый характеристический полином вводится путем задания эталонной модели, которая является постоянной на каждом шаге внутри интервала периодичности. Желаемый характеристический полином выбирается на основе использования стандартных полиномов по предъявляемым к системе показателям качества.

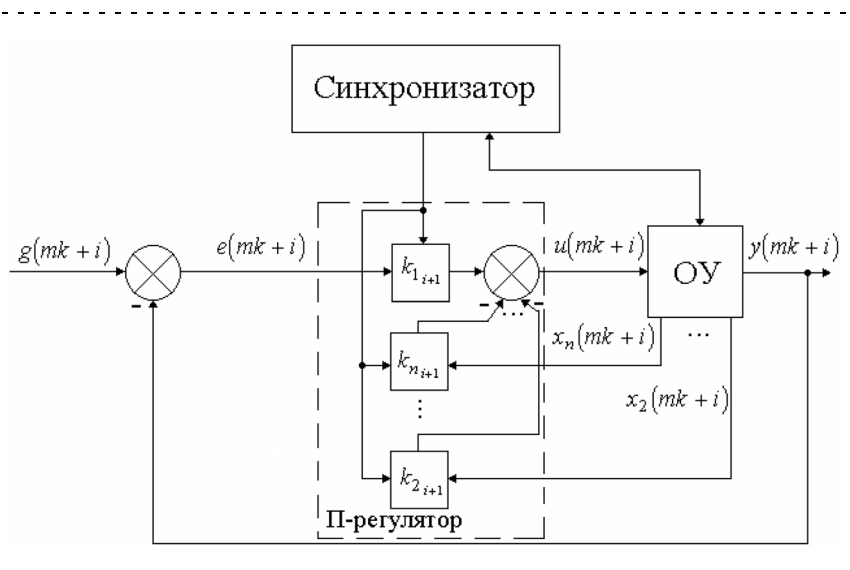


Рис. 2. Функциональная схема дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами с П-регулятором

Список литературы

1. Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
2. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Г. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.
3. Бушуев А. Б., Григорьев В. В., Литвинов Ю. Н. Синтез управлений по заданным оценкам качества для дискретных систем с изменяющимися параметрами // Автоматика и телемеханика. 1984. № 11. С. 10–18.
4. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
5. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I–IV // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, № 4. С. 406–411. № 5. С. 561–568. № 6. С. 662–665. Т. 22. № 4. С. 325–435. 1962. Т. 23. № 11. С. 1405–1413.
6. Богачев А. В., Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Коровьяков А. Н. Аналитическое конструирование регуляторов по корневым показателям качества // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 21–28.
7. Александров А. Г., Хлебалин Н. А. Аналитический синтез регуляторов при неполной информации о параметрах объекта управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. сб. Саратов: СПИ, 1981. Вып. 5. С. 138–147.
8. Григорьев В. В. Синтез управлений по заданным оценкам качества для дискретных систем с изменяющимися параметрами // V Всесоюзная конференция по управлению в механических системах. Тез. докл. Казань, 1985. С. 89.
9. Григорьев В. В., Мансурова О. К., Ушаков А. В. Синтез и анализ многомерных систем с использованием метода модального управления // II ВНТС Автоматизация проектирования систем автоматического и автоматизированного управления. Тез. докл. Челябинск, 1978. С. 171.
10. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Модальное управление многомерными объектами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 2. С. 130–142.
11. Лозгачев Г. И. Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 49–55.

УДК 681.513.6

С. А. Колюбин, студент, **А. А. Пыркин**, аспирант,
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики
a.pyrkin@gmail.com

Адаптивное управление маятником с инерционным маховиком*

Обсуждается разработка алгоритмов адаптивного управления мехатронной системой, представляющей собой однозвенный маятник с инерционным маховиком. Полученная гибридная система управления позволяет стабилизировать маятник в перевернутом положении в условиях полной параметрической неопределенности объекта управления и ограниченного по модулю управления. Главной особенностью по сравнению с известными аналогами является то, что адаптивная настройка регулятора проводится в режиме "он-лайн" без предварительной идентификации неизвестных параметров объекта управления.

Ключевые слова: мехатронные системы, маятник с инерционным маховиком, параметрическая неопределенность, гибридная система управления, адаптивное управление, идентификация, метод скоростного градиента, модальное управление

Введение

Маятник является наиболее интересным объектом для исследований сложной динамики механических систем еще со времен Галилея. В настоящее время для научных исследований в области мехатроники и систем автоматического управления широкое распространение получили мехатронные исследовательские комплексы, которые позволяют

наглядно демонстрировать возможность применения современных методов управления для широкого класса задач. В случае работы с подобным комплексом исследователь имеет возможность проверить работоспособность разрабатываемых алгоритмов не только посредством математического моделирования, но и на реальном объекте.

Задачи управления маятниковыми системами часто представляют собой аналог многих естественных, технологических и физических процессов. Так, например, одной из прикладных задач, для решения которой могут быть применены полученные методы управления, является задача стабилизации космической ракеты при старте. Кроме того, "маховичные" системы, в которых основание маятника остается неподвижным (гиродины), активно используются для управления ориентацией космических аппаратов.

В данной статье решается задача управления маятником с инерционным колесом. Требуется привести маятник в вертикальное (неустойчивое) положение и стабилизировать его в этом положении при условии ограниченного управления и полной параметрической неопределенности объекта управления.

Такая механическая система описана в ряде публикаций [1–8]. В работе [7] рассматриваются два метода синтеза алгоритмов управления раскачкой и стабилизацией маятника с маховиком: линеаризация обратной связью и пассивфикация. В работе [2] аналогичная маятниковая система используется как устройство для тестирования алгоритма стабилизации неустойчивых объектов ограниченным по модулю управлением. В [2] разработаны алгоритмы стабилизации неустойчивого положения равновесия при малых начальных отклонениях от этого состояния.

* Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 09-08-00139).

Однако надо отметить, что решению задачи управления перевернутым маятником с инерционным маховиком в качестве движителя с использованием адаптивных подходов уделено недостаточно внимания, несмотря на очевидную перспективность их применения. Так, в работах [5] и [7] параметры объекта принимаются априорно достоверно известными. В работе [1] рассмотрен случай, когда поставленные задачи решаются при неизвестных параметрах объекта, однако предлагаемый идентификационный подход и метод неявной настройки модели требуют предварительного проведения активного эксперимента для идентификации неизвестных параметров.

В данной статье развиваются методы управления маятником [1–8]. В отличие от известных аналогов в этой работе синтезируются адаптивные алгоритмы управления маятником, позволяющие решать указанные задачи при полной параметрической неопределенности объекта управления без предварительной идентификации параметров маятника.

Постановка задачи

Механическая часть объекта представляет собой однозвенный маятник, пассивно закрепленный на оси вращения, с расположенным на его конце, удаленном от оси вращения, инерционным маховиком. На рис. 1 представлено схематическое изображение маятника с инерционным маховиком.

Управление движением маятника осуществляется за счет изменения направления и скорости вращения инерционного маховика. В свою очередь, управление вращением инерционного маховика осуществляется посредством регулирования напряжения в цепи питания якоря приводного электродвигателя постоянного тока, смонтированного совместно с маховиком на конце маятника.

Математическая модель [5] отражает физическую сущность механической части установки, проявляющуюся при функционировании системы, и в пространстве состояний может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + a \sin \theta = -b_p(\bar{u} - f); \\ \ddot{\theta}_r = b_r(\bar{u} - f), \end{cases} \quad (1)$$

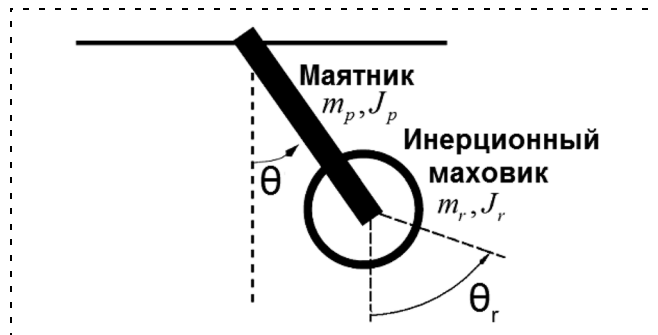


Рис. 1. Схематическое изображение маятниковой системы

где θ — угол крена маятника относительно вертикали; θ_r — угол поворота инерционного маховика относительно вертикали; $a = \frac{mgl}{J}$, $b_p = \frac{k_u}{J}$, $b_r = \frac{k_u}{J_r}$ — не-

известные обобщенные параметры маятника; m — суммарная масса маятника и маховика; l — расстояние от точки подвеса до общего центра масс маятниковой системы; J — суммарный момент инерции маятниковой системы; J_r — момент инерции маховика и ротора двигателя относительно собственного центра масс; k_u — коэффициент передачи электродвигателя; g — ускорение свободного падения; f — момент сил трения, приложенных к маятнику; $|\bar{u}| < 10$ — управляющее воздействие. Измерению доступны только переменные θ и θ_r .

Целью управления является стабилизация маятника с реакционным маховиком в перевернутом положении при априорно неизвестных параметрах объекта и малым управлением.

Синтез алгоритма управления

Так как малым управлением объект крайне сложно сразу привести в заданную окрестность и стабилизировать в верхнем положении равновесия из произвольного начального состояния, решение поставленной задачи разбивается на два этапа: раскачка маятника и вывод в требуемую окрестность и его стабилизация в перевернутом положении.

Также необходимо учесть наличие трения в двигателе, которое осложняет решение поставленной задачи. Для этого представим момент сил трения f как звено зоны нечувствительности двигателя к управляющему воздействию. Размер этой зоны D может быть измерен экспериментально.

Воспользуемся подходом, описанным в статье [9], построив закон управления в виде

$$\bar{u}(t) = u(t) + D \operatorname{sign}(u(t)),$$

где $u(t)$ — расчетное управление для объекта без зоны нечувствительности. Таким образом, негативное влияние сил трения будет устранено.

♦ Алгоритм приведения состояния маятника в заданную область

Для синтеза алгоритма используем метод скоростного градиента [10, 11] с целевой энергетической функцией. В работе [1] показано, что в задаче управления маятником с инерционным маховиком целесообразно оперировать не гамильтонианом системы, а использовать вместо этого парциальную энергию системы, характеризующую движение маятника без учета вращения инерционного колеса.

Выражение для целевой функции примет вид

$$G(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \Delta H^2,$$

где $\Delta H = H(\theta, \dot{\theta}) - H^*$; $H(\theta, \dot{\theta}) = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ — текущая парциальная энергия системы; $H^* = 2mgl$ — желаемый уровень энергии маятника в перевернутом положении.

Полученный из конечной формы алгоритма скоростного градиента пропорциональный алгоритм управления в общем виде описывается выражением

$$u = \gamma \Delta H \sigma,$$

где γ — положительный коэффициент, $\sigma = \frac{\partial \dot{H}(\theta, \dot{\theta})}{\partial u}$.

Применительно к исследуемой системе после преобразований можно переписать в виде

$$u = \gamma \left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgl(1 + \cos\theta) \right) b_p J \dot{\theta}. \quad (2)$$

Преобразуем закон управления (2):

$$u = \gamma \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{mgl}{J}(1 + \cos\theta) \right) b_p J^2 \dot{\theta} = Kb_p \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - a(1 + \cos\theta) \right) \dot{\theta}, \quad (3)$$

где $K = \gamma J^2$ — положительный коэффициент, выбираемый разработчиком.

В силу того, что параметры a и b_p неизвестны, а переменная θ недоступна для измерения, закон управления (3) не реализуем. На основе (3) построим реализуемый алгоритм раскачки:

$$u = K\hat{b}_p \left(\frac{1}{2}\hat{\theta}^2 - \hat{a}(1 + \cos\theta) \right) \hat{\theta}, \quad (4)$$

где $\hat{a}$ — оценка параметра a ; $\hat{b}_p$ — оценка параметра b_p ; $\hat{\theta}$ — оценка скорости вращения маятника, получаемая наблюдателем. Алгоритм оценивания угловой скорости $\hat{\theta}$ представлен в [5].

♦ Алгоритм стабилизации маятника в неустойчивом положении равновесия

В задаче стабилизации маятника в перевернутом положении цель управления выражается предельным равенством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta(t) - \theta^*) = 0,$$

где $\theta(t)$ — текущее значение угла крена маятника, а $\theta^* = \pi$ — соответствует верхней точке траектории вращения маятника.

При малых значениях угла функция синуса может быть аппроксимирована значением самого угла, выраженным в радианах. Таким образом, в окрестности перевернутого положения маятника справедливо выражение

$$\sin\theta \approx (\pi - \theta) \bmod 2\pi.$$

Следовательно, мы можем записать выражения, описывающие линеаризованную вблизи положения неустойчивого равновесия модель системы, в виде

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = a\bar{\theta} - b_p u, \\ \ddot{\theta}_r = b_r u, \end{cases}$$

где параметр $\bar{\theta} = (\theta - \pi) \bmod 2\pi$ обозначает отклонение текущего угла крена маятника от верхней точки траектории вращения.

Для случая известных параметров модели (1) можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в работе [5] и основанным на методе стандартных полиномов:

$$u(t) = -k_1 \bar{\theta}(t) - k_2 \hat{\theta}(t) - k_3 \hat{\theta}_r(t),$$

где $k_1 = -\frac{(1 + 2\alpha\zeta)\omega_0^2 + a}{b_p}$, $k_2 = -\frac{(\alpha + 2\zeta)\omega_0 a + \alpha\omega_0^3}{ab_p}$,

$k_3 = -\frac{\alpha\omega_0^3}{ab_r}$ — параметры регулятора; $\alpha, \zeta, \omega_0 > 0$ —

постоянные коэффициенты, влияющие на качество регулирования; $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}_r$ — оценки угловых скоростей маятника и маховика, получаемые из наблюдателя [5].

В случае параметрической неопределенности реализуемый алгоритм стабилизации построим в виде

$$u(t) = -K_1 \bar{\theta}(t) - K_2 \hat{\theta}(t) - K_3 \hat{\theta}_r(t), \quad (5)$$

где параметры регулятора рассчитываются на основе оценок неизвестных комплексных параметров системы α , $\hat{b}_p$, $\hat{b}_r$:

$$K_1 = -\frac{(1 + 2\alpha\zeta)\omega_0^2 + \hat{a}}{\hat{b}_p}, \quad K_2 = -\frac{(\alpha + 2\zeta)\omega_0 \hat{a} + \alpha\omega_0^3}{\hat{a}\hat{b}_p},$$

$$K_3 = -\frac{\alpha\omega_0^3}{\hat{a}\hat{b}_r}.$$

♦ Идентификации неизвестных параметров объекта

Выполним параметризацию модели объекта управления (1) для получения регрессионной формы.

Введем в рассмотрение функцию $\vartheta = \sin\theta$ и вспомогательные фильтры второго порядка вида

$$\xi_1(t) = \frac{\lambda^2}{p^2 + 2\lambda + \lambda^2} \theta(t); \quad \xi_2(t) = \frac{\lambda^2}{p^2 + 2\lambda + \lambda^2} \theta_r(t);$$

$$\xi_3(t) = \frac{\lambda^2}{p^2 + 2\lambda + \lambda^2} \vartheta(t); \quad \xi_4(t) = \frac{\lambda^2}{p^2 + 2\lambda + \lambda^2} u(t),$$

где $\xi_1(t)$ — выходные сигналы фильтров; p — оператор дифференцирования; $\lambda > 0$.

Запишем модель объекта управления в регрессионной форме:

$$\begin{cases} z_1(t) = \varphi_1(t)^T \Psi_1; \\ z_2(t) = \varphi_2(t)^T \Psi_2, \end{cases}$$

где $z_1(t) = \ddot{\xi}_1$ и $z_2(t) = \ddot{\xi}_2$ — известные функции; $\varphi_1^T(t) = [\xi_3(t) \ \xi_4(t)]$ и $\varphi_2(t) = [\xi_4(t)]$ — регрессоры, полностью доступные для измерения, а $\Psi_1^T = [-a \ -b_p]$ и $\Psi_2^T = [b_r]$ — векторы, содержащие неизвестные параметры модели маятника.

Предположим, что на вход объекта поступают сигналы $\{u(1) \ u(2) \ \dots \ u(N)\}$, порождающие последовательность наблюдаемых выходов $\{\theta(1) \ \theta(2) \ \dots \ \theta(N)\}$ и $\{\theta_r(1) \ \theta_r(2) \ \dots \ \theta_r(N)\}$. Для параметризованной модели системы можно выписать массивы

данных Z_1, Z_2 по измеримым сигналам и Ω_1, Ω_2 по регрессорам:

$$Z_1^T = [z_1(1) \ z_1(2) \ \dots \ z_1(N)]; \ Z_2^T = [z_2(1) \ z_2(2) \ \dots \ z_2(N)]; \\ \Omega_1 = [\varphi_1(1) \ \varphi_1(2) \ \dots \ \varphi_1(N)]; \ \Omega_2 = [\varphi_2(1) \ \varphi_2(2) \ \dots \ \varphi_2(N)],$$

где N — число моментов времени съема информации. Значения запоминаются последовательно на каждом шаге функционирования системы.

Тогда алгоритм идентификации неизвестных параметров представим в виде

$$\begin{cases} \widehat{\Psi}_1 = (\Omega_1 \widehat{\Omega}_1^T)^{-1} \Omega_1 Z_1; \\ \widehat{\Psi}_2 = (\Omega_2 \widehat{\Omega}_2^T)^{-1} \Omega_2 Z_2, \end{cases} \quad (6)$$

где $\widehat{\Psi}_1$ и $\widehat{\Psi}_2$ — векторы оценок параметров объекта управления.

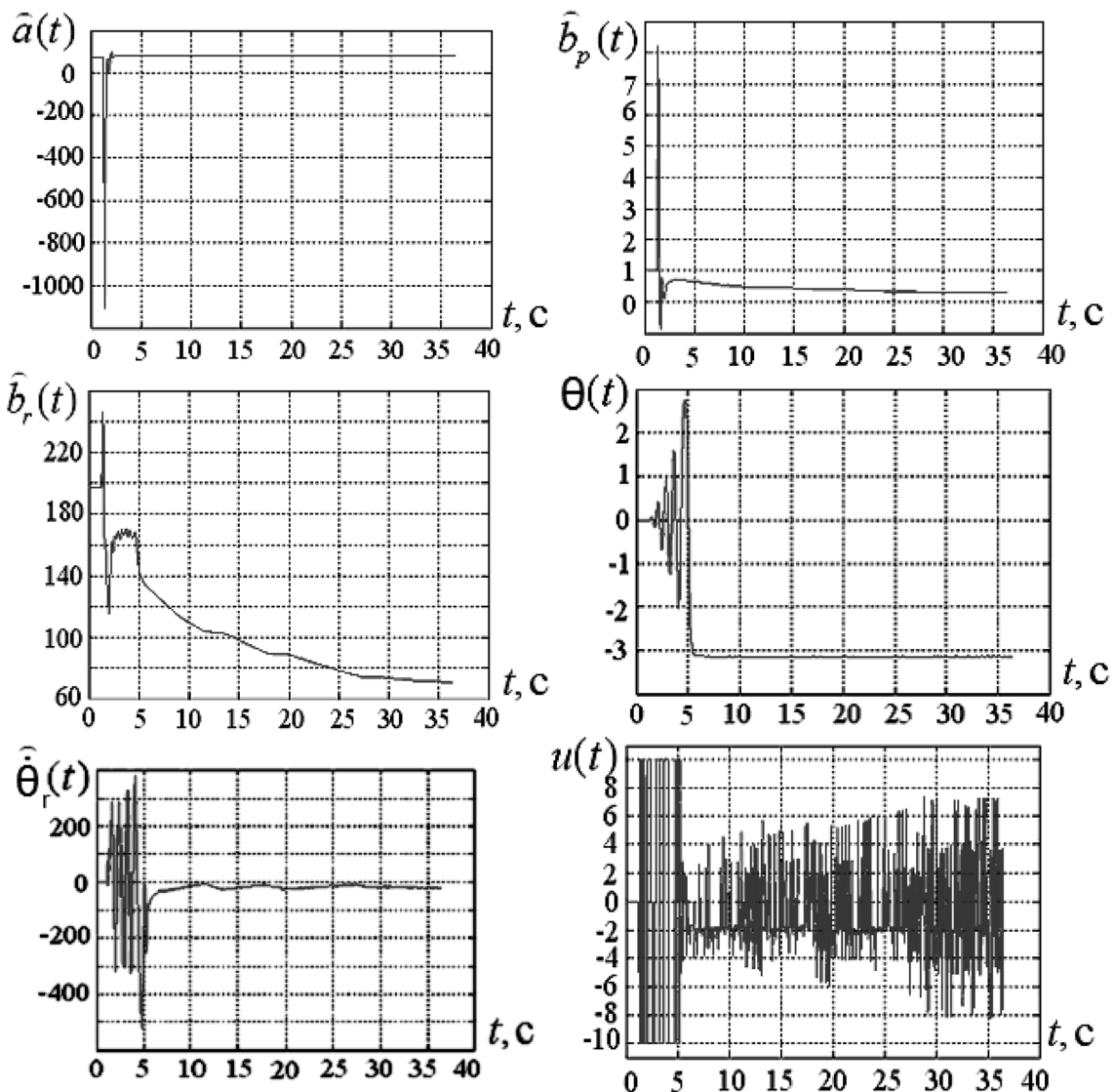


Рис. 2. Переходные процессы в реальной системе при параметрах алгоритма управления $\lambda = 5$, $K = 1,5$, $\omega_0 = 5$, $\varsigma = 0,707$, $\alpha = 1$, $\theta_s = 0,5$ рад

Замечание. Алгоритм идентификации (6) с увеличением объема выборки (числа N) обеспечит сходимость всех оценок параметров к их истинным значениям, если матрицы $\Omega_1 \widehat{\Omega}_1^T$ и $\Omega_2 \widehat{\Omega}_2^T$ невырождены. Это условие будет выполняться, если входной управляющий сигнал $u(t)$ будет "частотно богат".

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} V_1(N) &= \sum_{i=1}^N \xi_3(i) z_1(i); \quad V_2(N) = \sum_{i=1}^N \xi_4(i) z_1(i); \\ V_3(N) &= \sum_{i=1}^N \xi_4(i) z_2(i); \\ W_1(N) &= \sum_{i=1}^N \xi_3^2(i); \quad W_2(N) = \sum_{i=1}^N \xi_3(i) \xi_4(i); \\ W_3(N) &= \sum_{i=1}^N \xi_4^2(i). \end{aligned}$$

Реализуемый алгоритм оценки неизвестных параметров имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{a}(i) &= -(W_3(i) V_1(i) - W_2(i) V_2(i)) / \Delta_1(i), \\ &\text{если } \Delta_1(i) \neq 0, \text{ иначе } \widehat{a}(i) = \widehat{a}(i-1); \\ \widehat{b}_p(i) &= (W_2(i) V_1(i) - W_1(i) V_2(i)) / \Delta_1(i), \\ &\text{если } \Delta_1(i) \neq 0, \text{ иначе } \widehat{b}_p(i) = \widehat{b}_p(i-1); \\ \widehat{b}_r(i) &= V_3(i) / \Delta_2(i), \\ &\text{если } \Delta_1(i) \neq 0, \text{ иначе } \widehat{b}_r(i) = \widehat{b}_r(i-1); \\ V_1(i) &= V_1(i-1) + \xi_3(i) z_1(i), \quad V_1(0) = 0; \\ V_2(i) &= V_2(i-1) + \xi_4(i) z_1(i), \quad V_2(0) = 0; \\ V_3(i) &= V_3(i-1) + \xi_4(i) z_2(i), \quad V_3(0) = 0; \\ W_1(i) &= W_1(i-1) + \xi_3^2(i), \quad W_1(0) = 0; \\ W_2(i) &= W_2(i-1) + \xi_3(i) \xi_4(i), \quad W_2(0) = 0; \\ W_3(i) &= W_3(i-1) + \xi_4^2(i), \quad W_3(0) = 0; \\ \Delta_1(i) &= W_1(i) W_3(i) - W_2^2(i); \\ \Delta_2(i) &= W_3(i). \end{aligned} \right.$$

Коммутация алгоритмов управления

Выбор и обоснование способа коммутации описаны в [1, 5]. Основное значение имеет такой подбор условий коммутации, чтобы избежать нежелательных переходных процессов в системе во время переключения.

Закон управления для гибридной системы имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{при } |\theta - \pi| \leq \theta_s; \\ u_2(t) & \text{при } |\theta - \pi| > \theta_s, \end{cases}$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ обозначают соответственно алгоритм стабилизации (5) и алгоритм раскачки (4);

$\theta_s = \frac{\pi}{6}$ — угол крена маятника, при котором происходит переключение регуляторов.

Результаты эксперимента

На рис. 2 представлены результаты реализации полученных алгоритмов на мехатронном маятниковом комплексе фирмы Mechatronics System, иллюстрирующие их работоспособность.

Заключение

В данной статье был получен адаптивный регулятор, обеспечивающий приведение маятника в окрестность вертикального неустойчивого положения равновесия и стабилизацию его в этом состоянии. Алгоритм управления является робастным по отношению к внешним возмущениям, изменению параметров маятниковой системы, начальным условиям. В отличие от известных аналогов данный подход обеспечивает решение подобной задачи в условиях полной параметрической неопределенности без предварительной идентификации.

Оценивание неизвестных параметров выполняется в режиме "он-лайн": одновременно с работой алгоритмов раскачки и стабилизации.

Авторы благодарны А. Л. Фрадкову и М. Спонгу за предоставление мехатронного маятникового комплекса Mechatronic Control Kit для исследования работоспособности алгоритмов управления.

Список литературы

1. Андриевский Б. Р. Стабилизация перевернутого маятника с инерционным маховиком в качестве движителя. Управление в физико-технических системах / Под ред. А. Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2004. С. 52–71.
2. Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е. и др. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 14–24.
3. Astrom K. J. and Furuta K. Swinging up a Pendulum by Energy Control // Automatica. 2000. 36. P. 278–285.
4. Astrom, K. J. Hybrid Control of Inverted Pendulums / In Yamamoto and Hara, Eds. // Learning, Control, and Hybrid Systems. Springer, 1999. P. 150–163.
5. Astrom K. J., Block D. J., Mark W. Spong The Reaction Wheel Pendulum. 2001.
6. Lozano R., Fantoni I., and Block D. Stabilization of the Inverted Pendulum around its Homoclinic Orbit // Systems and Control Letters. 2000. 40. P. 197–204.
7. Spong M. W., Corke P., Lozano R. Nonlinear Control of the Inertia Wheel Pendulum // Automatica. 2001. V. 37. P. 1845–1851.
8. Spong M. W., Praly L. Control of Underactuated Mechanical System Using Switching and Saturation // Proc. of the Block Island Workshop on Control Using Logic Based Switching. Springer-Verlag, 1996.
9. Bobtsov A., Pyrkin A. Experimental research of consecutive compensator approach on basis of mechatronic systems // 6th EUROMECH Conference ENOC, 2008.
10. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
11. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика: Принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.

УДК 519.6:004.31

И. Ф. Чебурахин, д-р техн. наук, проф.,

МАТИ-РГТУ им. К. Э. Циолковского,

В. И. Цурков,

д-р физ.-мат. наук, проф., зав. отделом

ВЦ РАН

cybernetics@mati.ru

Логическое управление и обработка информации в мехатронных системах*

Усовершенствован математический аппарат, применяемый для автоматизации и оптимизации синтеза дискретных устройств логического управления и обработки информации (комбинационных автоматов). В качестве базисов могут применяться микросхемы различной степени интеграции. Для математических моделей, булевых функций из различных классов заранее выводятся оценки (нижние, верхние и минимальные) функционалов качества, получаемые при реализации этих функций в различных базисах.

Методы рекомендуются для интеллектуализации систем синтеза комбинационных автоматов.

Ключевые слова: булевы функции, представление формулами и схемами, декомпозиция, сложность, показатели качества, минимизация, функциональные и разностные уравнения, многокритериальная оптимизация, быстроедействие

Введение. Создаваемые мехатронные системы, как правило, содержат различные дискретные устройства логического управления и обработки информации, объединяемые на основе информационных процессов для достижения цели управления. Важный класс таких устройств составляют комбинационные автоматы, ключевыми вопросами при синтезе которых является разработка методов эффективной реализации булевых функций и получение нижних и верхних оценок показателей качества-сложности. Выход на уровень минимальных оценок практически возможен только для функций небольшой размерности. Как показал опыт работы с такими функциями, получение оптимального решения неизбежно предполагает использование алгоритмов переборного характера [1–4]. В таких случаях рекомендуется создавать методы, приспособленные к конкретным классам булевых функций, полнее учитывающие их свойства [2–5].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N-09-01-90441 Укр Ф.

К таким методам относится, в частности, метод функциональных уравнений (ФУ) [6–9].

Используемые далее обозначения [7, 8]: $\lceil x \rceil$ — для приближения чисел с избытком (наименьшее целое, не меньшее числа x); логические операции обозначаются двумя способами: конъюнкция — $\&$ или $\cdot$ (точка — знак умножения)**; отрицание — $\neg$ или черта сверху над переменной, например, $\bar{x}$.

Булевы функции, базисы, формулы и схемы. Пусть $f^{(n)}$ (или $f(X)$) — булева функция, зависящая от n существенных переменных из множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Под базисом понимаем произвольную конечную функционально полную систему булевых функций G . В данной статье рассматриваются базисы $G_1 = \{\&, \vee, \bar{}\}$ и $G_3 = \{\&, \oplus, 1\}$ для всех булевых функций и $G_2 = \{\&, \vee\}$ — для монотонных функций. Формулу, полученную на основе декомпозиции функции f в базисе G , обозначаем F , называя суперпозиционной формулой (или просто формулой). В качестве меры сложности-качества представления функции f формулой F или схемой S из функциональных элементов (ФЭ) определяем соответствующие показатели (функционалы): $L_G(F, G)$ — суммарное число вхождений символов переменных (букв) в формулу F , задающую функцию f (число букв в формуле F при реализации ее в классах формул и схем в заданном базисе G на основе декомпозиции); $L_F(F, G)$ — число базисных подформул в F ; $\text{Dep}_F(F, G)$ — глубина F ; $L_S(F, G)$ — число ФЭ в схеме S ; $\text{Dep}_S(F, G)$ — глубина S , определяемая как наибольшее число ФЭ в цепочке среди всех цепочек, соединяющих вход с выходом. Используются также сокращения этих обозначений. Между собой эти показатели имеют сложные связи, затрудняющие многокритериальную оптимизацию. Один из главных показателей — L_G — по практическим соображениям минимизируется (за счет расширения класса моделей — скобочных формул, а также привлечения аппарата булевой алгебры). Средством минимизации показателя L_S являются также скобочные формулы и ветвление выходов ФЭ. При этом улучшение одного из двух показателей может улучшать, оставлять без изменения или ухудшать другой показатель.

Функциональные уравнения (ФУ). В статье рассматриваются ФУ (рекуррентные соотношения [8, 9]) типа 1

$$f^{(n)} = h^{(2)}(f^{(n-1)}, x_n), n \geq 3, \quad (1)$$

** Точкой ($\cdot$) в зависимости от контекста далее обозначается логическое или арифметическое умножение.

и для симметрических функций при $n = 2^s$, $s = 1, 2, \dots$, $n_1 = n_2 = n/2$ — ФУ типа 2 (конечное n -множество аргументов разбивается пополам)

$$f^{(n)}(X) = h^{(2)}(f^{(n/2)}(X_1), f^{(n/2)}(X_2))$$

или

$$f^{(s)}(X) = h^{(2)}(f^{(s-1)}(X_1), f^{(s-1)}(X_2)), \quad (2)$$

где $f^{(2)}$ — начальная функция, $h^{(2)}$ — функция рекурсии.

Соотношения (1)—(2) позволяют с использованием ФУ как аппарата построения скобочных формул конструктивно получить перпозиционную формулу F , реализующую функцию $f^{(n)}$. Решения ДУ характеризуются показателями качества, для каждого из которых выводится свое ФУ (ФУ_{ПК}). Для получения оценок показателей качества применяется как непосредственное их решение, так и моделирование ФУ_{ПК}.

Мультиплексоры. В вычислительной и управляющей технике часто и эффективно применяются мультиплексоры [10]. Вопросы оптимизации их синтеза по показателю сложности L_S сохраняют актуальность в настоящее время.

Мультиплексором от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1}$ (адресных и информационных) называется схема $M^{(n)}$, реализующая функцию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1}) =$$

$$= (\sigma_1, \dots, \sigma_n) y_{v(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}, \quad (3)$$

где $v(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot 2^{n-i}$ [11, 12].

Данную функцию будем обозначать $f_{0,1,2,\dots,2^n-1}^{(n)}$, где верхний индекс — число адресных переменных x_i ; в нижнем индексе перечислены номера наборов, на которых рассматривается функция (3).

Для мультиплексора сразу получаем начальную — самую возможно большую — сложность по показателям:

$$L_S(F, G_1) = (n+1) \cdot 2^n - 1;$$

$$\text{Dep}_F(F, G_1) \leq \lceil \log_2 L_S(F, G_1) \rceil + 1 =$$

$$= \lceil \log_2(n+1) + n \rceil + 1. \quad (4)$$

Предлагается следующая модификация метода ФУ построения схемы $M^{(n)}$ реализации функции и получения заранее оценок сложности L_S и Dep_S схемы $M^{(n)}$. Метод ФУ основывается на эквивалентном преобразовании (3) за счет выноса общих множителей за скобки и получения при этом рекуррентных соотношений. Преобразования выполняются по первой, второй, ..., $(n-2)$ -й переменным. На этапе синтеза схемы применяется ветвление выходов ФЭ.

x_1	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n	$f = y_i$
0	...	0	0	0	y_0
0	...	0	0	1	y_1
0	...	0	1	0	y_2
0	...	0	1	1	y_3
0	...	1	0	0	y_4
0	...	1	0	1	y_5
0	...	1	1	0	y_6
0	...	1	1	1	y_7
1	...	0	0	0	y_8
...	...	...	...	...	...
1	...	0	1	1	y_{2^n-5}
1	...	1	0	0	y_{2^n-4}
1	...	1	0	1	y_{2^n-3}
1	...	1	1	0	y_{2^n-2}
1	...	1	1	1	y_{2^n-1}

Представим (3) в виде таблицы истинности, в которой последний столбец играет двойную роль как часть мультиплексора и как реализуемая функция.

Итак, в (3) выносим переменную x_1 и ее отрицание за скобки, получая ФУ

$$f_{0,1,2,\dots,2^n-1}^{(n)} =$$

$$= \bar{x}_1 \cdot f_{0,1,\dots,2^{n-1}-1}^{(n-1)} \vee x_1 \cdot f_{2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1}^{(n-1)}. \quad (5)$$

Продолжаем такие $n-2$ эквивалентных преобразований (каждый раз разложение по начальной переменной):

$$f_{0,1,2,\dots,2^n-1}^{(n)} =$$

$$= \bar{x}_1 \cdot f_{0,1,\dots,2^{n-1}-1}^{(n-1)} \vee x_1 \cdot f_{2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1}^{(n-1)} =$$

$$= \bar{x}_1 \cdot (\bar{x}_2 \cdot f_{0,1,\dots,2^{n-2}-1}^{(n-2)} \vee x_2 \cdot f_{2^{n-2}, 2^{n-2}+1, \dots, 2^{n-1}-1}^{(n-2)}) \vee$$

$$\vee x_1 \cdot (\bar{x}_2 \cdot f_{2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^{n-1}+2^{n-2}-1}^{(n-2)} \vee$$

$$\vee x_2 \cdot f_{2^{n-1}+2^{n-2}, 2^{n-1}+2^{n-2}+1, \dots, 2^n-1}^{(n-2)} = \dots$$

до тех пор, пока не получим 2^{n-2} функций вида

$$f^{(2)}(x_{n-1}, x_n, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}) = \bar{x}_{n-1} \cdot \bar{x}_n \cdot y_i \vee$$

$$\vee \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot y_{i+1} \vee x_{n-1} \cdot \bar{x}_n \cdot y_{i+2} \vee x_{n-1} \cdot x_n \cdot y_{i+3}, \quad (6)$$

где $i = 0, 4, 8, \dots, 4(2^{n-3} - 1)$.

На основе полученного разложения поэтапно строим схему $M^{(n)}$. Структурно метод ФУ разбивается на:

- подготовительный этап (рис. 1), на котором используются n инверторов и четыре конъюнктора, выходы которых допускают ветвление для получения инверсных сигналов на определенных входах и для реализации элементарных конъюнкций $\bar{x}_{n-1} \cdot \bar{x}_n$, $\bar{x}_{n-1} \cdot x_n$, $x_{n-1} \cdot \bar{x}_n$, $x_{n-1} \cdot x_n$ от переменных x_{n-1} и x_n ;
- этап реализации начальных условий (рис. 2), когда при схемной реализации функций (6) требуется 2^n конъюнкторов (для 2^n информационных переменных) и 3 дизъюнктора для получения каждой из функций (6), т. е. требуется ФЭ общим числом $2^n + 3 \cdot 2^{n-2}$;
- этап итераций (рис. 3), на котором завершается синтез схемной реализации ФУ (5).

Для каждой из $n - 2$ итераций применяются конъюнкторы и дизъюнкторы общим числом $3 \cdot 2^{n-2} - 3$.

Итого, $L_S(F, G) = (n + 4) + (2^n + 3 \cdot 2^{n-2}) + (3 \cdot 2^{n-2} - 3) = 5 \cdot 2^n / 2 + n + 1$.

Для ФУ (5) в базе G_1 получим ФУ_{ПК}. Для показателя сложности L_S из (5) получаем ФУ_{ПК}

$$\begin{aligned} L_S(f_{0,1,2,\dots,2^{n-1}}^{(n)}, G_1) &= L_S(f_{0,1,2,\dots,2^{n-1}-1}^{(n-1)}) + \\ &+ L_S(f_{2^{n-1},2^{n-1}+1,\dots,2^{n-1}-1}^{(n-1)}) + 3 = \\ &= 2L_S(f^{(n-1)}, G_1) + 3, \end{aligned}$$

которому соответствуют разностное уравнение $u_n = 2u_{n-1} + 3$, $u_3 = 3$, и решение 3, 9, 21, 45, ..., которое аналитически может быть записано в виде

$$u_n = 3 \cdot 2^n / 4 - 3, n \geq 3.$$

И окончательно повторяем результат для показателя

$$\begin{aligned} L_S(f_{0,1,2,\dots,2^{n-1}}^{(n)}, G_1) &= u_n + 2^n + 3 \cdot 2^{n-2} + n + 4 = \\ &= 3 \cdot 2^n / 4 - 3 + 2^n + 3 \cdot 2^{n-2} + n + 4 = \\ &= 5 \cdot 2^n / 2 + n + 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Для показателя $\text{Dep}_S(f^{(n)}, G_1)$ из (5) получаем ФУ_{ПК} с учетом подготовительного этапа

$$\begin{aligned} \text{Dep}_S(f_{0,1,2,\dots,2^{n-1}}^{(n)}, G_1) &= \\ &= \text{Dep}_S(f_{0,1,2,\dots,2^{n-1}-1}^{(n-1)}, G_1) + 2, \end{aligned}$$

которое изоморфно трансформируем в разностное уравнение

$$u_n = u_{n-1} + 2, u_2 = 5.$$

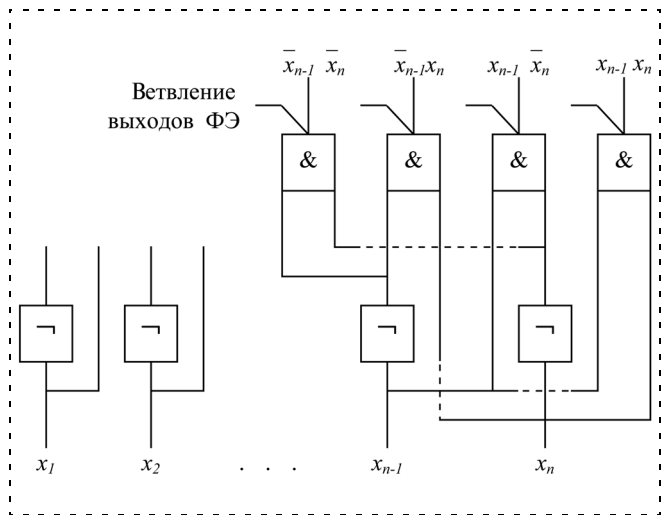


Рис. 1. Подготовительный этап синтеза схемы $M^{(n)}$ (в качестве отрицания используется два символа: черта сверху над переменной и $\neg$ как обозначение ФЭ инвертора; штриховая линия означает отсутствие контакта, пересечение непрерывных линий означает ветвление выхода ФЭ в таких точках, контакт)

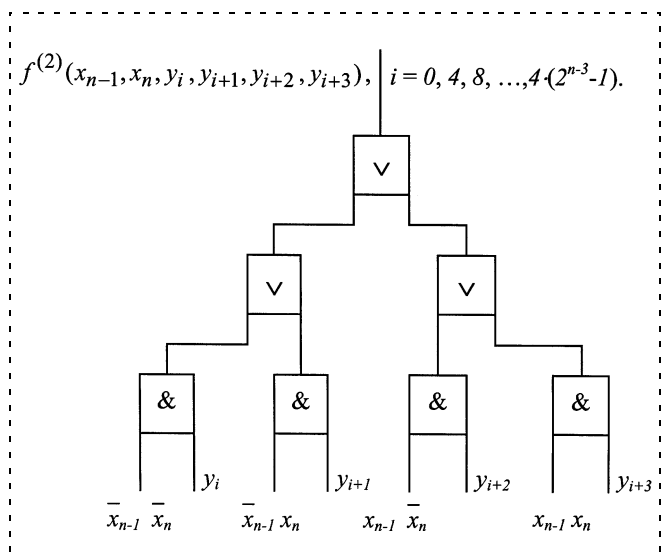


Рис. 2. Схемная реализация функций (6) (начальных условий)

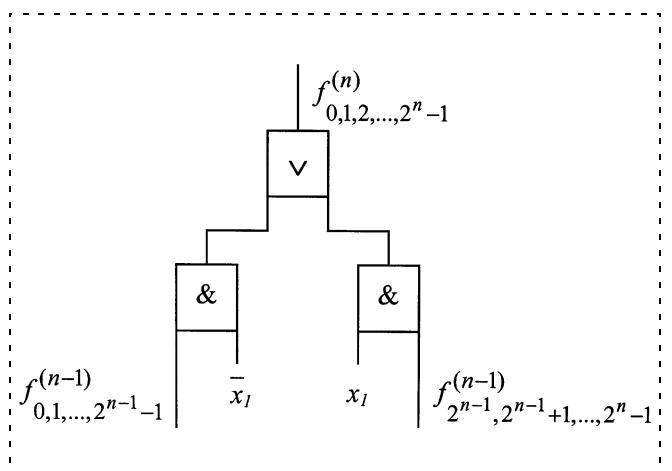


Рис. 3. Схемная реализация ФУ (этап итераций на основе (4))

Решение 5, 7, 9, 11, ..., этого уравнения аналитически представляется в виде $u_n = 2n + 1$. Таким образом, получаем оценку для показателя

$$\text{Dep}_S(f^{(n)}, G_1) = 2n + 1. \quad (8)$$

Итак, предложен метод, который позволяет построить схему $M^{(n)}$ (рис. 1—3) и предлагает при этом улучшенные оценки (7) и (8) показателей сложности $L_S(f_{0,1,2,\dots,2^n-1}^{(n)})$ и $\text{Dep}_S(f_{0,1,2,\dots,2^n-1}^{(n)})$.

Нижние оценки сложности элементарных симметрических полиномов Жегалкина. Для того чтобы судить о качестве алгоритмов синтеза, важно знать, насколько получаемая верхняя оценка отличается от минимальной. Но это сравнение осуществить невозможно, по крайней мере, сложно, астрономически трудоемко в вычислительном плане. Поэтому для сравнения полезно получать хорошие нижние оценки.

Рассмотрим отдельный подход для вывода нижних оценок сложности показателя L_6 при эффективном представлении элементарных симметрических полиномов (ЭСП) Жегалкина $F_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot x_n$ и $F_3^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \oplus \dots \oplus x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n$ в базисе G_3 в классе формул и/или схем.

Выпишем верхние и минимальные оценки показателей, которые получены ранее [8, 9] и рассматриваются в данной статье:

$$L_6(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 2)/2; \quad (9)$$

$$L_6(F_3^{(n)}, G_3) = n^3/6 - n/6 - 1; \quad (10)$$

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3)_{\min} = 3n - 5; \quad (11)$$

$$L_S(F_3^{(n)}, G_3)_{\min} = 5n - 13. \quad (12)$$

Оценки (11) и (12) позволяют получить нижние оценки показателя L_6 .

Пусть $F^{(n)}$ — полином Жегалкина $F_{\text{пол}}^{(n)}$ или скобочная формула $F_{\text{ск.ф}}^{(n)}$ в базисе G_3 , представляющая функцию $f^{(n)}$. Напомним [4, 5], что

$$L_6(F^{(n)}) = L_F(F^{(n)}) + 1.$$

При этом для схемы S без ветвления $L_F = L_S$ и

$$L_6(F^{(n)}) = L_S(F^{(n)}) + 1. \quad (13)$$

Пусть теперь получено $L_S(F^{(n)})_{\min}$ за счет введения формулы $F_{\text{пол}}^{(n)}$ к скобочному виду $F_{\text{ск.ф}}^{(n)}$ в базисе G_3 или за счет ветвления выходов ФЭ схемы S , или при использовании обоих этих действий (других случаев логически нет). Тогда из условия получения оценки $L_S(F^{(n)})_{\min}$ и равенства (13), с одной стороны, следует неравенство

$$L_6(F^{(n)}) \geq L_S(F^{(n)})_{\min} + 1. \quad (14)$$

С другой стороны, если формула F , задающая функцию $f^{(n)}$, — неповторный полином Жегалкина или приведена к неповторному скобочному виду, то (14) становится равенством.

В общем случае (14) определяет нижние оценки сложности показателя $L_6(F^{(n)})$.

Аналогично, для ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq n$, неравенство (14) принимает вид

$$L_6(F_i^{(n)}) \geq L_S(F_i^{(n)})_{\min} + 1.$$

Тогда, используя (9) и (11) ((10) и (12)), для показателя L_6 запишем:

$$3n - 4 \leq L_6(F_2^{(n)}) \leq (n^2 + n - 2)/2;$$

$$5n - 12 \leq L_6(F_3^{(n)}) \leq n^3/6 - n/6 - 1.$$

Данный подход применим также для получения нижних оценок сложности в классе монотонных симметрических ДНФ в базисе G_2 .

Сложность представления n -местной дизъюнкции. Функция $f_{\vee}^{(n)} = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ рассмотрена в базисе $G_3 = \{\&, \oplus, 1\}$ (в классе полиномов Жегалкина) на основе ФУ типа 1 и 2 [9]. Полученная сложность основного показателя $L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_3) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ побудила провести аналогичное исследование в классе скобочных формул в целях уменьшения оценки. Как известно, $f_{\vee}^{(2)} = x_1 \vee x_2 = (x_1 \oplus 1) \& (x_2 \oplus 1) \oplus 1$. Используя эквивалентности (правило де Моргана и правило $x = x \oplus 1$), методом индукции по n получаем

$$f_{\vee}^{(n)} = (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \cdot \dots \cdot (x_n \oplus 1) \oplus 1. \quad (15)$$

Заметим, что при преобразованиях полезна эквивалентность

$$f_{\vee}^{(n)} \oplus 1 = (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \cdot \dots \cdot (x_n \oplus 1).$$

Для (15) выводим показатели сложности представления функции $f_{\vee}^{(n)}$ в базисе G_3 на основе ме-

тодов структурно-функциональной параллельной декомпозиции [7]:

$$\begin{aligned} L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 2n + 1; \\ L_F(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 2n; \\ \text{Dep}_F(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= \lceil \log_2 n \rceil + 2; \\ L_S(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 2n; \\ \text{Dep}_S(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= \lceil \log_2 n \rceil + 2. \end{aligned} \quad (16)$$

□ Теперь исследуем представление (15) на основе ФУ типа 1 [8]:

$$f_{\vee}^{(n)} = h_{\vee}^{(2)}(f_{\vee}^{(n-1)}, x_n) = (f_{\vee}^{(n-1)} \oplus 1)(x_n \oplus 1) \oplus 1. \quad (17)$$

Определяем показатели сложности представления n -местной дизъюнкции в базисе G_3 на основе ФУ (17), составляя ФУ_{ПК} и получая соответствующие разностные уравнения (в скобках) и ниже:

$$\begin{aligned} L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 4n - 3 (u_n = u_{n-1} + 4, u_2 = 5); \\ L_F(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 4n - 4; \\ \text{Dep}_F(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 3n - 3 (u_n = u_{n-1} + 3, u_2 = 3); \\ L_S(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 4n - 4 (\text{без ветвления}); \\ \text{Dep}_S(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 3n - 3. \end{aligned} \quad (18)$$

□ ФУ типа 2 для симметрических функций при $n = 2^s, s = 1, 2, \dots, n_1 = n_2 = n/2$ есть

$$\begin{aligned} f^{(n)}(X) &= h_{\vee}^{(2)}(f_1^{(n/2)}(X_1), f_2^{(n/2)}(X_2)) = \\ &= (f_1^{(n/2)}(X_1) \oplus 1) \cdot (f_2^{(n/2)}(X_2) \oplus 1) \oplus 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Для ФУ (19) получаем разностные уравнения. Их решения

$$\begin{aligned} L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_3) &= 4 \cdot 2^s - 3 = 4n - 3, n = 2^s, \\ s &= 1, 2, 3, \dots, (u_s = 2u_{s-1} + 3, u_1 = 5); \end{aligned} \quad (20)$$

$$L_F(f_{\vee}^{(n)}, G_3) = L_S(f_{\vee}^{(n)}, G_3) = 4 \cdot 2^s - 4 = 4n - 4.$$

Если для показателя L_6 сравнивать оценку $L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_3) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$, полученную в работе [9], с оценками (18) и (20), полученными в данной статье,

то методы данной статьи предпочтительнее. В то же время эти методы в данном случае уступают методам структурно-функциональной декомпозиции, с помощью которых получена еще меньшая оценка (16).

Используем результаты раздела для сравнения базисов G_1 и G_3 по сложности L_6 [9] при представлении в них функций $f_{\vee}^{(n)}, n = 2, 3, 4, \dots$. Используя $L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_1) = n$ и (16), находим

$$L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_3) / L_6(f_{\vee}^{(n)}, G_1) = (2n + 1) / n = 2 + 1/n.$$

Заключение. Предлагаемый математический аппарат (включая оценки сложности), как показывают результаты, обоснованно рекомендуется для использования при автоматизации и оптимизации синтеза комбинационных автоматов на основе интегральных схем различной степени интеграции. Достоинством методов является также их независимость от микроминиатюризации элементной базы, так как принципиальные вопросы оптимизации решаются на уровне математических моделей.

Список литературы

1. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960.
2. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. № 2. М.: ГФ-М лит., 1959.
3. Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. 1962. № 8.
4. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.
5. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. М.: Наука, 1980.
6. Цурков В. И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.
7. Чебурахин И. Ф. Синтез дискретных управляющих систем и математическое моделирование: алгоритмы, программы. М.: Физматлит, 2004.
8. Чебурахин И. Ф., Цурков В. И. Оптимизация и автоматизация синтеза симметрических комбинационных автоматов на основе БМК // Мехатроника, автоматизация, управление. № 7. 2009. С. 19–29.
9. Чебурахин И. Ф. Сложность булевых функций для интеллектуальных систем синтеза цифровых ИС // Изв. РАН. ТиСУ. № 3. 2006. С. 150–165.
10. Шальто А. А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации. — СПб., 2002.
11. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Наука, 2005.
12. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. Изд-во ООО "МАКС Пресс". М.: 2004.

Е. А. Перепелкин, д-р техн. наук, проф.,

М. С. Черных, аспирант,

Алтайский государственный технический
университет им. И. И. Ползунова, г. Барнаул

misch@mail.altstu.ru

Пропорционально-интегральный регулятор системы управления перегрузкой узла компьютерной сети

Описывается метод синтеза пропорционально-интегрального регулятора системы управления перегрузкой узла компьютерной сети. Метод основан на задании полюсов передаточной функции замкнутой системы. Регулятор обладает свойством грубости по отношению к параметрам запаздывания в управлении и измерении. Предлагаемый метод синтеза регулятора может быть использован при проектировании перспективных систем управления компьютерными сетями и сетями передачи данных.

Ключевые слова: компьютерная сеть, перегрузка, пропорционально-интегральный регулятор

Введение

Компьютерная сеть состоит из множества сетевых устройств, узлов сети, обменивающихся данными. Сетевые устройства принимают данные от соседних устройств в буфер, обрабатывают поступившие данные и передают их на следующие устройства сети. Данные в буфере устройства образуют очередь. Если длина очереди достигает размера буфера, то происходит потеря поступающих данных. В этом случае говорят о перегрузке узла. Перегрузка одного узла порождает перегрузки других узлов и замедляет работу сети в целом. Задача управления перегрузкой узлов сети является одной из основных в системах управления компьютерными сетями [1–4].

Методы управления перегрузкой сетевого устройства можно разделить на методы обработки очереди и методы управления длиной очереди данных в буфере устройства. Методы обработки очереди не предусматривают наличие обратной связи между сетевыми устройствами. В то же время управление длиной очереди возможно только на основе обратной связи.

Задача управления длиной очереди может быть сформулирована как задача регулирования для системы с запаздыванием в контуре обратной связи [5–7]. Величина запаздывания неопределенна и может меняться во времени. Поэтому система управления должна обладать свойством грубости по отношению к параметрам запаздывания в управлении и измерении.

В данной статье описывается метод синтеза непрерывного пропорционально-интегрального ре-

гулятора (ПИ-регулятора), предназначенного для управления длиной очереди в буфере узла компьютерной сети. Метод основан на задании полюсов передаточной функции замкнутой системы. Предлагаемый метод может быть использован при проектировании перспективных систем управления компьютерными сетями и сетями передачи данных.

Алгоритм синтеза

Динамика очереди данных в буфере узла сети описывается уравнением

$$\dot{q} = u(t - d_1) - v, \quad 0 \leq q(t) \leq q_{\max},$$

где q — длина очереди; $q_{\max}$ — размер буфера; u — скорость поступления данных в буфер (управление); v — пропускная способность узла; d_1 — запаздывание в управлении. Будем считать, что измерению доступны значения $q(t - d_2)$, где d_2 — запаздывание в измерении.

Необходимо построить управление в виде ПИ-регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы в окрестности положения равновесия, задаваемого желаемым значением длины очереди данных в буфере $0 \leq \bar{q} < q_{\max}$.

Обозначим $e(t) = \bar{q} - q(t)$ ошибку регулирования. Введем переменную p , которая является интегралом от ошибки регулирования и подчиняется уравнению

$$\dot{p} = e(t - d_2).$$

Регулятор описывается уравнением

$$u(t) = \sigma(f_1 e(t - d_2) + f_2 p(t)),$$

где f_1, f_2 — коэффициенты регулятора; функция

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq u_{\max}; \\ u_{\max}, & x > u_{\max} \end{cases}$$

определяет ограничение, накладываемое на значения управления.

В окрестности положения равновесия динамика замкнутой системы определяется передаточной функцией

$$g(s) = \frac{s e^{ds}}{s^2 e^{ds} + f_1 s + f_2},$$

где $d = d_1 + d_2$. Замкнутая система будет асимптотически устойчива в окрестности положения равновесия, если характеристический многочлен

$$a(s) = s^2 e^{ds} + f_1 s + f_2$$

является устойчивым многочленом, т. е. корни $a(s)$, полюсы замкнутой системы, лежат в левой части комплексной плоскости [5]. При этом устойчивость системы в целом гарантирована ограничениями, накладываемыми на управление и длину очереди данных в буфере.

Задача синтеза регулятора заключается в выборе коэффициентов обратной связи, при которых $a(s)$ является устойчивым. Применим конечномерную аппроксимацию для звена с запаздыванием:

$$e^{-ds} \approx \left(1 + \frac{ds}{n}\right)^{-n}. \quad (1)$$

Известно [5], что в большинстве практических случаев достаточно выбрать $8 \leq n \leq 10$. Обозначим

$$a_n(s) = \left(\frac{n}{d}\right)^n \left(s^2 \left(1 + \frac{ds}{n}\right)^n + f_1 s + f_2\right)$$

многочлен степени $n + 2$, полученный из $a(s)$ в результате замены (1) и нормирования коэффициента при старшей степени s . Задачу синтеза регулятора сформулируем как задачу о назначении корней $a_n(s)$.

Обозначим $\bar{a}_n(s)$ некоторый многочлен степени $n + 2$, корни которого лежат в левой части комплексной плоскости, но точно не определены. Приравнявая коэффициенты многочленов $a_n(s)$ и $\bar{a}_n(s)$, получим систему нелинейных алгебраических уравнений, из которой находим значения корней $\bar{a}_n(s)$ и значения коэффициентов обратной связи. Рассмотрим несколько частных случаев.

При отсутствии запаздывания корни

$$a_0(z) = s^2 + f_1 s + f_2$$

можно задать произвольно, выбирая f_1 и f_2 . При $n = 1$ получим многочлен третьего порядка

$$a_1(s) = s^3 + \frac{1}{d}s^2 + \frac{f_1}{d}s + \frac{f_2}{d}.$$

Корни $a_1(s)$ нельзя задать произвольно, но можно задать так, что они будут находиться в левой части комплексной плоскости. Пусть все корни $\bar{a}_1(s)$ вещественные и равны λ . Из равенства многочленов $a_1(s)$ и $\bar{a}_1(s) = (s - \lambda)^3$ получим

$$\lambda = -\frac{1}{3d}, f_1 = \frac{1}{3d}, f_2 = \frac{1}{27d^2}.$$

Пусть $n = 2$. Зададим

$$\bar{a}_2(s) = (s - \lambda)(s - \mu)^3,$$

где λ и μ — вещественные числа. Приравнявая коэффициенты многочленов $\bar{a}_2(s)$ и

$$a_2(s) = s^4 + \frac{4}{d}s^3 + \frac{4}{d^2}s^2 + \frac{4f_1}{d^2}s + \frac{4f_2}{d^2},$$

получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -\lambda - 3\mu &= \frac{4}{d}, \quad 3\mu^2 + 3\lambda\mu = \frac{4}{d^2}, \\ -\mu^3 - 3\lambda\mu^2 &= \frac{4f_1}{d^2}, \quad \lambda\mu^3 = \frac{4f_2}{d^2}. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений находим значения λ и μ , имеющие отрицательные значения:

$$\lambda = \frac{-1 - \sqrt{3}}{d}, \quad \mu = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3d}.$$

Значения коэффициентов обратной связи определяем из последних двух уравнений:

$$f_1 = -\frac{d^2(\mu^3 + 3\lambda\mu^2)}{4}, \quad f_2 = \frac{\lambda\mu^2 d^2}{4}.$$

В общем случае алгоритм синтеза регулятора заключается в следующем. Определяем значение n исходя из оценки возможных значений запаздывания. Многочлен $\bar{a}_n(s)$ задаем в виде

$$\bar{a}_n(s) = b(s)(s - \mu)^3,$$

где значение $\mu < 0$; корни многочлена

$$b(s) = s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

должны иметь отрицательные вещественные части. Приравнявая коэффициенты многочленов $a_n(s)$ и $\bar{a}_n(s)$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} b_1 - 3\mu &= C_n^{n-1} \frac{n}{d}; \\ b_2 - 3b_1\mu + 3\mu^2 &= C_n^{n-2} \left(\frac{n}{d}\right)^2; \\ b_3 - 3b_2\mu + 3b_1\mu^2 - \mu^3 &= C_n^{n-3} \left(\frac{n}{d}\right)^3; \\ &\dots \\ b_{n-1} - 3b_{n-2}\mu + 3b_{n-3}\mu^2 - b_{n-4}\mu^3 &= C_n^1 \left(\frac{n}{d}\right)^{n-1}; \\ -3b_{n-1}\mu + 3b_{n-2}\mu^2 - b_{n-3}\mu^3 &= C_n^0 \left(\frac{n}{d}\right)^n; \\ 3b_{n-1}\mu^2 - b_{n-2}\mu^3 &= \left(\frac{n}{d}\right)^n f_1; \\ -b_{n-1}\mu^3 &= \left(\frac{n}{d}\right)^n f_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Из первого уравнения исключаем b_1 , подставляем во второе уравнение. Из второго уравнения исключаем b_2 , подставляем в третье уравнение и т. д.

до уравнения с номером n . В результате получим полиномиальное уравнение для μ следующего вида:

$$\mu^n + c_1\mu^{n-1} + \dots + c_n = 0. \quad (3)$$

Находим корни уравнения (3). Выбираем те решения, которые являются вещественными и отрицательными. Для каждого такого μ строим многочлен $b(s)$. Выбираем $b(s)$, корни которого лежат в левой части комплексной плоскости. Предположим, что такой многочлен найден. Тогда искомые коэффициенты обратной связи равны

$$f_1 = \left(\frac{d}{n}\right)^n (3b_{n-1}\mu^2 - b_{n-2}\mu^3), f_2 = -\left(\frac{d}{n}\right)^n b_{n-1}\mu^3.$$

Пример синтеза и результаты моделирования

При $n = 3$ система уравнений (2) принимает вид

$$\begin{aligned} b_1 - 3\mu &= \frac{9}{d}; \quad b_2 = 3b_1\mu + 3\mu^2 = \frac{27}{d^2}; \\ -3b_2\mu + 3b_1\mu^2 - \mu^3 &= \frac{27}{d^3}; \quad 3b_2\mu^2 - b_1\mu^3 = \frac{27}{d^3}f_1; \\ -b_2\mu^3 &= \frac{27}{d^3}f_2. \end{aligned}$$

Исключим из первых двух уравнений последовательно b_1 и b_2 . Получим уравнение

$$\mu^3 + 5,4d^{-1}\mu^2 + 8,1d^{-2}\mu + 2,7d^{-3} = 0. \quad (4)$$

Решения уравнения (4) равны

$$\mu_1 = -\frac{3}{d}, \quad \mu_2 = \frac{-12 + 3\sqrt{6}}{10d}, \quad \mu_3 = \frac{-12 - 3\sqrt{6}}{10d}.$$

Для каждого из этих уравнений строим многочлен

$$b(s) = s^2 + b_1s + b_2$$

с коэффициентами

$$b_1 = \frac{9}{d} + 3\mu, \quad b_2 = \frac{27}{d^2} + \frac{27}{d}\mu + 6\mu^2.$$

Только у одного из этих многочленов корни имеют отрицательные вещественные части. Данный многочлен, полученный при

$$\mu = \mu^2 = -\frac{0,4652}{d},$$

равен

$$b(s) = s^2 + \frac{7,605}{d}s + \frac{15,74}{d^2}. \quad (5)$$

Корни многочлена (5) равны

$$s_1 = \frac{-3,802 + i \cdot 1,132}{d}, \quad s_2 = \frac{-3,802 - i \cdot 1,132}{d}.$$

Значения коэффициентов обратной связи вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(3b_{n-1}\mu^2 - b_{n-2}\mu^3)d^3}{27} = \frac{0,4067}{d}, \\ f_2 &= -\frac{b_2\mu^3 d^3}{27} = \frac{0,05867}{d^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, получен многочлен

$$a_3(s) = s^5 + \frac{9}{d}s^4 + \frac{27}{d^2}s^3 + \frac{27}{d^3}s^2 + \frac{27f_1}{d^3}s + \frac{27f_2}{d^3},$$

корни которого равны: s_1 , s_2 и μ_2 кратности 3.

Моделирование выполнялось в среде Simulink системы научных и инженерных расчетов Matlab. Схема модели показана на рис. 1. При моделировании учитывались ограничения: $0 \leq q(t) \leq 250$,

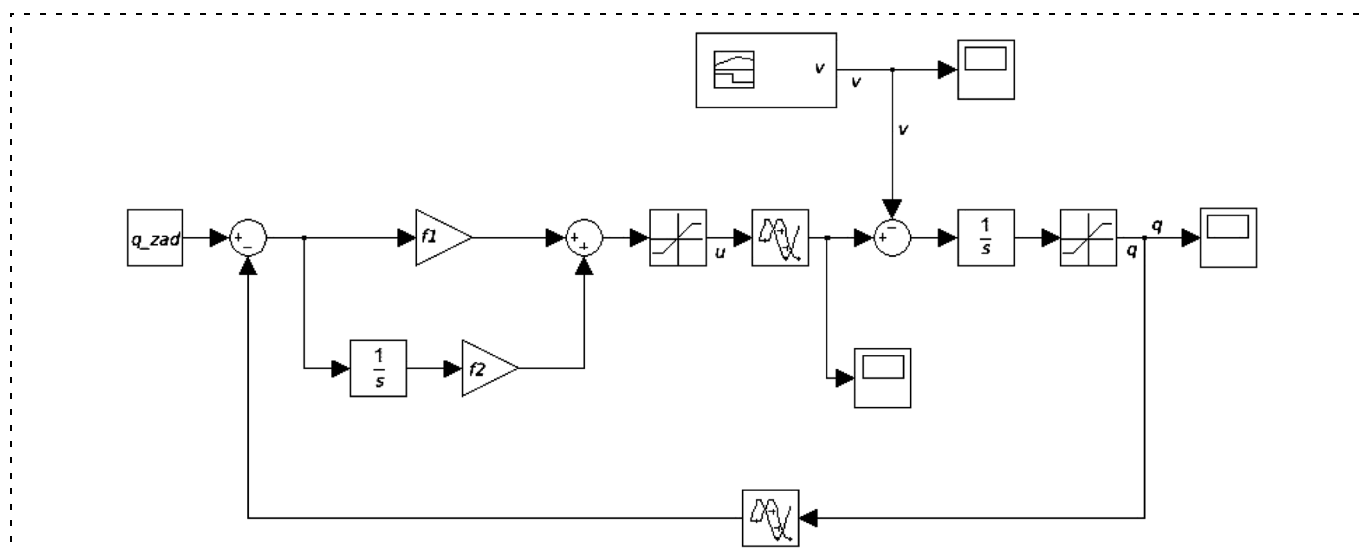


Рис. 1. Simulink-модель системы управления перегрузкой

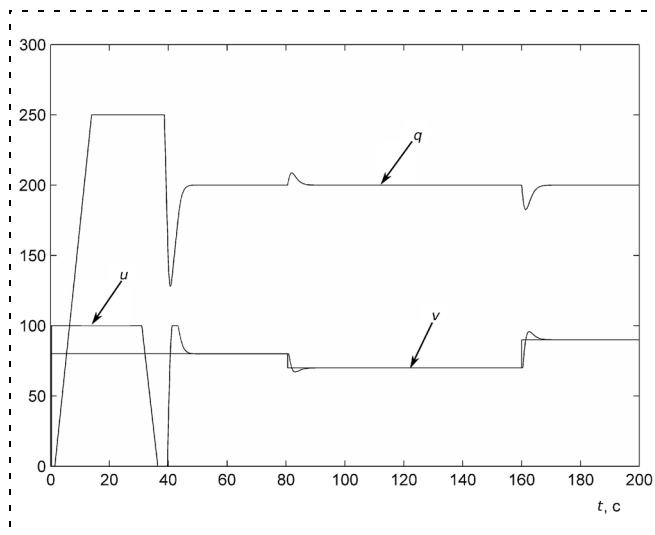


Рис. 2. Реакция системы на изменение пропускной способности узла

$0 \leq u(t) \leq 100$. На рис. 2 показаны переходные процессы в замкнутой системе при $d_1 = 0,3$, $d_2 = 0,1$, $\bar{q} = 200$, нулевых начальных условиях и ступенчатым изменением пропускной способности узла.

Заметим, что формулы (6) дают аналитическую зависимость коэффициентов обратной связи от запаздывания. Это позволяет провести анализ робастности ПИ-регулятора с коэффициентами (6). Пусть значение d неизвестно. Обозначим $\bar{d}$ значение запаздывания, при котором проводились расчеты коэффициентов регулятора. Таким образом,

$$f_1 = \frac{0,4067}{\bar{d}}, f_2 = \frac{0,05867}{\bar{d}}. \quad (7)$$

При $d = 0$ многочлен $a(s) = s^2 e^{ds} + f_1 s + f_2$ является устойчивым. Его корни равны $(-0,2034 \pm i \cdot 0,1316)/\bar{d}$. Определим значение $d = d_{\max}$, при котором корни $a(s)$ пересекают мнимую ось комплексной плоскости. Из равенства

$$(i\omega)^2 e^{i d \omega} + f_1 i \omega + f_2 = 0$$

получим

$$\omega = \frac{0,4291}{\bar{d}}, d_{\max} = 2,9 \bar{d}.$$

Следовательно, можно сделать следующий вывод. Все корни многочлена $a(s) = s^2 e^{ds} + f_1 s + f_2$ имеют отрицательные вещественные части, если коэффициенты ПИ-регулятора рассчитывались по формулам (7) и значение запаздывания $0 \leq d < d_{\max}$.

На рис. 3 представлены переходные процессы для длины очереди при коэффициентах обратной связи, рассчитанных при

$$d_1 = 0,3, d_2 = 0,1, \quad (8)$$

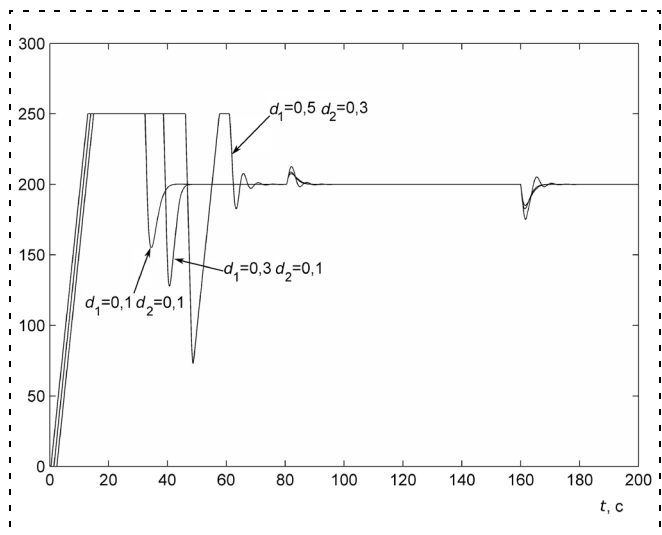


Рис. 3. Переходные процессы при различных значениях запаздывания

и фактических значениях запаздывания, отличных от (8).

Результаты моделирования подтверждают работоспособность регулятора в целом для нелинейной системы с возможными изменениями параметров запаздывания.

Заключение

В статье описан метод синтеза непрерывного ПИ-регулятора системы управления длиной очереди в буфере сетевого устройства. Регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы в окрестности положения равновесия независимо от пропускной способности устройства. Регулятор обладает свойством грубости по отношению к параметрам запаздывания в управлении и измерении. Предлагаемый метод синтеза непрерывного ПИ-регулятора может быть использован при проектировании перспективных систем управления компьютерными сетями и сетями передачи данных.

Список литературы

1. Олифер В. Г., Олифер Н. А. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы. СПб.: Питер, 2006. 958 с.
2. Таненбаум Э. Компьютерные сети. СПб.: Питер, 2007. 992 с.
3. Столлингс В. Современные компьютерные сети. СПб.: Питер, 2003. 783 с.
4. Srikant R. The Mathematics of Internet Congestion Control. Boston, MA: Birkhäuser, 2004. 164 p.
5. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. СПб: Профессия, 2004. 747 с.
6. Holot C., Misra V., Towsley P., Gong W. Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows // IEEE Transactions on Automatic Control. 2002. Vol. 47. N 6. P. 945–959.
7. Zheng F., Nelson J. An H-inf approach to the controller design of AQM routers supporting TCP flows // Automatica. 2009. Vol. 45. N 3. P. 757–763.

УДК 681.518

А. Н. Жирабок, д-р техн. наук, проф.,
А. С. Якшин, аспирант,
Дальневосточный государственный
технический университет
zhirabok@mail.ru

Решение задачи аккомодации к дефектам технических систем, заданных структурными схемами*

Рассматривается задача аккомодации к дефектам в технических системах, заданных структурными схемами, которые содержат как линейные, так и нелинейные звенья.

Ключевые слова: технические системы, структурные схемы, нелинейные звенья, дефекты, аккомодация

Введение и постановка задачи

К надежности и безопасности технических систем, выполняющих ответственные функции, предъявляются жесткие требования, что приводит к необходимости разработки комплекса мер по обеспечению их отказоустойчивости. Существующие подходы к обеспечению отказоустойчивости предполагают, что после появления в системе дефектов выполняется ее реконфигурация (например, проводится переключение на резерв) либо формируется специальное управление, которое позволяет сохранять важнейшие характеристики системы при наличии в ней дефектов; при этом второстепенные характеристики могут ухудшиться. Подход, связанный с формированием такого управления, принято называть аккомодацией к дефектам [1].

Известны различные варианты решения задачи аккомодации, в основе которых лежат методы оптимального управления [2], H_∞ -оптимизации [3], слежения за эталонной моделью [4], адаптивного управления [5]. В данной статье решение задачи связывается с формированием управления, при котором обеспечивается полная развязка от воздействий, вызываемых дефектами. Такой подход целесообразен в тех случаях, когда оценивание величины дефектов по тем или иным причинам не представляется возможным или нецелесообразно.

* Статья поддержана грантами РФФИ.

В работе [6] задача аккомодации в случае полной развязки была решена для класса систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Современные технические системы состоят из элементов различной физической природы и содержат как механические, так и электронные компоненты. Одним из способов описания подобных систем является их представление структурными схемами в виде определенным образом соединенных между собой элементов (звеньев). В данной статье проблема аккомодации решается для систем, заданных именно таким образом.

Будем полагать, что модель рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{aligned} z(p) &= F(p, \vartheta)z(p) + Gu(p); \\ y(p) &= Hz(p), \end{aligned} \quad (1)$$

где компоненты вектора состояния z размерности n представляют собой сигналы на выходах отдельных звеньев; u — вектор входа (управления) размерности m ; y — вектор выхода размерности l ; $p = \frac{d}{dt}$ —

оператор дифференцирования; F — матрица размерности $n \times n$, содержащая передаточные функции (ПФ) отдельных звеньев и статические нелинейности (СН); G и H — постоянные матрицы размерности $n \times m$ и $l \times n$ соответственно; ϑ — вектор, характеризующий дефекты в ПФ и СН: если в i -й ПФ или СН возник дефект, состоящий в произвольном искажении параметров этой ПФ или СН, то $\vartheta_i = 1$, в противном случае $\vartheta_i = 0$. Через ϑ_0 обозначим вектор со всеми нулевыми компонентами, что соответствует исправной системе. Будем обозначать систему (1) символом Σ .

В выражении (1) компоненты произведений вида $F(p)z(p)$ интерпретируются следующим образом: если F_{ij} — передаточная функция, то элемент $F_{ij}(p)z_j(p)$ понимается как обычное произведение ПФ $F_{ij}(p)$ на переменную $z_j(p)$; если F_{ij} — статическая нелинейность, то $F_{ij}z_j(p)$ — это нелинейная функция F_{ij} с аргументом $z_j(p)$; здесь F_{ij} — элемент матрицы F , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, z_j — j -я компонента вектора z .

Если матрица G заданной системы содержит ПФ или СН, то переход к постоянной матрице можно осуществить путем расширения вектора состояния z следующим образом. Пусть $G_{ij}(p) = W_*(p)$, т. е. в правую часть уравнения для переменной z_i входит слагаемое $W_*(p)u_j(p)$. Введем новую $(n + 1)$ -ю компоненту вектора z , подчиняющуюся уравнению

$z_{n+1}(p) = u_j(p)$, и в правой части уравнения для переменной z_i слагаемое $W_*(p)u_j(p)$ заменим на $W_*(p)z_{n+1}(p)$, для чего примем $F_{i,n+1}(p) = W_*(p)$, $F_{n+1,k}(p) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n + 1$, $G_{ij}(p) = 0$, $G_{n+1,j}(p) = 1$. Аналогичные операции производятся для каждой ПФ или СН, входящей в матрицу G , в результате чего размерность системы Σ возрастает на число таких ПФ и нелинейностей. Для расширенной системы введем обозначение $F = F(p, \vartheta_0)$.

Предполагается, что задача обнаружения и локализации дефектов решается известными методами; для рассматриваемого класса систем они описаны в [7]. Поскольку при возникновении дефекта поведение системы становится неопределенным (напомним, что по условию величина дефекта не оценивается), решение задачи управления на основе модели (1) становится невозможным. Для преодоления этой трудности предлагается формировать вектор управления $u(p)$ в виде

$$u(p) = S_1(p)z_0(p) + S_2(p)y(p) + S_3(p)u_*(p) \quad (2)$$

для некоторых матриц S_1, S_2, S_3 , где $u_* \in R^m$ — новый вектор управления; $z_0 \in R^q$ — вектор состояния системы Σ_0 , подлежащей определению и описываемой уравнением

$$z_0(p) = F_0(p, \vartheta_0)z_0(p) + G_0u(p) + J_0(p, \vartheta_0)y(p). \quad (3)$$

Здесь $J_0(p, \vartheta_0)$ — передаточная функция. Отметим, что модель (3) не зависит от дефектов.

Предполагается, что модель, полученная подстановкой (2) в (1), может быть преобразована к системе Σ_* , описываемой уравнением

$$z_*(p) = F_*(p, \vartheta_0)z_*(p) + G_*u_*(p) \quad (4)$$

с вектором состояния $z_* \in R^v$, $v \leq q$. Если закон (2) существует и дефект возник и обнаружен, то решение проблемы управления реализуется на основе модели (4), которая не зависит от дефектов, после чего от найденного управления $u_*(p)$ по формуле (2) переходят к $u(p)$; в результате достигается эффект аккомодации к дефектам. Описанная схема управления представлена на рисунке, где символом S обозначен блок, реализующий закон (2).

Задача состоит в определении условий существования закона управления в виде (2) и разработке

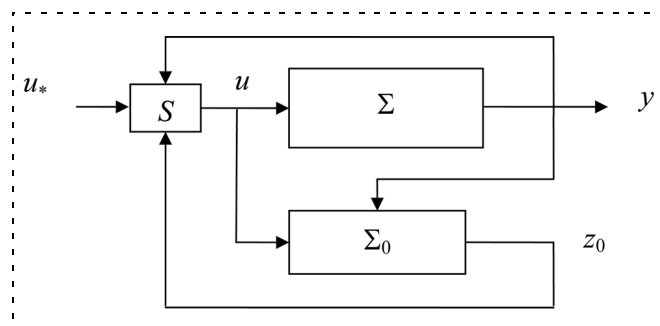


Схема управления системой

процедуры вычисления матриц, описывающих модели (3) и (4). В дальнейшем будет рассматриваться случай, когда в системе (1) возник определенный дефект, обнаруженный и локализованный системой диагностирования. При этом для адекватной реакции на различные дефекты закон (2), а также системы (3) и (4) должны быть построены для каждой группы эквивалентных дефектов. После обнаружения и локализации дефекта задача аккомодации решается на основе закона (2) и систем (3), (4), построенных именно для этого дефекта. Напомним, что дефекты считаются эквивалентными, если используемые средства локализации не позволяют отличить их друг от друга. Отметим, что совокупность систем вида (3), найденных для всех групп эквивалентных дефектов, может быть использована для построения системы диагностирования, предназначенной для обнаружения и локализации дефектов (подробнее об этом см., например, [7]).

Построение системы Σ_0

Для построения системы Σ_0 введем постоянную матрицу Φ_0 размерности $q \times n$ такую, что в случае отсутствия дефектов выполняется равенство

$$\Phi_0 z(p) = z_0(p). \quad (5)$$

Известно [7], что между матрицами систем (1) и (3) имеется определенная связь в виде матричного уравнения

$$\Phi_0 F = F_0 \Phi_0 + J_0 H. \quad (6)$$

Как следует из соотношения (3), входами системы Σ_0 являются входы и выходы исходной системы. В линейном случае такая система может быть получена путем преобразования исходной системы в каноническую форму Кронекера, содержащую l подсистем, сумма размерностей которых равна размерности исходной системы. Алгоритм такого преобразования изложен, в частности, в работе [8], при этом каждая компонента вектора состояния преобразованной системы в общем случае может представлять собой линейную комбинацию аналогичных компонент исходной системы.

Возможен другой подход к получению динамической системы с аналогичной структурой входов и выходов, когда из исходной системы выделяется подсистема с сохранением структуры связей между компонентами ее вектора состояния. При этом ее выход будет совпадать с некоторым выходом исходной системы, а входами будут являться входы и выходы этой системы. Число таких подсистем также равно l , но сумма их размерностей может превышать размерность исходной системы, поскольку некоторые компоненты ее вектора состояния могут входить в состав нескольких подсистем.

Поскольку в выделенной таким образом подсистеме структура связей между компонентами вектора состояния сохраняется, этот подход может быть использован и в рассматриваемом нелиней-

ном случае. В то же время каноническая форма Кронекера, где компоненты вектора состояния подвергаются нетривиальным линейным преобразованиям, в нелинейном случае может оказаться неприменимой.

Таким образом, матрица Φ_i , определяющая по аналогии с выражением (5) вектор состояния i -й подсистемы, в каждой своей строке будет содержать только один ненулевой элемент, равный единице, в некоторой позиции.

Предлагаемый ниже алгоритм построения такой матрицы реализован по аналогии с известным в теории линейных систем разложением системы на l подсистем в соответствии с инвариантами Кронекера, но не предполагает нетривиальных линейных преобразований ее вектора состояния. Будем полагать, что выход каждой из таких подсистем совпадает с некоторым выходом исходной системы, а входами являются ее входы и выходы. Известно [9], что инварианты Кронекера для линейных систем могут быть получены на основе матриц управляемости и наблюдаемости; для наших целей воспользуемся аналогом второй из них.

Алгоритм

1. Для матрицы H образовать множество N из номеров столбцов, содержащих ненулевые элементы. Положить $i = 1$.
2. Для i -й строки H_i матрицы H определить номера столбцов, содержащих ненулевые элементы, и включить их во множество $M^{(i)}$.
3. Положить $H^0 = H_i F$. Для матрицы H^0 образовать множество M^0 из номеров столбцов, содержащих ненулевые элементы.
4. Определить совпадающие элементы множеств M^0 и N и исключить такие элементы из множества M^0 . Обнулить в i -й строке матрицы H^0 элементы в позициях с номерами, соответствующими совпадающим элементам.
5. Определить совпадающие элементы множеств M^0 и $M^{(i)}$ и исключить такие элементы из множества M^0 . Обнулить в i -й строке матрицы H^0 элементы в позициях с номерами, соответствующими совпадающим элементам.
6. Если $H^0 \neq 0$, дополнить множество $M^{(i)}$ элементами из множества M^0 , положить $H^0 = H^0 F$ и перейти к п. 4.
7. Если $H^0 = 0$, провести расчет матрицы Φ_i : число строк этой матрицы равно мощности множества $M^{(i)}$, число столбцов — числу n ; j -я строка матрицы содержит единицу в позиции, номер которой равен j -му элементу множества $M^{(i)}$, остальные элементы строки — нули.
8. Положить $i = i + 1$, перейти к п. 2 и повторить процедуру для следующей строки матрицы H . Если $i > l$, то конец процедуры.

По смыслу множество N содержит номера компонент вектора z , совпадающих с компонентами вектора выхода системы; будем называть их изме-

ряемыми компонентами. Операция поиска совпадающих элементов множеств M^0 и N позволяет выяснить, какие компоненты вектора z , выделенные на текущем шаге алгоритма, являются измеряемыми. Обнуление элементов i -й строки матрицы H^0 исключает такие компоненты из дальнейшей процедуры поиска.

Операция поиска совпадающих элементов множеств M^0 и $M^{(i)}$ позволяет выяснить, какие компоненты вектора z , выделенные на текущем шаге алгоритма, уже выбраны для построения текущей подсистемы. Как и в предыдущей операции, обнуление элементов i -й строки матрицы H^0 исключает эти компоненты из дальнейшей процедуры поиска.

Если $H^0 = 0$, то выделенная в результате работы алгоритма i -я подсистема в качестве входов имеет только входы и выходы исходной системы.

Для определения матриц F_i , J_i и G_i , описывающих i -ю подсистему по аналогии с выражением (3), используем подход, предложенный в [7], а именно, выясним возможность реализации ее в виде гомоморфного образа системы (1), когда на вход этой подсистемы поступает только вектор u . В этом случае матрица J_i равна нулю, и выражение (6) для i -й подсистемы принимает вид

$$\Phi_i F = F_i \Phi_i. \quad (7)$$

Для определения матрицы F_i воспользуемся тем обстоятельством, что матрица Φ_i , как было сказано выше, имеет особый вид, а именно, в каждой ее строке содержится не более одного ненулевого элемента, равного единице. Этот факт приводит к выражению $\Phi_i \Phi_i^T = I_{n_i \times n_i}$, где символом "т" обозначена операция транспонирования; $I_{n_i \times n_i}$ — единичная матрица размерности $n_i \times n_i$; n_i — размерность i -й подсистемы; таким образом, матрица Φ_i^T является правой обратной для Φ_i . Тогда из выражения (7) получаем $F_i = \Phi_i F \Phi_i^T$.

Для выяснения того, возможна ли реализация подсистемы с полученной матрицей F_i в виде гомоморфного образа, необходимо проверить справедливость равенства (7). На практике оно выполняется довольно редко, поэтому, как правило, приходится возвращаться к общему (негомоморфному) случаю, когда справедливо равенство (6). Перепишем его для i -й подсистемы в виде $J_i H = \Phi_i F - F_i \Phi_i$, откуда получаем выражение для матрицы J_i :

$$J_i = (\Phi_i F - F_i \Phi_i) H^T (H H^T)^{-1}.$$

Построение матрицы Φ_0 , обеспечивающей полную развязку системы Σ_0 от воздействий, вызываемых дефектами, проводится на основе полученного выше семейства $\{\Phi_i\}$: $\Phi_0 = (\Phi_1^T \ \Phi_2^T \ \dots \ \Phi_k^T)^T$, где $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ — матрицы, соответствующие подсист-

темам, которые не содержат дефектных ПФ или СН. Матрицы F_0 , J_0 и G_0 имеют следующий вид:

$$F_0 = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k \end{pmatrix}; J_0 = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \end{pmatrix}; G_0 = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_k \end{pmatrix}.$$

Построение системы Σ_*

Для построения системы Σ_* рассмотрим произведение $G_0 u$. Пусть оно содержит $m' \leq m$ компонент вектора u ; без потери степени общности предположим, что это будут первые m' компонент: $u_1, u_2, \dots, u_{m'}$. Пусть также $\text{rank } G_0 = c$, при этом число строк матрицы G_0 равно q . На практике, как правило, выполняются неравенства $m < q$ и $c < q$, поэтому будем предполагать существование матрицы T , имеющей c строк, такой что $\text{rank}(TG_0) = c$; фактически это означает, что в произведении TG_0 сохраняются все линейно независимые строки матрицы G_0 .

Введем постоянную матрицу Φ_* размерности $v \times n$ такую, что выполняется равенство $\Phi_* z(p) = z_*(p)$. Поскольку система Σ_* не зависит от дефектов, матрица Φ_* должна строиться на основе тех же матриц $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$, что и Φ_0 . В [6] показано, что в типичном случае, когда $c < q$, матрица Φ_* представляется

$$\text{в виде } \Phi_* = \begin{pmatrix} \Phi_*^{(1)} \\ \Phi_*^{(2)} \end{pmatrix}, \text{ при этом } \Phi_*^{(1)} = T\Phi_0. \text{ Из струк-}$$

туры матрицы Φ_* следует, что вектор состояния z_*

$$\text{имеет вид } z_* = \begin{pmatrix} z_*^{(1)} \\ z_*^{(2)} \end{pmatrix}, \text{ при этом } z_*^{(1)} = \Phi_*^{(1)} z =$$

$= T\Phi_0 z = Tz_0, z_*^{(2)} = \Phi_*^{(2)} z$. Будем полагать, что система (3) ищется в виде последовательной композиции двух подсистем:

$$z_*^{(1)}(p) = F_*^{(1)}(p) z_*^{(1)}(p) + G_*^{(1)}(p) u_*(p),$$

$$z_*^{(2)}(p) = F_*^{(2)}(p) z_*^{(2)}(p) + J_*^{(1)}(p) z_*^{(1)}(p). \quad (8)$$

Кроме того, для упрощения решения задач управления системой Σ_* и построения закона управления (2) положим $F_*^{(1)}(p) \equiv 0$, $G_*^{(1)}(p) \equiv I_{m \times m}$, что дает

$$z_{*j}^{(1)}(p) = u_{*j}(p), j = 1, 2, \dots, c, \quad (9)$$

т. е. для управления системой (4) необходимо задать первые c компонент вектора u_* . Остальные

компоненты могут быть выбраны произвольно, например, можно принять $u_{*i}(p) = 0, i = c + 1, \dots, m$.

Из уравнения (8) и $z_*^{(2)}(p) = \Phi_*^{(2)} z(p)$ получаем

$$\begin{aligned} z_*^{(2)}(p) &= F_*^{(2)}(p) z_*^{(2)}(p) + J_*^{(1)}(p) z_*^{(1)}(p) = \\ &= \Phi_*^{(2)}(Fz(p) + Gu(p)), \end{aligned}$$

откуда следует, что матрица $\Phi_*^{(2)}$ должна удовлетворять условию $\Phi_*^{(2)} G = 0$. С учетом этого условия из последнего уравнения следует матричное равенство

$$\Phi_*^{(2)} F = F_*^{(2)} \Phi_*^{(2)} + J_* \Phi_*^{(1)}.$$

Из сравнения структур этого равенства и соотношения (6), равенства $\Phi_*^{(2)} G = 0$, а также рассмотренного выше правила построения матрицы Φ_0 вытекает следующее правило построения матрицы $\Phi_*^{(2)}$.

Она составляется (как из блоков) из тех матриц $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$, которые соответствуют подсистемам без дефектов и входами которых являются только компоненты вектора состояния тех подсистем, которые соответствуют матрице $\Phi_*^{(1)} = T\Phi_0$. Проверить последнее можно путем сравнения выражений $J_i H z$ и $T\Phi_0 z$ для $i = 1, 2, \dots, k$: если в $J_i H z$ содержатся только те компоненты вектора состояния z , которые имеются в $T\Phi_0 z$, то при построении матрицы $\Phi_*^{(2)}$ используется Φ_i . Если таких подсистем нет, то $\Phi_*^{(2)} = 0$ и $J_*^{(1)} = 0$.

Построение закона управления

Для построения закона управления рассмотрим несколько случаев соотношения между величинами c, m' и m .

1. $c = m' = m$. Тогда из правых частей уравнений (3), (9) и равенства $z_*^{(1)} = Tz_0$ следует соотношение

$$T(F_0(p, \vartheta_0)z_0(p) + G_0 u(p) + J_0(p, \vartheta_0)y(p)) = u_*(p), \quad (10)$$

которое разрешимо относительно компонент вектора u в виде

$$\begin{aligned} u(p) &= (TG_0)^{-1}(u_*(p) - \\ &- TF_0(p, \vartheta_0)z_0(p) - TJ_0(p, \vartheta_0)y(p)), \end{aligned} \quad (11)$$

что соответствует закону управления (2).

2. $c = m' < m$. Тогда уравнение (10) разрешимо относительно компонент $u_1, u_2, \dots, u_{m'}$ вектора u . Из условия $c = m' < m$ следует, что матрица TG_0

имеет вид $TG_0 = (G'_0 \ 0)$, где G'_0 — невырожденная матрица. Тогда

$$\begin{pmatrix} u_1(p) \\ \vdots \\ u_{m'}(p) \end{pmatrix} = (G'_0)^{-1}(u_*(p) - TF_0(p, \vartheta_0)z_0(p) - TJ_0(p, \vartheta_0)y(p)). \quad (12)$$

Для остальных компонент вектора u положим $u_j = u_{*j}$, $j = m' + 1, \dots, m$.

3. $c < m' < m$. В этом случае выражение $TG_0 u(p)$ содержит избыточные компоненты вектора u , и через вектор u_* можно выразить не отдельные компоненты этого вектора (как это дается выражением (12)), а только их некоторые линейные комбинации. Пусть матрица TG_0 имеет вид $TG_0 = (G'_0 \ G''_0)$, тогда

$$(I_{c \times c} \ G'_0)u(p) = (G'_0)^{-L}(u_*(p) - TF_0(p, \vartheta_0)z_0(p) - TJ_0(p, \vartheta_0)y(p)),$$

где $G'_0 = (G'_0)^{-L}G''_0$.

Приложение к задаче управления

Как говорилось во введении, эффект аккомодации обеспечивается тем, что при наличии в системе дефекта решение задачи управления осуществляется на основе модели (4). Пусть, например, требуется найти управление, переводящее систему (1) из состояния z^1 в состояние z^2 . Для решения этой задачи находятся состояния $z_*^1 = \Phi_* z^1$ и $z_*^2 = \Phi_* z^2$ системы (4), для которой решается задача терминального управления, т. е. определяется управление $u_*(p)$, на основе которого затем согласно (3) определяется управление $u(p)$, решающее задачу для исходной системы (1).

Как следует из изложенного выше, в общем случае размерность вектора состояния z_* меньше размерности вектора z , в результате чего перевод исходной системы в состояние z^2 может осуществляться только с определенной степенью точности, которая определяется матрицей Φ_* . Это означает, что перевод может быть осуществлен в такое состояние z^{2*} , что $\Phi_* z^{2*} = \Phi_* z^2$. При этом можно сказать, что указанная степень точности, а также качество функционирования системы (4) будут определять качество функционирования исходной системы в присутствии дефектов.

Пусть, например, $\Phi_*(z) = z_1 + z_2$, тогда при наличии в системе дефектов существует возможность формирования управления, обеспечивающего требуемое значение суммы компонент z_1 и z_2 . Пусть при этом целью управления является $z_1 \rightarrow 0$, $z_2 \rightarrow 0$. Очевидно, что в рамках описанного подхода эта цель не может быть достигнута. Вместе с тем, можно сформировать управление, обеспечивающее достижение цели вида $z_1 + z_2 \rightarrow 0$. Отметим, что со-

стояние, фактически достигнутое системой (1) при наличии в ней дефекта, определяется с точностью,

которая дается матрицей $\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ H \end{pmatrix}$. Это следует из того,

что состояние системы (1) оценивается с помощью системы (3) и вектора выхода y .

Пример

В качестве примера рассмотрим следующую систему с квадратичной обратной связью [8]. Матрицы модели (1) для этой системы имеют вид:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_4 & 0 & -W_4 \\ -W_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_7 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Передаточные функции этой системы имеют следующий вид: $W_1 = \frac{k_1}{p}$, $W_2 = \frac{k_2}{1 + T_2 p}$, $W_4 = k_4$,

$W_5 = k_5$, $W_6 = k_6$. Номинальные значения параметров: $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $T_2 = 0,2$, $k_4 = 4,8$, $k_5 = 0,87$, $k_6 = 0,1$; уровень ограничения передаточной характеристики усилителя (звено W_3) — $\pm 4,8$ В, звено W_7 реализует функцию $z_7 = z_6|z_6|$.

Поскольку матрица G содержит ПФ W_5 , введем переменную z_8 , удовлетворяющую уравнению $z_8(p) = u(p) - z_1(p)$, при этом $z_5(p) = W_5 z_8(p)$; новый вид матриц F и G определяется описанным выше образом.

После реализации предложенного алгоритма получаем набор множеств, почти совпадающий с результатами работы [8]: $M^{(1)} = \{1, 2\}$, $M^{(2)} = \{3, 4, 7, 6, 2\}$, $M^{(3)} = \{5, 8\}$. На их основе построим матрицы Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 и найдем соответствующие матрицы F_i , J_i и G_i . В результате получаем:

первая подсистема:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & W_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = 0;$$

вторая:

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & W_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_6 \\ W_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_2 = 0;$$

третья:

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & W_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На основе состава множеств $M^{(i)}$ можно построить таблицу диагностируемых дефектов (см. таблицу), которая характеризует полученную в результате решения задачи диагностирования глубину поиска дефектов. Из таблицы следует, что удастся различить дефекты в звеньях 1, 2 и 5 (отметим, что звенья 5 и 8 реализуются одной ПФ W_5); дефекты в группе {3, 4, 6, 7} остались неразличимы.

Наблюдатели	Диагностируемые дефекты
Первый	1, 2
Второй	2, 3, 4, 6, 7
Третий	5, 8

Рассмотрим случай, когда дефект возник в первом звене, которое входит в первую подсистему. Тогда

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & W_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_6 & 0 & 0 \\ W_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; G_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\text{rank } G_0 = 1$, то матрица T , удовлетворяющая условию $\text{rank}(TG_0) = 1$, имеет вид $T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$ и $z_*^{(1)}(p) = \Phi_*^{(1)} z(p) = T\Phi_0 z(p) = z_8(p)$. Так как $c = m' = m = 1$, $TJ_0 = (-1 \ 0 \ 0)$ и $TG_0 = 1$, то уравнение (11) принимает вид

$$u(p) = u_*(p) + y_1(p). \quad (13)$$

Из вида матрицы T следует, что вектор $z_*^{(1)}$ одномерный и $z_*^{(1)}(p) = u_*(p)$.

Так как вторая подсистема не содержит дефектных ПФ и СН, выражение $J_2 Hz$ содержит переменную z_5 , а $z_5(p) = W_5 z_8(p)$, то в качестве входа этой подсистемы можно рассматривать компоненту z_8 вектора состояния третьей подсистемы. Тогда вектор $z_*^{(2)}$ совпадает с вектором состояния второй подсистемы, матрица $\Phi_*^{(2)}$ совпадает с Φ_2 , $F_*^{(2)}$ — с F_2 , матрица $J_*^{(2)}$ принимает вид $J_*^{(2)} = (0 \ W_5 \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Степень точности, с которой осуществляется перевод системы (1) в некоторое состояние при управлении (13), характеризуется матрицей

$$\Phi_* = \begin{pmatrix} \Phi_*^{(1)} \\ \Phi_*^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. это состояние определяется с точностью до первой компоненты вектора z , поскольку его пятая компонента связана с восьмой соотношением

$z_5(p) = W_5 z_8(p)$. Поскольку $\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ H \end{pmatrix} = 8$, то со-

стояние, фактически достигнутое системой (1) при наличии дефекта в первом звене, может быть определено точно.

Заключение

В статье предложен метод решения задачи аккомодации заданной технической системы к дефектам, позволяющий найти управление, полностью развязанное от воздействий, вызванных дефектами. Метод позволяет решить задачу аккомодации на основе единого подхода как для линейных, так и нелинейных систем (содержащих статические нелинейности), используя хорошо разработанный математический аппарат матричной алгебры.

Список литературы

1. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. Diagnosis and Fault Tolerant Control. Springer-Verlag. 2003.
2. Staroswiecki M., Yang H., Jiang B. Progressive accommodation of aircraft actuator faults // CD-ROM Proc. of the IFAC Symposium Safeprocess'2006. Beijing, PR China. 2006. P. 877–882.
3. Weng Z., Patton R. Cui P. Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum // CD-ROM Proc. of the IFAC Symposium Safeprocess'2006. Beijing, PR China. 2006. P. 1591–1596.
4. Staroswiecki M. Fault tolerant control: the pseudo-inverse method revisited // CD-ROM Proc. of the 16th IFAC Congress. Prague, Czech. Republic. 2005.
5. Jang B., Staroswiecki M., Cocquempot V. Active fault tolerant control for a class nonlinear systems // CD-ROM Proc. of the IFAC Symposium Safeprocess'03. Washington, USA. 2003. P. 127–132.
6. Жирабок А. Н., Шумский А. Е. Метод аккомодации нелинейных динамических систем к дефектам // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 62–70.
7. Жирабок А. Н., Яшкин А. С. Диагностирование технических систем, заданных структурными схемами с нелинейными звеньями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 9. С. 36–44.
8. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
9. Мироновский Л. А. Аналоговое и гибридное моделирование. Многомерные системы. Л.: ЛИАП, 1986.

УДК 658.562

Т. В. Александрова, аспирант,
Е. И. Громаков, канд. техн. наук, доц.
Кибернетический центр,
Томский политехнический университет
tata09@mail.ru

Робастная процедура диагностики мехатронных устройств кабельного производства с использованием контрольных карт

При внедрении и эксплуатации экструзионных линий для производства кабельной продукции необходимо оперативно отслеживать состояние параметров как технологического оборудования, так и выпускаемой продукции. Для этих целей предлагается использовать статистический метод — контрольные карты (КК).

Для интерпретации КК предлагается использовать робастную процедуру, которая позволяет максимизировать определение реальных неисправностей и минимизировать число ложных сигналов тревоги.

Ключевые слова: процесс статистического контроля, реальные неисправности, ложные сигналы тревоги, CUSUM-карта, средняя длина серий

Для производства кабелей и проводов с пластмассовой и резиновой изоляцией широкое распространение получили *экструдеры* (червячные прессы), которые позволяют осуществлять непрерывный процесс наложения изоляции или оболочки и выпускать кабельную продукцию практически неограниченной длины. Процесс такого непрерывного производства изоляции или оболочки называют

экструзией или выдавливанием, а сами прессы — экструдерами. Экструзионная линия представляет собой сложную мехатронную систему (МС), которая включает в себя до десяти электроприводов различного назначения, управляемый экструдер и устройства технологического измерения (контроля). Процессом экструзии жилы управляет автоматизированный рабочий центр, имеющий мощный контроллер управления и сенсорный пульт управления. Производители таких рабочих центров опционально закладывают в них программные модули, расширяющие возможности управления технологическим процессом, в частности, возможности статистической обработки и управления процессом производства изоляции.

В процессе производства контроллер вычисляет и представляет на панели управления статистические параметры толщины изоляции и ее эксцентриситета в течение заданного статистического периода. Измерения проводятся непрерывно и консолидируются в базе данных. Задача статистического контроля процесса кабельного производства подразумевает слежение за динамикой контролируемых параметров в реальном времени с корректирующими вмешательствами для их изменения, нормализации или ремонта МС.

В данной статье рассматривается разработка робастного алгоритмического обеспечения (процедуры) статистического контроля технологического процесса кабельного производства, позволяющего с высокой вероятностью отсутствия ложных остановов производства выявлять критические несоответствия и разладку мехатронной системы управления.

Алгоритмической основой статистического контроля управляемых процессов являются международные и отечественные стандарты. В частности, руководство "Статистическое управление процессами" (Statistical Process Control — SPC) [1] направлено на предупреждение несоответствий функционирования, в том числе и МС, путем выявления и анализа причин их появления, а также на непрерывное совершенствование их функционирования с применением статистических методов; аналогичным документом является ГОСТ Р 51814.3—2001 [2].

Согласно рекомендациям этих стандартов одним из инструментов в обширном арсенале методов SPC является контрольная карта (КК) Шухарта, предназначенная для оценки нахождения технологического процесса (ТП) в статистически управляемом (устойчивом) состоянии.

Существуют различные варианты КК этого типа, реализующие простой графический метод оценки управляемости процесса по результатам сравнения отдельных измерений параметров процесса с заданными контрольными границами, полученными при исходном нормальном функционировании. После нанесения исходных репрезентативных данных (контрольных пределов) на КК в последующем проводится анализ управляемости процесса с точки зрения наличия или отсутствия особых (неслучайных) причин его вариации.

Простейшей является классическая КК для среднего ($\bar{x}$) (рис. 1), предназначенная для управления технологическим процессом по количественному признаку [3]. Если очередная точка выходит за контрольный предел, то регистрируется факт разладки, и технологический процесс останавливается для выявления и устранения особых причин. Зоны А, В, С называют "сигмовыми" зонами, где σ — стандартное отклонение распределения выборочных средних. Каждой зоне приписывают вероятность нахождения в ней точек, наносимых на КК, в предположении нормального распределения. Пока результаты остаются в пределах 3σ -границ и варьируются относительно средней линии случайным образом, можно говорить о *стабильности процесса*. Если в текущих данных проявляется некоторая структура, то ее следует воспринимать как индикатор

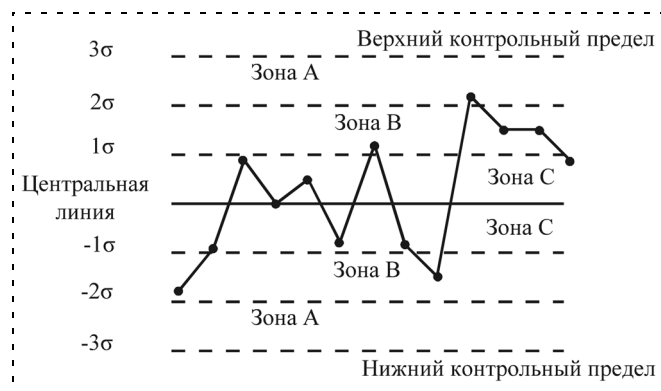


Рис. 1. Зоны контрольной карты

тор особой причины. В ряде исследований показывается, что нормальный закон распределения для КК не является жестким требованием.

В соответствии с [3] одновременно с построением карты среднего $\bar{x}$ строится также карта размахов (R) или карта выборочных стандартных отклонений (s). Если карта среднего позволяет обнаружить разладку ТП относительно центра настройки на параметр его нормальной работы, то карты размахов или стандартных отклонений позволяют обнаруживать разладку его точности. Такая разладка возникает, например, по причине износа МС, ее оснастки, инструментальной части или ухудшения качества комплектующих и материалов.

При оперативном контроле процесса КК служат своевременным индикатором его статистической управляемости. С их помощью можно предсказать момент, когда определенная особая причина (причины) изменит течение процесса. Однако определить природу этой причины и корректирующие действия, необходимые для ее устранения, КК не могут, поскольку являются только частью полной системы анализа процесса. Анализ причин выхода процесса из управляемого состояния и выполнение корректирующих действий по их устранению — это второй самостоятельный этап анализа процесса. И чем ближе оператор, обеспечивающий ведение КК, к мехатронному устройству, тем своевременнее произойдет регулировка его функционирования. Оно быстрее войдет в статистически управляемое состояние, и тем самым сохранится необходимое качество выпускаемой кабельной продукции. Вот почему статистический анализ управляемости необходимо осуществлять непосредственно за пультом управления технологической линией.

Теоретическая оценка робастности КК включает в себя как оценку вероятности ложной остановки процесса производства, так и оценку вероятности пропущенных несоответствий.

Возможны два вида неправильной интерпретации КК.

Ошибка первого рода возникает, когда технологический процесс, управляемый МС, находится в статистически управляемом состоянии, но точка попадает за контрольные пределы случайно. В результате предпринимают действия по устранению особой несуществующей причины (излишнее регулирование).

Ошибка второго рода возникает, когда технологический процесс, управляемый МС, не управляем, а точки случайно оказываются внутри контрольных пределов. В этом случае корректирующее действие не выполняется и упускается возможность предупредить выпуск дефектной продукции (недостаточное управление).

Для диагностики КК используются различные сочетания критериев (см., например, [2]). В ряде работ предлагаются решения, расширяющие их число. Анализируя сочетания предлагаемых крите-

риев, можно выделить четыре основных правила определения отсутствия управляемости:

- С1 — выход одной точки за трехсигмовые границы;
- С2 — две из трех последовательных точек, лежащих по одну сторону от средней линии, находятся в зоне А;
- С3 — четыре из пяти последовательных точек, лежащих по одну сторону от средней линии, находятся в зоне В;
- С4 — семь точек лежат по одну сторону от средней линии.

Эти четыре правила образуют полный набор правил принятия решений при идентификации устойчивого сдвига процесса. Другие критерии серий чувствительны к осцилляциям (колебаниям); кроме того, есть критерии для определения трендов. Добавление каждого нового критерия отсутствия управляемости увеличивает вероятность ложных тревог. Чем больше критериев используется, тем чаще возникает что-то, что кажется сигналом разладки или несоответствия. Под *чувствительностью* КК понимается вероятность, с которой карта позволяет распознавать нарушения технологического процесса. При анализе чувствительности КК используется средняя длина серий (*average run length, ARL*) измерения контролируемого параметра продукции.

Типичный путь оценки данного набора правил обнаружения сдвига — вычисление средней длины серии между ложными тревогами.

Средняя длина серии — среднее число выборок, необходимое для обнаружения изменения среднего значения, что определяется выходом точки за контрольные пределы.

Если выборочная вероятность разладки равна p , то вероятность разладки в первой выборке равна p_1 .

Вероятность того, что разладка не будет обнаружена до взятия второй выборки, равна $(1 - p_1)p_1$.

Вероятность того, что разладка не будет обнаружена до взятия i -й выборки, равна $(1 - p_1)^{i-1}p_1$.

Следовательно, среднее число выборок до обнаружения разладки, или средняя длина серии, будет равна

$$ARL = \frac{p_1}{[1 - (1 - p_1)]^2} = \frac{1}{p_1}.$$

Тогда при использовании правила С1 теоретическое расстояние между сигналами ложной тревоги на $\bar{x}$ -карте (в этом случае вероятность попадания точки за пределы 3σ равна 0, 0027) составляет

$$ARL = \frac{1}{0,0027} = 370,37.$$

Это говорит о том, что в случае, когда процесс находится в состоянии статистической управляемости, можно ожидать сигнала ложной тревоги каждые 371 выборку.

Таблица 1

Значения ARL для контрольных карт Шухарта

Сдвиг среднего	C1	C1*C2	C1*C3	C1*C4	C1*C2*C3*C4
0,0	370,40	225,44	166,05	152,73	94,57
0,2	308,43	177,56	120,70	110,52	66,99
0,4	200,08	104,46	63,88	59,76	36,54
0,6	119,67	57,92	33,99	33,64	20,88
0,8	71,55	33,12	19,78	21,07	13,24
1,0	43,89	20,01	12,66	14,58	9,22
1,2	27,82	12,81	8,84	10,90	6,89
1,4	18,25	8,69	6,62	8,60	5,42
1,6	12,38	6,21	5,24	7,03	4,41
1,8	8,69	4,66	4,33	5,85	3,68
2,0	6,30	3,65	3,68	4,89	3,13
2,2	4,72	2,96	3,18	4,08	2,70
2,4	3,65	2,48	2,78	3,38	2,35
2,6	2,90	2,13	2,43	2,81	2,07
2,8	2,38	1,87	2,14	2,35	1,85
3,0	2,00	1,68	1,89	1,99	1,67

Если правило С1 сочетается с правилом С4 (табл. 1), то путем объединения С1*С4 вероятностей разладки для каждого из этих правил средняя длина серии $ARL = 153$. Если применяются все четыре правила (С1*С2*С3*С4), то $ARL = 95$. Теоретическая величина $ARL = 95$ для статистического управления кабельным производством вполне приемлема, дополнительные критерии будут увеличивать возникновение сигналов ложной разладки ТП.

Классические КК Шухарта учитывают только ошибки первого рода, равные 0,3 % в пределах 3σ . Кроме того, при их использовании возникает ряд проблем [3].

1. Классические КК Шухарта в ряде случаев не позволяют быстро обнаружить разладку технологического процесса.

2. Большинство КК разработаны для характеристик, распределение которых близко к нормальному.

Особенность методологии построения КК Шухарта состоит также в том, что проводимый контроль не учитывает предыдущего поведения контролируемого параметра. Это для кабельного производства при наложении изоляции недопустимо.

В конце пятидесятых годов в связи с этим была предпринята попытка разработать методику, учитывающую для анализа текущего состояния процесса производства информацию о прошлых данных. В основе этой методики лежит исследование не индивидуальных значений признака, а учет их кумулятивных сумм.

КК типа CUSUM была впервые предложена в работе Page (1954) [4]. Обсуждение использующихся при ее построении математических принципов можно найти в работах Woodall [5].

Если есть ряд значений признака качества $x_1, x_2, \dots, x_n$, то образование CUSUM происходит следующим образом:

$$S_1 = (x_1 - k);$$

$$S_2 = (x_1 - k) + (x_2 - k) = S_1 + (x_2 - k);$$

.

.

$$S_n = \sum_{i=1}^n (x_i - k),$$

где x_i — значение наблюдаемой переменной; k — константа, представляющая собой некоторое эталонное значение; i — номер выборки.

Вычисленные и нанесенные на график в порядке появления кумулятивные суммы S_n образуют CUSUM-карту.

Константа k может принимать любое значение, однако часто k приравнивают точно или приблизительно к математическому ожиданию, тогда константа k оказывается близкой к номиналу параметра процесса.

Кумулятивные карты можно формировать, принимая в качестве эталона константу

$$k = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2},$$

где μ_0 — приемочный уровень дефектности; μ_1 — браковочный уровень дефектности.

Решающее правило тогда можно сформулировать следующим образом: если расстояние между текущим значением кумулятивной суммы и самой нижней из предыдущих точек на графике равно или больше h , то необходимо проводить корректирующие мероприятия, так как в среднем наблюдаемой переменной имеется сдвиг.

Таким образом, параметрами CUSUM-карты являются:

n — объем выборки;

k — эталонное значение;

h — интервал решения.

Сдвиг среднего наблюдаемого параметра процесса можно выразить как $(\mu - k)$. В случае нормального распределения параметра сдвиг можно стандартизировать

$$k_{ст} = \frac{(\mu - k)}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{(\mu - k)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Аналогично для интервала решения

$$h_{ст} = \frac{h}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{h\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Таким образом, если среднее значение отклонения параметра процесса от номинального возрастает, то будет иметь место и общий рост уровня CUSUM. Аналогичным образом, если среднее процесса будет падать, то и график будет стремиться вниз.

Если строить график накопленной суммы отклонений от регламентированных спецификаций

для следующих друг за другом выборочных средних, то даже малые постоянные сдвиги среднего значения процесса (незначительная разладка мехатронной системы) постепенно приведут к накоплению ощутимой суммы отклонений.

Для установления контрольных пределов в CUSUM-картах было предложено использовать процедуру, известную как *V-маска*, которая наносится на график после построения точки для последней выборки (самой правой точки на графике). Можно считать, что *V-маска* представляет собой верхний и нижний контрольный пределы для накопленных сумм. Однако вместо того, чтобы быть параллельными центральной линии, эти прямые сходятся под определенным углом вправо, образуя в результате фигуру, похожую на лежащую букву *V*. Если график накопленной суммы пересекает любую из линий маски, то процесс считается вышедшим из-под контроля.

Данный тип КК особенно хорошо подходит для обнаружения малых постоянных сдвигов процесса, которые могут оказаться незамеченными при применении классической $\bar{x}$ -карты. Примером может быть ситуация, когда из-за износа оборудования процесс медленно "выскальзывает" из-под контроля, в результате чего отклонения толщины изоляции или ее эксцентриситет начинают превышать регламентированные спецификации. При применении CUSUM-карты будет получен монотонно растущий (или снижающийся) график накопленной суммы отклонений от плановых спецификаций.

CUSUM-карты широко применяются еще и потому, что они могут использоваться в случае ограниченной доступности индивидуальных измерений (это характерно для процессов с относительно низким уровнем производительности или высокой стоимостью измерений) для статистического управления процессом производства. CUSUM-карта наиболее быстро реагирует на *небольшие сдвиги уровня* процесса и позволяет оперативно определить начало сдвига уровня процесса.

Для сравнения чувствительности рассматриваемых CUSUM-карты и классических карт Шухарта используют характеристику ARL (табл. 2). Если не возникает реального изменения процесса, ARL

Таблица 2
Значения ARL для CUSUM-карт и карт Шухарта

Сдвиг среднего	$h\sqrt{n}/\sigma$			ARL для КК Шухарта (правило С1)
	4	5	10	
0,0	336	930	140 146	371,00
0,25	74,2	140	2071,57	281,14
0,5	26,6	30,0	124,66	115,22
0,75	13,3	17,0	36,71	81,22
1,0	8,38	10,4	20,37	44,0
1,5	4,75	5,75	10,75	14,97
2,0	3,34	4,01	7,34	6,30
2,5	2,62	3,11	5,62	3,24
3,00	2,19	2,57	4,58	1,19

должна быть большой и характеризовать среднее число сотен выборок, так как любые сигналы о выходе процесса из статистически управляемого состояния будут ложными сигналами тревоги. Если возникает большой сдвиг от цели, ARL должна быть малой для быстрого обнаружения изменения состояния процесса. Взаимосвязь правил принятия решений и величины отклонения контролируемого параметра от эталонного значения можно представить кривой средней длины серии выборок, которая дает возможность сравнения правил принятия решений аналогично оперативной характеристике для процедур выборочного контроля (ГОСТ Р 50779.70; ГОСТ Р 50779.71).

Анализируя чувствительность классической карты Шухарта (табл. 3) и CUSUM-карты можно сделать следующий вывод: CUSUM-карта определяет сдвиг среднего процесса на 2σ и меньше значительно лучше, чем классическая карта Шухарта.

Для сравнения относительной скорости определения изменений среднего значения параметра процесса предлагается использовать показатель

$$\varepsilon = \frac{ARL_{\text{Шухарта}}}{ARL_{\text{CUSUM}}},$$

где ε — относительная эффективность определения изменения.

Таблица 3

Сдвиг среднего	ARL для CUSUM-карты	ARL для КК Шухарта (правило С1)	Относительная эффективность ε	ARL для КК Шухарта (правило С1234)
0,0	336	371,00	1,1	94,57
0,25	74,2	281,14	3,78	
0,5	26,6	115,22	4,33	
0,75	13,3	81,22	6,1	
1,0	8,38	44,0	5,25	9,22
1,5	4,75	14,97	3,15	
2,0	3,34	6,30	1,88	3,13
2,5	2,62	3,24	1,24	
3,00	2,19	1,19	0,54	1,67

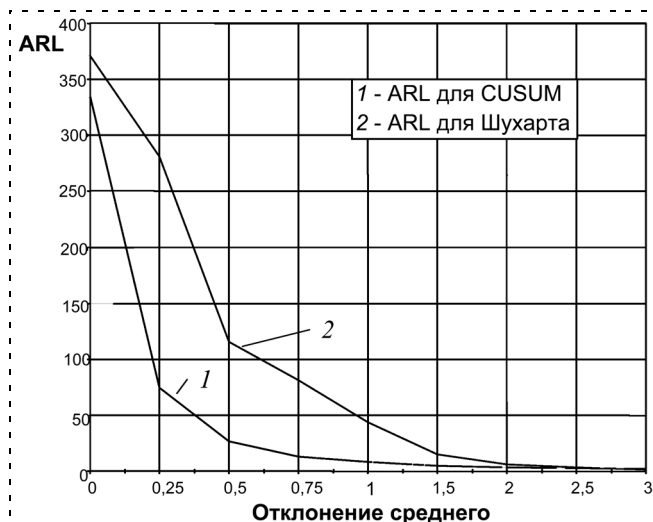


Рис. 2. Зависимость ARL от сдвига среднего

Таким образом, в экстремальных случаях применение CUSUM-карты примерно в четыре раза эффективнее, чем применение карты Шухарта, тогда как при очень малых и очень больших отклонениях их применение становится сравнимым (рис. 2).

Указанные выше четыре правила и CUSUM-карта образуют робастную процедуру диагностики состояния ТП при идентификации устойчивого сдвига процесса функционирования МС. Добавление каждого нового критерия отсутствия управляемости увеличивает вероятность ложных тревог. Чем больше критериев используется, тем чаще возникает что-то, что кажется сигналом разладки.

Для оценки возможностей по обнаружению нарушений в предлагаемой процедуре вычисляется чувствительность КК как вероятность, с которой карта позволяет распознавать нарушения технологического процесса функционирования МС. Для этого используется ARL — среднее значение числа мгновенных выборок, взятых от момента нарушения процесса функционирования МС до момента обнаружения этого нарушения.

Заключение

Предложенные теоретические расчеты ARL показали, что для обеспечения необходимой для кабельного производства статистической управляемости достаточно использование четырех правил интерпретации.

Для увеличения робастности процедуры выявления разладки технологического процесса предлагается дополнительно использовать контрольную карты кумулятивных сумм (CUSUM-карту). Это позволяет снизить число ложных остановов производства и тем самым повысить выявляемость критических несоответствий и разладки МС управления.

Предлагаемая процедура позволяет максимизировать определение реальных неисправностей и минимизировать число ложных сигналов тревоги. Экономическая эффективность предложенной процедуры для контроля процессов кабельного производства определялась с помощью стоимостной функции:

$$F = \text{число неопределенных реальных неисправностей} + \text{число произведенных ложных остановов} + \text{число измерений, сделанных до определения неисправности}.$$

Снижение стоимостной функции подтвердило экономическую эффективность предложенной процедуры для применения в кабельном производстве.

Список литературы

1. Статистическое управление процессами. SPC. Перевод с англ. Н. Новгород: АО НИЦ КД, СМЦ "ПРИОРИТЕТ", 2001. 181 с.
2. ГОСТ Р 50779.42—99 (ИСО 8258—91). Статистические методы. Контрольные карты Шухарта.
3. Шнеер В. Л. Еще раз о контрольных картах и вокруг них // Надежность и контроль качества. 1998. № 10. С. 3—13.
4. Page E. S. Continuous Inspection Schemes // Biometrika. 1954. 41.
5. Woodall W. H. The distribution of the run length of one-sided CUSUM procedures for continuous random variables // Technometrics. 1983. 25. N 3. P. 295—301.

Л. Б. Беленький, канд. техн. наук, научн. сотр.,
belenki@iccs.ru

С. Ю. Боровик, канд. техн. наук, ст. научн. сотр.,
borovik@iccs.ru

Б. К. Райков, ст. научн. сотр.,
raykov@iccs.ru

Ю. Н. Секисов, д-р техн. наук, зав. лаб.,
sekisov@iccs.ru

О. П. Скобелев, д-р техн. наук, гл. научн. сотр.,
iccs@iccs.ru

В. В. Тулупова, канд. техн. наук, ст. научн. сотр.,
tulupova@iccs.ru

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления
сложными системами РАН, г. Самара

Уменьшение длительности получения информации о смещениях торцов лопаток¹

Приводится описание новых методов ускоренного получения информации о двух и трех координатах смещений торцов лопаток с помощью распределенного кластера одновитковых вихретоковых датчиков, а также рассматриваются вопросы реализуемости этих методов.

Ключевые слова: координаты смещений, торцы лопаток, распределенный кластер одновитковых вихретоковых датчиков

Введение. Известны методы получения информации о координатах смещений торцов лопаток в компрессорах и турбинах с помощью распределенного кластера высокотемпературных одновитковых вихретоковых датчиков (ОВТД) [1].

При получении информации о двух координатах расстояние между двумя точками в зонах чувствительности двух ОВТД, названными виртуальными геометрическими центрами (ВГЦ), выбирается равным $1,5\Delta\Psi_{\text{л}}$, где $\Delta\Psi_{\text{л}}$ — шаг установки лопаток на колесе ротора. Преобразования происходят на первом периоде вращения ротора по мере прохождения замками всех лопаток первого ВГЦ вблизи датчика, выполняющего в измерительной цепи (ИЦ) функцию рабочего (второй ОВТД — компенсационный), а на втором периоде — при прохождении замками лопаток ВГЦ второго датчика, выполняющего на этом этапе функцию рабочего (первый ОВТД — компенсационный).

Для получения информации о трех координатах добавляется третий ОВТД, ВГЦ которого смещен на $\Delta\Psi_{\text{л}}$ относительно второго. Этот ОВТД является рабочим на дополнительном третьем обороте ро-

тора, а компенсационным датчиком служит первый ОВТД.

Таким образом, число периодов вращения ротора, затрачиваемых на получение измерительной информации, равно числу искомых координат и ОВТД в составе кластера, причем функция рабочего датчика закрепляется за каждым из них последовательно от периода к периоду вращения ротора.

Указанное число периодов вращения фактически определяет время получения информации о координатах смещения торцов лопаток и, соответственно, динамические возможности методов, которые в основном ориентированы на исследование стационарных процессов. Вместе с тем, при исследовании нестационарных процессов, например помпажных явлений, длительность преобразований и вычислений координат может оказаться причиной появления динамических погрешностей.

Новые методы призваны уменьшить длительность получения информации о координатах смещений и возможные динамические погрешности. Этим методам и посвящена данная статья, в которой приводится их описание, а также рассматриваются вопросы реализации. При этом наибольшее внимание уделено дифференциальным ИЦ и результатам исследований, проведенным на моделях ИЦ и не рассмотренным в работе [2].

Предлагаемые методы. Пусть решается задача получения информации о двух координатах смещений (x , y). Размещение чувствительных элементов (ЧЭ) ОВТД (ЧЭ₁ и ЧЭ₂) на внутренней поверхности статора, а также ВГЦ (0₁ и 0₂) аналогично [1], т. е. точки 0₁ и 0₂ расположены на расстоянии $1,5\Delta\Psi_{\text{л}}$ (рис. 1, а). На том же рисунке показаны координатные оси систем отсчета (начала отсчета в точках 0₁ и 0₂) и замки лопаток с номерами 1, 2, ..., $n-2$, $n-1$, n .

Представляется очевидным, что при вращении колеса ротора в зоне чувствительности одного из пары ЧЭ через каждые $0,5\Delta\Psi_{\text{л}}$ будет появляться замок лопатки и соответственно ее торец. А это означает, что получение информации возможно в течение одного, а не двух периодов вращения, как это показано в [1].

Действительно, при прохождении замка лопатки под номером 1 ВГЦ в точке 0₁ ЧЭ₁ в дифференциальной ИЦ выполняет рабочую функцию (ЧЭ₁-Р), а ЧЭ₂ — компенсационную (ЧЭ₂-К). При повороте колеса на угол $0,5\Delta\Psi_{\text{л}}$ замок n -й лопатки проходит ВГЦ в точке 0₂. При этом рабочим становится ЧЭ₂ (ЧЭ₂-Р), а компенсационным — ЧЭ₁ (ЧЭ₁-К). На рис. 1, а новое положение колеса показано штриховыми линиями, а соответствующие обозначения выделены курсивом. Следующий поворот колеса на угол $0,5\Delta\Psi_{\text{л}}$ приводит к восстановлению первоначальных функций ЧЭ в ИЦ и т. д. При этом для всех лопаток, кроме n -й, в пределах угла поворота колеса $1,5\Delta\Psi_{\text{л}}$ завершается процесс получения информации, необходимой для определения координат смещения (каждый ЧЭ выполнил функцию ра-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-08-00422а).

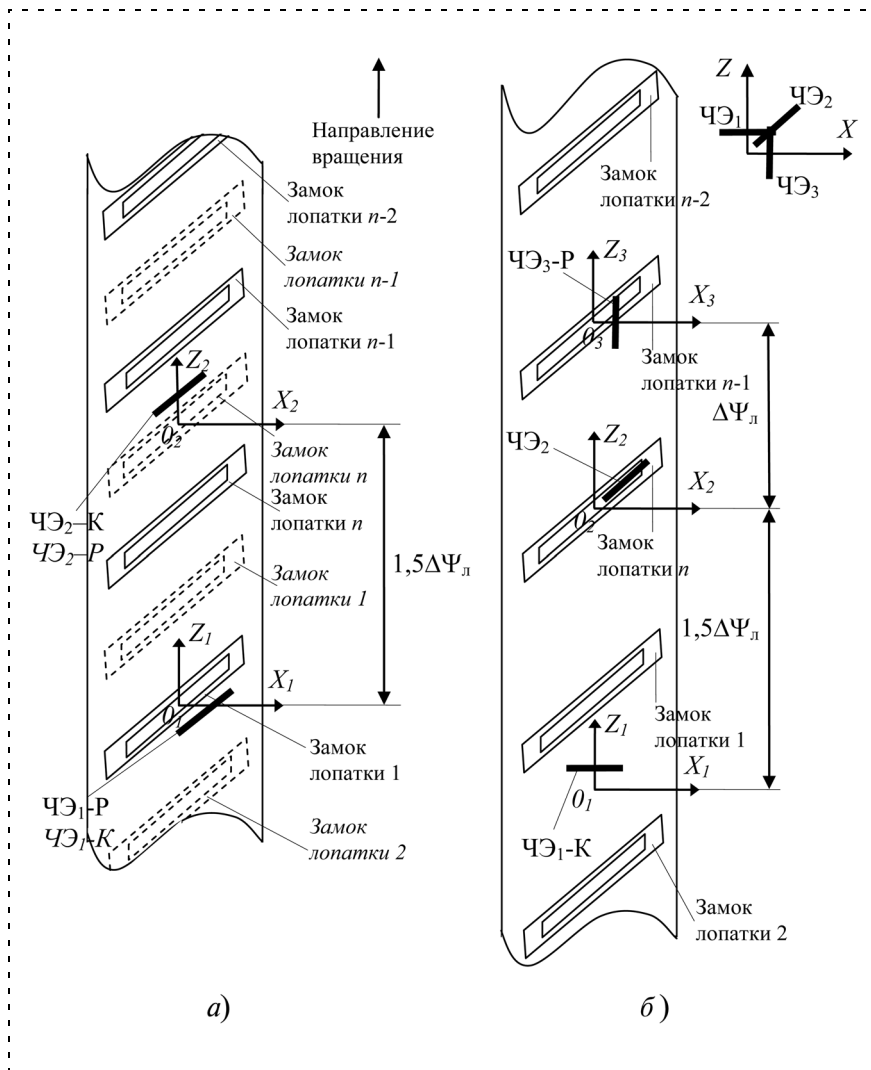


Рис. 1. Расположение ЧЭ ОВТД и замков лопаток в распределенном кластере из двух (а) и трех (б) датчиков

бочего при прохождении через соответствующий ВГЦ замка каждой лопатки). Для n -й лопатки процесс получения информации занимает $(2\pi - 1,5\Delta\Psi_{\text{л}})$ угла поворота колеса.

Как уже отмечалось во введении, для получения информации о трех координатах используется дополнительный (третий) ОВТД, ВГЦ которого (0_3) смещен на угол $\Delta\Psi_{\text{л}}$ относительно второго. При этом процедура получения информации на первом периоде вращения колеса в предлагаемом методе не отличается от изложенной применительно к определению двух координат за этот период, а на втором периоде ЧЭ₃ всегда выполняет функцию рабочего (ЧЭ₃-Р) при компенсационном ЧЭ₁ (ЧЭ₁-К). Рис. 1, б иллюстрирует расположение ЧЭ и замков лопаток на этом периоде. Здесь ЧЭ ориентированы в соответствии с рекомендациями, изложенными в [2], которые обеспечивают разрешимость и сходимость системы уравнений, представляющих собой семейство функций преобразования (ФП) (градуировочных характеристик (ГХ)), связывающих вы-

ходные параметры (индуктивности) ОВТД в составе кластера или коды в ИЦ, включающих ОВТД, с координатами смещений торцов лопаток. Для большей наглядности рекомендованный распределенный кластер ЧЭ представлен в сосредоточенном виде на рис. 1, б в правой верхней его части.

Реализуемость предлагаемых методов. Как отмечалось в работе [2], реализуемость методов на основе распределенного кластера зависит, главным образом, от размещения и ориентации ЧЭ, а также связана с дифференциальной ИЦ, обеспечивающей смену функций ЧЭ с рабочими на компенсационные.

Размещение и ориентация ЧЭ оказывают определяющее влияние на семейства ФП (ГХ) и, следовательно, на систему уравнений, необходимым условием решения которой является монотонность ФП (ГХ) в диапазоне изменений искоемых координат и приемлемая чувствительность. Достаточным условием сходимости и разрешимости системы является независимость уравнений и существование ненулевого якобиана на каждой итерации численного решения системы [2].

Следует подчеркнуть, что вариант размещения и ориентации ЧЭ на рис. 1, б был найден в результате серии вычислительных экспериментов в процессе моделирования электромагнитного взаимодействия ЧЭ с торцом лопатки в различ-

ных вариантах с получением соответствующих ФП и систем уравнений, а также проверкой необходимых и достаточных условий решения уравнений².

Поэтому вопрос реализуемости вновь предлагаемого метода получения информации о трех координатах смещений (x, y, z) с размещением и ориентацией ЧЭ, приведенными на рис. 1, б, не требует каких-либо дополнительных пояснений.

Предлагаемый метод получения информации о двух координатах (x, y) предусматривает такое размещение и ориентацию ЧЭ₁ и ЧЭ₂ (рис. 1, а), при которых семейства ФП (ГХ), найденные путем моделирования или экспериментально, представляют собой монотонно убывающую (для одного ЧЭ) и возрастающую по оси X (для другого ЧЭ) функции,

² При этом исходным вариантом в моделировании была выбрана идеализированная "трехлучевая звезда", в которой все ЧЭ ("лучи") начинаются в ВГЦ, совмещенном с началом координатных осей, положение ЧЭ₂ совпадает с осью z , а углы между ЧЭ равны 120° .

причем обе функции монотонно убывают по оси Y [3–6]³. Характер изменений ФП (ГХ) демонстрирует очевидную независимость уравнений в системе из двух уравнений, а расчет координат по заданным кодам [5] подтверждает сходимость решений и разрешимость системы. При этом диапазоны изменений x и y в несколько раз превышают диапазоны изменений тех же координат в оценках реализуемости метода получения трех координат (x, y, z) в работе [2].

Что касается ИЦ, то для реализации предлагаемого метода получения информации о трех координатах смещений без каких-либо изменений может использоваться неравновесная мостовая схема с импульсным питанием, дифференцирующим и запоминающим устройствами на выходе (ДУ и ЗУ), а также АЦП "напряжение — код" [2, 4]. Смену функций ЧЭ датчиков с рабочих на компенсационные обеспечивают бесконтактные ключевые элементы коммутатора, подающие питание на ОВТД₁, ..., ОВТД₃ в последовательности, которая определяется реализуемым методом. Та же ИЦ может быть использована для получения информации о двух координатах смещения с помощью кластера из двух датчиков (ОВТД₁, ОВТД₂). При этом один из ключей (в цепи ОВТД₃) постоянно находится в разомкнутом состоянии или исключается из схемы. Однако возможен и такой вариант ИЦ, в котором число ключей минимизируется до одного, а его функции ограничиваются формированием импульса питания мостовой схемы. Описание такой цепи, ее функционирование более подробно рассматривается ниже. Ведется анализ эквивалентной схемы, в том числе исследуется влияние параметров датчика, линии связи и операционного усилителя дифференцирующего устройства (ДУ) на его выходные сигналы. Кроме того, рассматриваются временные диаграммы схемы с коммутацией трех ОВТД, отличающиеся от диаграмм, приве-

³ В указанных источниках ФП (ГХ) найдены для сосредоточенных кластеров в основном при разновременном включении питания ИЦ с ЧЭ₁ и ЧЭ₂. Однако в работе [6] при одновременном включении питания наблюдается взаимное электромагнитное влияние ЧЭ₁ и ЧЭ₂, искажающее форму ФП (ГХ), но при определенном выборе направлений токов в ЧЭ₁ и ЧЭ₂ это влияние сводится к минимуму, и искажения формы практически отсутствуют.

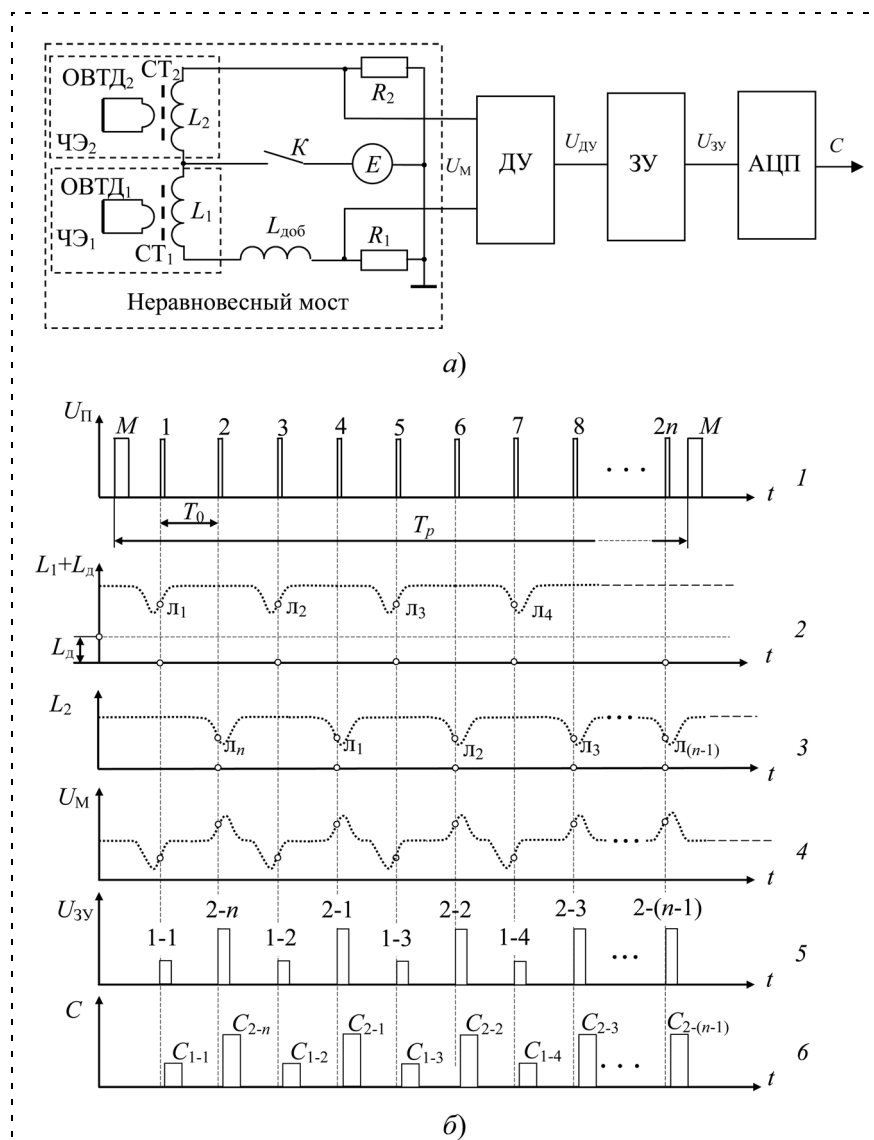


Рис. 2. Дифференциальная измерительная цепь для получения информации о двух координатах (а) и временные диаграммы ее функционирования (б)

денных в работе [2], поскольку режим функционирования схемы определяется методом получения информации, который предлагается в данной статье.

На рис. 2, а представлена дифференциальная ИЦ с неравновесным LR -мостом, в плечи которого включены датчики (ОВТД₁ и ОВТД₂) и резисторы (R_1, R_2). В составе датчиков помимо ЧЭ показаны согласующие трансформаторы (СТ₁, СТ₂) [4]. Ключ K формирует прямоугольные импульсы питания с амплитудой E . ИЦ работает по методу первой производной [2, 4], а это означает, что выходное напряжение моста U_M дифференцируется ДУ, амплитудное значение напряжения на его выходе ($U_{ДУ}$) фиксируется в ЗУ ($U_{ЗУ}$) и далее преобразуется в цифровой код (C).

В плечо моста с датчиком ОВТД₁ включена дополнительная катушка с индуктивностью $L_{доб}$, по-

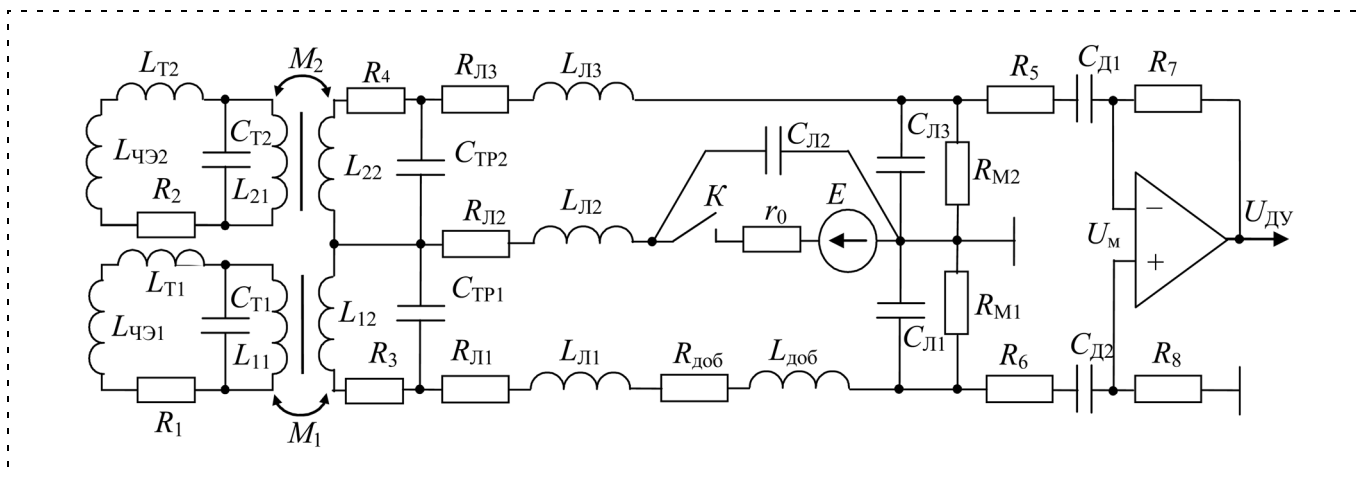


Рис. 3. Эквивалентная схема измерительной цепи

звоящая получить на выходе моста и ДУ однополярный сигнал.

Получению информации о координатах смещения (x , y) предшествует измерение периода вращения ротора компрессора или турбины (T_p), которое осуществляется с помощью датчика частоты вращения (ДЧВ) и метки (М) на валу ротора. По результатам измерения T_p вычисляются моменты прохождения замками лопаток ВГЦ (точек 0_1 и 0_2) в зонах действия электромагнитных полей рабочих ЧЭ распределенного кластера, а также период импульсов питания мостовой схемы $T_0 = T_p/2n$, где n — число лопаток, причем период T_0 строго соответствует повороту колеса на угол $0,5\Delta\psi_{\text{л}}$ и согласно реализуемому методу — смене функций каждого ЧЭ с рабочей на компенсационную.

Функционирование ИЦ иллюстрируют временные диаграммы (рис. 2, б): на эпюре 1 представлены импульсы питания моста ($U_{\text{п}}$) с периодом T_0 и сигналы ДЧВ (M) с периодом T_p , а на эпюрах 2, 3, 4 — изменения индуктивностей L_1 и L_2 датчиков, а также выходные напряжения моста $U_{\text{м}}$ (на тех же эпюрах обозначены моменты подачи импульсного питания $U_{\text{п}}$, соответствующие прохождению ВГЦ лопатками под номерами 1, 2, ..., n , причем пунктирные линии характеризуют изменения тех же параметров при гипотетическом уменьшении периода импульсов питания); на эпюрах 5 и 6 представлены напряжения на выходе ЗУ и коды АЦП, где каждый полученный результат обозначен двумя цифрами — первая соответствует номеру датчика, а вторая — номеру лопатки.

На основе полученных значений кодов, а также ФП (ГХ) составляется система уравнений (для каждой лопатки) и вычисляются искомые координаты (x , y). При этом длительность получения информации по всем лопаткам действительно составляет один период вращения T_p , (от единиц до десятков миллисекунд). Вместе с тем, длительность преобразования выходных параметров датчиков в амплитудные

значения $U_{\text{ДУ}}$ составляет доли микросекунд⁴. Такая длительность определяется комплексом основных и паразитных параметров ОВТД, линий связи, операционных усилителей (ОУ). Следует отметить, что влияние параметров линий и ОУ в ДУ исследовалось в работе [7]. Однако влияние параметров входного контура ОВТД, включающего ЧЭ, тоководы между ЧЭ и СТ, в указанной публикации не рассматривалось⁵.

Эквивалентная схема на рис. 3 не только устраняет существующий пробел, но и позволяет изучить влияние параметров линий и операционного усилителя ДУ в сочетании с параметрами входного контура ОВТД. В эквивалентной схеме используются следующие обозначения: $L_{\text{ЧЭ1}}$, $L_{\text{Т1}}$, $C_{\text{Т1}}$ и R_1 — индуктивность ЧЭ, индуктивность и емкость токовода, сопротивление входного контура ОВТД₁ ($R_1 = R_{\text{ЧЭ1}} + R_{\text{Т1}}$); $L_{\text{ЧЭ2}}$, $L_{\text{Т2}}$, $C_{\text{Т2}}$ и R_2 — индуктивность ЧЭ, индуктивность и емкость токовода, сопротивление входного контура ОВТД₂ ($R_2 = R_{\text{ЧЭ2}} + R_{\text{Т2}}$); L_{11} , L_{12} и L_{21} , L_{22} — индуктивности одновитковых первичных и многовитковых вторичных обмоток СТ₁ и СТ₂; M_1 , M_2 — коэффициенты взаимной индукции; $R_{\text{доб}}$, $L_{\text{доб}}$ — добавочные сопротивление и индуктивность, обеспечивающие однополярный выходной сигнал на выходе ДУ; $R_{\text{Л1}}$, $R_{\text{Л2}}$, $R_{\text{Л3}}$, $L_{\text{Л1}}$, $L_{\text{Л2}}$, $L_{\text{Л3}}$, $C_{\text{Л1}}$, $C_{\text{Л2}}$, $C_{\text{Л3}}$ — сопротивления, индуктивности и емкости коротких линий связи, в которые встраивается часть неравновесного моста, содержащая ЗУ, ДУ и источник питания; $R_{\text{М1}}$, $R_{\text{М2}}$ — сопротивления токовых шунтов; R_3 , R_4 — сопротивления вторичных обмоток СТ; R_5 , R_6 , R_7 , R_8 , $C_{\text{Д1}}$, $C_{\text{Д2}}$ — параметры RC-цепочек, обеспечивающие работу ОУ в режиме дифферен-

⁴ В идеале согласно методу первой производной это время равно нулю [4].

⁵ Исключение составляет работа [8], но проведенные в ней исследования касались только моста Блумлейна, а во входном контуре автор ограничился влиянием индуктивных параметров, оставив без внимания емкости тоководов и СТ.

цирования; E , r_0 — напряжение и внутреннее сопротивление источника питания.

Последующий анализ направлен на поиск амплитудного значения напряжения на выходе ДУ ($U_{ДУ\max}$) в начале переходного процесса при включении питания мостовой схемы (в соответствии с методом первой производной [2, 4]). Несмотря на упрощающие допущения о симметрии параметров плеч мостовой схемы ($L_{11} = L_{21} = L_{СТ1}$, $L_{12} = L_{22} = L_{СТ2}$, $M_1 = M_2 = k\sqrt{L_{СТ1}L_{СТ2}}$ (коэффициент связи $k = 1$), $L_{Т1} = L_{Т2} = L_T$, $C_{Т1} = C_{Т2} = C_T$, $R_1 = R_2 = R_{СТ1}$, $R_3 = R_4 = R_{СТ2}$, $R_{м1} = R_{м2} = R$, $R_{л1} = R_{л2} = R_{л3} = R_L$, $L_{л1} = L_{л2} = L_{л3} = L_L$, $C_{л1} = C_{л2} = C_{л3} = C_L$, $R_5 = R_6 = R_d$, $C_{д1} = C_{д2} = C_d$, $R_7 = R_8 = R_{ос}$), математическая модель эквивалентной схемы представляет собой систему дифференциальных уравнений высокого порядка, для решения которой приходится использовать численные методы. Вместе с тем, полагая, что линии связи эквивалентной схемы пренебрежимо малы, сопротивления $R_d = 0$, а частота единичного усиления ОУ не ограничена ($f_0 \rightarrow \infty$), можно получить решение в аналитическом виде (в виде формулы). График искомой функции $U_{ДУ}(t)$ представлен на рис. 4 (кривая 1), а ее максимальное значение (ему соответствует момент времени $t = 0$) определяется выражением⁶:

$$U_{ДУm}|_{t \rightarrow 0} = E \frac{T}{\tau_{\text{эКВ}}} \frac{\Delta L}{L_{ЧЭ}} \frac{1}{1 - \frac{\Delta L}{L_{ЧЭ}}},$$

где $T = R_{ос} C_d$, $\tau_{\text{эКВ}} = \frac{(w_2/w_1)^2 L_{ЧЭ}}{R}$; w_1, w_2 — число витков первичной и вторичной обмоток СТ ($w_1 = 1$) [4].

В существующих ОВТД полезные изменения выходного параметра незначительны и составляют единицы процентов (в датчиках, выполненных из нержавеющей стали, отношение $\Delta L/L \approx 0,025$). Поэтому максимум выходного напряжения ДУ $U_{ДУm}|_{t \rightarrow 0} = E \frac{T}{\tau_{\text{эКВ}}} \frac{\Delta L}{L_{ЧЭ}}$ и не зависит от изменений сопротивлений ЧЭ и тоководов датчика ($R_{ЧЭ}$, R_T), связанных с изменениями температуры окружающей среды, которые составляют сотни процентов.

⁶ В расчетах $U_{ДУ}(t)$ использовались следующие значения параметров: $E = 7$ В, $r_0 = 0,1$ Ом, $L_{ЧЭ} = 5 \cdot 10^{-9}$ Гн, $\Delta L_{ЧЭ} = -1,25 \times 10^{-10}$ Гн, $R_{ЧЭ} = 5 \cdot 10^{-3}$ Ом, $L_T = 1,5 \cdot 10^{-9}$ Гн, $R_T = 1,25 \cdot 10^{-3}$ Ом, $w_1 = 1$, $w_2 = 50$, $R_{СТ2} = 6,5$ Ом, $R_{доб} = 0,1$ Ом, $L_{доб} = 1,325 \cdot 10^{-6}$ Гн, $R = 33$ Ом, $R_{ос} = 3000$ Ом, $C_d = 680 \cdot 10^{-12}$ Ф, $R_d = 68$ Ом.

Следует отметить, что решение системы уравнений, которая описывает поведение эквивалентной схемы (см. рис. 3), в аналитическом виде возможно и в том случае, когда $R_d \neq 0$ и постоянная времени $T_d = C_d R_d$ оказывает инерционное действие. Такое решение было получено, но из-за громоздкости формула для $U_{ДУ}(t)$ здесь не приводится, однако в графическом виде решение представлено на рис. 4 (кривая 2). Из графика следует, что значение $U_{ДУ}$ уменьшается (по сравнению с (кривой 1)) и ему соответствует время $t_m \approx 0,08$ мкс.

Путем численных решений в среде MathCAD даны оценки влияния на $U_{ДУ}(t)$ ограниченной час-

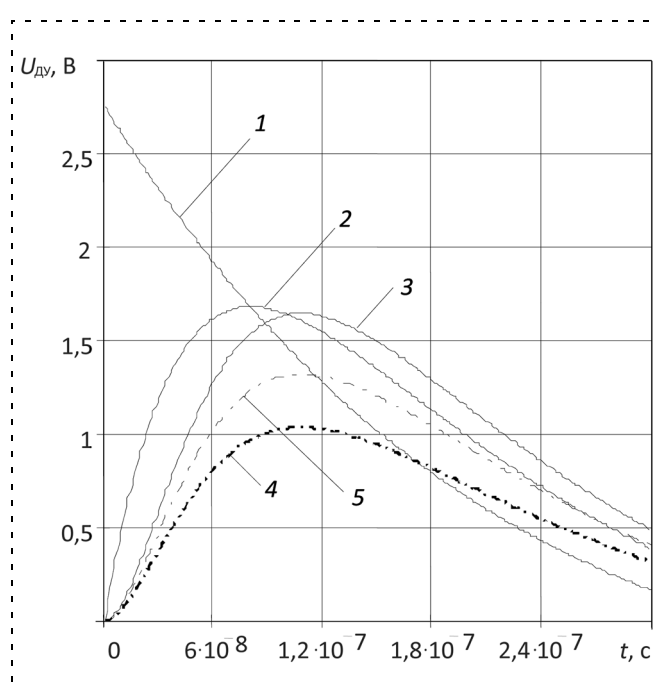


Рис. 4. Изменение выходного напряжения ДУ

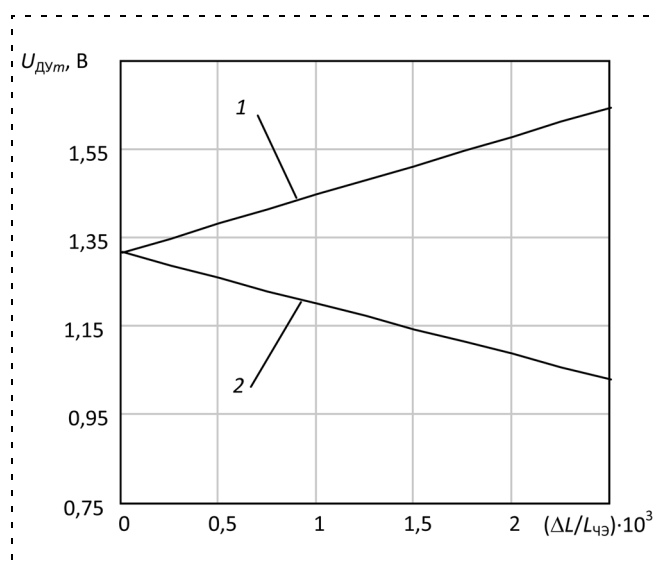


Рис. 5. Функции преобразования измерительной цепи

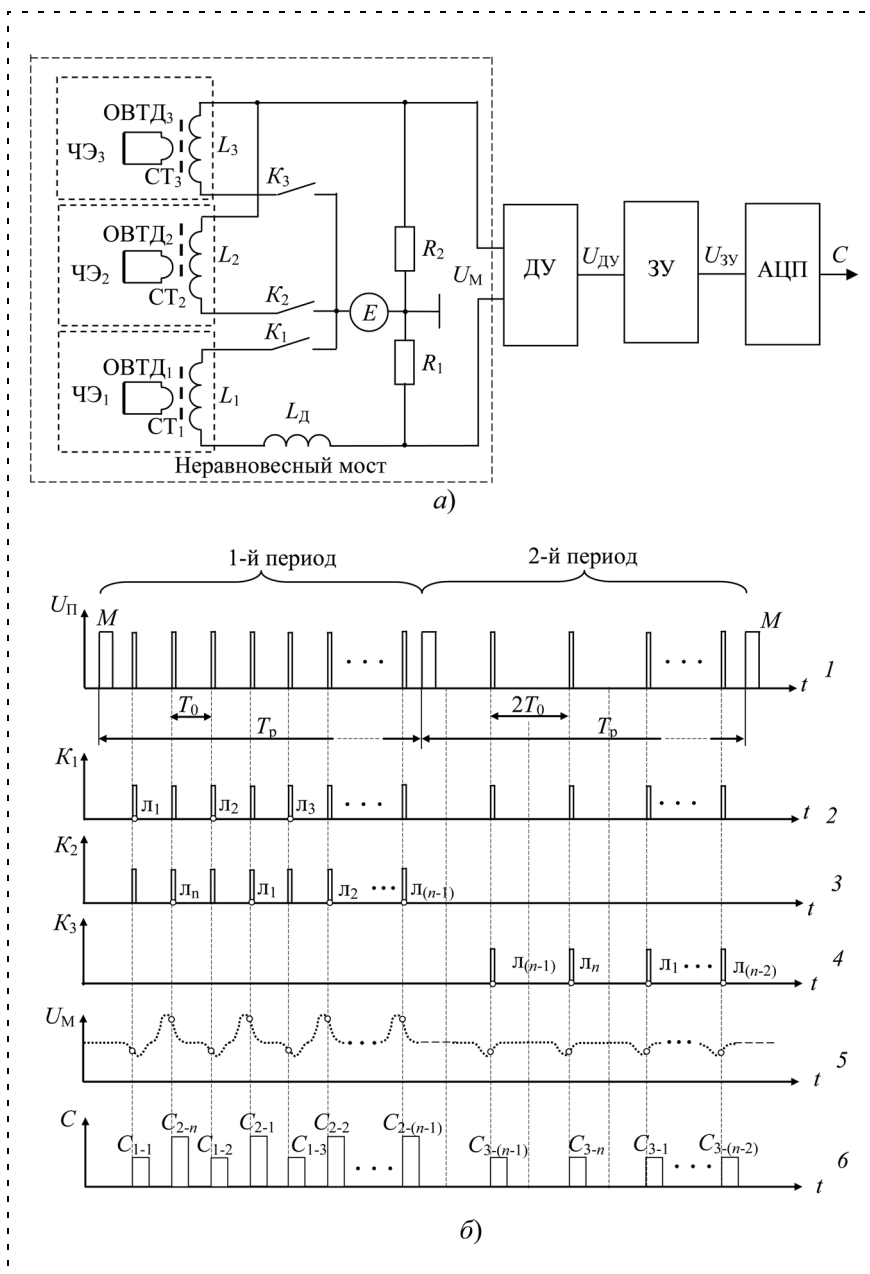


Рис. 6. Дифференциальная измерительная цепь для получения информации о трех координатах (а) и временные диаграммы ее функционирования (б)

тоты f_0 , которое вызывает незначительное уменьшение амплитуды $U_{ДУ}$ и дальнейшее смещение максимума в сторону увеличения времени t_m (рис. 4 (кривая 3))⁷. При этом все расчетные значения $U_{ДУ}(t)$, приведенные на рис. 4 (кривые 1, 2, 3), получены в предположении, что рабочим плечом в мостовой схеме является ОВТД₂ (изменяется индуктивность ЧЭ₂). На том же рисунке изображены $U_{ДУ}(t)$ при тех же значениях $\Delta L_{ЧЭ}$, но в предположении, что рабочим плечом является ОВТД₁ (ЧЭ₁)

⁷ Предполагается, что в ДУ используется операционный усилитель AD8056, его $f_0 = 300$ МГц.

(кривая 4), а также при $\Delta L_{ЧЭ} = 0$ (кривая 5).

Рис. 5 иллюстрирует ФП в виде зависимостей $U_{ДУm}$ от безразмерных изменений индуктивности $\Delta L/L_{ЧЭ}$ как ЧЭ₂ (кривая 1), так и ЧЭ₁ (кривая 2).

Возвращаясь к рис. 4, следует также отметить, что смещение максимума функций $U_{ДУm}$ по времени приводит к увеличению влияния сопротивлений ЧЭ и тоководов. Хотя подавление влияния (благодаря применению метода первой производной) происходит более чем в 2 раза (определяется по отношению к полезным изменениям ($\Delta U_{ДУm}$) при максимальных значениях $\Delta L/L_{ЧЭ}$), изменения $\Delta U_{ДУm}$ при увеличении температуры в зоне ЧЭ и тоководов до 1000 °С возрастают более чем в 2 раза. Поэтому семейства ГХ в каналах ОВТД₁ и ОВТД₂ обычно определяются экспериментально с учетом температурных изменений, а при вычислениях координат смещений (x, y) проводится температурная коррекция [3, 4].

Дополнительное влияние на $U_{ДУm}$ оказывают емкости тоководов и параметры линий связи. Однако эти влияния незначительны⁸ и остаются в пределах 2 % как для тоководов, так и для линий длиной 0,5 м.

На рис. 6, а представлена ИЦ, обеспечивающая получение информации о трех координатах смещений, которая отличается от схемы на рис. 2, а дополнительным датчиком (ОВТД₃) и ключами, введенными в неравновесный мост. Вместе с тем (и это уже отмечалось), ИЦ на рис. 6, а практически идентична той, что рассмотрена в работе [2], но отличается от последней функционированием.

Временные диаграммы (рис. 6, б) иллюстрируют работу ИЦ на протяжении двух периодов вращения лопаточного колеса, причем в течение первого периода синхронное замыкание пары ключей K_1, K_2 обеспечивает подачу питания на датчики ОВТД₁, ОВТД₂ (ЧЭ₁, ЧЭ₂), а в течение второго — пары ключей K_1, K_3 и соответственно питание ($U_{п}$) датчиков ОВТД₁, ОВТД₃ (ЧЭ₁, ЧЭ₃) (эпюры 1, 2, 3, 4).

⁸ Погонные параметры линии $r_{л} = 0,1$ Ом/м, $L_{л} = 0,1 \times 10^{-6}$ Гн/м, $C_{л} = 100 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, емкость токовода $90 \cdot 10^{-12}$ Ф.

Однако в течение первого периода вращения лопаточного колеса подача U_{Π} происходит с интервалом T_0 (он соответствует угловому шагу $0,5\Delta\Psi_{\Pi}$), а в течение второго периода вращения — с вдвое большим интервалом ($2T_0$). А это означает, что на первом периоде вращения смена функций ЧЭ с рабочих на компенсационные происходит с периодом T_0 , и ИЦ функционирует аналогично той, что представлена на рис. 2, а. При этом замыкание ключей K_1 , K_2 , подача U_{Π} на датчики ОВТД₁, ОВТД₂ и получение кодов C_1 и C_2 соответствует моментам прохождения каждой лопаткой ВГЦ в зоне чувствительности ЧЭ₁ и ЧЭ₂ (эти моменты обозначены точками на эпюрах 2, 3, 5).

В течение второго периода вращения лопаточного колеса замыкание пары ключей K_1 , K_3 и подача U_{Π} на датчики ОВТД₁ и ОВТД₃ осуществляется в моменты прохождения каждой лопаткой ВГЦ в зоне чувствительности ЧЭ₃. При этом функции датчиков ОВТД₁ и ОВТД₃ и их ЧЭ остаются неизменными (ЧЭ₁-К, ЧЭ₃-Р). Указанные моменты времени также обозначены точками на эпюрах 2, 4 и им соответствуют моменты получения кода C_3 на эпюре 5⁹.

Следует отметить, что изменения в организации процесса коммутации в ИЦ (рис. 6, а) обеспечивают реализацию различных вариантов предлагаемого метода получения информации о трех координатах смещений. В одном из таких вариантов используются те же пары ключей (K_1 , K_2 и K_1 , K_3), замыкаемых синхронно, но в иной последовательности, что позволяет получить коды C_1 , C_2 , C_3 в течение одного периода вращения лопаточного колеса. Однако число лопаток, для которых определяются искомые координаты, сокращается вдвое. Это могут быть, например, лопатки с нечетными номерами. Если же требуется информация и об остальных лопатках, то она может быть получена в течение второго периода вращения лопаточного колеса.

И, наконец, завершая анализ реализуемости предлагаемых методов, необходимо подчеркнуть, что исследования влияния остаточных параметров бесконтактных ключей в ИЦ, предназначенной для получения информации о трех координатах смещений, были выполнены в работе [2] и показали незначительность этих влияний на $U_{ДУ\pi}$.

⁹ Форма изменений $U_{\Pi}(t)$ (эпюра 5) соответствует ориентации и размещению ЧЭ в кластере датчиков (на качественном уровне).

Если предположить, что ключи идеальны, то эквивалентные схемы ИЦ, представленные на рис. 2, а и 6, а, практически идентичны, а потому приведенные ранее результаты исследований влияния параметров элементов датчиков и линий связи в эквивалентной схеме (см. рис. 3) распространяются и на ИЦ, предназначенную для получения информации о трех координатах.

Заключение. Предложены новые методы получения информации о координатах смещений торцов лопаток с помощью распределенного кластера ОВТД. По сравнению с существующими предложенные методы обеспечивают уменьшение длительности получения информации о двух и трех координатах до одного и двух периодов вращения лопаточного колеса соответственно.

В процессе анализа реализуемости предложенных методов разработаны ИЦ, которые включают кластеры датчиков, неравновесный мост с импульсным питанием, дифференцирующее и запоминающее устройства и АЦП. Проведенные исследования подтверждают состоятельность предложенных методов.

Список литературы

1. Беленький Л. Б., Боровик С. Ю., Логвинов А. В., Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Методы измерения смещений торцов лопаток в компрессорах и турбинах на основе распределенных кластеров датчиков. Часть 1. Обоснование предлагаемых методов и их описание // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 4. С. 16—19.
2. Беленький Л. Б., Боровик С. Ю., Логвинов А. В., Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Методы измерения смещений торцов лопаток в компрессорах и турбинах на основе распределенных кластеров датчиков. Часть 2. Реализуемость методов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 5. С. 21—30.
3. Боровик С. Ю., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Измерение и вычисление координатных составляющих многомерных перемещений торцов лопаток в процессе вращения ротора // Автометрия. 2001. № 2. С. 103—111.
4. Методы и средства измерения многомерных перемещений элементов конструкций силовых установок / Под ред. Ю. Н. Секисова, О. П. Скобелева. Самара: СамНЦ РАН, 2001. 188 с.
5. Патент РФ 2138012. Способ измерения параметров движения лопаток ротора турбомашин / Боровик С. Ю., Игошин С. Н., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В., Хритин А. А., Слепнев А. В.; Оpubл. 1999, Бюл. № 26.
6. Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Тулупова В. В. Функции преобразования кластерного одновиткового вихретокового датчика // Автометрия. 2008. № 1. С. 47—58.
7. Беленький Л. Б. Системы измерения многомерных перемещений и деформаций элементов конструкций кривошипно-шатунного механизма в поршневых силовых установках: Дис. канд. техн. наук: 05.11.16. Самара, 2003. 498 с.
8. Хритин А. А. Система измерения радиальных зазоров в турбомашинках: Дис. канд. техн. наук: 05.11.16. Самара, 1994. 174 с.



ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



Управление и информатика в авиакосмических и морских системах



Главный редактор:

ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСЕЕВ В. В.
БЕЛОКОНОВ И. В.
БУКОВ В. Н.
ВАСИЛЬЕВ В. И.
ГОДУНОВ В. А.
ГУРЕВИЧ О. С.
ГУРСКИЙ Б. Г.
ЕФИМОВ В. В.
ЗАЙЦЕВ А. В.
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.
НЕСТЕРОВ В. А.
ОХТИЛЕВ М. Ю.
ПАНКРАТОВ В. М.
РАСПОПОВ В. Я.
САБО Ю. И.
СТЕПАНОВ О. А.
СОЛДАТКИН В. М.
ТЕРЯЕВ Е. Д.
ФИЛИМОНОВ Н. Б.
ШИРЯЕВ В. И.
ШКОЛИН В. П.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧУГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

Ванин А. В.

Статистический метод оценки качества поисковых траекторий при слежении за искусственными спутниками Земли 61

Аверьянов А. М., Бобров М. С., Чекушкин В. В.

Параметрическое задание кинематики движения воздушного объекта на участке маневрирования 67

Бабак Л. Н., Щербатюк А. Ф.

Некоторые методы оценивания состояния водных акваторий с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов 74

А. В. Ванин, аспирант,
МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва
vanin.alexey@gmail.com

Статистический метод оценки качества поисковых траекторий при слежении за искусственными спутниками Земли

Описан новый метод оценки качества и выбора поисковых траекторий при разработке системы космического радиовидения в миллиметровом диапазоне длин волн на базе радиотелескопа РТ-7.5. Подробно рассмотрены математические основы метода и примеры анализа траекторий при решении задачи обнаружения космического летательного аппарата на основе прогноза его движения. Даны рекомендации по применению метода для решения широкого класса задач, требующих формирования поисковых траекторий.

Ключевые слова: поиск и обнаружение летательных аппаратов, поисковая траектория, метод оценки качества поисковых траекторий, радиотелескоп РТ-7.5, система космического радиовидения

Система слежения за искусственными спутниками Земли

Радиотелескоп РТ-7.5 МГТУ им. Н. Э. Баумана является прототипом системы космического радиовидения (СРВ). Основной задачей СРВ является наблюдение за искусственными спутниками Земли и уточнение параметров их орбит. На сегодняшний день для решения этой задачи используются различные оптические и радиолокационные системы. В состав оптических систем наблюдения входят обычно несколько телескопов, один из которых осуществляет поиск объекта наблюдения и выдает целеуказание с точностью до величины угла обзора высокоточного телескопа. В таком случае поиск объекта наведения на прогнозируемой по расчетам траектории сводится к достаточно грубому определению его положения в пространстве и времени с помощью модели движения космического летательного аппарата (КЛА), захвату его поисковым телескопом, уточнению траектории и наведению на цель точного телескопа.

Радиоастрономические системы также предполагают либо наличие антенн излучателя и приемника, либо одной антенны в случае, если сигнал излучается самим спутником. Если невозможно использовать радиосигнал, получаемый со спутника для определения его положения, необходимо применять методы активной радиолокации. В таком случае одна антенна выступает в качестве излучателя, подсвечивающего цель, и одна или более антенн принимают отраженный сигнал [1]. В системе космического радиовидения на базе радиотелескопа РТ-7.5 применены принципы активной

радиолокации. В состав СРВ входит одна радиоантенна диаметром 7,65 м (рис. 1, см. вторую сторону обложки), оснащенная приемопередающим устройством. Антенна имеет азимутальную монтировку.

Диапазон длин волн воспринимаемого излучения от 1 до 4 мм. Ширина диаграммы направленности составляет 1'. Диапазон скоростей слежения составляет 0,001...5 °/с. Обобщенная структурная схема системы управления движением антенны представлена на рис. 2. В качестве приводов антенны использованы асинхронные электродвигатели мощностью 2,2 кВт каждый, управляемые от преобразователей частоты, на которых реализованы контуры регулирования скорости ротора и тока статорных обмоток. Управление положением осуществляется с помощью программируемого логического контроллера. Контроллер приводов антенны осуществляет обработку информации о предварительно рассчитанной траектории КЛА, поступающей от сервера радиотелескопа, и формирует управляющие воздействия для сервоприводов. Синхронность обеспечивается генератором точного времени. Сервер радиотелескопа осуществляет обработку координатной информации, моделирование движения спутника и формирование базовой траектории слежения. Более подробное описание системы управления приводами антенны можно найти в статьях [2, 3].

Уникальность описываемой системы состоит в том, что с помощью только одной антенны можно провести наблюдение и уточнить параметры орбиты КЛА. Основная проблема технической реализации СРВ заключается в изготовлении достаточно мощного излучателя. Как известно, чем шире диаграмма направленности, тем, с одной стороны, легче обнаружить и сопровождать объект наблюдения, а с другой, тем выше должна быть мощность излучения [1]. Благодаря узкой диаграмме направленности антенны возможно достичь высокой мощности излучения в пучке при доступной на сегодняшний день мощности излучателя. Однако из-за узкой диаграммы направленности антенны возни-

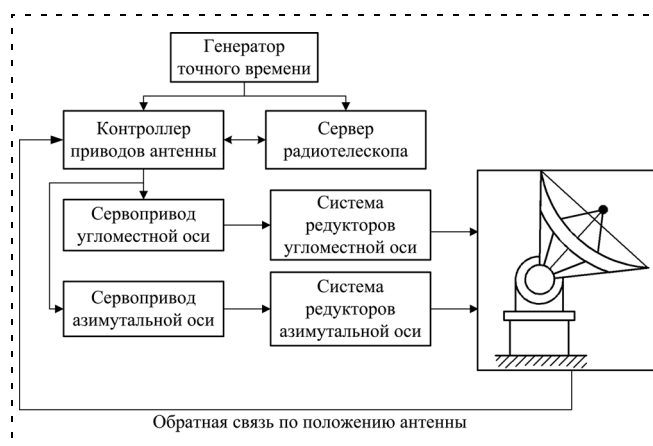


Рис. 2. Обобщенная схема системы управления движением антенны

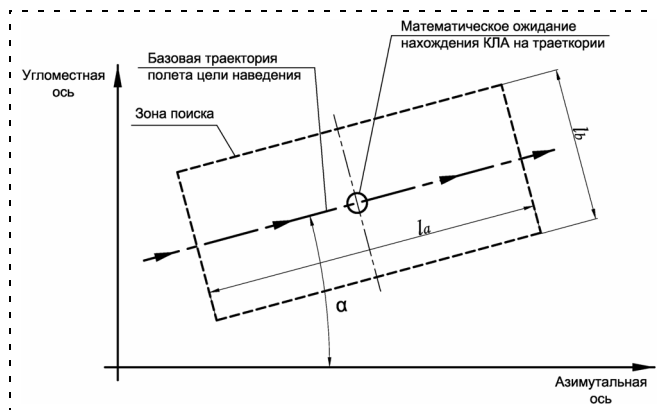


Рис. 3. Зона поиска КЛА

кают значительные сложности при поиске и сопровождении, поскольку требуется высокая точность прогноза движения КЛА на орбите.

Наведение на КЛА осуществляется по заранее рассчитанной траектории. Наиболее точной открытой для общего пользования и широко поддерживаемой моделью расчета траекторий КЛА является модель *SGP4* (*Simplified General Perturbations Satellite Orbit Model 4*) [4]. Эта модель позволяет рассчитывать траекторию большого числа спутников. Точность расчета зависит от времени последнего обновления параметров орбиты, точности определения собственного положения, точности расчета и степени округления результата, а также от точности привязки к системе единого времени, относительно которой и выполняется расчет положения спутника на орбите. Оценка погрешности расчета траектории КЛА при использовании модели *SGP4* показала, что минимальная погрешность расчета составляет порядка $0,5^\circ$, что значительно больше ширины диаграммы направленности антенны. Кроме того, погрешности временной привязки, связанные с запаздыванием вычислительных комплексов системы, приводят к увеличению ошибки расчета в направлении движения спутника в связи с высокими скоростями полета. Согласно исследованиям модели [4], а также с учетом особенностей реализации системы управления СРВ зона поиска КЛА может быть представлена в виде, приведенном на рис. 3.

Собственная система координат зоны поиска является подвижной относительно системы координат азимут — угол места антенны. Центр собственной системы координат зоны поиска связан с математическим ожиданием нахождения КЛА на траектории в данный момент времени.

Таким образом, видно, что для обнаружения КЛА и уточнения его траектории для дальнейшего наблюдения необходимо осуществить поиск в зоне, обладающей значительной протяженностью по сравнению с шириной диаграммы направленности антенны. В связи с этим возникает задача выбора траектории, наиболее подходящей для поиска КЛА.

Постановка задачи и особенности выбора поисковых траекторий

Задача определения траектории поиска в различных случаях решается с применением теории оптимального управления, конечно-элементного представления областей и маршрутов в виде деревьев и графов, элементов нечеткой логики.

При использовании теории оптимального управления траектория формируется исходя из критерия, основанного на важном свойстве объекта, или исходя из ограничений, накладываемых на фазовые координаты. Аппарат теории оптимального управления позволяет сформировать фазовые траектории, целевой функционал минимизации которых представляет собой зависимость фазовых координат объекта от времени и таких параметров, как расход топлива, ограничения на фазовые координаты и др. [5]. В рассматриваемом случае невозможно сформировать целевой функционал, поскольку нет прямой зависимости изменения фазовых координат антенны от нахождения цели в области поиска, т. е. факт обнаружения является случайным событием.

Конечно-элементное представление задачи в виде сети или графа применяется для формирования маршрутов в областях со сложной организацией и наличием препятствий [6]. Представление маршрута поиска КЛА в виде сети с последующим построением графа позволяет выделить лишь класс траекторий, обладающих минимальной протяженностью либо максимальной удаленностью от препятствия, но не позволяет сделать выбор какой-либо конкретной траектории.

Нечеткая логика в задачах поиска пути используется для оперативного объезда препятствий, взаимодействия со случайными внешними факторами, не поддающимися или сложными для точного описания в рамках классической или оптимальной теории управления [7]. Применение нечеткой логики в данной задаче также не представляется возможным, поскольку требует наличия определенной цели, требующей ответной реакции системы. В задаче поиска КЛА цель отсутствует до момента ее обнаружения, т. е. до решения задачи поиска. Таким образом, необходимо сформировать новые критерии, позволяющие из многообразия траекторий поиска КЛА выбрать наиболее подходящую.

Выбор поисковой траектории может быть основан на следующих основных критериях:

- геометрические характеристики зоны поиска;
- характер движения цели в зоне поиска;
- динамические характеристики объекта управления.

Геометрия зоны поиска определяет граничные условия. Конфигурация зоны поиска представлена на рис. 3. Характер движения объекта поиска определяет распределение вероятности его обнаружения. Динамические параметры объекта управления

накладывают ограничения на класс функций, допустимых при формировании поисковых траекторий.

К отличительным чертам рассматриваемого объекта управления следует отнести высокую инерционность, а также наличие вибраций. Масса подвижных частей антенны радиотелескопа составляет 27 т по азимутальной и 8 т по угломестной оси. При движении антенны на высоких скоростях необходимо обеспечить плавность траектории или учитывать возможность возникновения динамической ошибки слежения приводов в узловых точках траектории. При высоких скоростях за счет вибраций ошибка слежения увеличивается, что приводит к снижению вероятности обнаружения цели. Также при изменении направления движения возможно раскрытие люфтов в зубчатых передачах главных ступеней редукции, что приводит к значительному ухудшению качества слежения. В рамках данной статьи не рассматривается вопрос ограничения скоростей и ускорений движения антенны, а также способов обеспечения требуемого качества регулирования при движении по траекториям поиска. Решение этих вопросов получено при использовании аппарата теории оптимального управления и требует отдельного описания.

На основании перечисленных выше особенностей можно сформулировать *основные требования для программной траектории поиска*:

- 1) линии, образующие траекторию поиска, должны описываться монотонными функциями;
- 2) время поиска значительно меньше времени полета КЛА по траектории;
- 3) поиск осуществляется при остановке или равномерном движении одной из осей.

Второе требование позволяет не учитывать изменение угла наклона траектории КЛА во время одного цикла поиска (угол α на рис. 3). Последнее требование является следствием взаимовлияния осей при одновременном движении.

Перечисленным требованиям удовлетворяет множество траекторий, среди которых можно выделить четыре характерных варианта:

- 1) "телевизионная развертка";
- 2) "плоская спираль";
- 3) "меандр";
- 4) "центрированная спираль".

По сравнению с угломестной азимутальная ось является более инерционной, поэтому привод угла места целесообразно использовать в поисковых движениях, а азимутальный — только в равномерном вспомогательном движении. Примеры построения траекторий показаны на рис. 4—7. В качестве линий слежения во всех случаях приняты прямые линии, параллельные угломестной оси. На рисунках штриховыми линиями показаны вспомогательные линии, на которых движение осуществляется с максимальной скоростью, а требования к качеству регулирования в общем случае не установлены. К поисковым элементам траектории относятся участки, на которых необходимо обеспе-

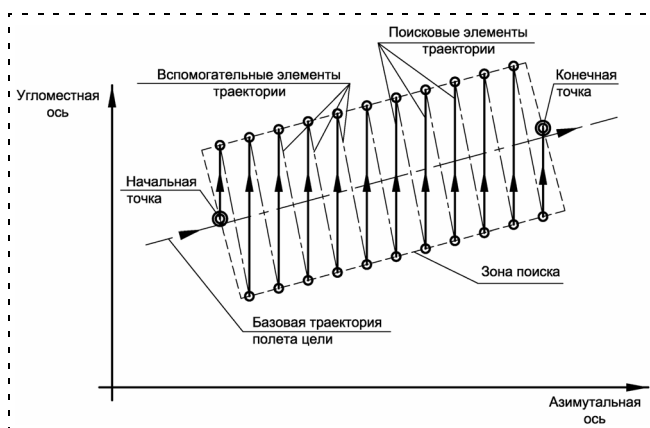


Рис. 4. Траектория поиска — "Телевизионная развертка"

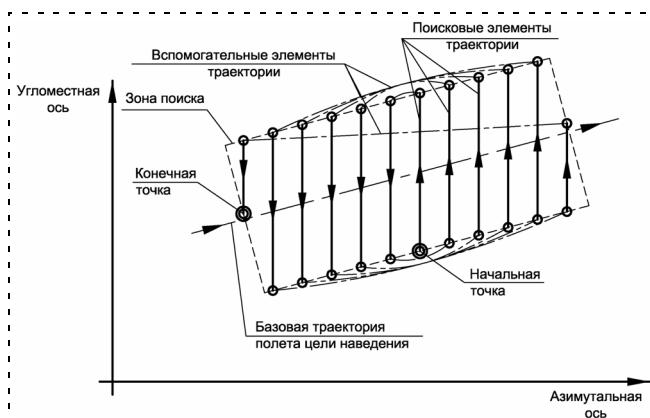


Рис. 5. Траектория поиска — "Плоская спираль"

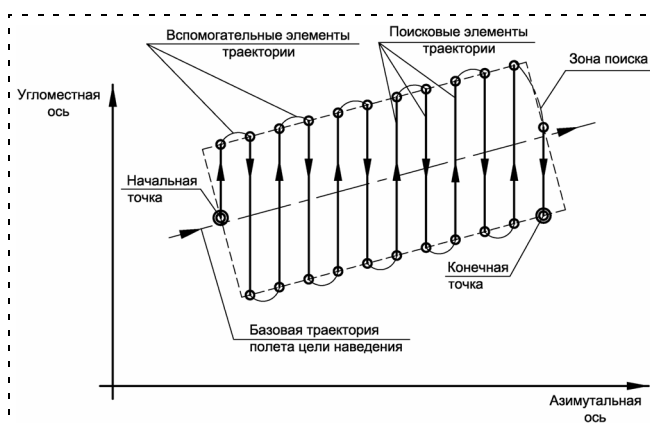


Рис. 6. Траектория поиска — "Меандр"

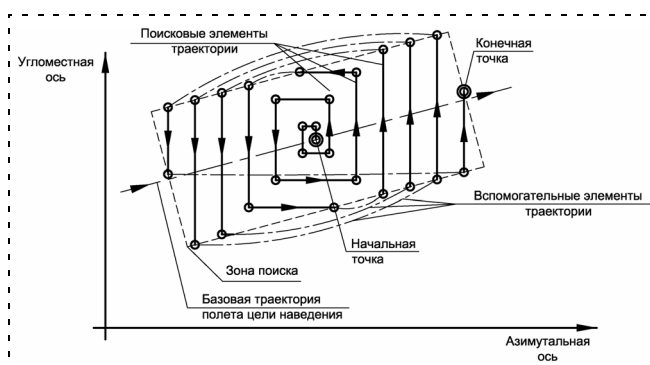


Рис. 7. Траектория поиска — "Центрированная спираль"

чить высокое качество слежения. Это может быть достигнуто, в частности, снижением скорости движения на этих участках. Поисковые элементы имеют конфигурацию, удовлетворяющую пунктам 1 и 3 основных требований.

Выбранные траектории не являются полным множеством возможных траекторий поиска, удовлетворяющих основным требованиям. Однако и среди этого подмножества выбор не является очевидным. Для принятия решения о выборе траектории необходимо сформировать критерий оценки качества поиска, принимая во внимание требования, сформулированные ранее.

Критерии оценки качества и статистический метод выбора поисковых траекторий

Одним из характерных признаков поисковой траектории является наличие вспомогательных и поисковых линий, различающихся по степени точности слежения, а значит, и по степени значимости. Для оценки соотношения плотности вспомогательных и поисковых линий траектории введем коэффициент полезного заполнения, рассчитываемый по формуле

$$K_3 = \frac{\sum_{i=0}^{l-1} (n_i + \gamma k_i)}{l(n + k)}, \quad (1)$$

где n_i — число ненулевых проекций поисковых элементов на i -м интервале; k_i — число ненулевых проекций вспомогательных элементов на i -м интервале; l — число интервалов разбиения; n — общее число поисковых элементов; k — общее число вспомогательных элементов; γ — динамический коэффициент.

Коэффициент полезного заполнения траектории показывает полезную плотность поисковых элементов по отношению к вспомогательным. Он рассчитывается для каждой из осей отдельно. Зона поиска разбивается на l интервалов. Для каждого из них находится сумма числа проекций поисковых n_i и числа вспомогательных k_i элементов на каждый интервал отдельно и на ось в целом (n, k). Для учета возможности обнаружения цели при движении на вспомогательных участках вводится коэффициент γ .

Динамический коэффициент γ рассчитывается по формуле

$$\gamma = \pm \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma_{\text{В}}}, \quad (2)$$

где σ_{Π} — среднее квадратическое отклонение ошибки регулирования положения при движении по поисковой линии; $\sigma_{\text{В}}$ — среднее квадратическое отклонение ошибки регулирования положения при движении по вспомогательной линии.

Отметим, что $\gamma > 0$ — при прохождении вспомогательной линии внутри границ зоны поиска и $\gamma < 0$ — при прохождении вспомогательной линии вне или на границе зоны поиска.

Анализ экспериментальных данных показал, что в зависимости от скорости движения антенны динамический коэффициент γ изменяется в пределах от 0,11 до 1. Нижний предел соответствует минимальной скорости поиска, верхний — максимальной. Скорость вспомогательного перемещения принимается максимально допустимой. Положительные значения коэффициента характерны для траекторий типа "Телевизионная развертка" и "Плоская спираль", т. е. их вспомогательные линии не выходят за пределы зоны поиска. Для остальных типов траекторий значения коэффициентов γ отрицательные.

Таким образом, коэффициент полезного заполнения позволяет учитывать как геометрические и структурные характеристики траектории (взаимное расположение и плотность поисковых и вспомогательных линий), так и характерные динамические свойства приводов антенны, информативность вспомогательных движений. Коэффициент K_3 принимает значения от -1 до $+1$. Для идеальной поисковой траектории $K_3 = 1$. Если $K_3 < 0$, можно утверждать, что неверно определены поисковые и вспомогательные элементы траектории, такая траектория не может использоваться для поиска. Согласно этому критерию идеальной можно считать траекторию, состоящую только из поисковых линий либо из поисковых и вспомогательных линий, проходящих внутри области поиска, при условии движения с максимальной скоростью, когда $\gamma = 1$.

Важной характеристикой траектории является ее протяженность для каждой из осей. Кроме того, как видно из приведенных выше критериев, важной также является степень участия каждой из осей в поисковых и вспомогательных перемещениях. Для учета соотношения протяженности вспомогательных и поисковых участков введем коэффициент поиска

$$\eta = \frac{\tilde{L}_{\Pi}}{L_{\Pi} + L_{\text{В}}}, \quad (3)$$

где $\tilde{L}_{\Pi}$ — суммарная длина проекции траектории поиска на выбранную ось; L_{Π} — суммарная длина траектории поиска; $L_{\text{В}}$ — суммарная длина вспомогательной траектории.

Этот коэффициент показывает, насколько задействована выбранная ось в поисковых движениях. Он принимает значения от 0 до 1. Для идеальной поисковой траектории $\eta = 1$. Если $\eta = 0$, то в данной конфигурации ось, для которой рассчитан коэффициент, не используется.

Следует отметить, что введенные выше коэффициенты рассчитываются для каждой из осей в отдельности. Согласно требованиям, сформулированным в условиях данной задачи, идеальной траекторией поиска будет траектория, для угломестной оси которой $K_3^{\text{УМ}} = 1$, $\eta^{\text{УМ}} = 1$. Для азимутальной оси

важно, чтобы $\eta^{\text{Аз}} = 0$, при этом $K_3^{\text{Аз}}$ не имеет значения, поскольку в таком случае данная ось не ис-

пользуется для слежения, а значит, отвечает требованию 3.

В результате можно ввести общий критерий, который позволит сравнить поисковые траектории и выбрать наиболее подходящую. Для этого введем коэффициент эффективности траектории в виде

$$K_{эф} = \eta K_3. \quad (4)$$

Данный коэффициент принимает значения в диапазоне от -1 до $+1$, однако в отличие от выражения (1) нулевое значение свидетельствует об отсутствии поисковых движений для анализируемой оси. Отрицательные значения коэффициента эффективности, так же как и в случае с K_3 , свидетельствуют о неприменимости анализируемой траектории для решения задачи поиска. Целевым при выборе поисковой траектории является максимальное положительное значение коэффициента $K_{эф}$.

Экспериментальный анализ поисковых траекторий

Рассмотрим пример анализа траекторий, удовлетворяющих введенным выше требованиям. Анализ проводился с использованием специально разработанного программного комплекса, который позволяет рассчитывать поисковые траектории и анализировать их на основе экспериментальных данных.

На рис. 8 в качестве примера показано изменение коэффициента поиска угломестной оси η^y в зависимости от угла наклона траектории α . Далее на рисунках цифрами обозначены траектории вида: 1 — "Телевизионная развертка", 2 — "Плоская спираль", 3 — "Меандр", 4 — "Центрированная спираль".

Из рис. 8 видно, что наибольшее значение коэффициента поиска для угломестной оси соответствует траектории 3, т. е. эта траектория является наиболее выгодной с точки зрения соотношения поисковых и вспомогательных движений. Аналогичный анализ для азимутальной оси при выполнении условия 3 показывает, что η^{Az} для первых трех траекторий обращается в 0, тогда как траектория типа "Центрированная спираль" имеет ненулевые проекции поисковых элементов траектории на обе оси.

В качестве примера изменения коэффициента полезного заполнения в зависимости от угла наклона траектории α на рис. 9 представлены ре-

зультаты анализа при значении коэффициента $\gamma = 0,45$, что соответствует скорости поиска 2,2 %, при максимальной скорости 5 %.

Как видно из рис. 9, наиболее эффективной с точки зрения плотности заполнения области поиска по угломестной оси является траектория 1, что не соответствует выводу, сделанному на основании анализа одного лишь коэффициента поиска η . Однако, принимая во внимание промежуточный характер этих зависимостей, рассмотрим обобщающий коэффициент $K_{эф}$. Анализ для азимутальной оси показывает, что коэффициент поиска $\eta^{Az} = 0$ для траекторий 1, 3, поэтому ограничимся рассмотрением $K_{эф}$ для угломестной оси.

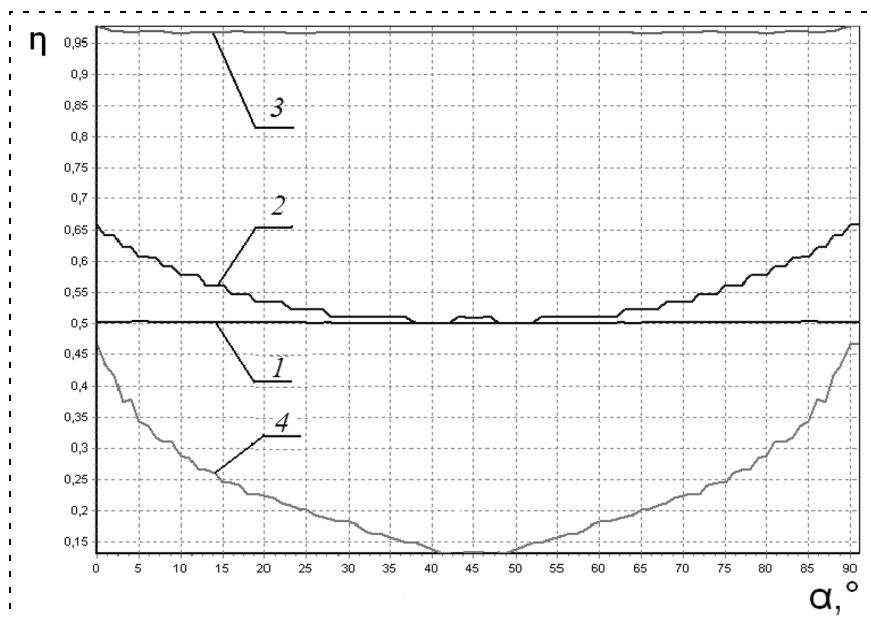


Рис. 8. Коэффициент поиска угломестной оси

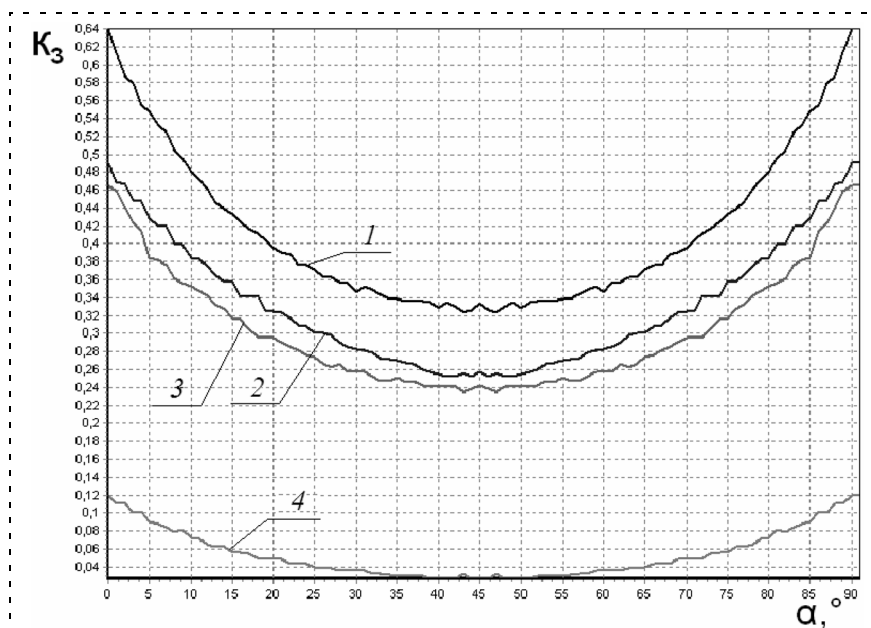


Рис. 9. Коэффициент полезного заполнения угломестной оси

В ходе исследования была проведена серия экспериментов с использованием системы управления приводами антенны радиотелескопа РТ-7.5, структурная схема которой представлена на рис. 2. Согласно (2) динамический коэффициент γ определяется как отношение значений среднеквадратического отклонения ошибки регулирования положения при движении на заданной скорости для поисковых и вспомогательных элементов траектории. Для его определения проводилась запись и последующий анализ сигнала ошибки регулирования положения при движении антенны на различных скоростях. На основании эксперимента для различных соотношений скоростей движения антенны на поисковых и вспомогательных участках были опре-

делены значения динамического коэффициента γ , которые использовались для дальнейшего анализа эффективности поисковых траекторий.

Рис. 10, 11 отражают зависимость коэффициента эффективности траектории от угла наклона α . На рис. 10 представлена характеристика, соответствующая коэффициенту $\gamma = 0,3$, на рис. 11 — $\gamma = 1,0$. При $\gamma \leq 0,75$ (при слежении на скоростях до $3,5^\circ/\text{с}$ наиболее эффективной является траектория типа "Меандр" (см. рис. 10), т. е. для всех углов наклона траектории α справедливо неравенство $K_{\text{эфф}(3)} > K_{\text{эфф}(1)} > K_{\text{эфф}(2)} > K_{\text{эфф}(4)}$.

В случаях, когда скорость поиска превышает $3,5^\circ/\text{с}$ (см. рис. 11) динамический коэффициент принимает значения $0,75 < \gamma \leq 1$. При этом целесообразно использовать траекторию

типа "Телевизионная развертка", поскольку справедливо неравенство $K_{\text{эфф}(1)} > K_{\text{эфф}(3)} > K_{\text{эфф}(2)} > K_{\text{эфф}(4)}$. Это связано с тем, что на высоких скоростях различие между качеством слежения на поисковых и вспомогательных участках траектории снижается, а значит, актуальным становится плотность линий траектории в зоне поиска и информативность вспомогательных участков.

Для проверки соответствия аналитических расчетов реальному объекту управления была проведена серия экспериментов, направленных на сравнение качества слежения при движении антенны СВВ по всем приведенным типам траекторий. Результаты эксперимента согласуются с выводами проведенного анализа: на малых скоростях наилучшее качество регулирования достигалось при движении по траектории типа "Меандр". В диапазоне скоростей от $3,2^\circ/\text{с}$ до $3,8^\circ/\text{с}$ очевидных преимуществ между траекторией типа "Меандр" и "Телевизионная развертка" не обнаружено, однако на скоростях выше $3,8^\circ/\text{с}$ лучшее заполнение области поиска достигается для траектории типа "Телевизионная развертка".

Заключение

На основании проведенного анализа разработан метод, позволяющий дать оценку произвольной программной траектории поиска. Метод коэффициентов эффективности основан на расчете $K_{\text{эф}}$ по формуле (4) с использованием формул (1), (2) и (3) для каждой оси в отдельности. Для расчета необходимо определить зависимость среднего квадратического отклонения

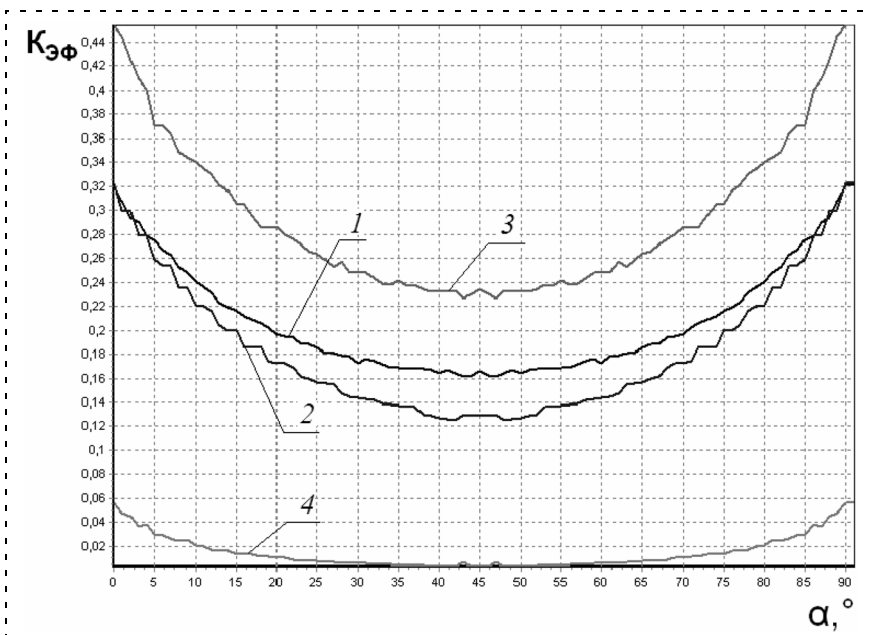


Рис. 10. Коэффициент эффективности при $\gamma = 0,3$

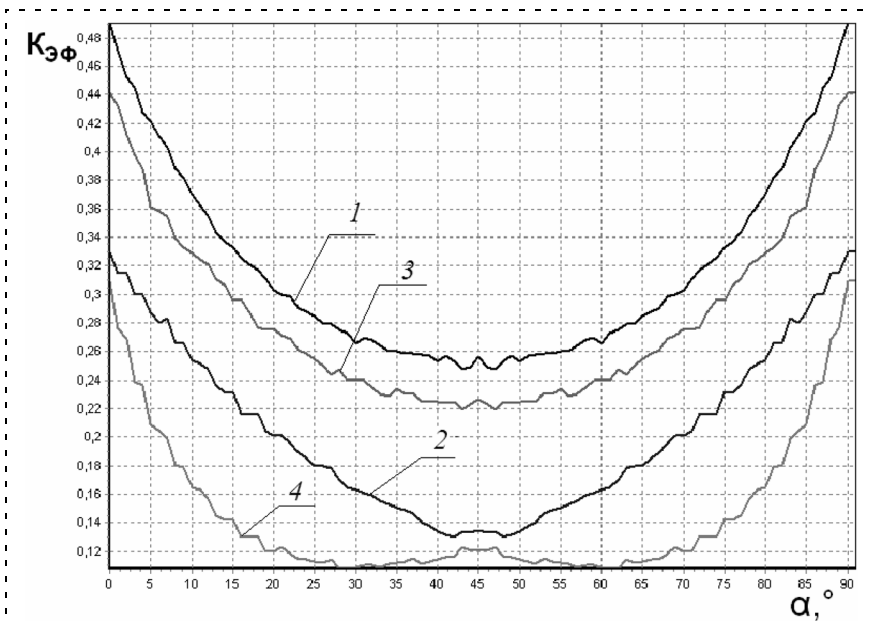


Рис. 11. Коэффициент эффективности при $\gamma = 1,0$

ошибки регулирования положения от скорости слежения или других параметров, влияющих на его изменение. На сегодняшний день метод предполагает численный расчет коэффициентов K_3 и η по формулам (1) и (2) соответственно. После установления зависимости значений коэффициентов заполнения и поиска от конфигурации граничной зоны рассчитывается непосредственно коэффициент эффективности траектории. Заключение об эффективности траектории дается исходя из сравнения результатов расчетов для каждой оси в отдельности. В случае неоднозначного результата предпочтение отдается траектории с большим значением произведения коэффициентов эффективности по обеим осям.

Предложенный метод применен при анализе поисковых траекторий для СРВ на базе радиотелескопа РТ-7.5. Метод позволил получить числовые оценки эффективности с точки зрения основных критериев качества поисковых траекторий и выделить среди исследованного множества наиболее подходящую траекторию. Полученные результаты отражают динамический характер зависимости коэффициента эффективности от скоростей слежения, что позволило учесть влияние качества регулирования на возможность обнаружения КЛА в зоне поиска. Результаты анализа подтверждаются экспериментальным исследованием качества слежения

и плотности заполнения поисковой зоны, проведенным для всех рассмотренных типов траекторий.

Разработанный метод позволяет провести анализ не только траекторий слежения за КЛА. С его помощью могут быть выявлены наиболее подходящие траектории для поиска реперных точек при ориентировании на местности, при построении карт мобильного роботом, при анализе рабочих сцен в системах технического зрения, а также во многих других задачах, связанных с поиском объектов малых размеров в ограниченных областях.

Список литературы

1. Бакулев П. А. Радиолокационные системы. М.: Радиотехника, 2004.
2. Паршиков А. А., Польский В. А., Ванин А. В. Система приводов радиотелескопа РТ-7.5 МГТУ им. Н. Э. Баумана // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2009. Спецвыпуск № 1.
3. Польский В. А., Ванин А. В., Тхань Л. В. Повышение точности работы следящих электроприводов опорно-поворотных устройств радиотелескопов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 10. С. 34–40.
4. Felix R. Hoofs, Ronald L. Roehrich Spacetrack report No. 3 Models for Propagation of NORAD Element Sets, 1980.
5. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5 т. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
6. Харари Ф. Теория графов / Под ред. Г. П. Гаврилова. М.: Едиториал УРСС, 2003.
7. Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. М.: Физматлит, 2001.

УДК 621.396.96

А. М. Аверьянов, инженер,
М. С. Бобров, вед. инженер ОГК,
ОАО "Муромский завод
радиоизмерительных приборов",
В. В. Чекушкин, д-р техн. наук,
Муромский институт

Владимирского государственного университета
ave-szk@mail.ru

Параметрическое задание кинематики движения воздушного объекта на участке маневрирования

Предложен метод повышения эффективности формирования плавных, заданных через параметр времени пространственных траекторий типового налета воздушных объектов с элементами полиномиальной аппроксимации траектории движения на участках маневрирования.

Ключевые слова: имитация кинематики движения, участок маневрирования, воздушный объект, траектория полета, сглаживание траектории, тренажер оператора РЛС, сопряжение курсов полета, движение по кубической параболе и дуге окружности, полиномиальная аппроксимация

Введение

При проектировании тренажерно-моделирующих систем подготовки операторов РЛС высокую значимость имеют алгоритмы предписания виртуальному воздушному объекту параметрически заданной траектории движения. Совокупность таких траекторий, predetermined вручную или сгенерированных автоматически, позволяет воссоздать на экране радиолокатора картину реалистичной воздушной обстановки при различных уровнях учебной нагрузки [1]. Слишком сложная воздушная обстановка предполагает высокую нагрузку не только на обучаемого, но и на системы обработки информации, которыми оснащен тренажерный комплекс. Тем не менее, тренажер должен учитывать современные тактико-технические требования, предъявляемые к системам РЛС и предполагающие устойчивую работу при высоком трафике полетов в зоне наблюдения [2]. Поэтому эффективная аппаратная реализация тренажерного комплекса должна сочетаться с не менее эффективным программным обеспечением. В [1, 3] были предложены методы задания и формирования траекторий движения воздушных объектов, позволяющие (с некоторыми допущениями) достичь высоких показателей быст-

родействия при расчете координат и мгновенной скорости объекта в заданный момент времени t . Предлагаемый в данной статье подход позволяет улучшить характеристики метода [1, 3] как на этапе предварительных расчетов, так и в режиме расчетов координат в реальном масштабе времени.

Базовый метод

В методе, представленном в [1], траектория движения воздушного объекта рассматривается как участок плавной (без изломов) пространственной кривой, протяженный во временном интервале $t \in [T_0, T_L]$ с момента начала движения T_0 до момента его завершения T_L . Такая кривая может быть задана набором опорных вершин $\{M_n(x_n, y_n, z_n)\}$ ломаной линии, очерчивающей траекторию движения объекта (рис. 1). В каждой точке M_n задается линейная скорость объекта ϑ_n . Поскольку, как показано на рис. 1, ни одна из промежуточных узловых точек опорной линии не принадлежит траектории, величина ϑ_n характеризует относительную скорость совершения маневра (поворота), косвенно определяя ускорение объекта вблизи точки M_n .

За основу метода было принято прямолинейное движение объекта по курсам $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$, строящимся через каждые две смежные опорные точки. Поскольку закон параметрического движения по прямой имеет простейший вид, суть метода сводится к поиску моментов времени входа $T_{in\ i}$ и выхода $T_{out\ i}$ с курсов $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$, а также уравнений движения объекта по переходным кривым, связывающим курсы $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ и $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ с исключением в точках стыка скачков скорости и ускорения. Запас времени $T_{in\ i+1} - T_{out\ i}$ должен быть выбран так, чтобы предоставить воздушному объекту возможность выполнить маневр при перегрузке, не превышающей заданного максимального значения.

В качестве элементарных составляющих переходной кривой были выбраны согласующиеся участки в виде дуги окружности RS и двух сегментов кубических парабол PS . Их радиус кривизны R_k

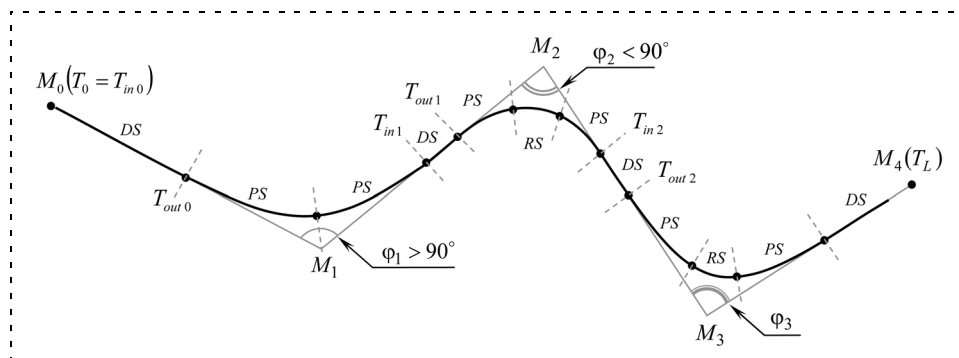


Рис. 1. Сегментация траектории движения воздушного объекта

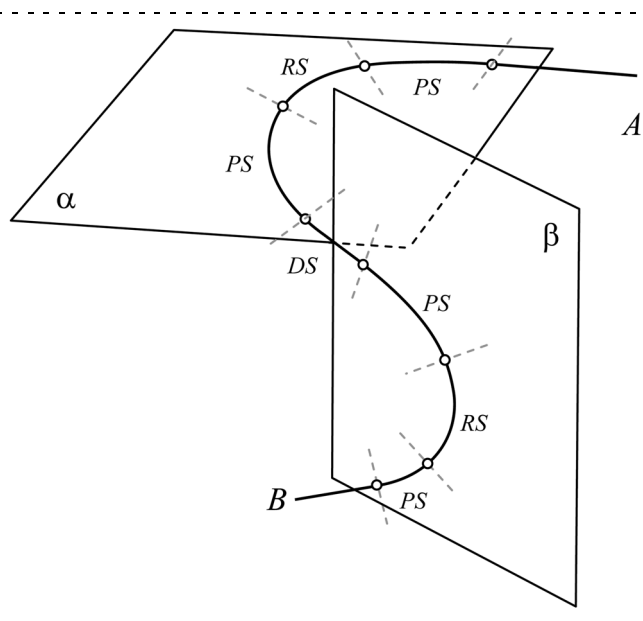


Рис. 2. Построение пространственной траектории AB возможно за счет присутствия прямолинейного сегмента DS , принадлежащего обоим плоскостям движения

плавно меняется от бесконечного в точках стыка с прямолинейными участками до радиуса согласования R_c с участком в виде дуги окружности или с исключением участка в виде дуги окружности при значении угла между согласуемыми отрезками прямых $\varphi > 90^\circ$.

Как следует из описания, сегментированная таким образом переходная кривая должна быть плоской, а не пространственной. Однако благодаря присутствию в траектории прямолинейных сегментов метод допускает свободную ориентацию плоскости очередного маневра в пространстве (рис. 2).

Наряду с прямолинейными сегментами закон движения по круговым сегментам RS (в том числе с постоянным по модулю ускорением — это еще одно условие метода) также описывается известными формулами механики. Таким образом, положение объекта в произвольно заданный момент времени t на сегментах DS и RS определяется только параметрами движения, зависящими от конфигурации траектории и заданного скоростного режима. Эти параметры, а также отметки времени выхода и захода на каждый из выделенных на траектории сегментов определяются на этапе предварительного расчета траектории.

Наибольшую трудность вызывает задача определения координат объекта в те моменты времени, когда он движется вдоль параболических сегментов PS . В действительности аналитического выражения, параметрически описывающего движе-

ние объекта по кубической параболе, не существует. Поэтому в методе [1] расчет кинематики движения объекта на параболическом участке траектории осуществляется путем замены ветки параболы дугой окружности, которая совмещается с параболой в крайних точках и посередине. Однако перерасчет координат происходит таким образом, что объект не отклоняется от заданной параболой траектории. Это достигается путем расчета координаты $x(t)$ положения объекта на круговой траектории и последующей ее подстановки в выражение для вычисления координаты $y(x)$ точки параболы. В результате принятое для круговой траектории значение линейного ускорения на параболическом участке не будет строго постоянным. Это приводит к некоторому колебанию линейной составляющей перегрузки.

Суть вносимых изменений

Предлагаемый в данной статье подход позволяет сократить объем вычислений по методу [1] как на этапе предварительного расчета траектории, так и при расчете координат объекта в заданный момент времени при непосредственной имитации типового налета. Вносимые корректировки распространяются на параболические сегменты траектории. Суть их заключается в отказе от использования замещающей окружности [1] и от расчета координаты x по формуле

$$x(t) = R \cos \left(\frac{v_0(t-t_0) + 0,5 a(t-t_0)^2}{R} - \gamma_0 \right) + x_{\text{ц}},$$

где v_0 — скорость объекта в момент времени t_0 захода на участок PS ; a — постоянное ускорение; R — радиус замещающей окружности с центром в точке $(x_{\text{ц}}, y_{\text{ц}})$; γ_0 — начальная фаза движения.

Вместо данной формулы, содержащей параметр времени t явно, предлагается использовать зависи-

мость координаты x воздушного объекта от пройденного им пути $S(t)$ вдоль ветки параболы PS .

Преодолеваемый при равноускоренном движении путь вычисляется согласно выражению

$$S(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Вместе с тем, путь вдоль дуги $f(x)$ между точками $x = x_0$ и $x = x_1$ описывается интегралом

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} dx,$$

который в случае кубической параболы $y(x) = x^3/6q$ при движении из центра локальной системы координат принимает вид

$$S(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^4}{4q^2}} dx. \quad (2)$$

Как было отмечено выше, правая часть уравнения (2) не позволяет аналитически выразить длину пройденного пути, тем более — значение координаты x . Отказываясь от дополнительных геометрических построений и аналитических расчетов и допуская при этом незначительную погрешность представления функции $S(x)$, предложим следующий способ расчета координаты x положения объекта, которое он примет спустя время t с момента начала движения по параболическому сегменту PS .

Для этого, прежде всего, рассмотрим общий вид параболического сегмента PS в контексте двух типов переходных кривых: трехсегментной (угол φ_i между курсами $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ и $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ острый) и двухсегментной ($90^\circ \leq \varphi_i < 180^\circ$). Согласно [1] они будут иметь вид, представленный на рис. 3.

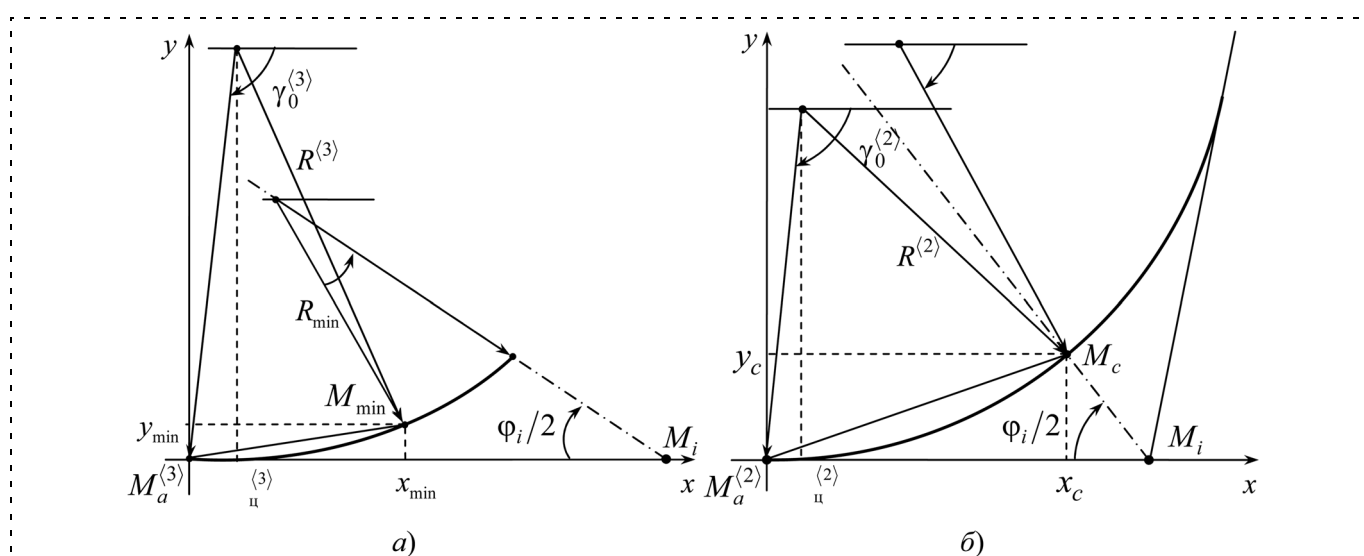


Рис. 3. Варианты использования сегмента PS в переходной кривой:

a — при трехсегментном сопряжении прямолинейных курсов $0 < \varphi_i < 90^\circ$; b — при двухсегментном сопряжении курсов $90^\circ < \varphi_i < 180^\circ$

В случае, изображенном на рис. 3, а, объект движется по параболической траектории до точки $M_{\min}$, координата x которой выражается через минимальный радиус кривизны и составляет $x_{\min} = \frac{5}{3\sqrt{6}} R_{\min} = 0,68041 R_{\min}$. При двухсегментной пе-

реходной кривой (рис. 3, б) участок параболической траектории завершается в точке M_c , для которой $x_c = R_{\min} \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2 \cdot 3^3}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \varphi_i / 2}}$, а поскольку в данном случае $90^\circ \leq \varphi_i < 180^\circ$, то максимальное значение, которое может принять величина x_c , составит

$$R_{\min} \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2 \cdot 3^3}} = 1,01746 R_{\min}.$$

Как видно, в обеих ситуациях, при любом характере переходной кривой координата x выражается через параметр $R_{\min}$ и, следовательно, может быть нормирована по нему. Таким образом, для сегментов PS величина $x_H = x/R_{\min}$ не выходит за границы интервала $\Delta_{x_H} = [0; 1,01746]$.

На интервале Δ_{x_H} протабулируем функцию $S_H(x_H)$ с некоторым шагом d_{x_H} , предварительно разложив выражение (2), например, в ряд Тейлора — вручную или автоматически, используя численные методы современных математических программ, таких как MathCad.

На рис. 4 серым цветом показаны точки $\{(x_H; S_H)\}$ функции $S_H(x_H)$. Чтобы теперь получить точки $\{(S_H; x_H)\}$, просто поменяем оси на графике. Имея в распоряжении таблицу значений функции $x_H(S_H)$, можно использовать интерполяцию для нахождения координаты x_H при любом значении пройденного за время t нормированного пути из возможного диапазона $\Delta_{S_H} = [0; 1,10845]$. Предлагается

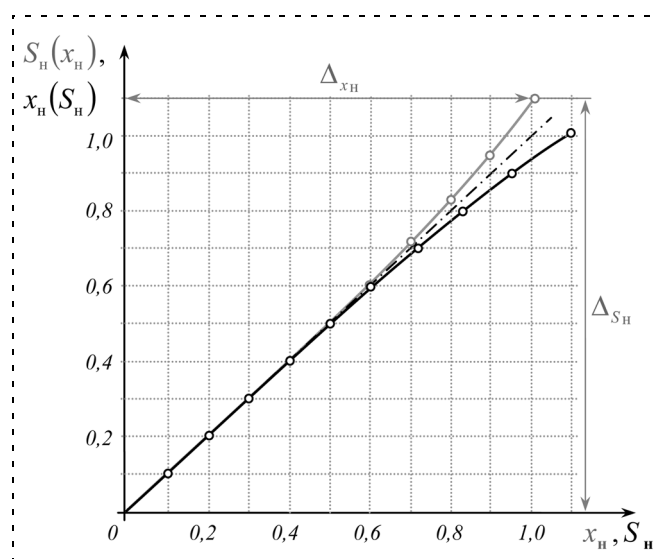


Рис. 4. Функции $S_H(x_H)$ и $x_H(S_H)$ на интервалах определения Δ_{x_H} и Δ_{S_H} соответственно

с этой целью использовать как наиболее простой и быстродействующий с точки зрения программно-аппаратной реализации метод аппроксимации полиномы вида

$$x_{H \text{ mnom}}(S) = \sum_{k=0}^n a_k S^k. \quad (3)$$

Погрешность аппроксимации в данном случае будем оценивать максимальным абсолютным значением отклонения полинома (3) от точек $\{(S_H; x_H)\}$:

$$\delta = \max\{\delta_{ij}\}, \delta_{ij} = \sum_{k=0}^n a_k S_{H i}^k - x_{H i}. \quad (4)$$

Для вычисления коэффициентов a_k выражения (3) достаточно располагать $n + 1$ точками $\{(S_H; x_H)\}$. Но их выбор должен быть осуществлен таким образом, чтобы обеспечить наименьшее значение погрешности δ_x при заданной степени n аппроксимирующего полинома. С этой целью применим метод поиска узловых точек полинома наилучшего приближения функции, изложенный в [4, 5]. Чтобы обеспечить возможность работы алгоритма для функции, заданной таблично, введем следующую процедуру вычисления второй координаты предполагаемого узла аппроксимации в произвольной точке S_H между известными точками $(S_H; x_H)$ и $(S_{H i+1}; x_{H i+1})$:

$$\begin{cases} x_H(S_H) = x_{H i} \text{ при } S_H = S_{H i}; \\ x_H(S_H) \approx \frac{x_{H i+1} - x_{H i}}{S_{H i+1} - S_{H i}} (S_H - S_{H i}) + x_{H i} \\ \text{при } S_{H i} < S_H < S_{H i+1}. \end{cases}$$

Программа, реализующая модернизированный алгоритм [4, 5], позволяет вычислить полином наилучшего приближения функции $x_H(S_H)$ любой степени, не превышающей разумный для данной задачи порог $n = 6$. Отчет о результатах аппроксимации, содержащий, в том числе, график изменения погрешности $\delta_{x_H}(x_H)$ вдоль интервала Δ_{S_H} (рис. 5), позволяет сделать вывод о достоверных результатах поиска полинома наилучшего приближения.

Как показывают исследования, поиск узлов полинома не только в точках $\{(S_H; x_H)\}$, но и внутри частичных интервалов $x \in (x_H; x_{H i+1})$ (с применением кусочно-линейной аппроксимации) позволяет получить коэффициенты выражения (3), обеспечивающие наименьшее значение погрешности δ_{x_H} (табл. 1).

Таким образом, принимая результат полиномиальной аппроксимации — величину $x_{H, \text{п}}$ — за действительное значение x_H , соответствующее перемещению S_H объекта вдоль дуги кубической параболы, метод вносит погрешность δ_{x_H} определения нормированной координаты x_H : $x_H = x_{H, \text{п}} \pm \delta_{x_H}$.

При обратном нормировании величины x_H в значение координаты x соразмерно с ней меняется и зна-

Параметры аппроксимации:	
Степень полинома:	3
Левая граница интервала:	0
Правая граница интервала:	1,079957878

Параметры расчета:	
Частичные интервалы:	4
Глубина поиска:	7

Результаты аппроксимации:	
Максимальная погрешность:	0,000362328
Кол-во шагов итерации:	4098

Положения узлов:	
Погрешность интервала 0	0,000362328
Координата x узла 0	0,031901483
Погрешность интервала 1	0,000362117
Координата x узла 1	0,570240812
Погрешность интервала 2	0,000349855
Координата x узла 2	0,8612938
Погрешность интервала 3	0,00032392
Координата x узла 3	1,070994111
Погрешность интервала 4	0,000139203

Коэффициенты:	
Коэффициент 0	0,000362328
Коэффициент 1	0,986224136
Коэффициент 2	0,079888429
Коэффициент 3	-0,128334704

График функции и аппроксимирующего полинома

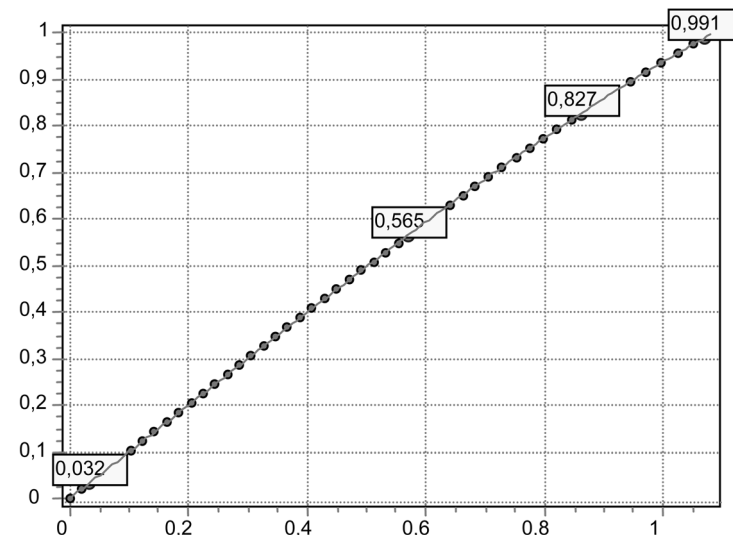


График погрешности аппроксимации

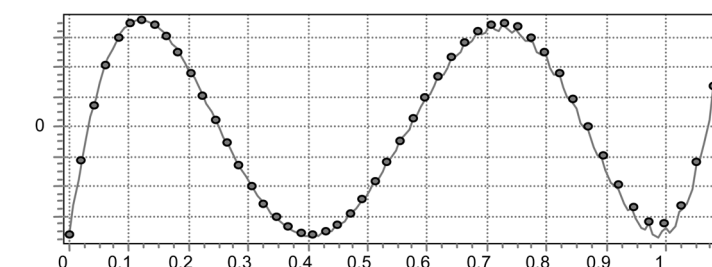


Рис. 5. Результаты поиска полинома наилучшего приближения функции $x_n(S_n)$ при $n = 3$

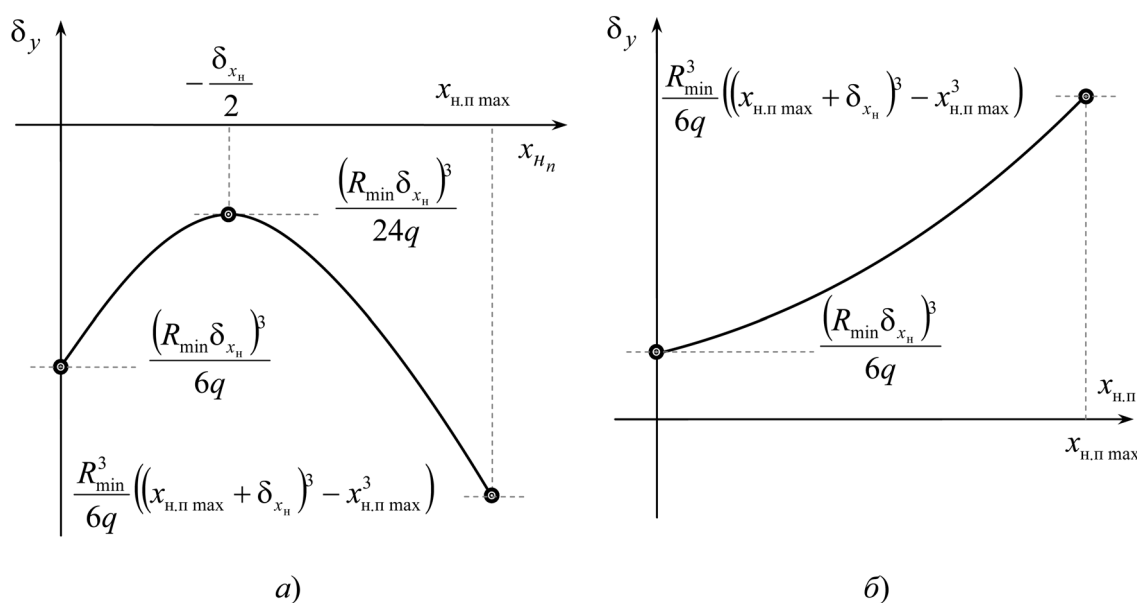
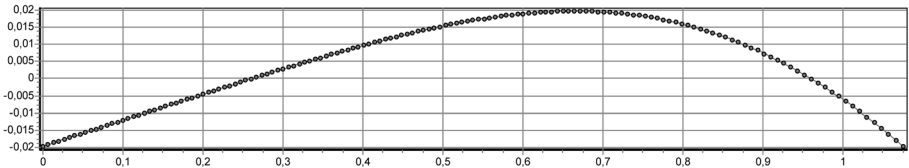
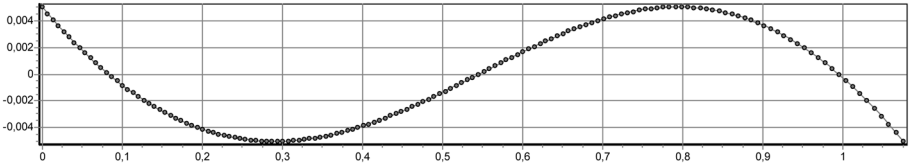
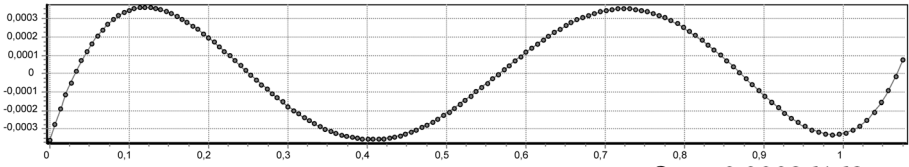
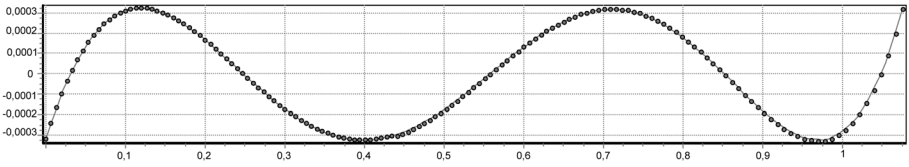
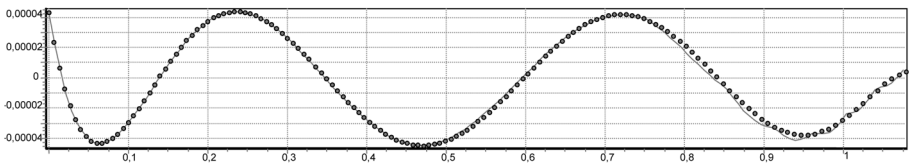
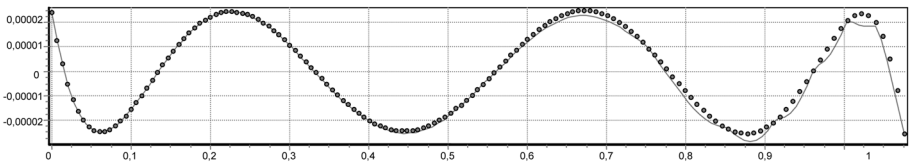


Рис. 6. Характер поведения погрешности $\delta_y(x_{н.п})$:

а — при $\delta_{x_n} < 0$; б — при $\delta_{x_n} > 0$

Результаты поиска полиномов $x_{\text{нп}}(S_{\text{н}})$ наилучшего приближения функции $x_{\text{н}}(S_{\text{н}})$

n	Коэффициенты полинома	Погрешность аппроксимации
1	$a_0 = 0,019679946$ $a_1 = 0,924330366$	 $\delta_{x_{\text{н}}} = 0,019752108$
2	$a_0 = -0,005012527$ $a_1 = 1,071055437$ $a_2 = -0,127906312$	 $\delta_{x_{\text{н}}} = 0,005038973$
3	$a_0 = 0,00036169$ $a_1 = 0,986222128$ $a_2 = 0,079855924$ $a_3 = -0,12829941$	 $\delta_{x_{\text{н}}} = 0,00036169$
4	$a_0 = 0,000318344$ $a_1 = 0,986222128$ $a_2 = 0,072397721$ $a_3 = -0,115782047$ $a_4 = -0,006478349$	 $\delta_{x_{\text{н}}} = 0,000322259$
5	$a_0 = -4,32075\text{E}-05$ $a_1 = 1,00324634$ $a_2 = -0,03913131$ $a_3 = 0,167839257$ $a_4 = -0,303527073$ $a_5 = 0,109459291$	 $\delta_{x_{\text{н}}} = 0,000043614$
6	$a_0 = -2,41686\text{E}-05$ $a_1 = 1,001893197$ $a_2 = -0,02344246$ $a_3 = 0,101860331$ $a_4 = -0,179153961$ $a_5 = 0,002219117$ $a_6 = 0,03444672$	 $\delta_{x_{\text{н}}} = 0,0000248522$

чение погрешности δ_{x_n} : $x = x_n R_{\min} = [x_{n.p} \pm \delta_{x_n}] R_{\min}$, т. е. для величины x погрешность составит $\delta_x = \delta_{x_n} R_{\min}$.

Поскольку координата y положения объекта в плоскости маневра определяется согласно соотношению $y(x) = x^3/6q$, то погрешность ее определения δ_y будет зависеть от величины δ_x :

$$\delta_{y(x_{n.p})} = \frac{((x_{n.p} \pm \delta_{x_n}) R_{\min})^3}{6q} - \frac{(x_{n.p} R_{\min})^3}{6q} = \frac{R_{\min}^3}{6q} ((x_{n.p} + \delta_{x_n})^3 - x_{n.p}^3).$$

Для поиска δ_y — максимального значения погрешности $\delta_{y(x_{n.p})}$ — определим экстремумы функции $\delta_{y(x_{n.p})}$. Для этого вычислим первую производную:

$$\delta'_y(x_{n.p}) = \frac{R_{\min}^3}{6q} (6x_{n.p}\delta_{x_n} + 3\delta_{x_n}^2).$$

Экстремум функции $\delta_{y(x_{n.p})}$ будет наблюдаться при учете погрешности с отрицательным знаком $x_{n.p} = -\frac{\delta_{x_n}}{2}$, поскольку величина $x_{n.p}$ принимает только положительные значения. Характер поведения функции $\delta_{y(x_{n.p})}$ в этом случае показан на рис. 6, а. При $\delta_{x_n} > 0$ функция $\delta_{y(x_{n.p})}$ на ин-

тервале определения $x_{n.p}$ не будет иметь экстремумов (рис. 6, б).

Как и следовало ожидать, максимальное абсолютное значение погрешности в обоих случаях составляет

$$\delta_y = \frac{R_{\min}^3}{6q} ((x_{n.p \max} + \delta_{x_n})^3 - x_{n.p \max}^3). \quad (5)$$

Согласно [1] величины $R_{\min}$ и q связаны соотношением $q = R_{\min}^2 \cdot 0,51761$, поэтому выражение (5) можно переписать в виде

$$\delta_y = 0,322 R_{\min} ((x_{n.p \max} + \delta_{x_n})^3 - x_{n.p \max}^3). \quad (6)$$

Исходя из значений погрешности $\delta_{x.p}$ и выражения (6) приведем для полиномов табл. 1 значения обеих составляющих погрешности определения положения объекта на сегменте PS (табл. 2).

Заключение

Внесенные в метод [1, 3] изменения улучшают его быстродействие за счет сокращения объема вычислений как на этапе предварительных расчетов, так и в режиме расчетов координат в реальном масштабе времени. Эта цель была достигнута за счет упрощения математического аппарата расчета движения по параболическим сегментам траектории путем отказа от использования замещающей окружности [1]. В результате погрешность решения задачи не только уменьшилась, но и приобрела более наглядный вид. Если в базовом методе [1] она проявлялась в виде скачков ускорения (отклонением от равноускоренного движения), то при использовании предложенного в данной статье табулирования параболической траектории погрешность выражается в отклонении рассчитанного положения объекта в момент времени t от его действительного положения (рис. 7). К тому же представленный подход позволяет устанавливать соотношение точность/быстродействие за счет выбора степени полинома $x_{n.p}(S_n)$.

Список литературы

1. Бобров М. С., Аверьянов А. М., Чекушкин В. В. Имитация траекторий движения воздушных объектов для радиолокационных систем управления и контроля воздушного пространства // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 9. С. 70–78.
2. Третьяков В. А. Комплексное проектирование структуры единой автоматизированной радиолокационной системы страны // Радиопромышленность. НИИЭИР. 2000. Вып. 3, С. 29–41.
3. Бобров М. С., Аверьянов А. М., Пискунов Г. Г., Чекушкин В. В. Реализация трасс движения воздушных объектов в тренажерно-моделирующих системах // Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 2009. Вып. 4. С. 157–166.
4. Аверьянов А. М., Чекушкин В. В. Метод поиска полиномов наилучшего приближения для воспроизведения функциональных зависимостей, калибровки датчиков и измерительных систем // Датчики и системы. 2009. № 3. С. 2–6.
5. Свидетельство № 209610577 о государственной регистрации программы для ЭВМ: "Поиск полинома наилучшего приближения ("BestMultinomial")". Приоритет от 04.12.2008, зарег. 26.01.2009.

Таблица 2
Составляющие δ_x и δ_y погрешности определения координат объекта на параболическом участке траектории

n	$S_n \max$	$x_{n.p \max}$	δ_x , в числах $R_{\min}$	δ_y , в числах $R_{\min}$
1	1,10845	1,0442539402	0,019752108	0,0212027224
2	1,10845	1,0250453235	0,005038973	0,0051397083
3	1,10845	1,0169232843	0,000361690	0,0003614469
4	1,10845	1,0149840777	0,000322259	0,0003208031
5	1,10845	1,0174619010	0,000043614	0,0000436172
6	1,10845	1,0175986897	0,000024852	0,0000248603

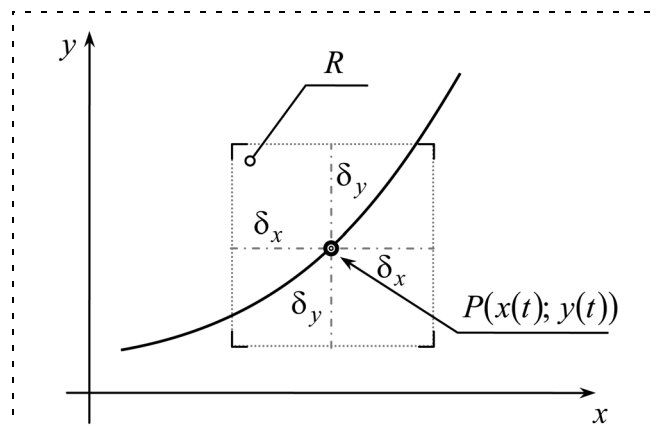


Рис. 7. Область R возможного нахождения расчетной точки $P'(x(t); y(t))$ относительно точки $P(x(t); y(t))$ действительного положения объекта в момент времени t

Л. Н. Бабак, доц.,

Дальневосточный государственный технический университет им. В. В. Куйбышева, г. Владивосток,

А. Ф. Щербатюк,

чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, зав. лаб.,

Институт проблем морских технологий

Дальневосточное отделение РАН, г. Владивосток

scherba@marine.febras.ru; lightsome@yandex.ru

Некоторые методы оценивания состояния водных акваторий с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов

Обсуждаются некоторые задачи, возникающие при определении состояния водных акваторий, и методы их решения с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов. Приведены некоторые результаты съемки, полученные в процессе морских исследований.

Ключевые слова: автономные необитаемые подводные аппараты, мониторинг водных акваторий, траектории движения

Введение

В последние годы все большее развитие получают исследования, связанные с изучением состояния морских акваторий и влияния на них антропогенных воздействий. Особое внимание привлекают процессы распространения различных инородных веществ, связанные с бытовой и промышленной деятельностью, а также с засорением окружающей среды посредством выбрасывания опасных источников в море.

Одним из примеров неоднородностей внешней среды является шлейф, который образуется в результате сброса технологических отходов из трубы или от расположенного на дне источника загрязнения под воздействием имеющихся в данном районе течений. Задачами обследования могут быть локализация (оконтуривание) образовавшегося района с повышенной концентрацией примеси или определение местоположения источника загрязнения.

Традиционные методики получения проб с использованием судов в общем случае дороги и не обеспечивают детального покрытия акваторий. Очевидно, что платформы, такие как автономные необитаемые подводные аппараты (АНПА), являются мобильными и способны адаптивно исследовать процессы в зависимости от времени и на значительных дистанциях (рис. 1, см. вторую сторону обложки). АНПА обеспечивают эффективное выполнение мониторинга окружающей среды, и собранные с их помощью данные позволяют осуществлять предсказательное моделирование для принятия решений и регулирования, например, выбросов

отработанных вод. Предполагается, что автономный аппарат оснащен навигационной системой, предназначенной для определения собственного местоположения с заданной точностью, и датчиком концентрации растворенного вещества.

Подобные исследования выполняются в европейских и американских научных центрах [1–5]. В статье [1] описано успешное использование АНПА MARES для оценки влияния на окружающую среду слива сточных вод на западе Португальского побережья недалеко от дельты реки Овейро. Исследования с использованием АНПА REMUS по оценке концентрации растворенной органики в заливе Penobscot Bay описаны в [2]. Эксперимент с использованием автономного аппарата по отслеживанию теплового шлейфа, источником которого является ядерный реактор в Calvert Cliffs (США), описан в [3]. В статье [4] приведены алгоритмы адаптивного выборочного исследования процессов окружающей среды с применением автономных подводных аппаратов. Вудсхолский океанографический институт (США) провел исследования с использованием АНПА REMUS по изучению распространения загрязнения от точечного источника при наличии течений [5].

В данной статье рассмотрены методы построения карт параметров среды в заданной акватории путем покрытия ее равномерной сетью галсов АНПА. В связи с тем, что реальная траектория движения АНПА не совпадает с прямоугольной сеткой (не является прямолинейной), то используются методы интерполяции на криволинейной сетке. Когда цель обследования состоит в определении местоположения источника загрязнения или локализации (оконтурировании) границ шлейфа, исчерпывающее обследование может занять много времени. В этом случае целесообразно использовать адаптивные алгоритмы формирования траекторий движения АНПА. В статье рассмотрены алгоритмы формирования траекторий движения АНПА, предназначенные для решения данных задач. В заключение приведены некоторые результаты оценивания параметров среды, полученные на основе собранных реальных данных.

Методы построения карт параметров среды в заданной акватории

Рассмотрим случай, когда заданная акватория покрывается сетью равномерно расположенных траекторий АНПА в виде меандра. Как было отмечено выше, траектория движения АНПА в общем случае не совпадает с прямоугольной сеткой из-за наличия течений, огибания препятствий по ходу движения и инерционности аппарата при маневрировании на разворотах.

В процессе работы АНПА формируется массив измерений P_n , где n изменяется от 1 до N . Требуется на основе измерений аппроксимировать значения параметров L_k в прямоугольной области в узлах квадратной сетки, где k изменяется от 1 до K .

Для решения указанной задачи, например в [1], использовался метод наименьшего квадрата кол-

локации. При этом формировалась равномерная сетка из коллокационных точек, в которых требовалось оценить значения измеряемых параметров для дальнейшего отображения. Значения параметров в коллокационных точках L_k аппроксимировались на основе следующих соотношений:

$$P_i = \sum_{k=1}^K W_{ik} L_k;$$

$$W_{ik} = 0,5(1 + \cos(\pi d));$$

$$d = [(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2]^{1/2}/D,$$

где $W_{ik} = 0$ при $d > 1$, D — заданный размер окрестности. Функционал наименьших квадратов определяется суммированием квадратов разности, оцененных в каждой точке:

$$J = \sum_{i=1}^N \left[P_i - \sum_{k=1}^K W_{ik} L_k \right]^2 = (P - WL)^T (P - WL).$$

Минимизируя данное уравнение относительно P и разрешая результирующую систему относительно L мы получаем:

$$L = (W^T W)^{-1} W^T P.$$

В данной статье для аппроксимации измерений в узлах квадратной сетки используется билинейная интерполяция. На рис. 2 изображены четырехугольная ячейка P_1-P_4 криволинейной сетки измерений и узлы L_1-L_4 квадратной сетки для визуализации данных. На рис. 3 приведена блок-схема алгоритма аппроксимации значений оцениваемого параметра среды на основе полученных измерений. Предварительно выполняется отбраковка аномальных измерений. При этом в скользящем окне определенного размера определяются среднее значение E и дисперсия σ измеренного параметра. Затем измерения в точках, лежащих в текущем окне, анализируются на принадлежность интервалу $[E - 3\sigma, E + 3\sigma]$. Точкам, в которых измеренные значения лежат вне полученного интервала, приписываются ближайшие граничные значения интервала.

Далее последовательно перебираются все четырехугольные ячейки криволинейной сетки измерений. Если в текущей ячейке нет узлов результирующей квадратной сетки, то данная ячейка пропускается. В ином случае для текущей криволинейной ячейки отыскивается центральная точка (X_k, Y_k) , лежащая на пересечении прямых, соединяющих противоположные вершины четырехугольной ячейки:

$$Y_k = Y_1 - (X_k - X_1)(Y_3 - Y_1)/(X_3 - X_1);$$

$$Y_k = Y_2 - (X_k - X_2)(Y_4 - Y_2)/(X_4 - X_2).$$

Для аппроксимации значения измеряемого параметра в точке K используется билинейная интерполяция в соответствии с выражением

$$P_k = [P_1(D_{13} - D_{1k})/D_{13} + P_3(D_{13} - D_{3k})/D_{13} + P_2(D_{24} - D_{2k})/D_{24} + P_4(D_{24} - D_{4k})/D_{24}]/2,$$

где D_{ij} — расстояние между точками i и j .

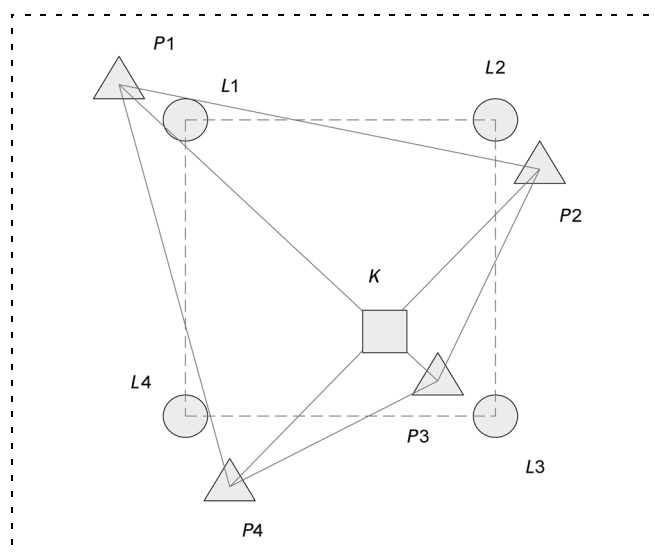


Рис. 2. Неравномерная сетка измерений P и квадратная сетка результирующих данных L

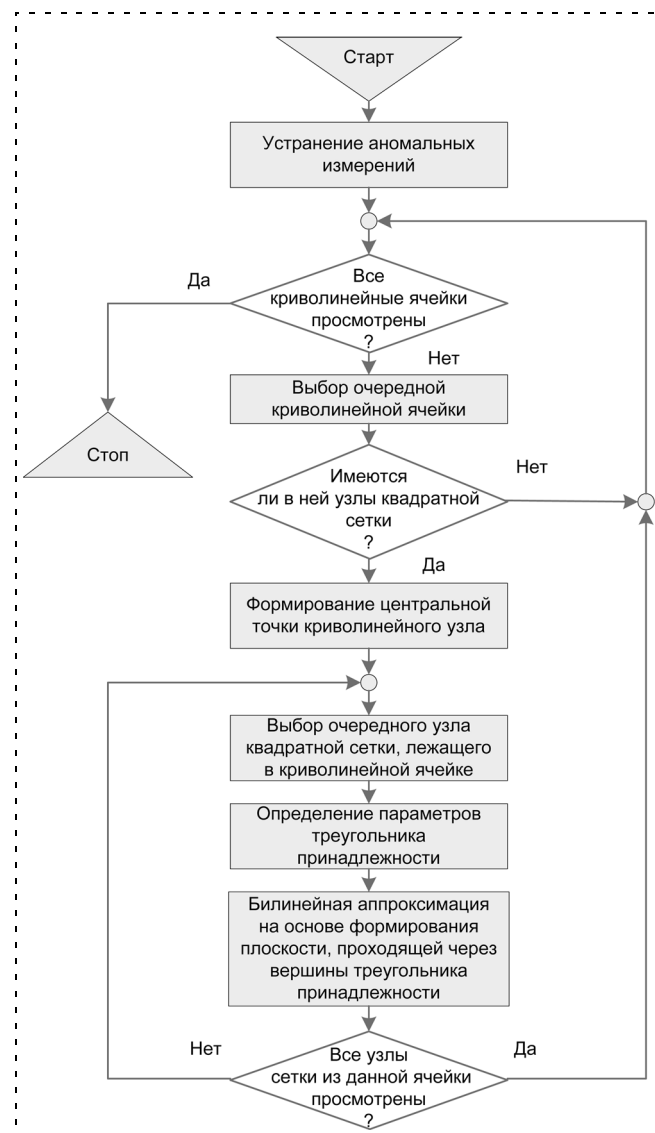


Рис. 3 Блок-схема алгоритма аппроксимации значений оцениваемого параметра

Затем определяется, в каком из четырех треугольников KP_1P_2 , KP_2P_3 , KP_3P_4 или KP_4P_1 криволинейной ячейки находится текущий узел результирующей квадратной сетки (например, в KP_1P_2). Формируется плоскость, проходящая через три вершины данного треугольника. Значение параметра L вычисляется путем подстановки координат узловой точки (X, Y) в уравнение для плоскости:

$$L = P_k - [(X - X_k)D_x - (Y - Y_k)D_y]/D_z,$$

где

$$D_z = (Y_2 - Y_k)(X_1 - X_k) - (Y_1 - Y_k)(X_2 - X_k);$$

$$D_x = (Y_1 - Y_k)(P_2 - P_k) - (Y_2 - Y_k)(P_1 - P_k);$$

$$D_y = (P_2 - P_k)(X_1 - X_k) - (P_1 - P_k)(X_2 - X_k).$$

Для получения более высокой точности аппроксимации можно использовать бикубическую интерполяцию, которая требует определения в каждой узловой точке сетки не только значения функции $y(x_1, x_2)$, но также и градиентов $\partial y/\partial x_1$, $\partial y/\partial x_2$ и перекрестной производной $\partial^2 y/\partial x_1 \partial x_2$, что приводит к значительному росту объема вычислений [6].

Алгоритмы локализации неоднородностей водных акваторий

Рассмотрим задачу оконтуривания границ шлейфа и определения местоположения точечного источника шлейфа [7]. Алгоритм формирования траектории предназначен для организации движения АНПА к месту нахождения точечного источника шлейфа. Он основан на вычислении некоторой индикаторной функции, зависящей от ряда параметров, которые характеризуют концентрацию загрязнения, и оценивании градиента этой функции. Движение АНПА организуется в направлении градиента индикаторной функции до визуального обнаружения источника шлейфа.

Предполагается, что концентрация растворенного вещества принимает максимальное значение в центральной части шлейфа и убывает к его краям. Для оценивания концентрации растворенного вещества обычно используется усреднение значений измерений на некотором интервале времени. Для локализации шлейфа в вертикальном направлении реализуются зигзагообразные траектории АНПА в вертикальной плоскости.

При формировании траектории движения АНПА предполагается, что шлейф является узким у основания и расширяется по мере удаления от источника шлейфа. Будем считать, что в процессе работы течение остается постоянным, и границы шлейфа можно аппроксимировать прямыми линиями.

Для локализации местоположения источника шлейфа организуется траектория, направленная на пересечение шлейфа. Пересечению границы шлейфа соответствует превышение концентрации растворенного вещества заданного порога.

Предполагается, что первоначально направление шлейфа известно неточно. На рис. 4 изображены предполагаемые профили концентрации растворенного в воде вещества, соответствующие

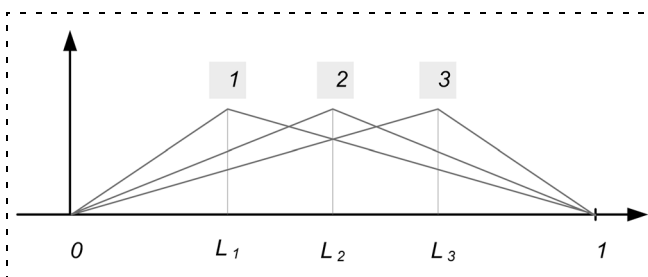


Рис. 4. Профиль концентрации растворенного в воде вещества вдоль траектории пересечения шлейфа

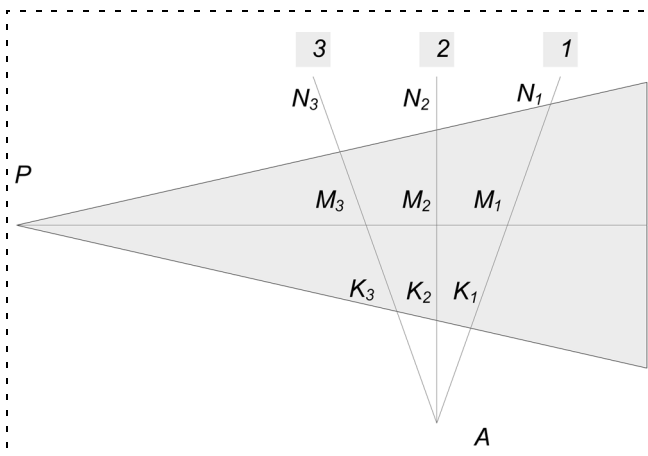


Рис. 5. Возможные варианты взаимной ориентации шлейфа и траектории аппарата

траекториям пересечения шлейфа, показанным на рис. 5. Точкой P на рис. 5 обозначено местоположение источника шлейфа, а точкой A — исходное положение АНПА (длина траектории между двумя пересечениями шлейфа нормирована к единице). При этом, когда траектория АНПА пересекает шлейф под углом от источника шлейфа (сечение 1), максимум концентрации вдоль сечения смещен к началу траектории ($L_1 = K_1M_1/K_1N_1 < 0,5$). В случае, когда траектория АНПА пересекает шлейф под углом к источнику шлейфа (сечение 3), максимум концентрации вдоль сечения смещен к концу траектории ($L_3 = K_3M_3/K_3N_3 > 0,5$).

Концентрация растворенного вещества в точке (x, y) выбиралась из условия, что масса вещества, проходящего через любой вертикальный разрез, перпендикулярный оси шлейфа, является постоянной величиной и равна A . Вдоль разреза концентрация линейно убывает от середины шлейфа до его границы. Исходя из этих условий, можно получить выражение для концентрации вещества в произвольной точке (x, y) :

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{A}{ax} \left(1 - \frac{|y|}{ax}\right), & (x > \varepsilon, |y| < ax); \\ 0, & \text{для всех остальных } (x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Блок-схема алгоритма формирования траектории движения АНПА к источнику шлейфа изображена на рис. 6. Траектория движения АНПА фор-

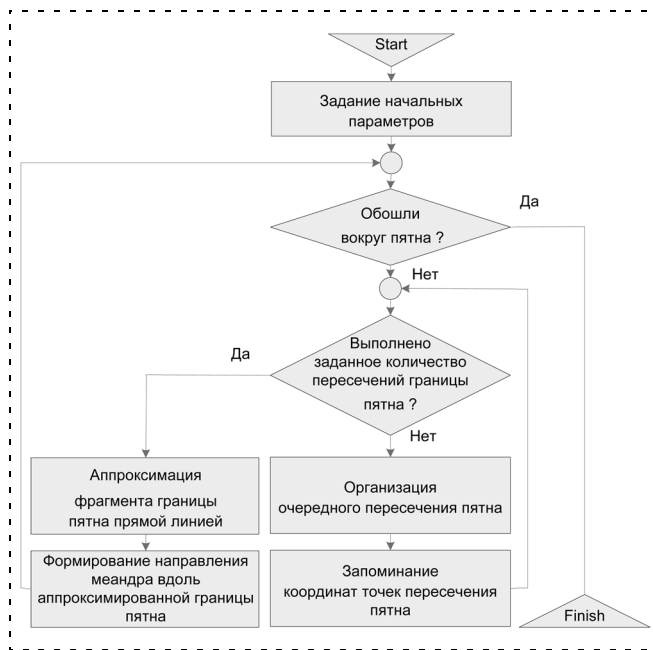


Рис. 6. Блок-схема алгоритма формирования траектории движения АНПА к источнику загрязнения

мируется в виде меандра, пересекающего шлейф параллельными прямолинейными галсами, длина которых уменьшается по мере сужения ширины шлейфа. Границы шлейфа аппроксимируются прямыми линиями $Line1$ ($y = k_1x + b_1$) и $Line2$ ($y = k_2x + b_2$) путем минимизации невязок:

$$\min_{k, b} \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2,$$

где n — число точек пересечения границ.

Параметры линий $Line1$ и $Line2$ определяются на основе МНК в соответствии с выражениями

$$\sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)x_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b) = 0,$$

где (x_i, y_i) — координаты точек пересечения правой границы шлейфа для линии $Line1$ или левой границы шлейфа для линии $Line2$.

В итоге, для определения коэффициентов (k_1, b_1) и (k_2, b_2) получаем системы линейных уравнений ($j = \overline{1, 2}$):

$$\begin{cases} k_j S_{11} + b_j S_{12} = S_1; \\ k_j S_{21} + b_j S_{22} = S_2, \end{cases}$$

$$\text{где } S_1 = \sum_{i=1}^n y_i x_i, S_2 = \sum_{i=1}^n y_i, S_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2, S_{12} = S_{21} = \sum_{i=1}^n x_i, S_{22} = \frac{n(1+n)}{2}.$$

Предполагаемое местоположение источника шлейфа находится в точке пересечения прямых $Line1$ и $Line2$, координаты которой определяются решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} k_1 x_0 + b_1 = y_0; \\ k_2 x_0 + b_2 = y_0. \end{cases}$$

Для исследования работы алгоритма формирования траектории движения АНПА, предназначенной для локализации источника загрязнения, была разработана система моделирования, реализованная на языке С.

Шлейф моделировали в виде области, ограниченной двумя прямыми линиями $Line1$ ($y = ax$) и $Line2$ ($y = -ax$). Данная область представляет собой угловой сектор с вершиной в начале координат и симметричный относительно оси Ox .

На рис. 7, а изображен шлейф и траектория движения АНПА. Траектория начинается в точке $(100, -30)$. Источник шлейфа расположен в точке $(0, 0)$. Аппарат выполняет семь параллельных галсов, пересекающих шлейф. На основе полученных координат точек пересечения границ шлейфа рассчитываются параметры осевой линии шлейфа, которые в данном случае совпадают с осью Ox . Да-

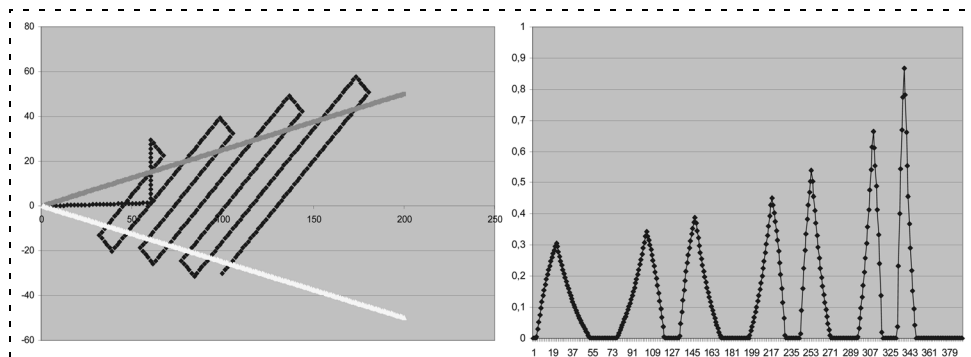


Рис. 7. Шлейф и траектория движения АНПА (а) и график изменения концентрации вдоль траектории движения АНПА (б)

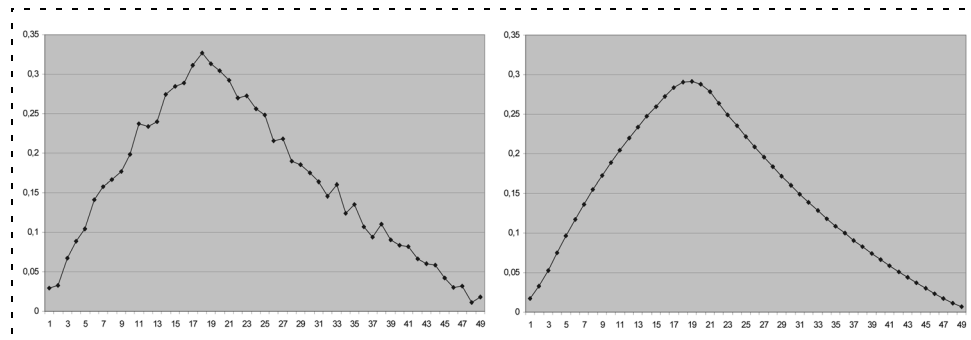


Рис. 8. Фрагмент зашумленных (а) и результирующих значений концентрации (б) растворенного в воде вещества

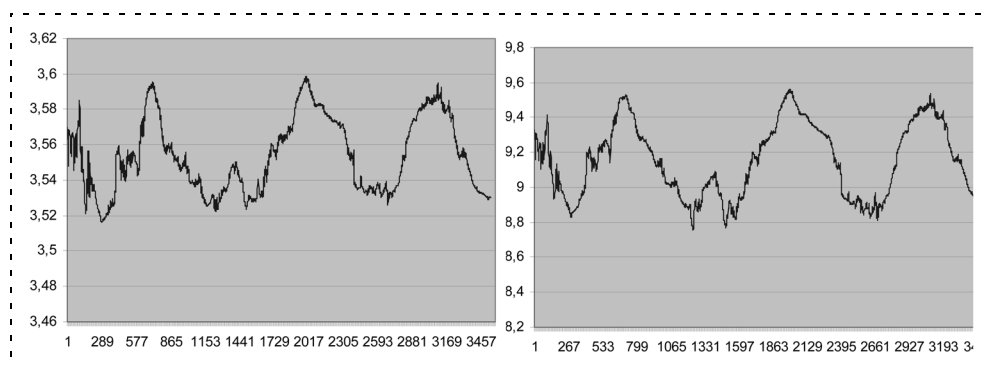


Рис. 11. Изменение солености (а) и температуры (б) вдоль траектории движения носителя сенсора

лее аппарат выполняет движение к осевой линии и вдоль осевой линии достигает источника шлейфа.

На рис. 7, б изображен график изменения концентрации вдоль траектории движения аппарата. Для моделирования концентрации растворенного в воде вещества в виде зашумленного процесса значения концентрации, полученные в соответствии с выражением (1), складываются с равномерно распределенным на заданном интервале шумом. Результирующие значения концентрации (рис. 8, б) получаются в результате осреднения мгновенных значений концентрации (рис. 8, а) в течение установленного интервала измерений.

Результаты натурных экспериментов в Японском море

Осенью 2008 и 2009 гг. в районе острова Русский вблизи г. Владивостока были выполнены исследования, связанные с оценкой распространения шлейфа пресной воды от реки Безымянная, впадающей в бухту Воевода. Оценку выполняли на основе измерения показаний солености и температуры. На рис. 9 (см. третью сторону обложки) изображена одна из траекторий движения носителя с сенсорами (красная ломаная), которая имела вид меандра. На рис. 10 (см. третью сторону обложки) изображен АНПА ММТ-3000 [8–9]. Исследования позволили локализовать шлейф пресной воды (синяя пунктирная кривая), которому соответствовала более холодная и менее соленая вода (рис. 11). На рис. 11, а, б отчетливо видна корреляция между температурой и соленостью воды. В качестве измерителя использовали комплекс STD зонд SBE-52MP [10].

Текущие данные, включающие дату, время, географические и относительные координаты, глубину и высоту движения АНПА над грунтом, курс, дифферент, скорость, температуру, соленость, мутность, а также концентрации фитопланктона и растворенного в воде метана, полученные с интервалом в 1 с, запоминались в бортовом накопителе подводного аппарата. В дальнейшем эта информация была представлена в виде карт и графиков и включена в единый банк данных для последующей обработки.

На рис. 12 (см. третью сторону обложки) приведена результирующая карта температур в области исследования. В ближайшем будущем предполагается реализовать оконтуривание шлейфа пресной воды с использованием АНПА ММТ-3000 на основе адаптивных алгоритмов формирования траектории движения.

Авторы выражают свою признательность всем сотрудникам ИПМТ ДВО РАН, принимавшим участие в подготовке и проведении морских исследований с применением АНПА ММТ-3000. Данная работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ 070800596а.

Список литературы

1. Ramos P., Monegol M., Carvalho S. Spatial Distribution of a Sewage Outfall Plume Observed with an AUV // Proc. of the OCEANS 2008 MTS/IEEE Conference, September 15–18, 2008. Quebec, Canada.
2. Robbins I. C., Moline M. A. Autonomous cdom plume mapping in penobscot bay, maine: remus operation and modularity // Proc. of 15th International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology (UUST07), August 19–22, 2007, Durham, New Hampshire, USA.
3. Cannell C. J., Gadre A. S., Stilwell D. J. Boundary tracking and rapid mapping of a thermal plume using an autonomous vehicle // Proc. of the OCEANS 2006 MTS/IEEE Conference, September 18–21, 2006. Boston, USA, ISBN CD-ROM: 1-4244-0115-1.
4. Cannell C. J., Stilwell D. J. A Comparison of Two Approaches for Adaptive Sampling of Environmental Processes Using Autonomous Underwater Vehicles. // Proceedings of the OCEANS 2005 MTS/IEEE Conference, September 18–23, 2005. Washington, USA, ISBN CD-ROM: 0-933957-33-5.
5. Farrell J. A. at al. Chemical Plume Tracing Experimental Results with a REMUS AUV // Proceedings of the OCEANS 2003 MTS/IEEE Conference, September 22–26, 2003. San Diego, USA. P. 962–968.
6. Press W. H. at al. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 1988.
7. Бабак Л. Н., Щербатюк А. Ф. Автоматизация обследования локальных неоднородностей водной среды с помощью АНПА // Матер. 5-й науч. конф. "Управление и информационные технологии" (УИТ-2008), С-Петербург, 14–16 октября 2008 г.
8. Горнак В. Е., Инзарцев А. В., Львов О. Ю., Матвиенко Ю. В., Щербатюк А. Ф. ММТ-3000 — новый малогабаритный автономный необитаемый подводный аппарат ИПМТ ДВО РАН // Подводные исследования и робототехника. 2007. № 1 (3). С. 12–20.
9. Ваулин Ю. В., Матвиенко Ю. В., Щербатюк А. Ф. Навигационное обеспечение автономного необитаемого подводного аппарата ММТ-3000 // Матер. XIV междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 28–30 мая 2007 г. С. 251–256.
10. Бабак Л. Н., Щербатюк А. Ф. О состоянии и перспективах использования на подводных аппаратах датчиков, предназначенных для мониторинга водных акваторий // Матер. междунар. науч.-техн. конф. "Технические проблемы освоения мирового океана", Владивосток, 2–5 октября 2007 г. С. 466–472.

CONTENTS

Eremin E. L., Kvan N. V., Semichevskaya N. P. Robast Control of Nonlinear Object with High-Speed Obvious-Implicit Standard Model	2
---	---

Syntheses robust algorithms for control is presented in article for system with high-speed obvious-implicit standard model. In the course of simulation modeling is shown that possible without loss quality operating the system to go to system with tacit by standard model that allows to simplify her(its) technical realization.

Keywords: high-speed obvious-implicit standard model, nonlinear objekt, robust algorithms for control, simulation modeling

Stebulyanin M. M. Algorithm of Asymptotic General Stabilization of Interval Quadratic Systems with Unlimited Control	7
---	---

In the article the algorithm for stabilization in zero-point of an arbitrary quadratic system with interval parameters is theoretically substantiated. The algorithm is based entirely on elementary algebra and is focused on the automatic solution motion stabilization problems of mechanical systems in conditions of partial ambiguity. Synthesis of control actions carried out in the class of smooth functions without taking possible amplitude restrictions into account.

Keywords: stabilization, control, algorithm, Lyapunov function, interval uncertainty, the variable form

Aranovskiy S. V., Bardov V. M. The Motor Leads two Masses Equipment System's Parameters Identification Algorithm.	15
---	----

This paper is dedicated to the problem of the identification of the motor with two masses equipment system's parameters in the condition of system structure is known but the transfer function parameters are not. The identification is based on the experimental results derived from the workable plant. Suggested approach uses only output data measurements and doesn't demand median parameters information or any parameter's drift limitation; furthermore the high speed estimation is achieved. There's an example where the main steps of the algorithm are demonstrated as well as the mathematical modeling results show the efficiency of the proposed approach.

Keywords: motor, two masses gear, identification, adaptive identifier, LSQ method

Dudarenko N. A., Polyakova M. V., Ushakov A. V. Estimation of a System's Degeneration of Technical Systems: Algebraic Problem Definition	18
---	----

In this note is concerned the problem of estimation of a system's degeneration of technical systems. Problem is solved with algebraic problem definition by performance indexes of degeneration, constructed with singular values of criterion matrixes of technical system. There are methods of forming of criterion matrixes.

Keywords: technical system, system's degeneration, estimation of degeneration, performance indexes of degeneration, singular value, criterial matrix

Bobtsov A. A., Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Motylkova M. M., Rabysh E. Y., Ryuhin V. Y., Mansurova O. K. Synthesis of Modal Controls for the Design of Static Controllers for Time-Varying Discrete Systems	23
---	----

In this article, on the basis of the reference model for time-varying discrete systems is given the procedure for the synthesis of modal controls.

Keywords: system analysis and synthesis, the control of technical systems, discrete systems

Kolyubin S. A., Pyrkin A. A. Adaptive Control of a Reaction Wheel Pendulum.	28
---	----

In paper, adaptive controller of a reaction wheel pendulum is proposed. Obtained hybrid control system allows to stabilize a pendulum at the top unstable position in conditions of full parametric uncertainty and constrained control. In contrast to other approaches, this algorithm has adaptive adjusting of controller's parameters in "on-line" mode without any preliminary identification procedure.

Keywords: mechatronics systems, reaction wheel pendulum, parametric uncertainty, hybrid control system, adaptive control, identification, speed gradient approach, modal control

Cheburakhin I. F., Tsurkov V. I. Logic Control and Processing of the Information in Mechatronics Systems ..	33
--	----

The mathematical device used for automation and optimization of synthesis of discrete devices of logic management and processing of the information (combinational automatic devices) is advanced. As bases microcircuits of a various degree of integration can be applied. For mathematical models, Boolean functions from various classes, estimations (bottom, top and minimal) functional the qualities received at realization of these functions in various bases beforehand are deduced.

Methods are recommended for intellectualization of systems of synthesis of combinational automatic devices.

Keywords: boolean function, presentation formula and scheme, decomposition, difficulty, factors quality, minimization, functional and difference equation, multicriteria optimization, speed

Perepelkin E. A., Chernyh M. S. Modal Design of Proportional Integral Controller for Congestion Control System. . 38

The design method of the proportional integral controller for congestion control system is described. The method is based on poles placement of close loop transfer function. The controller has the property of robustness with respect to the parameters of the delay in the control and measurement. The described synthesis method can be used in designing of perspective computer network systems and data transfer systems congestion control.

Keywords: computer network, congestion, proportional integral controller

Zhirabok A. N., Yakshin A. S. Solving Theproblem of Fault Accommodation in Technical Systems Described by Structure Schemes. 42

The problem of fault accommodation in technical systems described by structure schemes with linear and nonlinear blocks is considered.

Keywords: technical systems, structure schemes, nonlinear blocks, faults, accommodation

Aleksandrova T. V., Gromakov E. I. Mechanotronic Devices Robust Diagnostic Procedure for Cable Manufacture with Use of Control Charts 48

It is necessary to trace operatively a condition of parameters both the process equipment parameters and released products parameters at manufacturing application and operation of extrusion lines for cable products manufacture. For these purposes it is offered to use a statistical method — control cards.

For control cards interpretation it is offered to use robust procedure, which allows to maximize the definition of real faults and to minimize number of false alarms.

Keywords: statistical process control, fault detection, false alarm, X—R control charts, CUSUM-chants average run length

Belenki L. B., Borovik S. Yu., Raykov B. K., Sekisov Yu. N., Skobelev O. P., Tulupova V. V. Shortcut Methods for Data Acquisition about Gas-Turbine Engine Blade Tips Displacements 53

The description of new shortcut methods for data acquisition about two- and three- coordinates displacements of gas-turbine engine blade tips is considered. Methods are intended for using of clusters of single-coil eddy-current sensors distributed over the stator. A readability matter of the methods is given too.

Keywords: coordinates of displacements, blade tips, single-coil eddy-current sensors distributed over the stator

Vanin A. V. Statistic Method of Artificial Earth Sattelites Search Trajectories Quality Assessment 61

The article describes a new method of the search trajectories analyze and selection for space millimeter waveband radiovision system based on the RT-7.5 radiotelescope. Mathematical basement of the method and examples of its implementation for space flying apparatus observation based on its orbit forecast are presented. Some recommendations for other applications of the method are given.

Keywords: search and detection of flying apparatuses, search trajectory, the method of search trajectories quality assessment, radiotelescope RT-7.5, space radiovision system

Averyanov A. M., Bobrov M. S., Chekushkin V. V. A Parametric Assignment of Flying Object Motion Trajectory Inside a Maneuvering Zone 67

There is an approach for efficiency increment of forming smooth, time-parameterized 3d-trajectories of flight pattern using multinomial approximation of motion trajectory inside maneuvering zones.

Keywords: imitation of motion kinematics, maneuver area, flying object, flight trajectory, trajectory smoothing, simulator for RLS operator, interfacing of flight trends, moving along cubic parabola and arc of circumference, multinomial approximation

Babak L. N., Scherbatyuk A. Ph. Some Methods for Water Environment Estimation Based on Usage of Autonomous Unmanned Underwater Vehicles 74

Some problems of water environment estimation and methods for it decision based on usage of autonomous unmanned underwater vehicles are considered in the paper. Some results of marine trials are supplemented.

Keywords: autonomous unmanned underwater vehicle, water environment monitoring, motion trajectory

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Дизайнер Т. Н. Погорелова.

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор М. Г. Джавадян.

Сдано в набор 01.03.2010. Подписано в печать 16.04.2010. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,8. Уч.-изд. л. 10,73. Заказ 345. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Отпечатано в ООО "Подольская Периодика". 142110, Московская обл., г. Подольск, ул. Кирова, 15