

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 4 (133)

апрель

2012

Редакционный совет:

КУЗНЕЦОВ Н. А.
МАКАРОВ И. М.
МАТВЕЕНКО А. М.
ПЕШЕХОНОВ В. Г.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М.
ФЕДОРОВ И. Б.

И.о. главного редактора:

ФИЛИМОНОВ Н. Б.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В.
ПУТОВ В. В.
ЮЩЕНКО А. С.

Ответственный секретарь:

ПЕТРИН К. В.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М.
БОГАЧЕВ Ю. П.
БУКОВ В. Н.
ВИТТИХ В. А.
ВОСТРИКОВ А. С.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г.
ГОЛУБЯТНИКОВ И. В.
ИВЧЕНКО В. Д.
ИЛЬЯСОВ Б. Г.
КАЛЯЕВ И. А.
КОЛОСОВ О. С.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г.
КУЗЬМИН Н. Н.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.
ЛЕОНОВ Г. А.
ЛЁВИН Б. А.
ЛОХИН В. М.
НОРЕНКОВ И. П.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е.
ПРОХОРОВ Н. Л.
РАПОПОРТ Э. Я.
РАЧКОВ М. Ю.
РЕЗЧИКОВ А. Ф.
СЕБРЯКОВ Г. Г.
СИГОВ А. С.
СИРОТКИН О. С.
СОЙФЕР В. А.
ТИМОФЕЕВ А. В.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф.
ФУРСОВ В. А.
ХИМЕНКО В. И.
ЮРЕВИЧ Е. И.
ЮСУПОВ Р. М.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧУГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Мионов В. И., Мионов Ю. В., Юсупов Р. М. Совместное вариационное оценивание параметров состояния нелинейных динамических систем и параметров модели измерений по критерию максимального правдоподобия 2

Чебурахин И. Ф. Математические модели для минимизации и автоматизации синтеза дискретных управляющих систем 5

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ

Пьявченко Т. А., Моисеева Е. В. Параметрическая коррекция динамики электропривода на основе метода технического оптимума 14

Герман-Галкин С. Г., Ляпин А. С. Анализ и модельное исследование асинхронного электропривода со скольльзящим управлением потокосцеплением и моментом 21

Шароватов В. Т., Лошицкий П. А. Математическая модель силового оболочкового бесштокового пневмоцилиндра двустороннего действия. 24

ИЗМЕРЕНИЯ И КОНТРОЛЬ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Боровик С. Ю., Скобелев О. П. Методические погрешности систем измерения радиальных и осевых смещений торцов лопаток 31

Коршаковский С. И., Красненков М. А. Увеличение эффективности инструментальных средств неразрушающего контроля энергоёмких технических объектов для управления средствами аварийной защиты 36

РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Чикуров Н. Г., Гончаров А. В. Построение кинематической модели пятизвенного робота с использованием метода электроаналогий 42

Крутиков С. Л. Способ получения уравнений движения роботов-манипуляторов в терминах базовых инерционных параметров 50

Журнал в журнале "УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"

Шибанов Г. П. Оптимизация систем управления летательным аппаратом по критериям управляемости и наблюдаемости 57

Старовойтов Е. И. Устройство контроля ориентации пассивных космических аппаратов на основе дифракционных решеток 61

Соллогуб А. В., Скобелев П. О., Симонова Е. В., Царев А. В., Степанов М. Е. Проблемы автономного согласованного межспутникового взаимодействия в гетерогенных мультиагентных системах малоразмерных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли. 65

Contents 71

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 629.191

В. И. Миронов,

д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр.,

Ю. В. Миронов,

д-р техн. наук, ст. науч. сотр.,

mironuv@yandex.ru,

Р. М. Юсупов,

чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., директор,

spiiran@iias.spb.su,

Санкт-Петербургский институт

информатики и автоматизации РАН

Совместное вариационное оценивание параметров состояния нелинейных динамических систем и параметров модели измерений по критерию максимального правдоподобия

Рассматривается применение вариационного подхода для решения задач комплексного оптимального статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем и параметров моделей измерений по критерию максимального правдоподобия.

Ключевые слова: комплексное статистическое оценивание, нелинейные динамические системы, критерий максимального правдоподобия

Введение

Решение задач статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем на практике часто приходится решать в условиях неопределенности в отношении некоторых параметров моделей измерений. Такая ситуация, как правило, имеет место в задачах определения параметров орбитального движения космических аппаратов по результатам траекторных измерений, когда, например, недостаточно точно известны координаты наземных измерительных средств. Поэтому в процессе статистической обработки выборочных данных необходимо предусматривать возможность совместного определения как параметров движения объекта, так и параметров модели измерений.

Таким образом, в более общей постановке в рамках задачи оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем необходимо комплексно предусматривать определение некоторого

вектора параметров моделей измерений. Задачи такого рода достаточно сложны и имеют широкое распространение на практике.

В настоящее время при рассмотрении задач такого рода обычно используются алгоритмы, базирующиеся на непосредственном применении в динамических задачах оценивания условий метода максимального правдоподобия (ММП) или метода наименьших квадратов (МНК) [1–4, 9–11 и др.]. По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

В работах авторов [5–8] предложен новый вариационный подход к задачам статистического оценивания нелинейных динамических систем, который основывается на получении и использовании необходимых условий оптимальности оценок вариационного типа.

Данная статья посвящена вопросам применения указанного вариационного подхода к решению комплексной задачи, предусматривающей совместное оценивание параметров состояния нелинейных динамических систем и параметров модели измерений по критерию максимального правдоподобия. При этом определяются необходимые условия оптимальности вариационных оценок применительно к моделям дискретных измерений для класса уни-модальных законов распределения ошибок измерений, а также дается их конкретизация при многомерном нормальном законе распределения ошибок измерений.

1. Постановка задачи

Достаточно общая задача оценивания параметров движения динамического объекта заключается в наилучшем в некотором смысле определении n -мерного вектора его исходного состояния \mathbf{x}_0 на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_j , заданных на интервале измерений $\tau = T - t_0$. В расширенной постановке одновременно требуется оценить и некоторый p -мерный вектор \mathbf{c} параметров модели измерений.

В качестве базовой рассмотрим следующую задачу оптимального оценивания.

Задача. Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, T].$$

Измерениям подвергается m -мерный вектор

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}].$$

Измеренное значение вектора $\boldsymbol{\psi}$ в момент t_i обозначим $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\mathbf{y}(t_i) = \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}] + \boldsymbol{\delta}_i, \\ t_i \in [t_0, T]; i = \overline{1, N}.$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}_i$ — m -мерный вектор случайных ошибок измерений, стохастическое изменение которого зададим некоторым многомерным непрерывным дифференцируемым распределением $f(\boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ с параметрами $\boldsymbol{\alpha}_i$, отличающимся в общем случае от нормального распределения.

Требуется найти такие оценки векторов \mathbf{x}_0 и \mathbf{c} , которые обеспечивают максимальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^N \rho_i \{ \mathbf{y}(t_i), \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}], \boldsymbol{\alpha}_i \}, \quad (1)$$

где

$$\rho_i = \ln f_i \{ \mathbf{y}(t_i) - \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}], \boldsymbol{\alpha}_i \}, \\ i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ и $\boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения.

Нетрудно видеть, что функционал (1) есть не что иное, как логарифмическая функция правдоподобия.

Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

2. Вариационные условия оптимальности оценок

Для решения поставленной задачи представим функционал (1) в эквивалентной интегральной форме. Для этого введем функцию

$\rho\{\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}], \boldsymbol{\alpha}(t)\} = \ln f\{\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}], \boldsymbol{\alpha}(t)\}$, где $\mathbf{y}(t)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t)$ — произвольные непрерывные дифференцируемые вектор-функции, принимающие в моменты t_i , соответственно, значения \mathbf{y}_i и $\boldsymbol{\alpha}_i$ (например, полиномы Лагранжа).

Тогда для функционала (1) получим выражение

$$I = \int_{t_0}^T \rho\{\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]\} \sum_{i=1}^N \delta(t - t_i) dt,$$

где $\delta(t - t_i)$ — импульсная дельта-функция.

Расширим затем пространство состояний путем введения дополнительного вектора $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{c}$ и системы

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_1, t) \equiv 0; \\ \mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{c}.$$

Применяя далее стандартную процедуру вариационного исчисления, по аналогии с [5] приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Оптимальные оценки векторов \mathbf{x}_0, \mathbf{c} и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t); \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rho\{\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), t\}\right]^T \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i); \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \rho\{\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), t\}\right]^T \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i), \end{cases}$$

при граничных условиях

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}(T) = 0; \boldsymbol{\mu}(t_0) = \boldsymbol{\mu}(T) = 0.$$

Эта краевая задача выражает необходимые условия оптимальности вариационного типа метода максимального правдоподобия для рассматриваемой расширенной постановки задачи оценивания.

Отметим особенность интегрирования сопряженной системы, которая определяется наличием в правых частях дифференциальных уравнений импульсных дельта-функций. Это вызывает в моменты t_i скачкообразное изменение соответствующих сопряженных переменных на величины производных от критериальной функции ρ по вектору текущего состояния динамического процесса \mathbf{x} и вектору параметров модели измерений \mathbf{c} :

$$\boldsymbol{\lambda}(t_i^+) = \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) + \Delta \boldsymbol{\lambda}(t_i);$$

$$\boldsymbol{\mu}(t_i^+) = \boldsymbol{\mu}(t_i^-) + \Delta \boldsymbol{\mu}(t_i),$$

где

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}(t_i) = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rho\{\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}\right]^T;$$

$$\Delta \boldsymbol{\mu}(t_i) = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \rho\{\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}\right]^T; i = \overline{1, N}.$$

С учетом скачков сопряженных переменных теорему 1 можно переформулировать в следующем эквивалентном виде.

Теорема 2. Оптимальные оценки векторов \mathbf{x}_0, \mathbf{c} и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t); \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda}; \dot{\boldsymbol{\mu}} = 0$$

при граничных условиях

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}(T) = 0; \boldsymbol{\mu}(t_0) = \boldsymbol{\mu}(T) = 0;$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_i^+) = \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rho\{\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}\right]^T;$$

$$\boldsymbol{\mu}(t_i^+) = \boldsymbol{\mu}(t_i^-) + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \rho\{\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}\right]^T.$$

В этих выражениях функция $\rho[\cdot]$ определяется согласно (2).

Приведенные выше условия оптимального оценивания нетрудно конкретизировать применительно к заданному виду распределения вектора случайных ошибок измерений.

Так, если для вектора δ_i принимается нормальное распределение $N(0, \mathbf{K}_{\delta_i})$ с нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей \mathbf{K}_{δ_i} , что, как правило, имеет место на практике, при совместном оценивании векторов \mathbf{x}_0 и \mathbf{c} из условий теоремы 2 приходим к следующей краевой задаче:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t); \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda}; \dot{\boldsymbol{\mu}} = 0,$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}(T) = 0; \boldsymbol{\mu}(t_0) = \boldsymbol{\mu}(T) = 0;$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_i^+) = \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(t_i)}{\partial \mathbf{x}_i}\right]^T \mathbf{K}_{\delta_i}^{-1} \{\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\Psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\};$$

$$\boldsymbol{\mu}(t_i^+) = \boldsymbol{\mu}(t_i^-) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(t_i)}{\partial \mathbf{c}}\right]^T \mathbf{K}_{\delta_i}^{-1} \{\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\Psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\},$$

$$i = \overline{1, N}.$$

Согласно приведенным выше вариационным условиям для получения оптимальных совместных оценок векторов \mathbf{x}_0 и \mathbf{c} необходимо решить систему нелинейных краевых уравнений

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, T) = 0; \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, T) = 0,$$

заданных неявно на процедурах интегрирования сопряженных систем дифференциальных уравнений. Для этого можно применить известные численные методы поиска корней нелинейных уравнений, например, метод Ньютона, его модификации и др.

В заключение отметим, что предлагаемые методические средства могут быть использованы при разработке и модернизации алгоритмов оптимального статистического оценивания нелинейных динамических объектов различных типов в составе автоматизированных комплексов обработки наблюдений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-08-00259).

Список литературы

1. **Бажин И. К., Алешин В. И., Почукаев В. Н., Поляков В. С.** Космическая навигация. М.: Машиностроение, 1975. 352 с.
2. **Брандин Н. К., Разоренов Г. Н.** Определение траекторий КА. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
3. **Космические** траекторные измерения / Под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. М.: Сов. Радио, 1969. 504 с.
4. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. 350 с.
5. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Вариационное оценивание состояния нелинейной динамической системы по критерию максимального правдоподобия // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 11. С. 2–6.
6. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Адекватность прямого и вариационного подходов в задачах оценивания состояния нелинейных динамических систем при гауссовских ошибках измерений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 11. С. 9–11.
7. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Вариационное оценивание параметров движения космических аппаратов по критерию максимального правдоподобия // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 70–73.
8. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Учет априорной информации при вариационном оценивании состояния нелинейных динамических систем и гауссовских ошибках измерений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 10. С. 7–10.
9. **Мудров В. И., Кушко В. П.** Методы обработки измерений. М.: Сов. радио, 1976. 190 с.
10. **Основы** теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравов. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
11. **Статистические** методы обработки результатов наблюдений / Под ред. Р. М. Юсупова. М.: МО СССР, 1984. 563 с.

ИНФОРМАЦИЯ

5–8 июня 2012 г. в Москве в ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН состоится

XII международная конференция

"Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (конференция Пятницкого)

Тематические направления:

- Общие вопросы теории устойчивости и стабилизации движения.
- Общие вопросы и методы теории нелинейных колебаний.
- Методы функций Ляпунова для нелинейных систем управления и метод Гамильтона-Якоби-Ляпунова-Беллмана в теории оптимального управления и в игровых задачах управления.
- Гладкая и негладкая динамика.
- Проблемы управляемости и наблюдаемости систем управления.
- Проблемы робастного управления.
- Управление механическими системами.
- Устойчивость и управление гибридными системами и системами с переключениями.
- Прикладные задачи управления и компьютерные методы.

Подробную информацию о конференции см. на сайте:
<http://www.stab12.ru>

И. Ф. Чебурахин, д-р техн. наук, проф.,
cybernetics@mati.ru,
МАТИ-РГТУ им. К. Э. Циолковского, Москва

Математические модели для минимизации и автоматизации синтеза дискретных управляющих систем*

Исследуется задача реализации булевых функций в классе формул и схем из функциональных элементов (ФЭ) в разных базисах. Предлагается конструктивный метод синтеза на основе функциональных уравнений, сопровождаемый получением заранее аналитически верхних оценок различных показателей сложности (по числу подформул и глубине суперпозиционной формулы; по числу ФЭ и глубине схемы). При реализации произвольной булевой функции в базисе Жегалкина выводится структура оценивающего функционала по сложности.

Ключевые слова: булевы функции, синтез формул и схем, декомпозиция, сложность, минимизация, функциональные и разностные уравнения

Введение

Рассматривается задача реализации булевых функций (БФ) в классах формул и схем из функциональных элементов (ФЭ) в разных базисах. Получаемые при этом схемы применяются в дискретных логических устройствах обработки информации и управления, от сложности и качества которых зависят основные характеристики вычислительной и управляющей техники [1–5].

Проводимые исследования в этой области показывают, что получение оптимального решения неизбежно предполагает использование алгоритмов переборного характера. Следствием этого является большая трудоемкость поиска такого решения уже для функций небольшой размерности. Это, в свою очередь, приводит к разработке новых подходов к постановке задачи и ее решению, заметно отличающихся по трудоемкости от переборных. Так, в работах [1–5] создана теория локальных алгоритмов оптимизации, алгоритмов вычисления оценок, алгебраическая теория алгоритмов и показано, что можно даже в явном виде строить экстремальные по качеству алгоритмы для решения очень широких классов трудно формализуемых задач.

Зависимость между минимальными значениями глубины и сложности эквивалентных формул изучалась в работах [6, 7], и были получены верхние оценки для глубины БФ. Представляя линейную функцию схемой из ФЭ, в работе [8] аналитически

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N 09-01-90441 Укр Ф.

получили показатель сложности по числу ФЭ в схеме и доказали его минимальность.

Если алгоритм управления содержит только булевы операции, то назовем его алгоритмом логического управления (АЛУ). Таким образом, простейшими моделями АЛУ являются булевы функции. Такие модели надо изучать, из них надо уметь строить сложные математические модели.

Ниже будут использованы следующие обозначения [9–15]:

$\lceil x \rceil$ для приближения чисел с избытком (наименьшее целое, не меньшее числа x); следующие логические операции обозначаются двумя способами: конъюнкция — "&" или "·" (точка — знак умножения — может также применяться для обозначения арифметического умножения); отрицание — подчеркивание над переменной или "¬", например, \bar{x} или $\neg x$.

1. Булевы переменные, булевы функции, базисы, формулы, схемы из ФЭ, функциональные уравнения, показатели сложности

Введем обозначения: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество булевых переменных; $f(f^{(n)}$ или $f(X)$) — БФ, зависящая от n существенных переменных из множества X . Под базисом G понимаем конечную функционально полную систему БФ (или соответствующих ФЭ), т. е. $G = \{g_i | i = 1, 2, \dots, k\}$. В приложениях часто рассматривают базисы $G_1 = \{\&, \vee, \neg\}$ и $G_3 = \{\&, \oplus, 0, 1\}$ для всех БФ и $G_2 = \{\&, \vee\}$ — для монотонных функций. Считаем что, функция $f^{(n)}$ задается формулой $F^{(n)}$ в базисе G .

Для сравнения БФ вводится понятие строения формулы (типа ДНФ, полином Жегалкина и др.) как невозрастающей последовательности (вектора) рангов элементарных конъюнкций (ЭК). Отношение " \geq " упорядочивает множество рангов конкретной формулы.

При представлении БФ $f^{(n)}$ суперпозиционной формулой (СФ) $F_{\text{СФ}}^{(n)}$ в базисе G применяются, в основном, общепринятые конструктивные операции из некоторого их множества W (вынесение за скобки общих множителей и др.) [9–11]. Для метода представления БФ в каком-то классе получаем последовательность (вектор) $w^{(j)}$ из элементарных конструктивных операций. Они поясняются, поэтому ниже, в основном, обозначения последовательности проводимых операций опускаем. В качестве меры сложности — качества представления функции f формулой F или схемой S из ФЭ — определяем соответствующие показатели (дискретные функционалы): $L_G(f, G)$ — суммарное число вхождений символов переменных (букв) в формулу $F_{\text{СФ}}$, реализующую функцию f в базисе G ; $L_F(f, G)$ — число подформул (базисных) в $F_{\text{СФ}}$; $Dep_F(f, G)$ — глубина $F_{\text{СФ}}$; $L_S(f, G)$ — число ФЭ в схеме S , реализующей функцию f ; $Dep_S(f, G)$ — глубина S , определяемая как наибольшее число ФЭ в цепочке среди всех цепочек, соединяющих вход с выходом.

По практическим соображениям показатели сложности (функционалы) минимизируем. При представлении функций в классе формул для минимизации показателей сложности используются эквивалентные преобразования, особо выделяется получение скобочных формул $F_{ск}$. В классе схем для минимизации числа ФЭ дополнительно применяется ветвление их выходов [1–5, 11].

Сложностью $L_S(f, G)$ БФ f в классе схем из ФЭ в базисе G называется минимальная сложность схемы S среди всех схем, реализующих f . Для практики может быть полезным определить ее через сложность формулы F в базисе G .

Пусть $F^{(n)}$ — формула в базисе G . Для этой формулы можно разными способами $\mathbf{w}^{(j)}$ синтезировать схемы из ФЭ. Для каждого способа $\mathbf{w}^{(j)}$ синтеза схемы получаем значение показателя сложности $L_S^{(j)}(f, G, \mathbf{w}^{(j)})$. Для формулы $F^{(n)}$, представляемой суперпозицией базисных функций, всегда существует способ синтеза схемы S из ФЭ. Далее используем ветвление определенных выходов ФЭ в целях уменьшения их числа в схеме. Получаемая схема S характеризуется числом ФЭ в ней. Наименьшее такое число для всех формул, эквивалентных формуле $F^{(n)}$, назовем сложностью формулы $F^{(n)}$ в классе схем из ФЭ (в базисе G), получаемой способом $\mathbf{w}^{(j)}$. Таким образом, полученная сложность формулы $F^{(n)}$ является, по сути, сложностью функции $f^{(n)}$ в базисе G в классе схем из ФЭ

$$L_S(f^{(n)}, G) = L_S(F^{(n)}, G, \mathbf{w}^{(j)}),$$

где в левой части находится исследуемая функция, а в правой части — формула, вид которой зависит от способа $\mathbf{w}^{(j)}$ преобразования. Применяются также сокращенные варианты этих обозначений. Для эквивалентных формул значения показателей сложности могут различаться, что используется для минимизации показателя $L_S(F, G, \mathbf{w}^{(j)})$. Между собой эти показатели имеют сложные связи, они по-разному влияют на другие показатели качества (ПК) синтезируемых схем.

Функциональные уравнения (ФУ). Рассмотрим несколько определений разных типов ФУ, относящихся к новым методам [12–17].

Пусть $g^{(2)}$ — двухместная БФ (одна из базисных функций), задающая начальный член $f^{(2)}$ последовательности изучаемого класса функций $f^{(n)}(X)$, $n \geq 2$, и $h^{(2)}$ — функция рекурсии, входящая в базис G или представляемая через базисные функции. Тогда рекуррентное соотношение, получаемое на основе операции суперпозиции,

$$f^{(n_1+n_2)}(X) = h(f^{n_1}(X_1), f^{n_2}(X_2)), \quad (1.1)$$

где $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n = n_1 + n_2$, назовем основным функциональным уравнением, несмотря на частный характер местности базисных функций $g^{(2)}$ и $h^{(2)}$. На основе (1.1) получаются также ФУ для показателей качества (ФУ_{ПК}). Данное определение ФУ отлично от данного в работе [10].

- При $n_1 = n - 1$, $n_2 = 1$ получаем ФУ типа 1

$$f^{(n)} = h(f^{(n-1)}, x_n); \quad (1.2)$$

- для симметрических функций при $n = 2^s$, $s = 1, 2, \dots$, $n_1 = n_2 = n/2$ получаем ФУ типа 2

$$f^{(n)}(X) = h(f^{(n/2)}(X_1), f^{(n/2)}(X_2)), \quad (1.3)$$

- при $n_1 = n - 2$, $n_2 = 2$ получаем ФУ типа 3

$$f^{(n)} = h^{(3)}(f^{(n-2)}, x_{n-1}, x_n), \quad (1.4)$$

где $h^{(3)}$ — трехместная булева функция.

Сложность произвольной булевой функции на основе ФУ (канонический случай). Применим метод ФУ для реализации произвольной БФ $f^{(n)} \in P_2^{(n)}$ в базисе G_3 и получении при этом верхней оценки сложности L_F . БФ $f^{(n)}$ зависит от переменных из множества $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ и задается полиномом Жегалкина $F^{(n)} = K_1 \oplus \dots \oplus K_i \oplus \dots \oplus K_m$, где K_i — монотонная ЭК ранга r_i , причем $r_1 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \geq r_m$, $1 \leq i \leq m$. Вектор $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_m)$ задает строение полинома Жегалкина. При этом определяем еще вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$ повторяемости переменных из множества X в формуле $F^{(n)}$, т. е. переменная x_i , $1 \leq i \leq n$, повторяется в формуле $F^{(n)}$ p_i раз.

Находим $p_i = \max(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$, $1 \leq i \leq n$. Тогда ФУ (1.2) имеет вид

$$F^{(n)} = ((x_i \cdot F_0^{(n-1)}) \oplus F_1^{(n-1)}), \quad (1.5)$$

где нижние индексы 0 и 1 — номера соответствующих остаточных функций, рассматриваемых на одном множестве $X' = X \setminus \{x_i\}$. Будем их записывать соответственно как $F^{(n-1), 0}$ и $F^{(n-1), 1}$.

Применяя к $F^{(n-1), 0}$ и $F^{(n-1), 1}$ ФУ (1.5), затем повторяя процедуру для полученных функций и так далее, получим $F_{CF}^{(n)}$. Каждое применение ФУ (1.5) порождает не более двух базисных функций из G_3 и не более двух остаточных функций $F^{(n-1), 0}$ и $F^{(n-1), 1}$. Используя последовательно ФУ (1.5) и суммируя значения сложности L_F , выводим верхнюю оценку сложности для общего случая:

$$\begin{aligned} L_F(F^{(n)}, G_3) &= L_F(F^{(n-1), 0}) + L_F(F^{(n-1), 1}) + 2 = \\ &= L_F(F^{(n-2), 00}) + L_F(F^{(n-2), 01}) + \\ &+ L_F(F^{(n-2), 10}) + L_F(F^{(n-2), 11}) + 6 = \dots = \\ &= \Sigma_{[*]} L_F(F^{(n-j)}, [j]) + 2(2^j - 1), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где j — число шагов декомпозиции ($1 \leq j \leq n$); $[j]$ — последовательность символов 0 или 1 длиной j ; $[*]$ — суммирование сложностей, выполняемое для шага j , по всем остаточным функциям, число которых после каждого шага может удваиваться.

Используя теорему о полноте системы БФ, можно получать оценки L_F сложности функций в других базисах [11].

Заметим, что рекуррентное соотношение (1.5) применяется для получения формулы $F_{CF}^{(n)}$, а (1.6) —

для получения соответствующей оценки сложности $L_F(F_{\text{СФ}}^{(n)}, G_3)$.

Преобразуя эквивалентно формулу $F^{(2)}$, всегда можно получить $L_F(F^{(2)}, G_3) \leq 3$. Если j (число шагов декомпозиции) выбрать равным $n - 2$, то из (1.6) для общего случая выводим верхнюю оценку сложности:

$$L_F(F^{(n)}, G_3) = L_F(F^{(2)}, 0\dots00) + L_F(F^{(2)}, 0\dots01) + \\ + L_F(F^{(2)}, 0\dots10) + \dots + L_F(F^{(2)}, 1\dots11) + \\ + 2(2^{n-2} - 1) \leq 3 \cdot 2^{n-2} + 2(2^{n-2} - 1) = \\ = 5 \cdot 2^{n-2} - 2 = (5/4) \cdot 2^n - 2.$$

Итак, при реализации произвольной БФ $f^{(n)} \in P_2^{(n)}$ в базисе G_3 получена верхняя оценка показателя сложности

$$L_F(F_{\text{СФ}}^{(n)}, G_3) = (5/4) \cdot 2^n - 2. \quad (1.7)$$

Погрешность получаемой оценки (1.7) может быть большой (см. пример 1.1). Поэтому предлагается следующий способ определения искомой величины.

Алгоритм вычисления оценки L_F . Рассмотрим кратко структуру и функционирование разработанного алгоритма, позволяющего численно получать верхнюю оценку или минимальное значение сложности L_F на основе ФУ (1.5) в базисе G_3 .

К обоснованию алгоритма. Исходная функция (и получаемые остаточные) $F^{(n)}$ в общем случае разбивается на две более простые по сравнению с ней и две базисные (двухместные), соединяющие первые функции и выделяемую переменную x_i , в одну формулу. Процесс продолжается, пока все остаточные функции естественным образом (на основе декомпозиции) не перейдут в разряд реализованных. Так будет получена формула $F_{\text{СФ}}^{(n)}$ и оценка $L_F(F^{(n)}, G_3)$.

Для более эффективного применения ФУ используется:

- классификация БФ (входных данных) и разработка для каждого класса определенных методов;
- математико-информационные специальные матрицы для минимизации вычислительной сложности при работе с полиномами Жегалкина;
- специальная структура полинома;
- векторы повторения переменных в полиноме. Особенностью алгоритма является использование на каждом шаге переменной с максимальной повторяемостью.

По мере выполнения алгоритма число остаточных функций удваивается, а сами функции упрощаются. При этом число базисных функций, соединяющих их в одну формулу, увеличивается.

Алгоритм на основе ФУ (1.5) относится к алгоритмам градиентного типа, он позволяет строить формулу $F_{\text{СФ}}^{(n)}$, реализующую функцию $f^{(n)}$, возможно, с минимальным значением показателя L_F

за число шагов j , $1 \leq j \leq n$. Его применение иллюстрируется примером 1.1.

Результатами работы алгоритма — программы являются:

- показатель сложности L_F ;
- число выполненных операций $N_{\text{оп}}$.

Пример 1.1. Функцию $f^{(7)}$, задаваемую полиномом Жегалкина $F^{(7)} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \oplus \oplus x_1 \cdot x_6 \oplus x_7$, строения $\mathbf{r} = (4, 3, 2, 1)$ реализовать в базисе G_3 , минимизируя показатель сложности L_F .

Составим табл. 1.1 повторяемости переменных x_i , $1 \leq i \leq 7$, в формуле $F_{\text{СФ}}^{(7)}$.

Выполним эквивалентные преобразования формулы $F^{(7)}$ в соответствии с ФУ (1.5):

$$F^{(7)} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \oplus x_1 \cdot x_6 \oplus x_7 = \\ = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_5 \oplus x_6) \oplus x_7 = \\ = x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4 \oplus x_5) \oplus x_6) \oplus x_7 = \\ = x_1 \cdot (x_2 \cdot ((x_3 \cdot x_4) \oplus x_5) \oplus x_6) \oplus x_7 = F_{\text{СФ}}^{(7)},$$

где

$$F^{(6), 0} = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_5 \oplus x_6, \quad F^{(6), 1} = x_7, \\ F^{(5), 00} = x_3 \cdot x_4 \oplus x_5, \quad F^{(5), 01} = x_6, \\ F^{(4), 000} = x_4, \quad F^{(4), 001} = x_5.$$

В соответствии с определением (1.5) выполнена декомпозиция функции $f^{(7)}$ и искомая формула $F^{(7)}$ представлена в базисе G_3 с минимальной сложностью $L_F(F_{\text{СФ}}^{(7)}, G_3)_{\text{min}} = 6$. При этом здесь однозначно определен порядок вычисления формулы $F^{(7)}$. Получена неповторная скобочная формула $F_{\text{СФ}}$, задача минимизации показателя L_F решена. Нижняя строка табл. 1.1 отмечает повторяемость переменных в скобочной формуле.

Представим алгоритм и результаты реализации в табл. 1.2.

Таблица 1.1

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
p_i	3	2	1	1	1	1	1
$p_i^{\text{ск}}$	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 1.2

Шаги декомпозиции j (всего $j = 3$)	По шагам вычисление формулы $F^{(7)}$ в базисе G_3	Пояснения
3-й шаг	$g_{\&1} = x_3 \cdot x_4$ $g_{\&2} = g_{\&1} \oplus x_5$	Функции разложения записываются в специальной таблице
2-й шаг	$g_{\&3} = x_2 \cdot g_{\&2}$ $g_{\&4} = g_{\&3} \oplus x_6$	
1-й шаг	$g_{\&5} = x_1 \cdot g_{\&4}$ $F^{(7)} = g_{\&6} = g_{\&5} \oplus x_7$	
Конец работы алгоритма		

Замечание 1.1. На основе примера 1.1 можно строить счетные классы БФ, задаваемых полиномами Жегалкина определенного строения, доказывая возможность реализации с минимальной оценкой L_F методом математической индукции. В качестве простого ближайшего примера предлагается функция строения $\mathbf{r} = (5, 4, 3, 2, 1)$, т. е.

$$F^{(9)} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \oplus \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_7 \oplus x_1 \cdot x_8 \oplus x_9 = x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot ((x_4 \cdot x_5) \oplus \oplus x_6) \oplus x_7) \oplus x_8) \oplus x_9 = F_{\text{СФ}}^{(9)}.$$

Минимум показателя $L_F(F^{(9)}, G_3)_{\min} = 8$.

Аналитически и из табл. 1.3 следует, что при возрастании n показатель L_6 (сложность по числу букв), число шагов и число (минимальное) базисных функций увеличиваются (столбцы 1, ..., 4), но прогнозируемые оценки сложности различаются сильнее (столбец 5). Поэтому потребность в минимизации показателей L_6 и L_F очевидна.

Таблица 1.3 (к примеру 1.1)

n — число пере- менных	L_6 — сложность по числу букв	j — число шагов	$L_F(F^{(n)}, G_3)_{\min}$	$L_F(F_{\text{СФ}}^{(n)}, G_3) =$ $= (5/4) \cdot 2^n - 2$
1	2	3	4	5
7	10	3	6	158
9	15	4	8	638

Сложность представления булевых функций из отдельных классов (получение, преобразование и применение ФУ (1.5) [12—15]).

- ♦ Класс функций "&" ($F_{\&}^{(n)} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$).

Получение формулы $F^{(n)}$ и сложности L_F :

$$F_{\&}^{(n)} = (x_1 \cdot F_{\&}^{(n-1), 0});$$

$$F_{\&}^{(n-1), 0} = (x_2 \cdot F_{\&}^{(n-2), 00}), \dots;$$

$$F_{\&}^{(n)} = (x_1 \cdot F_1^{(n-1), 0}) = (x_1 \cdot (x_2 \cdot F_1^{(n-2), 00})) = \dots$$

$$\text{Итого: } F_{\&}^{(n)} = (x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot \dots \cdot x_n))),$$

$$L_F(F_{\&}^{(n)}, G_3)_{\min} = n - 1.$$

- ♦ Класс функций "⊕" ($F_{\oplus}^{(n)} = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$).

Получение формулы $F^{(n)}$ и сложности L_F :

$$F_{\oplus}^{(n)} = (x_1 \oplus F_{\oplus}^{(n-1), 1});$$

$$F_{\oplus}^{(n-1), 1} = (x_2 \oplus F_{\oplus}^{(n-2), 11});$$

$$F_{\oplus}^{(n)} = (x_1 \oplus F_{\oplus}^{(n-1), 1}) = (x_1 \oplus (x_2 \oplus F_{\oplus}^{(n-2), 11})) = \dots$$

$$\text{Итого: } F_{\oplus}^{(n)} = (x_1 \oplus (x_2 \oplus (x_3 \oplus \dots \oplus x_n))),$$

$$L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_3)_{\min} = n - 1.$$

- ♦ Класс функций "∨" ($F_{\vee}^{(2)} = x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus \oplus x_1 \oplus x_2; G_1 \rightarrow G_3$).

1. Сложность L_F формулы $F_{\vee}^{(n)}$ в базисе G_1 .

$$\text{Итого: } L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_1)_{\min} = n - 1.$$

2. ФУ в G_3 : $F_{\vee}^{(n)} = x_1 \cdot F_{\vee}^{(n-1)} \oplus x_1 \oplus F_{\vee}^{(n-1)} = (x_1 \cdot F_{\vee}^{(n-1)}) \oplus (x_1 \oplus F_{\vee}^{(n-1)})$.

- Класс формул:

$$\text{ФУ}_{\text{ПК}}: L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 2L_F(F_{\vee}^{(n-1)}, G_3) + 3.$$

Разностное уравнение $u_n = 2u_{n-1} + 3, u_2 = 3$, его решение $u_n = 3 \cdot 2^n / 2 - 3, n \geq 2$.

$$\text{Итого: } L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 3 \cdot 2^n / 2 - 3.$$

- Схемы с ветвлением:

$$\text{ФУ}_{\text{ПК}}: L_S(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = L_S(F_{\vee}^{(n-1)}, G_3) + 3.$$

Разностное уравнение $u_n = u_{n-1} + 3, u_2 = 3$, его решение $u_n = 3(n - 1), n \geq 2$.

$$\text{Итого: } L_S(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 3(n - 1).$$

- ФУ_{ПК}: $Dep_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = Dep_F(F_{\vee}^{(n-1)}, G_3) + 2$.

Разностное уравнение $u_n = u_{n-1} + 2, u_2 = 2$, его решение $u_n = 2(n - 1), n \geq 2$.

$$\text{Итого: } Dep_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 2(n - 1).$$

3. Класс формул $G_1 \rightarrow G_3$.

$$\text{ФУ: } F_{\vee}^{(n)} = x_1 \cdot F_{\vee}^{(n-1)} \oplus x_1 \oplus F_{\vee}^{(n-1)} = (x_1 \oplus 1) \cdot F_{\vee}^{(n-1)} \oplus x_1,$$

$$\text{ФУ}_{\text{ПК}}: L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = L_F(F_{\vee}^{(n-1)}, G_3) + 3.$$

Для показателей L_F и Dep_F разностные уравнения и начальные условия совпадают: $u_n = u_{n-1} + 3, u_2 = 3$.

Решение уравнения $u_n = 3(n - 1), n \geq 2$.

$$\text{Итого: } L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 3(n - 1), Dep_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 3(n - 1).$$

4. Эквивалентные преобразования ФУ

$$(F_{\vee}^{(n)}, G_1 \rightarrow G_3).$$

- Преобразования ФУ типа 1.

$$\text{ФУ: } F_{\vee}^{(n)} = \neg \neg (F_{\vee}^{(n-1)} \vee x_n) =$$

$$= (x_n \oplus 1) \cdot (F_{\vee}^{(n-1)} \oplus 1) \oplus 1.$$

$$\text{ФУ}_{\text{ПК}}: L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = L_F(F_{\vee}^{(n-1)}, G_3) + 4,$$

Разностное уравнение $u_n = u_{n-1} + 4, u_2 = 4$, его решение $u_n = 4(n - 1), n \geq 2$.

$$\text{Итого: } L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 4(n - 1).$$

- Метод структуризации.

Используя эквивалентность

$$f_{\vee}^{(2)} = x_1 \vee x_2 = (x_1 \oplus 1) \& (x_2 \oplus 1) \oplus 1,$$

получаем функцию с эффективной структурой

$$f_{\vee}^{(n)} = (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \cdot \dots \cdot (x_n \oplus 1) \oplus 1,$$

благодаря которой находим $L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = n + (n - 1) + 1 = 2n$ (применяется n операций " \oplus ", $(n - 1)$ операция "&" и еще одна операция " \oplus ").

$$\text{Итого: } L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = 2n.$$

- ♦ Класс функций " \oplus " ($F_{\oplus}^{(2)} = x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot (-x_2) \vee (-x_1) \cdot x_2$; $G_3 \rightarrow G_1$).

Получение ФУ_{ПК} показателя сложности L_F .

1. На основе преобразования ФУ типа 1 (способ 1).

$$\text{ФУ: } F_{\oplus}^{(n)} = x_1 \oplus F_{\oplus}^{(n-1)} =$$

$$= (x_1 \cdot (-F_{\oplus}^{(n-1)})) \vee ((-x_1) \cdot F_{\oplus}^{(n-1)}).$$

$$\text{ФУ}_{\text{ПК}}: L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = 2L_F(F_{\oplus}^{(n-1)}, G_1) + 5.$$

Разностное уравнение $u_n = 2u_{n-1} + 5$, $u_2 = 5$, его решение $u_n = 5 \cdot 2^n / 2 - 5$, $n \geq 2$.

$$\text{Итого: } L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = 5 \cdot 2^n / 2 - 5.$$

2. На основе преобразования ФУ типа 1 (способ 2), $G_3 \rightarrow G_1$.

$$\text{ФУ: } F_{\oplus}^{(n)} = x_1 \oplus F_{\oplus}^{(n-1)} =$$

$$= \neg (x_1 \cdot F_{\oplus}^{(n-1)}) \cdot (x_1 \vee F_{\oplus}^{(n-1)}).$$

$$\text{ФУ}_{\text{ПК}}: L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = 2L_F(F_{\oplus}^{(n-1)}, G_1) + 4.$$

Разностное уравнение $u_n = 2u_{n-1} + 4$, $u_2 = 4$, его решение $u_n = 2^{n+1} - 4$, $n \geq 2$.

$$\text{Итого: } L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = 2^{n+1} - 4.$$

3. Схемы с ветвлением, на основе преобразования ФУ типа 1 (способ 2).

$$\text{ФУ: } F_{\oplus}^{(n)} = x_1 \oplus F_{\oplus}^{(n-1)} =$$

$$= \neg (x_1 \cdot F_{\oplus}^{(n-1)}) \cdot (x_1 \vee F_{\oplus}^{(n-1)}).$$

$$\text{ФУ}_{\text{ПК}}: L_S(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = L_S(F_{\oplus}^{(n-1)}, G_1) + 4.$$

Разностное уравнение $u_n = u_{n-1} + 4$, $u_2 = 4$, его решение $u_n = 4(n - 1)$, $n \geq 2$.

$$\text{Итого: } L_S(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = 4(n - 1), \text{ Dep}_S(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = 3(n - 1).$$

4. Задание функции полиномом Жегалкина.

Преобразование полинома ($G_3 \rightarrow G_1$)

$$f_{\oplus}^{(n)} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \oplus \dots \oplus x_1 \dots \oplus x_n \oplus 1 = (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \cdot \dots \cdot (x_n \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= \neg(-x_1 \cdot (-x_2) \cdot \dots \cdot (-x_n)) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n.$$

$$\text{Итого: } L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = L_S(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = n - 1.$$

Сравнение оценок показателей сложности и базисов. Сравнение оценок показателей сложности в разных базисах:

$$L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) / L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) = 2n/n = 2;$$

$$L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) / L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_3) = (2^{n+1} - 4) / (n - 1).$$

Сравнение оценок показателей сложности разных функций в одном базисе:

$$L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) / L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_1) = (2^{n+1} - 4) / (n - 1),$$

$$L_F(F_{\oplus}^{(n)}, G_1) / L_F(F_{\vee}^{(n)}, G_3) = (n - 1) / (2n).$$

2. Сложность булевых функций из класса импликаций

Функции из класса импликаций. Имеются две элементарные импликации: импликация x_1 и x_2

($g_{\rightarrow}^{(2)} = x_1 \rightarrow x_2$, т. е. левая импликация, ЛИ) и импликация x_2 и x_1 ($g_{\leftarrow}^{(2)} = x_2 \rightarrow x_1 = x_1 \leftarrow x_2$, т. е. правая

импликация, ПИ). Каждая из них является базисной функцией для своего класса (здесь использованы другие обозначения по сравнению с работами [10, 14–16]). Они несимметрические, одна из них получается из другой с помощью перестановки переменных. Поэтому на их основе определим две канонические суперпозиционные формулы $F_{\text{ЛИ}}$ и $F_{\text{ПИ}}$, $n \geq 2$, строение [9] которых полностью определяет формулу и схему и вычисления в них:

$$f_{\text{ЛИ}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{\text{ЛИ}}^{(n)} =$$

$$= (\dots((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1}) \rightarrow x_n; \quad (2.1)$$

$$f_{\text{ПИ}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{\text{ПИ}}^{(n)} =$$

$$= x_n \rightarrow (x_{n-1} \rightarrow (x_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1) \dots)). \quad (2.2)$$

Используя начальный порядок переменных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, получаем: формулу $F_{\text{ЛИ}}$ и функцию $f_{\text{ЛИ}}^{(n)}$, которая возглавляет подкласс функций $\Phi_{\text{ЛИ}}$, получаемых из (2.1) с помощью перестановок переменных; формулу $F_{\text{ПИ}}$ и функцию $f_{\text{ПИ}}^{(n)}$, которая возглавляет подкласс функций $\Phi_{\text{ПИ}}$, получаемых из (2.2) с помощью перестановок переменных. Вычисления в формулах при этом выполняются на основе строения слева направо для $F_{\text{ЛИ}}$ и справа налево для $F_{\text{ПИ}}$ [9, 12–14].

Отметим некоторые свойства функций класса импликаций, проверяемые на основе определения (считаем $f_{\text{исх}}^{(n)} = f_{\text{ЛИ}}^{(n)}$ (2.1)):

1) $f_{исх}^{(n)} = f^{(n)}(0, 0, \dots, 0, \dots, 0) =$
 $= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k + 1; \\ 1, & \text{если } n = 2k, \text{ при } k = 1, 2, 3, \dots; \end{cases}$
 2) если $f_{исх}^{(n)}(0, 0, \dots, 0, 0, 0) = \alpha$,
 то $f_{исх}^{(n+1)}(0, 0, \dots, 0, 0, 0) = \neg\alpha, \alpha \in \{0, 1\}$,
 где $f_{исх}^{(n)}$ и $f_{исх}^{(n+1)}$ над множеством $X, |X| = n + 1$;

3) $f_{исх}^{(n)} = f^{(n)}(1, 0, \dots, 0, 0, 0) =$
 $= \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2k + 1; \\ 0, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$
 4) $f_{исх}^{(n)} = f^{(n)}(0, 0, \dots, 0, 0, 1) = 1$ для любого n .
 Это свойство обобщается следующим образом:
 $f_{исх}^{(n)} = f^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, 1) = 1$, поэтому

каждое второе значение функции $f_{исх}^{(n)}$ равно 1. В общем случае в векторе значений функция (2.1) имеет и другие единицы;

5) перестановка переменных x_{n-1} и x_n в формуле $F_{ЛИ}$ дает разные функции $f_{исх}^{(n)}$ и $f_{n,n-1}^{(n)}$, так как уже на втором наборе $(0, 0, \dots, 0, 0, 1)$ значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n$ значения функций различаются — меняются с 1 на 0 (между индексами n и $n-1$ запятая, но где можно, без потери правильного понимания, ее опускаем).

Утверждение 2.1. $|\Phi_{ЛИ}| = n!$.

Выполняя все перестановки переменных в канонической формуле $F_{ЛИ}$, получим число $n!$ таких различных формул (одного строения [20]), задающих такое же множество различных функций. Для доказательства последнего факта достаточно установить, что функции $f_{исх}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \neq f_{ij}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, где i и j — индексы переменных, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j$, и они могут не совпадать с номерами позиций для переменных в формуле. Этот факт будет иметь место, если указать хотя бы один набор значений переменных, на котором функции различны. Докажем утверждение 2.1 индукцией по n . При $n = 2$ истинность утверждения легко проверяется. Предположим, что оно истинно для $n, n \geq 3$, т. е. выполняется неравенство (функции различны)

$$f_{исх}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \neq f_{ji}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Докажем истинность следующего неравенства:

$$f_{исх}^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, x_{n+1}) \neq f_{ji}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

По предположению существует набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n , на котором значения функций $f_{исх}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$ и $f_{ji}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ различны, т. е. принимают противоположные значения, иначе они совпадают.

Рассмотрим функции

$$f_{исх}^{(n+1)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{ЛИ} =$$

$$= (\dots((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \dots \rightarrow x_n) \rightarrow x_{n+1} =$$

$$= f_{исх}^{(n)} \rightarrow x_{n+1} \text{ и}$$

$$f_{ji}^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, x_{n+1}) =$$

$$= f_{ji}^{(n)} \rightarrow x_{n+1}$$

на этом наборе α , т. е.

$$f_{исх}^{(n+1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n, x_{n+1}) \text{ и}$$

$$f_{ji}^{(n+1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n, x_{n+1}).$$

Тогда для функций $f_{исх}^{(n+1)}$ и $f_{ji}^{(n+1)}$ имеют место таблицы истинности (табл. 2.1 и табл. 2.2), причем если в табл. 2.1 $f_{исх}^{(n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0$, то в табл. 2.2 $f_{ji}^{(n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = 1$, и наоборот (из предположения).

Из различия последних столбцов следует различие функций. Утверждение доказано, т. е. число функций, задаваемых формулой типа $F_{ЛИ}$, есть $n!$.

Утверждение 2.2. Число функций, задаваемых формулой $F_{ПИ}$, есть n .

Приводя формулу $F_{ПИ}$ к конъюнктивной нормальной форме в базисе G_1 , получим ее длину, равную единице, т. е. получим одну полную элементар-

Таблица 2.1

$f_{исх}^{(n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$	x_{n+1}	$f_{исх}^{(n+1)}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица 2.2

$f_{ji}^{(n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$	x_{n+1}	$f_{ji}^{(n+1)}$
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	1

ную дизъюнкцию, симметрическую относительно группы $(n - 1)$ переменных, и $C_n^{n-1} = n$ таких различных групп. Фактор-множество множества всех формул $F_{\text{ПИ}}$, получаемых с помощью различных перестановок, по отношению эквивалентности имеет мощность n , т. е. число различных ФБ, задаваемых соответствующими формулами вида $F_{\text{ПИ}}$, есть n .

Утверждение 2.3. $\Phi_{\text{ЛИ}} \cap \Phi_{\text{ПИ}} = \emptyset$.

Приводя формулы $F_{\text{ЛИ}}$ и $F_{\text{ПИ}}$ к конъюнктивной нормальной форме в базисе G_1 , получим формулу: для $F_{\text{ЛИ}}$ — формулу длиной не меньше двух, с повторением переменных; для $F_{\text{ПИ}}$ — формулу длиной, равной единице, без повторения переменных. Поэтому для функций $f^{(n)}$, $n \geq 2$, из подклассов $\Phi_{\text{ЛИ}}$ и $\Phi_{\text{ПИ}}$ достаточно получить лишь соответствующие показатели качества канонических формул (2.1) и (2.2) в разных базисах.

Сложность функций из класса $\Phi_{\text{ЛИ}}$. Получим показатели качества представления функции (2.1) над $G_4 = \{g_{\rightarrow}^{(2)} = x_1 \rightarrow x_2\}$, применяя ФУ типа 1:

$$f^{(n)} = h(f^{(n-1)}, x_n) = (f^{(n-1)} \rightarrow x_n), \quad (2.3)$$

где $f^{(2)} = g_{\rightarrow}^{(2)} = x_1 \rightarrow x_2$, $h^{(2)} = g_{\rightarrow}^{(2)}$, $n \geq 3$. ФУ (2.3) порождает семейство ФУ_{ПК} для рассматриваемых показателей сложности, т. е. на основе (2.3) для различных показателей сложности устанавливаем свои рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} L_6(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= L_6(f^{(n-1)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) + 1; \\ L_F(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= L_F(f^{(n-1)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) + 1; \\ L_S(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= L_S(f^{(n-1)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) + 1; \\ \text{Dep}_F(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= \text{Dep}_F(f^{(n-1)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) + 1; \\ \text{Dep}_S(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= \text{Dep}_S(f^{(n-1)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) + 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

с начальными условиями при $n = 2$ для

$$\begin{aligned} L_6(f^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= 2; L_F(f^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) = 1; \\ L_F(h^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= L_S(f^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) = 1; \\ \text{Dep}_F(f^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= \text{Dep}_S(f^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) = 1; \\ L_S(h^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= 1; \\ \text{Dep}_F(h^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= \text{Dep}_S(h^{(2)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) = 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ФУ_{ПК} (2.4) приводятся к одному разностному уравнению, а именно, $u_n = u_{n-1} + 1$, где $n \geq 3$, которое в зависимости от начальных условий позволяет получить для ФУ_{ПИ} соответствующие реше-

ния аналитически. После интерпретации к своим показателям (2.4) решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} L_6(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= n; L_F(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) = n - 1, \\ \text{Dep}_F(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= n - 1; \\ L_S(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) &= n - 1; \text{Dep}_S(f^{(n)}, g_{\rightarrow}^{(2)}) = n - 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Этот же результат (2.6) следует из неповторности формулы $F_{\text{ЛИ}}$ (2.1) и применяемого метода последовательной декомпозиции, причем это частично демонстрационный пример предложенного подхода, который формализуется ниже в базе знаний.

Сложность в базисе G_1 . Получим показатели сложности представления функции (2.1) в базисе $G_1 = \{\&, \vee, \neg\}$ формулой строения $F_{\text{ЛИ}}$ и схемой S на основе ФУ типа 1:

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= h(f^{(n-1)}, x_n) = (f^{(n-1)} \rightarrow x_n) = \\ &= ((\neg f^{(n-1)}) \vee x_n), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $f^{(2)} = g^{(2)} = (\neg x_1) \vee x_2$, $h^{(2)} = g^{(2)}$, $n \geq 3$.

ФУ (2.7) порождает семейство ФУ_{ПК}

$$\begin{aligned} L_6(f^{(n)}, G_1) &= L_6(f^{(n-1)}, G_1) + 1; \\ L_F(f^{(n)}, G_1) &= L_F(f^{(n-1)}, G_1) + 2; \\ L_S(f^{(n)}, G_1) &= L_S(f^{(n-1)}, G_1) + 2; \\ \text{Dep}_F(f^{(n)}, G_1) &= \text{Dep}_F(f^{(n-1)}, G_1) + 2; \\ \text{Dep}_S(f^{(n)}, G_1) &= \text{Dep}_S(f^{(n-1)}, G_1) + 2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

с начальными условиями при $n = 2$ для уравнений (2.8)

$$\begin{aligned} L_F(f^{(2)}, G_1) &= L_S(f^{(2)}, G_1) = 2; \\ \text{Dep}_F(f^{(2)}, G_1) &= \text{Dep}_S(f^{(2)}, G_1) = 2; \\ L_F(h^{(2)}, G_1) &= 2, \text{Dep}_F(h^{(2)}, G_1) = 2; \\ L_S(h^{(2)}, G_1) &= 2, \text{Dep}_S(h^{(2)}, G_1) = 2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.8) приводятся к двум разностным уравнениям

$$u_n = u_{n-1} + 1, \quad (2.10)$$

$$u_n = u_{n-1} + 2, \quad (2.11)$$

которые позволяют получить соответствующие решения аналитически. Уравнение (2.10) имеет решение $u_n = n$, а решение уравнения (2.11) обозначим еще как $U_1 = u_n = 2(n - 1)$. После интерпретации к своим показателям они имеют вид

$$\begin{aligned} L_6(f^{(n)}, G_1) &= n; \\ L_F(f^{(n)}, G_1) &= L_S(f^{(n)}, G_1) = 2(n - 1); \\ \text{Dep}_F(f^{(n)}, G_1) &= \text{Dep}_S(f^{(n)}, G_1) = 2(n - 1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Этот же результат (2.12) следует из того, что каждая итерация есть шаг декомпозиции, и сколько шагов — такова и сложность для L_F , Dep_F , L_S и Dep_S . Так как это последовательная декомпозиция, то число итераций — шагов — умножается на значение соответствующего показателя качества функ-

ции рекурсии и, таким образом, из оценок (2.6) получаем оценки (2.12).

Сложность на основе ФУ типа 3. Используем возможности выбора и преобразования ФУ в целях минимизации показателей качества функции (2.1) в базисе $G_1 = \{\&, \vee, \neg\}$. Применим ФУ типа 3

$$f^{(n)} = f^{(n-2)} \cdot (\neg x_{n-1}) \vee x_n \quad (2.13)$$

с функцией рекурсии $h^{(3)} = ((t_1 \rightarrow t_2) \rightarrow t_3) = (t_1 \cdot (\neg t_2) \vee t_3)$.

Тогда, если $n = 2k, k \geq 2$, то ФУ (2.13) имеет вид

$$f^{(n)} = f^{(2k)} = f^{(2(k-1))} \cdot (\neg x_{2k-1}) \vee x_{2k}, \quad (2.14)$$

где $f^{(2)} = g^{(2)}$ ($n = 2, k = 1$) — начальная функция в последовательности функций рассматриваемого класса $f^{(2)}, f^{(4)}, f^{(6)}, \dots$.

Для показателей качества устанавливаем рекуррентные соотношения (здесь схемы S — без ветвления):

$$\begin{aligned} L_6(f^{(n)}, G_1) &= L_6(f^{(n-2)}, G_1) + 2; \\ L_F(f^{(n)}, G_1) &= L_F(f^{(n-2)}, G_1) + 3; \\ L_S(f^{(n)}, G_1) &= L_S(f^{(n-2)}, G_1) + 3; \\ Dep_F(f^{(n)}, G_1) &= Dep_F(f^{(n-2)}, G_1) + 3; \\ Dep_S(f^{(n)}, G_1) &= Dep_S(f^{(n-2)}, G_1) + 3, \end{aligned} \quad (2.15)$$

с начальными условиями при $n = 2$

$$\begin{aligned} L_6(f^{(2)}, G_1) &= 2, L_6(h^{(3)}, G_1) = 3; \\ L_F(f^{(2)}, G_1) &= L_S(f^{(2)}, G_1) = 2; \\ Dep_F(f^{(2)}, G_1) &= Dep_S(f^{(2)}, G_1) = 2; \\ L_F(h^{(3)}, G_1) &= L_S(h^{(3)}, G_1) = 3; \\ Dep_F(h^{(3)}, G_1) &= Dep_S(h^{(3)}, G_1) = 3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

ФУ_{ПК} (2.15) приводятся к разностному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, но, по сути, это арифметическая прогрессия с начальным членом u_2 , разностью d и числом членов k . Для (2.15) разностное уравнение есть

$$u_{2k} = u_{2(k-1)} + 2 \quad (\text{или } u_n = u_{n-2} + 2), \quad (2.17)$$

а для остальных показателей (2.15)

$$u_{2k} = u_{2(k-1)} + 3 \quad (\text{или } u_n = u_{n-2} + 3), \quad (2.18)$$

где $n = 2k, k \geq 2$, которые позволяют получить соответствующие решения аналитически. После интерпретации к своим показателям качества они имеют вид:

$$\begin{aligned} L_6(f^{(n)}, G_1) &= 2k = n; \\ L_F(f^{(n)}, G_1) &= 3k - 1 = 3n/2 - 1; \\ Dep_F(f^{(n)}, G_1) &= 3k - 1 = 3n/2 - 1; \\ L_S(f^{(n)}, G_1) &= 3k - 1 = 3n/2 - 1; \\ Dep_S(f^{(n)}, G_1) &= 3k - 1 = 3n/2 - 1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $n = 2k, k \geq 2$.

Обозначим решение для показателей (2.15) $U_2 = u_n = 3k - 1 = 3n/2 - 1$.

Пример 2.1. Вывод формулы $F^{(6)}$ в базисе G_1 на основе метода ФУ типа 3.

Выполняем по шагам эквивалентные преобразования

$$\begin{aligned} f_{\text{ЛИ}}^{(6)} &= F_{\text{ЛИ}}^{(6)} = (((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow x_4) \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 = \neg(\neg(\neg(x_1 \cdot (\neg x_2) \vee x_3) \vee x_4) \vee (\neg x_5) \vee x_6) = \\ &= (\neg(x_1 \cdot (\neg x_2) \vee x_3) \vee x_4) \cdot (\neg x_5) \vee x_6 = F^{(6)}. \end{aligned}$$

Итого, получаем требуемую структуру сложностью $L_F(f^{(6)}, G_1) = 8$.

Если $n = 2k + 1, k \geq 2$, то ФУ (2.13) имеет вид

$$f^{(n)} = f^{(2k+1)} = f^{(2k-1)} \cdot (\neg x_{2k}) \vee x_{2k+1}, \quad (2.20)$$

из (2.1) получаем начальную функцию $f^{(3)} = f^{(2)} \rightarrow x_3 = \neg f^{(2)} \vee x_3 = (x_1 \cdot (\neg x_2) \vee x_3)$ искомой последовательности функций $f^{(3)}, f^{(5)}, f^{(7)}, f^{(9)}, \dots$.

Для показателей качества устанавливаем рекуррентные соотношения, которые совпадают с (2.15), но различаются начальными условиями при $n = 3$:

$$\begin{aligned} L_6(f^{(3)}, G_1) &= 3; \\ L_F(f^{(3)}, G_1) &= L_S(f^{(3)}, G_1) = 3; \\ Dep_F(f^{(3)}, G_1) &= Dep_S(f^{(3)}, G_1) = 3; \\ L_F(h^{(3)}, G_1) &= L_S(h^{(3)}, G_1) = 3; \\ Dep_F(h^{(3)}, G_1) &= Dep_S(h^{(3)}, G_1) = 3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

ФУ_{ПК} (2.15) приводятся к разностному уравнению. Для показателя L_6 (2.15) разностное уравнение имеет вид

$$u_{2k+1} = u_{2k-1} + 2 \quad (\text{или } u_n = u_{n-2} + 2), \quad (2.22)$$

для остальных показателей (2.15)

$$u_{2k+1} = u_{2k-1} + 3 \quad (\text{или } u_n = u_{n-2} + 3), \quad (2.23)$$

где u_3 равно начальному значению соответствующего показателя качества.

Уравнение (2.22) имеет решение $u_n = n$, а решение уравнения (2.23) для остальных показателей (2.15) обозначим еще как $U_3 = u_n = 3k = 3(n-1)/2$. После интерпретации к своим показателям качества получаем

$$\begin{aligned} L_6(f^{(n)}, G_1) &= 2k + 1 = n; \\ L_F(f^{(n)}, G_1) &= 3 + 3(k-1) = 3k = 3(n-1)/2; \\ Dep_F(f^{(n)}, G_1) &= 3k = 3(n-1)/2; \\ L_S(f^{(n)}, G_1) &= 3k = 3(n-1)/2; \\ Dep_S(f^{(n)}, G_1) &= 3k = 3(n-1)/2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Пример 2.2. Вывод формулы $F^{(5)}$ в базисе G_1 на основе метода ФУ типа 3.

Выполняем по шагам эквивалентные преобразования

$$\begin{aligned} f_{\text{ЛИ}}^{(5)} &= F_{\text{ЛИ}}^{(5)}(((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow x_4) \rightarrow x_5 = \\ &= \neg(\neg(x_1 \cdot (\neg x_2) \vee x_3) \vee x_4) \vee x_5 = \\ &= (x_1 \cdot (\neg x_2) \vee x_3) \cdot (\neg x_4) \vee x_5 = F^{(5)}. \end{aligned}$$

Итого, получаем требуемую структуру сложности $L_F(f^{(5)}, G_1) = 6$.

Сравнение методов. Так как ФУ_{ПК} для показателей качества L_F , Dep_F , L_S и Dep_S трансформируются в одно разностное уравнение, то по нему получим эффективность метода для различных показателей сложности. Итак, сравниваем U_1 с U_2 и затем с U_3 :

$$U_1 - U_2 = 2(n - 1) - (3n/2 - 1) = n/2 - 1 > 0$$

при $n = 4, 6, 8, \dots$;

$$U_1 - U_3 = 2(n - 1) - 3(n - 1) / 2 = (n - 1)/2 > 0$$

при $n = 5, 7, 9, \dots$.

Из сравнения результатов, характеризующих качество применения ФУ типов 1 и 3, следует преимущество применения ФУ типа 3 в отношении минимизации показателей качества.

Сложность функций из класса Ф_{ПИ}. Применяемый выше подход в силу совпадения строений формул и ФУ позволяет перенести результаты по оценкам сложности реализации функций из класса Ф_{ЛИ} на функции из класса Ф_{ПИ} [11]. Для этого получаем следующее ФУ типа 1, аналогичное ФУ (2.3):

$$\begin{aligned} f_{\text{ПИ}}^{(n)} &= F_{\text{ПИ}}^{(n)} = (x_n \rightarrow f_{\text{ПИ}}^{(n-1)}) = \\ &= ((\neg x_n) \vee f_{\text{ПИ}}^{(n-1)}), \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Но прежде чем его исследовать, выполним эквивалентное преобразование формулы $F_{\text{ПИ}}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} F_{\text{ПИ}}^{(n)} &= x_n \rightarrow (x_{n-1} \rightarrow (x_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1) \dots)) = \\ &= ((\neg x_n) \vee (\neg x_{n-1}) \vee (\neg x_{n-2}) \vee \dots \vee (\neg x_2)) \vee x_1 = \\ &= \neg(x_n \cdot x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \dots \cdot x_2) \vee x_1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Получаем бесповторную формулу с определенной структурой, разбиваемой на два булевых слагаемых. Первое слагаемое есть отрицание $(n - 2)$ -местной конъюнкции, второе — булева переменная. При этом на основе метода структурно-функциональной декомпозиции в базисе G_1 получаем оценки

$$\begin{aligned} L_6(f_{\text{ПИ}}, G_1)_{\min} &= n; \\ L_F(f_{\text{ПИ}}, G_1)_{\min} &= 1 + n - 2 + 1 = n; \\ Dep_F(f_{\text{ПИ}}, G_1)_{\min} &= \lceil \log_2(n - 1) \rceil + 2; \\ L_S(f_{\text{ПИ}}, G_1)_{\min} &= n; \\ Dep_S(f_{\text{ПИ}}, G_1)_{\min} &= \lceil \log_2(n - 1) \rceil + 2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

которые не хуже результата сравнения в предыдущем подразделе (результатов применения ФУ

типа 1 и 3). Поэтому необходимость исследования ФУ (2.25) отпадает.

Итак, для данного класса Ф_{ПИ} функций в отношении минимизации показателей качества предпочтительнее является метод структурно-функциональной декомпозиции, применяемый после преобразования исходной формулы.

Заключение

При применении методов ФУ эффективными средствами синтеза формул и схем являются (разработка алгоритма с получением верхних оценок сложности):

- выбор типа ФУ;
- эквивалентные преобразования формул (и ФУ) в одном базисе и из одного базиса в другой;
- приведение формул к скобочному виду, а также для схем — ветвление выходов отдельных ФЭ.

Список литературы

1. Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. 1962. № 8.
2. Кудрявцев В. Б., Андреев А. Е. О сложности алгоритмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. 15. 3. С. 135—181.
3. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. 1960. Вып. 3.
4. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. № 2.
5. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.
6. Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. 1978. Вып. 32. С. 76—94.
7. Ложкин С. А. О связи между глубиной и сложностью эквивалентных формул и о глубине монотонных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. 1981. Вып. 38. С. 269—271.
8. Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 23.
9. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
10. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.
11. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. М.: Наука, 1980.
12. Чебурахин И. Ф. Основные понятия теории конечных автоматов и некоторые ее приложения: Учеб. пособие. М.: Изд. центр МАТИ—РГТУ, 2005. 83 с.
13. Чебурахин И. Ф. Строение и глубина булевых функций // Тез. докл. конф. "Проблемы теоретической кибернетики". М.: Изд-во МГУ, 2005.
14. Чебурахин И. Ф. Сложность булевых функций для интеллектуальных систем синтеза цифровых ИС // Изв. РАН. ТиСУ. № 3. 2006. С. 150—165.
15. Чебурахин И. Ф. Математические модели для интеллектуализации синтеза дискретных логических управляющих устройств на основе цифровых интегральных схем // Изв. РАН. ТиСУ. № 1. 2008. С. 68—77.
16. Чебурахин И. Ф., Цурков В. И. Специальная реляционная база данных для оптимизации и автоматизации синтеза комбинационных автоматов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 9. С. 7—13.
17. Чебурахин И. Ф., Цурков В. И. Синтез дискретных логических устройств обработки информации на основе теории агентов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 3. С. 27—34.

УДК 681.51:518.5

Т. А. Пьявченко, канд. техн. наук, проф.,
pta@tsure.ru,
Таганрогский технологический институт
Южного федерального университета,
Е. В. Моисеева, инженер-конструктор,
leskor1986@yandex.ru,
ОАО "Промтяжмаш", г. Таганрог

Параметрическая коррекция динамики электропривода на основе метода технического оптимума

Рассматривается управляющее устройство для регулирования электропривода, широко применяемого в мехатронных системах. Особенность предлагаемого устройства заключается в использовании параметрической обратной связи, позволяющей обеспечить технически оптимальный переходный процесс со статической ошибкой, равной нулю, и значением управляющего воздействия, не превышающим допустимое значение. Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием и натурным экспериментом на стенде с микропроцессорным управлением двигателем постоянного тока.

Ключевые слова: мехатронная система, электропривод, устройство управления, параметрическая обратная связь, двигатель постоянного тока

Введение

В современной промышленности используется большое число производственных механизмов, работающих с различной изменяющейся скоростью: роботы и робототехнические комплексы, металлообрабатывающие станки, прокатные станы и многое другое [1]. Во всех этих механизмах для достижения высокой производительности и требуемого качества работы мехатронных систем необходимо осуществлять регулирование скорости, т. е. принудительно изменять скорость электропривода в зависимости от требований технологического процесса. Регулирование скорости осуществляется путем дополнительного воздействия на приводной двигатель, что делает его главным элементом электропривода. Он управляется с помощью соответствующих преобразовательных и управляющих устройств в целях формирования статических и динамических характеристик электропривода, отвечающих требованиям производственного механизма. Речь идет не только о сообщении машине вращательного или поступательного движения, но, главным образом,

об обеспечении с помощью автоматизированного электропривода оптимального режима работы машин, при котором достигается наибольшая производительность при высокой точности. Обеспечение оптимального характера переходных процессов является важной практической задачей, которой в теории электропривода в последние годы уделялось значительное внимание. Существенное развитие получила теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [2] и современная теория аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [3]. Однако, обеспечивая хорошие показатели переходного процесса по регулированию угловой скорости вращения выходного вала электропривода, они приводят к напряженным режимам якорной цепи, значительно повышая ток якоря. Использование в контуре управления ограничителя по току снижает достоинства указанных методов, поскольку увеличивает длительность переходного процесса. Сочетание агрегированного регулятора с традиционными способами регулирования, например, изодромным регулятором [4], устраняет указанный недостаток, но усложняет алгоритм управления. Что касается нечетких (fuzzy) и нейросетевых регуляторов, то, во-первых, их преимущества проявляются при сложных объектах управления с недостаточной информацией об объекте или полным отсутствием последней, во-вторых, их эффективность, как и в предыдущих случаях, в полной мере проявляется при сочетании с традиционными регуляторами [5]. Для коррекции динамических свойств системы управления в работе [6] предлагается использовать параметрические обратные связи. На основе принципа обратной связи автор [6] предлагает корректировать параметры регулятора, например, его коэффициент передачи в функции от изменения регулируемой переменной объекта и, таким образом, обеспечивать желаемое поведение системы. С этой целью в структуру системы вводится нелинейный переключатель, обеспечивающий параметрическую обратную связь (ОС).

В данной статье понятие "параметрическая ОС" используется в том смысле, что в ней задействована модель объекта управления (ОУ) в виде его передаточной функции, параметры которой определены либо в процессе идентификации, либо получены аналитическим путем. При этом компенсируются малозначимые постоянные времени ОУ, что улучшает динамику системы управления и обеспечивает требуемые показатели переходного процесса.

Проблема обеспечения технически оптимального переходного процесса

Разработка алгоритмов управления электроприводами должна учитывать, прежде всего, технологические критерии, такие как производительность, надежность и ограничения потребляемых энерго-ресурсов. Если первый и второй критерии зависят от показателей качества переходного процесса (перегулирования, колебательности и времени установления), то последний критерий накладывает ограничения на значение управляющего воздействия, которое не может быть больше допустимого. В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция применения в промышленности, транспорте, робототехнике, медицине регулируемых электроприводов.

Структурная схема регулируемого электропривода, построенного по принципу подчиненного (каскадного) регулирования, представлена на рис. 1 [7]. Подчиненное регулирование основано на том, что внешний контур вырабатывает сигнал задания для внутреннего контура. Внутренний контур является звеном внешнего контура, и его параметры учитываются при оптимизации последнего.

На рис. 1 введены следующие обозначения: РС — регулятор скорости; РТ — регулятор тока; УМ — усилитель мощности, например тиристорный преобразователь; М — мотор (приводной двигатель); K_i — коэффициент передачи датчика тока; K_ω — коэффициент передачи датчика скорости (тахогенератора); $U_{зс}$ — задание по угловой скорости вращения мотора; $U_{зт}$ — задание по току якоря двигателя.

В системе подчиненного регулирования появляется возможность раздельного регулирования переменных (тока и скорости) и их последовательной настройки, начиная с первого внутреннего контура. Настройку каждого контура (расчет и выбор элементов последовательных корректирующих цепей, т. е. выбор регулятора и расчет его параметров) проводят "так, чтобы получить технически оптимальный переходный процесс (настройка на технический оптимум" [7]). Технически оптимальным переходным процессом считается такой процесс, при котором время t_1 измерения регулируемой величины $X_{вых}$ от 0 до установившегося значения $X_{уст}$ было бы минимально возможным при перерегулировании

$$\sigma = \frac{X_{\max} - X_{уст}}{X_{уст}} \cdot 100 \%, \text{ не превышающем допустимого значения порядка } 5 \%$$

(рис. 2). "Такой переходный процесс при скачке задания является компромиссным между процессом более быстрым, но с большим перерегулированием, и процессом с меньшим перерегулированием, но более медленным" [7].

Заданная система обычно не обладает оптимальным соотношением постоянных времени, поэтому, используя коррекцию, нужно изменять постоянные времени системы. Естественно, что физически существующую инерционность можно устранить, только изъяв из системы элемент, обладающий этой

инерционностью, что невозможно. Но можно компенсировать влияние больших инерционностей системы, используя форсировку переходного процесса в данном элементе за счет увеличения напряжения на время переходного процесса, включения дифференциальной составляющей в закон регулирования. Полная компенсация при этом невозможна. В работе [8] предлагается замена ПИД-алгоритма на новый USWO-алгоритм, который улучшает качество работы систем промышленной автоматики. Этот алгоритм на основе информации о текущем состоянии объекта управления формирует управляющее воздействие, определяя его знак и модуль по условию переключения, представляющему собой нелинейное соотношение между компонентами вектора состояний объекта управления. По своему содержанию ПИД- и USWO-способы принципиально отличаются друг от друга. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки. В частности, первый является линейным, но расширяет полосу пропускания системы, создает собственные шумы и не обеспечивает перерегулирование 5 % [9]. Вторым, обеспечивая перерегулирование 5 %, требует для своей реализации дополнительных датчиков в целях измерения переменных состояния объекта управления, что удорожает систему и снижает ее надежность.

Применение же параметрических обратных связей, о которых пойдет речь в данной работе, позволит обеспечить переходный процесс заданной длительности с незначительным перерегулированием (менее 5 %), что особенно важно для приводов роботов, станков ЧПУ и других электромеханических систем. При использовании микроконтроллеров в качестве управляющих устройств введение

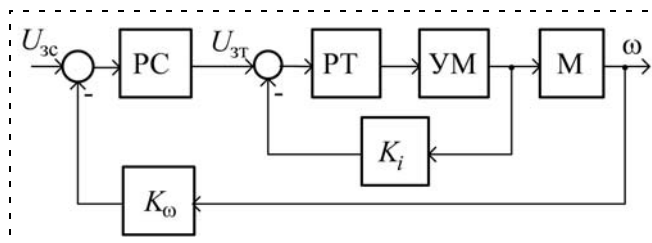


Рис. 1. Структурная схема регулируемого электропривода

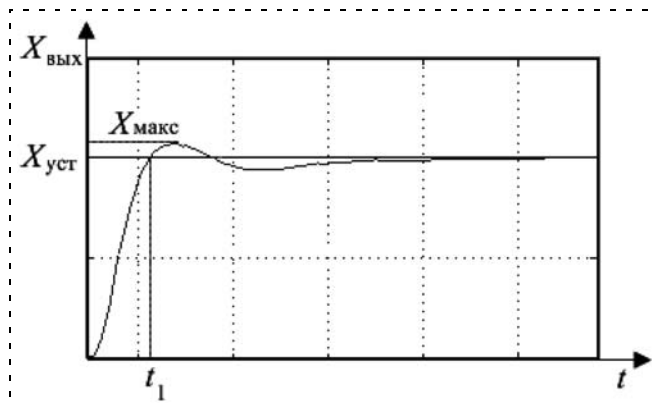


Рис. 2. Технически оптимальный переходный процесс

параметрической обратной связи, исправляющей (корректирующей) динамические свойства системы [9], незначительно усложняя программную реализацию алгоритма управления, является действенным способом обеспечения требуемой динамики.

Разработка устройства для параметрической коррекции динамики электропривода, обеспечивающей настройку на технический оптимум

В соответствии с вышесказанным интерес представляет разработанный авторами метод синтеза алгоритма управления техническими объектами с использованием параметрической корректирующей обратной связи [9], позволяющей улучшить показатели качества процесса управления.

В основу этого метода положен критерий технически оптимального переходного процесса [7, с. 468] с перерегулированием не более 5 % от установившегося значения регулируемой величины с нулевой статической ошибкой. Обеспечение этого критерия требует определенного запаса по фазе $\Delta\varphi_{ср}$ на частоте среза $\omega_{ср}$ [10, с. 238]. Последнее требование обусловлено тем, что большинство систем управления могут быть сведены к колебательному звену с коэффициентом затухания $d = 0,707$ [7, 10].

Использование указанного метода предполагает получение модели ОУ на этапе идентификации в виде передаточной функции [9]

$$W_{Oy}(s) = \frac{K_{Oy}}{(Ts + 1)^N (T_{Oy}s + 1)}. \quad (1)$$

Доминирующий полюс $s_{дмн} = (-1/T_{Oy})$ определяет длительность переходного процесса в соответствии со значением постоянной времени T_{Oy} ($T_{Oy} \gg T$), при этом дополнительные полюсы $(-1/T)$ можно использовать для параметрической коррекции динамики электропривода. В случае регулируемого ЭП, задача которого заключается в регулировании угловой скорости вращения, объектом будет двигатель, передаточная функция которого аналогична (1) при $N = 1$. В качестве постоянной времени T_{Oy} следует рассматривать электромеханическую постоянную двигателя T_M , значение которой зависит от нагрузки на его валу, а меньшей посто-

янной T является электрическая постоянная якоря $T_{я}$. Обе постоянные времени, как и коэффициент передачи K_{Oy} , становятся известными после выбора двигателя под определенную нагрузку. Следовательно, с учетом сказанного передаточную функцию (1) можно записать в виде

$$W_{Oy}(s) = \frac{K_{Oy}}{(T_{я}s + 1)(T_M s + 1)}. \quad (1a)$$

Если система (см. рис. 1) предназначена для стабилизации регулируемой переменной ОУ, в частности, угловой скорости вращения, то в качестве законов управления в регуляторах используют стандартные ПИ- или ПИД-законы управления.

При наличии параметрической корректирующей обратной связи, как показано в [9], нет необходимости использовать в регуляторе дифференциальную составляющую, которая, как уже сказано, расширяет полосу пропускания системы управления и создает собственные шумы, влияющие на ее работу. Управляющее устройство в виде ПИ-регулятора с параметрической корректирующей обратной связью (КОС) обеспечит указанные выше показатели процесса управления

Структурная схема синтезируемой системы.

Имея передаточную функцию объекта управления (1), можно составить структурную схему замкнутой системы с управляющим устройством (УУ) в виде регулятора и параметрической КОС (рис. 3). При этом КОС представляет собой соединение двух частей модели объекта управления: $W_T(s)$ и $W_{осн}(s)$. Первая отражает влияние малой постоянной времени $T_{я}$, вторая определяет длительность переходного процесса $t_{п.п}$ в ОУ, поскольку $(T_{Oy} = T_M) \gg (T = T_{я})$. Следовательно, в соответствии с (1 a),

$$W_T(s) = \frac{1}{(T_{я}s + 1)}, \quad W_{осн}(s) = \frac{K_{Oy}}{(T_M s + 1)}. \quad (2)$$

Преобразовав схему (рис. 3), можно убедиться, что передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = W_{рег}(s)W_{осн}(s)[W_T(s) + (1 - W_T(s))] = W_{рег}(s)W_{осн}(s). \quad (3)$$

Из выражения (3) следует, что параметрическая корректирующая обратная связь компенсирует влияние звеньев с малой постоянной времени. При этом характеристическое уравнение замкнутой системы будет не выше второго порядка, а это значит, что можно выбрать ПИ-регулятор и его параметры так, чтобы обеспечить технический оптимум при нулевой статической ошибке.

Расчет параметров ПИ-регулятора. Расчет параметров ПИ-регулятора основывается на запасе устойчивости по фазе $\gamma_{ср}$, значение которого, как рекомендуется в литературе [10] и как подтверждается в рассмотренном ниже примере, должна ле-

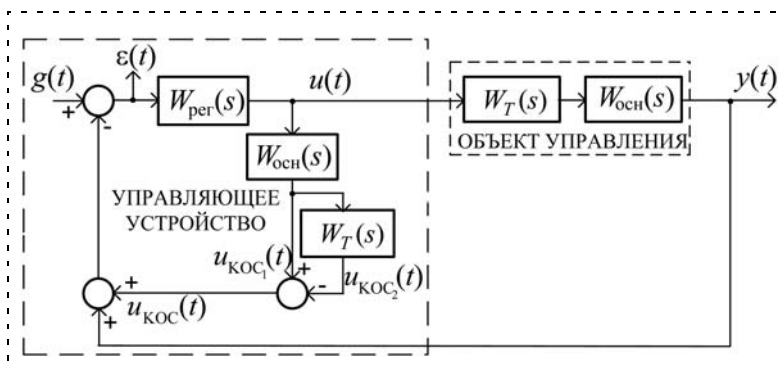


Рис. 3. Структурная схема системы с управляющим устройством в виде регулятора и параметрической корректирующей обратной связи

жать в пределах 60...75°. Выбрав значение постоянной времени интегрирования $T_{и} = 0,6T_{м}$ [11] и задавая запас по фазе из указанного выше диапазона, решаем нелинейное уравнение фазочастотной характеристики:

$$-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}_{\omega_{\text{ср}}} T_{\text{ОУ}} + \operatorname{arctg}_{\omega_{\text{ср}}} T_{и} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_{\text{ср}} T_{\text{ОУ}} - \omega_{\text{ср}} T_{и}}{1 + \omega_{\text{ср}}^2 T_{\text{ОУ}} T_{и}} = -\pi + \gamma_{\text{ср}} \quad (4)$$

для комплексного коэффициента передачи разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{K_{\text{рег}} K_{\text{ОУ}}}{j\omega T_{и}} \left(\frac{j\omega T_{и} + 1}{j\omega T_{\text{ОУ}} + 1} \right) \quad (5)$$

и определяем частоту среза $\omega_{\text{ср}}$, после чего рассчитываем коэффициент передачи регулятора $K_{\text{рег}}$ из условия, что модуль комплексного коэффициента передачи разомкнутой системы $W(j\omega)|_{\omega = \omega_{\text{ср}}}$ на частоте среза равен 1 [11]:

$$K_{\text{рег}} = \frac{\omega_{\text{ср}} T_{и}}{K_{\text{ОУ}}} \sqrt{\frac{T_{\text{ОУ}}^2 \omega_{\text{ср}}^2 + 1}{T_{и}^2 \omega_{\text{ср}}^2 + 1}} \quad (6)$$

В результате расчетов параметров регулятора и с учетом значений T и N будет получен алгоритм работы управляющего устройства для регулирования угловой скорости вращения приводного двигателя электропривода, который может быть реализован в микроконтроллере.

Микроконтроллерная реализация управляющего устройства в системе автоматического регулирования угловой скорости вращения приводного двигателя электропривода. В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция применения регулируемых электроприводов, которые требуют динамичной компьютеризации, позволяющей применять сложные алгоритмы управления с легкоперестраиваемыми программами [12]. На рис. 4 показана функциональная схема индивидуального компьютеризированного электропривода, в котором в качестве приводного двигателя используется двигатель постоянного тока (ДПТ) с независимым возбуждением (обмотка возбуждения не показана).

Алгоритм управления запрограммирован в АЛУ микроконтроллера. В качестве модуля вывода может использоваться широтно-импульсный преобразователь (ШИП), управляющий исполнительным бло-

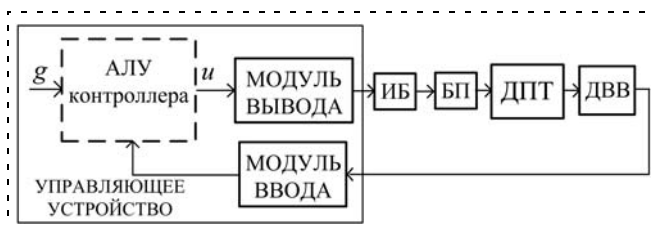


Рис. 4. Функциональная схема индивидуального компьютеризированного электропривода

ком (ИБ), например, слаботочным реле при маломощном ДПТ. Это реле подает питание (БП) к обмотке якоря, время подключения которого зависит от кода управления u , поступающего на ШИП. Сигнал главной обратной связи от датчика выходной величины (ДВВ) через АЦП (модуль ввода) поступает в АЛУ микроконтроллера, где сравнивается с кодом задания g , после чего в функции от рассогласования вырабатывается код управления u .

На кафедре САУ технологического института ЮФУ (ТРТУ) при участии инженера В. А. Донченко создан стенд для изучения способов управления электродвигателем на базе микроконтроллера. С помощью этого стенда удобно продемонстрировать преимущества регулирования угловой скорости вращения двигателя постоянного тока с использованием микропроцессорного управляющего устройства, алгоритм работы которого использует предлагаемую параметрическую корректирующую обратную связь.

Апробация параметрической коррекции. Как уже сказано, объектом исследования и управления в стенде является маломощный быстродействующий двигатель постоянного тока ДПМ-20-Н1-12Б с возбуждением от постоянного магнита. Он предназначен для использования в системах автоматизации и сервисных устройствах для работы при обоих направлениях вращения. Однако следует отметить, что изменение направления вращения на ходу, без предварительной остановки двигателя, не допускается. Любая система микропроцессорного управления электродвигателем состоит из электронной части и управляющей программы. Эти элементы могут быть как простыми, так и сложными в зависимости от типа двигателя и требований к системе. Как правило, высокопроизводительные системы требуют более сложного оборудования. На рис. 5 приведена структурная схема лабораторного стенда, который состоит из преобразователя интерфейса, блока питания, микроконтроллера, драйвера двигателей, инфракрасного (ИК) датчика, двух моторов: основного — ОУ и вспомогательного, используемого в качестве нагрузки. После включения стенда в сеть и подключения ПК в пользовательской программе устанавливаются такие параметры, как частота дискретизации регулятора; заданное значение угловой скорости вращения двигателя — ОУ; размер буфера входных данных, по которым будут строиться графики; состояние фильтра; выбор типа регулятора (П-, ПИ-, ПИД- и ПИ- с КОС); ко-

эффициенты закона регулирования: $K_{\text{рег}}$; $K_{и} = \frac{K_{\text{рег}}}{T_{и}}$;

$K_{д} = K_{\text{рег}} T_{д}$, T и N [9]; состояние нагрузки; время включения нагрузки; выбор графика, на котором будет строиться переходная функция ОУ или системы регулирования. Из сказанного ясно, что на основе описанного стенда можно выполнить идентификацию ОУ-ДПТ и изучить различные способы управления им.

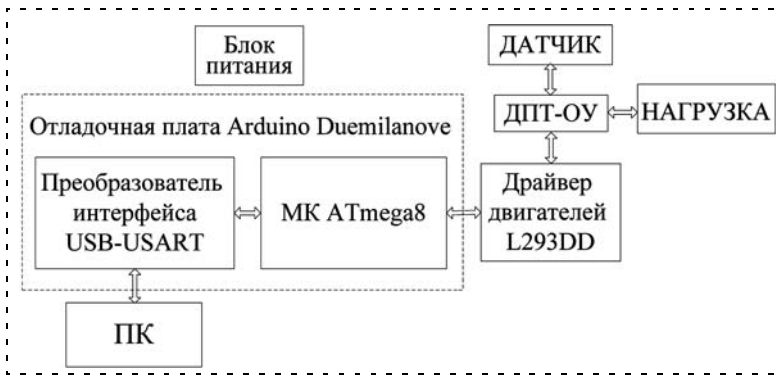


Рис. 5. Структурная схема лабораторного стенда

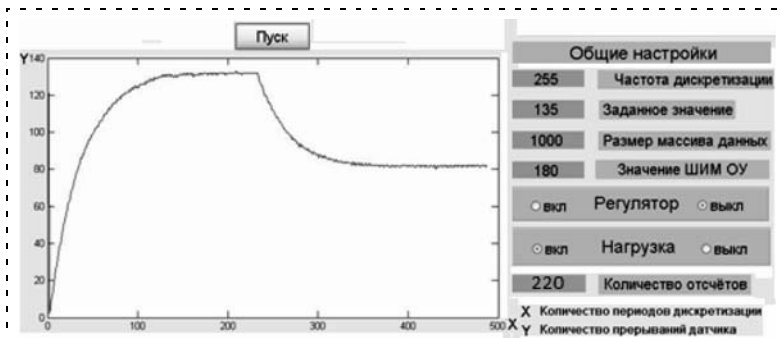


Рис. 6. Переходная (разгонная) характеристика ОУ — ДПТ

Программа приема и выдачи данных на экран ПК реализована на основе математического пакета MATLAB 7.0.1. С помощью этой программы организуется графическое окно (рис. 6), на котором расположены кнопки "Пуск" и "Включение/выключение" нагрузки, задание времени ее включения, выбор закона управления: П-, ПИ-, ПИД- или ПИ-с КОС. Программа, реализующая регулятор и управляющие сигналы для драйверов, находится в МК ATmega8 [13]. Все этапы работы можно наблюдать на графиках в системе MATLAB, анализировать и корректировать при необходимости параметры настройки и сам алгоритм регулирования.

Для идентификации ОУ — ДПТ была снята его разгонная характеристика: зависимость угловой скорости вращения, представленной числом прерываний импульсного датчика от времени, выражаемого в периодах частоты дискретизации при заданном значении управляющего сигнала (значение ШИМ ОУ) и включении нагрузки на 220-м периоде дискретизации (рис. 6).

В результате идентификации по кривой (рис. 6) была получена передаточная функция ОУ — ДПТ:

$$W_{\text{ОУ}}(p) = \frac{0,98}{(4p + 1)(33p + 1)}, \quad (7)$$

постоянные времени которой выражены в периодах дискретизации. По аналогии с (1 а) и (2) приходим к выводу, что

$$W_{\text{осн}}(p) = \frac{0,98}{(33p + 1)}. \quad (8)$$

Для вычисления параметров ПИ-регулятора в соответствии с описанной выше методикой необходимо выполнить следующие шаги:

1) записать комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы (5);

2) записать выражение фазочастотной характеристики разомкнутой системы (4);

3) получить значение частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ при $T_{\text{и}} = 0,6T_{\text{ОУ}}$, приравняв выражение (4) к значению фазы на этой частоте $\varphi(\omega_{\text{ср}}) = -\pi + \gamma_{\text{ср}}$ ($\gamma_{\text{ср}}$ — запас по фазе, заданный из указанного выше диапазона, например

$$65^\circ = \frac{\pi}{2,769} \text{ рад};$$

4) рассчитать коэффициент пропорциональности регулятора по уравнению (6).

В результате расчетов по указанным выше пунктам получили: коэффициент пропорциональности $K_{\text{рег}} = 1,21$, постоянная времени интегрирования $T_{\text{и}} = 20$ периодов дискретизации. Из анализа передаточных функций (2) и (8) ясно, что $T = T_{\text{я}} = 4$ периода дискретизации, а $N = 1$. При этом алгоритм работы управляющего устройства в замкнутой системе регулирования частоты вращения ДПТ (см. рис. 3) имеет вид системы разностных уравнений (9), заложенных в программу микроконтроллера (см. рис. 4).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= g - u_{\text{КОС}(i-1)} - y_{i-1}; \\ u_{\text{ПИ}} &= \varepsilon_i K_{\text{рег}}; \\ u_{\text{ИНТ}i} &= u_{\text{ИНТ}(i-1)} + K_{\text{рег}} \frac{T_{\text{дскр}}}{T_{\text{и}}} \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{2}; \\ u_i &= u_{\text{ПИ}} + u_{\text{ИНТ}i}; \\ u_{\text{КОС}1i} &= \frac{T_{\text{ОУ}}}{T_{\text{ОУ}} + T_{\text{дскр}}} u_{\text{КОС}1(i-1)} + \frac{K_{\text{ОУ}} T_{\text{дскр}}}{T_{\text{ОУ}} + T_{\text{дскр}}} u_i; \\ u_{\text{КОС}2i} &= \frac{T}{T + T_{\text{дскр}}} u_{\text{КОС}2(i-1)} + \frac{T_{\text{дскр}}}{T + T_{\text{дскр}}} u_{\text{КОС}1i}; \\ u_{\text{КОС}i} &= u_{\text{КОС}1i} - u_{\text{КОС}2i}; \\ y(0) &= u_{\text{ИНТ}}(0) = u_{\text{КОС}}(0) = u_{\text{КОС}2}(0) = 0; \\ g &= 135 \text{ (задание)}, \\ i &= \overline{1, n}. \end{aligned} \right\} (9)$$

В соответствии с этим алгоритмом последовательно в микроконтроллере вычисляются: сигнал рассогласования ε_i , код управляющего воздействия u_i и код параметрической корректирующей обратной связи $u_{\text{КОС}i}$ при нулевых начальных условиях. Число вычислений n определяется требуемой длительностью работы стенда.

Компьютерное моделирование. Для оценки влияния параметрической КОС на качество переходного процесса и на значение сигнала управления было выполнено моделирование замкнутой системы в па-

кете Simulink системы MATLAB. Структурные схемы моделей замкнутых систем регулирования с корректирующей обратной связью в управляющем устройстве (см. рис. 3) и без нее представлены на рис. 7.

Как следует из условий испытания стенда (см. рис. 5), управляющий сигнал не должен превышать значения 180 при задании требуемой угловой скорости вращения в 135 прерываний за секунду (размерность соответствует размерности сигналов, получаемых от импульсного датчика). Сравнивая результаты моделирования (рис. 8), приходим к выводу, что управляющее устройство с параметрической КОС обеспечивает меньшее перерегулирование при одинаковой длительности переходного процесса. При этом значение управляющего воздействия не превышает допустимого значения, в то время как в системе с ПИ-регулятором, но без КОС она значительно превышает допустимое значение.

Известно, что иногда для ограничения управления на выходе управляющего устройства ставят звено-ограничитель. При этом, чтобы не возросло время переходного процесса, изменяют параметры регулятора, как это сделано в схеме моделей на рис. 9.

Результаты моделирования (рис. 10) говорят о том, что управляющее устройство в виде ПИ-регулятора, охваченного параметрической КОС, при наличии ограничения управляющего

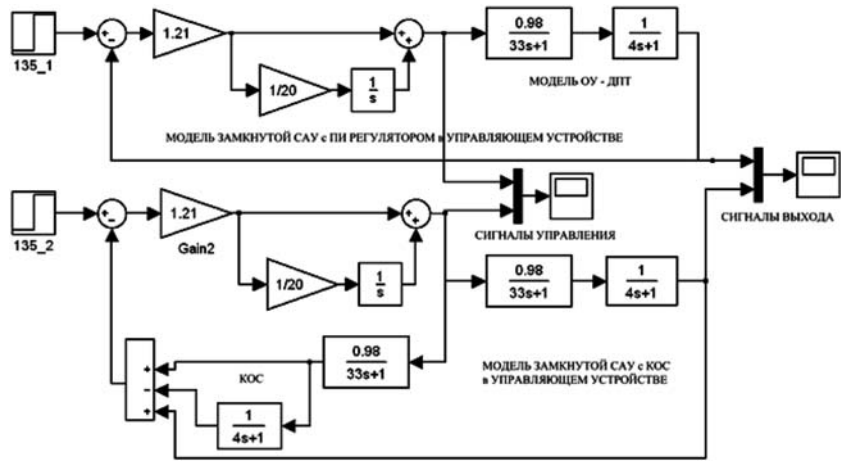


Рис. 7. Структурные схемы моделей замкнутых систем регулирования с параметрической КОС в управляющем устройстве и без нее

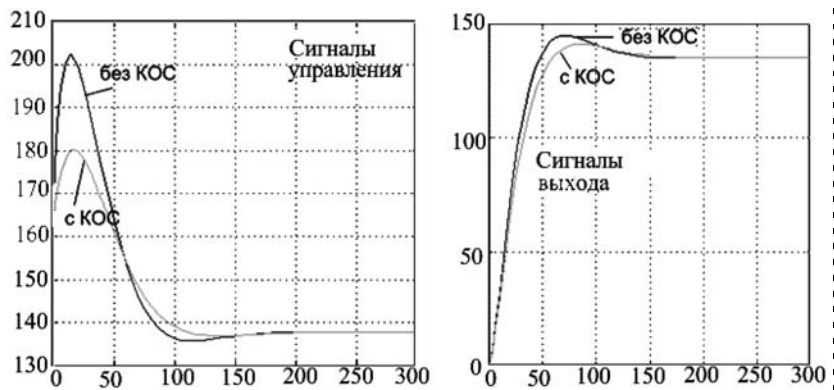


Рис. 8. Сигналы в моделях замкнутой системы регулирования угловой скорости вращения ДПТ

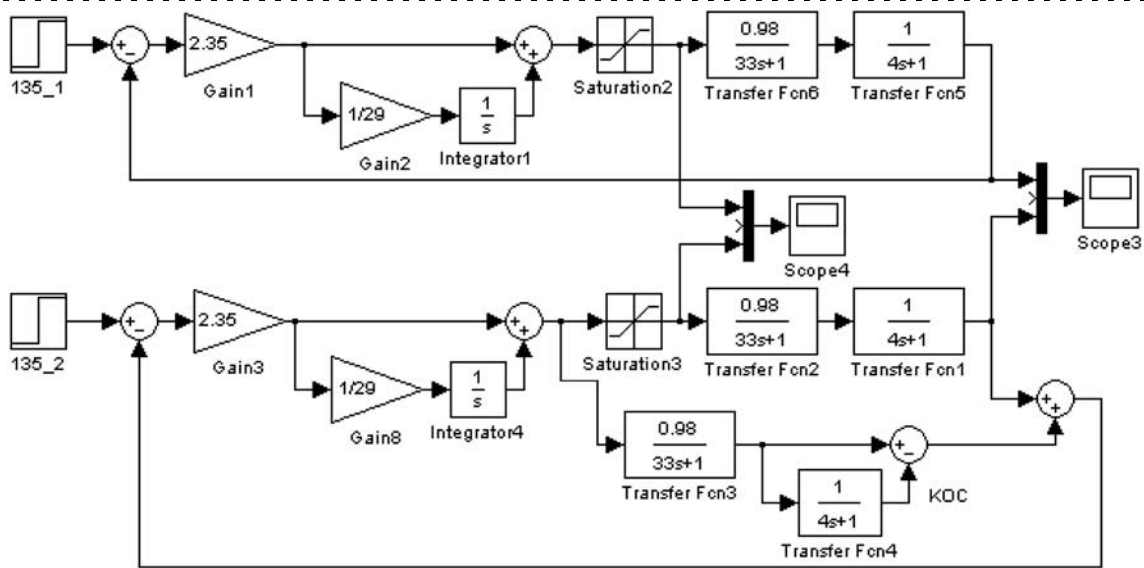


Рис. 9. Структурные схемы моделей замкнутых систем регулирования с КОС в управляющем устройстве и без нее при наличии ограничителя

сигнала также обеспечивает лучшее качество переходного процесса по сравнению с обычным регулятором.

Натурный эксперимент. Для проверки теоретических предпосылок и результатов моделирования был выполнен эксперимент на описанном выше стенде. На рис. 11 представлен график регулирования частоты вращения ДПТ ДПМ-20-Н1-12Б с управляющим устройством в виде ПИ-регулятора с параметрической КОС, реализованном в МК ATmega8 при включении нагрузки на 120-м периоде дискретизации. В соответствии с графиком рис. 11 можно сделать вывод: эксперимент по стабилизации угловой скорости вращения ДПТ при включении нагрузки и без нее полностью подтвердил теоретические предпосылки и результаты моделирования по исследованию системы регулирования при микропроцессорном управлении с параметрической корректирующей обратной связью в управляющем устройстве.

Следует отметить, что в качестве ОУ может быть использован любой другой ДПТ с напряжением питания до 600 В, с соответствующей подстройкой алгоритма управления и параметров регулятора.

Выводы

На наш взгляд, предлагаемое устройство управления в виде ПИ-регулятора, охваченного параметрической корректирующей обратной связью, несложно в применении при микропроцессорной реализации, дает результаты, отвечающие критерию технического оптимума с нулевой статической ошибкой. Оно может быть использовано для управления ДПТ во многих системах мехатроники, в частности, при управлении исполнительными устройствами роботов, станков ЧПУ и т. п. При этом время расчетов незначительно, так как не требует многих итераций, как в системе с адаптивной настройкой ПИД-регулятора. Новизна данного метода заключается в построении управляющего устройства с параметрической корректирующей ОС, охватывающей ПИ-регулятор и представляющей собой модель приводного двигателя с компенсацией малозначимых полюсов для улучшения динамических свойств электропривода.

Список литературы

1. Белов М. П., Новиков В. А., Рассудов Л. Н. Автоматизированный электропривод типовых производственных механизмов и технологических комплексов. М.: Издательский центр "Академия", 2007. 576 с.
2. Летов А. М. Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления // Дифференциальные уравнения. 1970. № 4. С. 592—615.

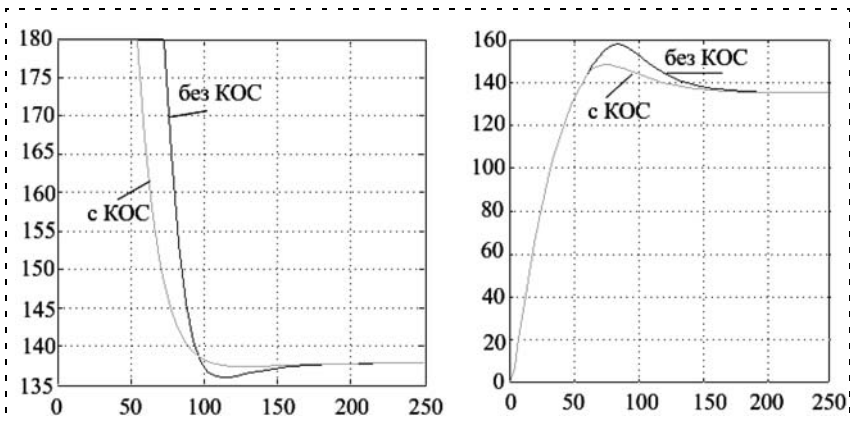


Рис. 10. Результаты моделирования замкнутых систем регулирования с КОС в управляющем устройстве и без нее при наличии ограничителя

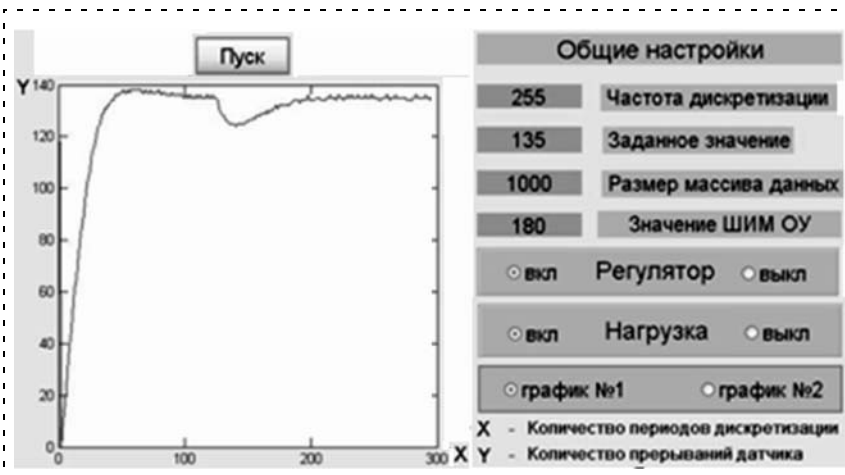


Рис. 11. График регулирования угловой скорости вращения ДПТ с микропроцессорным управляющим устройством в виде ПИ-регулятора с параметрической КОС

3. Современная прикладная теория управления: Новые классы регуляторов технических систем / Под ред. А. А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. Ч. III. 656 с.
4. Пьявченко Т. А., Бачило С. А., Панкратов А. В. Управляющее устройство с перестраиваемой структурой // Авиакосмическое приборостроение. 2004. № 8. С. 41—44.
5. Усков А. А. Принципы построения систем с нечеткой логикой. Приборы и системы управления // Контроль, диагностика. 2004. № 6. С. 7—13.
6. Догановский С. А. Параметрические системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1973. 168 с.
7. Чиликин М. Г., Сандлер А. С. Общий курс электропривода: Учебник для вузов. 6-е изд., доп. и перераб. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.
8. Бажанов В. USWO — новый способ формирования управления для замкнутых систем автоматического регулирования // СТА. 1998. № 4. С. 28—35.
9. Пьявченко Т. А., Моисеева Е. В. Математический метод синтеза алгоритма управления с использованием частотных критериев на основе данных натурного эксперимента // Известия ЮФУ. Технические науки. № 3. 2011 г.
10. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория автоматического регулирования. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 768 с.
11. Пьявченко Т. А. Расчет параметров ПИД закона управления для объектов с транспортным запаздыванием // Известия ТРТУ. Тематический выпуск: Матер. Всеросс. науч.-техн. конф. с междунар. участием "Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении". Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006. № 5 (60). С. 83—88.
12. Денисенко В. В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием. М.: Горячая линия-Телеком, 2009. 608 с.
13. <http://www2.atmel.com>

С. Г. Герман-Галкин, д-р техн. наук, проф.,
ggsg@yandex.ru,
А. С. Ляпин, аспирант,
swatin1@rambler.ru,
Балтийский государственный
технический университет БГТУ "ВОЕНМЕХ"
им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург

Анализ и модельное исследование асинхронного электропривода со скользящим управлением потокосцеплением и моментом

Кратко описана история развития скользящего метода управления асинхронным двигателем, известного под названием "метод прямого управления моментом". Разработана структурная модель асинхронного электропривода с прямым управлением моментом. Проведено модельное исследование и получены динамические характеристики электропривода с прямым управлением моментом при различных настройках регулятора.

Ключевые слова: электропривод, скользящее управление, прямое управление моментом, структурная модель

Введение

Идея скользящего управления потокосцеплением статора и моментом асинхронной машины, получившая в последнее время название "прямое управление моментом" (*DTC*, *direct torque control*), была впервые выдвинута в 1979 г. Г. Б. Онищенко и И. Л. Локтевой [1]. Позднее этот метод управления описан немецким профессором М. Депенброком в 1984 г. под названием "прямое саморегулирование" (*DSC*, *direct self-control*) [2, 3]. Несколько позже японские исследователи И. Тэкэхэши и Т. Ногучи опубликовали разработанный ими принцип, получивший в дальнейшем название "принцип прямого управления потокосцеплением" (*DFLC*, *direct flux linkage control*) [4]. Суть разработанного ими метода заключается в управлении потокосцеплением статора непосредственно путем изменения вектора напряжения статора. Метод *DFLC* не включал в себя каких-либо средств, выполняющих оценку потокосцепления машины. В 1986 г. Тэкэхэши и Ногучи ввели в структуру управления модель оценки потокосцепления, позволяющую в процессе работы осуществлять стабилизацию потокосцепления. В 1989 г. в публикации Тэкэхэши и Охмори при описании метода управления, объединяющего *DFLC*-управление и потоковую модель, впервые была использована аббревиатура *DTC* [5].

Первые образцы асинхронного привода с *DTC*-управлением были опробованы в конце 80-х годов

в Германии на дизель-электрических локомотивах в качестве тяговых устройств. В 1995 г. в Финляндии фирмой *ABB* впервые был разработан серийный электропривод *ACS600* с прямым управлением моментом [6, 7].

Несмотря на более чем тридцатилетнюю историю своего непрерывного развития, метод прямого управления моментом еще не нашел широкого применения в отечественных разработках и в учебных программах технических университетов.

В настоящее время процесс разработки современных систем управления сложными объектами, в том числе и электродвигателями, должен включать этап модельного исследования, который позволяет получить основные характеристики, незначительно отличающиеся от характеристик реального объекта.

Разработка адекватной модели, на которой можно имитировать работу исследуемой системы, позволяет исключить этап эскизного и существенно сократить этап технического проектирования, а следовательно, позволяет экономить время и средства.

Одним из наиболее удобных и хорошо зарекомендовавших себя программных средств, позволяющих создавать модели сколь угодно сложных мехатронных систем, является пакет *MATLAB — Simulink*. Этот пакет имеет достаточно простой и удобный интерфейс, включает в себя большое число библиотек электротехнических элементов, математических функций и других инструментов для решения поставленных задач.

Как правило, для проведения модельного исследования электропривода инженерами разрабатываются два типа моделей [8]:

- структурная модель, строящаяся по системе уравнений, описывающей электромагнитные процессы в приводе по "гладкой" составляющей [1], обычно применяемая в целях оценки динамических показателей привода;
- виртуальная модель состоит из тех же элементов, что и реальная система, и имитирует работу электропривода.

В данной статье описывается разработка структурной модели асинхронного электропривода с прямым управлением моментом, представлена система уравнений, по которой непосредственно строится данная модель, а также описываются необходимые преобразования для ее получения.

Математическое описание асинхронного электропривода с *DTC*-управлением

Прямое управление моментом является продолжением развития векторного подхода к построению систем управления асинхронным двигателем.

В основе всех систем управления лежит описание электромагнитных процессов асинхронного короткозамкнутого двигателя в произвольно вра-

шающейся системе координат ω_k с использованием метода обобщенного (пространственного) вектора [9]:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} + j\omega_k \psi_1; \\ 0 &= R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} + j(\omega_k - p\omega) \psi_2; \\ \psi_1 &= L_1 i_1 + L_m i_2; \\ \psi_2 &= L_m i_1 + L_2 i_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_1 — вектор напряжения статора; ψ_1, i_1, ψ_2, i_2 — векторы потокосцеплений, токов статора и ротора; R_1, L_1, R_2, L_2 — активные сопротивление и индуктивности статора и ротора соответственно; L_m — главная индуктивность намагничивающего контура; ω_k — угловая скорость вращения системы координат; ω — угловая скорость вращения ротора; p — число пар полюсов двигателя.

Основные особенности систем с прямым управлением моментом следующие:

1. В качестве электромагнитных переменных состояния выбирают два вектора — потокосцепление статора ψ_1 и потокосцепление ротора ψ_2 .

2. В качестве базового вектора принимают вектор потокосцепления ротора $|\psi_2| = \psi_{2x}, \psi_{2y} = 0$. Электромагнитный момент при такой ориентации базового вектора определяется уравнением

$$M = \frac{3}{2} p \frac{1}{\sigma L_1} \psi_2 \psi_{1y}. \quad (2)$$

3. Система управления электроприводом строится как двухканальная. В канале "х" поддерживается постоянным модуль потокосцепления статора $|\psi_1| = \text{const}$ за счет реализации скользящего режима по потоку ψ_{1x} . В канале "у" осуществляется управление моментом за счет реализации скользящего режима по моменту.

4. Формирование сигналов переключения инвертора осуществляется с использованием таблицы оптимальных переключений.

Постоянная времени роторной цепи в 1,5...2,5 раза больше статорной, и при качественном рассмотрении можно считать, что вектор потокосцепления ротора в процессе работы остается неизменным [10]. Тогда из выражения (2) следует, что изменение

значения ψ_{1y} путем воздействия на пространственный вектор напряжения, приложенный к обмоткам статора, приведет к изменению величины M .

Подробное описание принципа прямого управления моментом можно найти в литературных источниках [11, 12]. Функциональная схема системы с прямым управлением моментом приведена на рис. 1.

Выполнив преобразование исходной системы (1) с учетом перечисленных особенностей привода с прямым управлением моментом, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{1x}}{dt} &= u_{1x} - \frac{1}{\sigma T_1} \psi_{1x} + \frac{k_2}{\sigma T_1} \psi_2 + \omega_k \psi_{1y}; \\ \frac{d\psi_{1y}}{dt} &= u_{1y} - \frac{1}{\sigma T_1} \psi_{1y} - \omega_k \psi_{1x}; \\ \omega_k &= \frac{k_1}{\sigma T_2} \frac{\psi_{1y}}{\psi_2} + p\omega; \\ \psi_{1x} &= \sqrt{|\psi_1|^2 - \psi_{1y}^2}; \\ M &= \frac{3}{2} p \frac{1}{\sigma L_1} \psi_2 \psi_{1y}; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{J} (M - M_H), \end{aligned} \quad (3)$$

где $T_1 = \frac{L_1}{R_1}, T_2 = \frac{L_2}{R_2}, k_1 = \frac{L_m}{L_1}, k_2 = \frac{L_m}{L_2}, \sigma = 1 - k_1 k_2, J$ — параметры асинхронного двигателя.

Структурная модель асинхронного электропривода с DTC-управлением и ее динамические характеристики

Приведенная выше система уравнений (3) описывает процессы, протекающие в асинхронном электроприводе при его работе с нагрузкой. Кроме того, в модели необходимо отразить систему управления, которая генерирует напряжения, питающие статорные обмотки асинхронного двигателя. Такая система должна иметь два отдельных канала управления. Один канал включает в себя релейный регулятор и выполняет функцию стабилизации потокосцепления статора, значение которого задается на входе этого канала. Величина, поступающая на вход другого канала, является сигналом задания угловой скорости, который после сравнения с фактическим значением скорости поступает на вход П- (ПИ)-регулятора, на выходе которого формируется сигнал задания электромагнитного момента. Полученный в результате сравнения фактического и заданного значений момента сигнал ошибки по моменту релейным регулятором преобразуется в напряжение, которое подается на вход модели асинхронного двигателя.

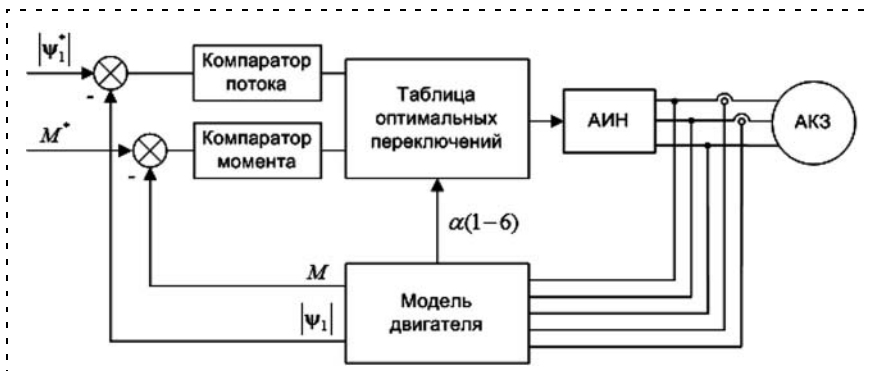


Рис. 1. Функциональная схема привода с прямым управлением момента

Заключение

Представленная в данной статье структурная модель привода с DTC-управлением позволяет разработчикам получать необходимые динамические характеристики и создает основу для построения более сложной виртуальной модели, с помощью которой могут быть реализованы необходимые этапы проектирования электропривода.

Список литературы

1. **Онищенко Г. Б., Локтева И. Л.** Асинхронные вентильные каскады и двигатели двойного питания. М.: Энергия, 1979.
2. **United States Patent 4.678.248.** Direct-self control of the flux and rotary moment of a rotary field machine.
3. **Debenbrock M.** Direct Self-Control (DSC) of Inverter-Fed Induction Machine // IEEE Transaction On Power Electronics. 1988. V. 3. № 4.
4. **Takahashi I., Noguchi T.** A New Quick-Response and High-Efficiency Control Strategy of an Induction Motor // IEEE Transaction On Industry Application. 1986. V. 22. № 5.

5. **Niemelä, Markku.** Position Sensorless Electrically Excited Synchronous Motor Drive for Industrial Use Based on Direct Flux Linkage and Torque Control. Dissertation. Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, Finland, 1999. 144 p.
6. **Jänecke M., Kremer R., Steuerwald G.** Direct Self-Control (DSC). A Novel Method Of Controlling Asynchronous Machines In Traction Applications // Proc. of EPE 1989, October 9–12, 1989 Aachen, Germany, V. 1. P. 75–81.
7. **Tiitinen P., Pohjalainen P., Lalu J.** The Next Generation Motor Control Method: Direct Torque Control (DTC) // EPE Journal. March 1995. V. 5. N.1. P. 14–18.
8. **Герман-Галкин С. Г.** Matlab&Simulink. Проектирование мехатронных систем на ПК. СПб.: КОРОНА-Век, 2008. 368 с.
9. **Слежановский О. В., Дацковский Л. Х., Кузнецов И. С., Лебедев Е. Д., Тарасенко Л. М.** Системы подчиненного регулирования электропривода переменного тока с вентильными преобразователями. М.: Энергоатомиздат, 1983.
10. **Усольцев А. А.** Частотное управление асинхронными двигателями: учеб. пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. 94 с.
11. **Соколовский Г. Г.** Электропривод переменного тока с частотным регулированием. М.: ACADEMIA, 2006. 265 с.
12. **Nash J. N.** Direct Torque Control, Induction Motor Vector Control Without an Encoder // IEEE Transaction On Industry Application. 1997. V. 33. № 2.

УДК.51-72

В. Т. Шароватов, д-р техн. наук, проф.,
kaf_nl@bstu.spb.su,

П. А. Лошицкий, аспирант,
adressad@pochta.ru,

Балтийский государственный
технический университет "Военмех"
им. Д. Ф. Устинова (Санкт-Петербург)

Математическая модель силового оболочкового бесштокового пневмоцилиндра двустороннего действия

Предлагается математическая модель силового оболочкового бесштокового пневмоцилиндра (СБПЦ) двустороннего действия, учитывающая свойства сжатого газа, в которой использованы выкладки для СБПЦ одностороннего действия невозвратного типа [1]. Приведен расчетный пример возможного использования СБПЦ двустороннего действия. Область применения СБПЦ двустороннего действия — высокоточные и быстродействующие системы управления различного назначения.

Ключевые слова: силовой оболочковый элемент, рабочая точка, математическая модель, пневмоцилиндр

Состояние вопроса. В настоящее время при проектировании систем управления (СУ) все более обостряется известное противоречие между требованиями простоты и надежности, малой массы и низкой стоимости, с одной стороны, и высокими динамическими показателями — с другой стороны, применительно к выбору исполнительных двигателей (ИД). В особо критичной форме это противоречие возникает при проектировании СУ антропоморфных робототехнических конструкций. По мнению авторов, оно может быть успешно разре-

шено путем применения силовых бесштоковых пневмоцилиндров (СБПЦ), выполненных на основе силовых оболочковых элементов (СОЭ) типа пневматический мускул (ПМ) (разработчик — фирма "Festo", Германия).

Упомянутые оболочковые СБПЦ могут быть реализованы в виде:

- СБПЦ одностороннего действия невозвратного типа;
- СБПЦ одностороннего действия с возвратной пружиной;
- СБПЦ двустороннего действия.

С учетом актуальности поставленной задачи попытки получить математические модели упомянутых СБПЦ предпринимались рядом отечественных и зарубежных исследователей [2–4]. Однако данные работы не позволяют в полной мере применить полученные в них научные результаты либо в связи с их излишней громоздкостью, либо из-за упрощенного подхода при решении поставленных задач.

В данной статье предлагается математическая модель СБПЦ двустороннего действия на основе исследований, выполненных в работе [1], позволяющая учесть свойства сжатого газа в практически важных установившихся режимах работы СБПЦ. Применение полученной математической модели проиллюстрировано расчетным примером.

Разработка математической модели СБПЦ двустороннего действия

Поскольку в каталогах фирмы "Festo" размерности статических характеристик СОЭ типа ПМ представлены в виде относительных величин, то авторы сочли необходимым для удобства пользователей сохранить тот же подход при составлении ряда уравнений, описывающих динамику СБПЦ.

Используем систему уравнений для оболочкового СБПЦ одностороннего действия невозвратного типа из работы [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\rho_p} \frac{d\rho}{dt} + \frac{k_r}{r_p} \frac{dr}{dt} = k_u \frac{Q}{V_p}; \\ p(\rho) = k_{pp}\rho + p_0; \\ r = \frac{\delta}{k_{r\delta}} + r_0; \\ F_{\text{пм}} = k_F(k_{\delta p}p - \delta); \\ F_{\text{пм}} - F_{\text{н}} + F_{\text{возм}} = -k_{\text{тр}} \frac{dL_{\text{т}}}{dt} - m \frac{d^2 L_{\text{т}}}{dt^2}; \\ \delta = \frac{L_{\text{н}} - L_{\text{т}}}{l_{\text{н}}} \cdot 100, \end{array} \right. \quad (1)$$

где δ — относительное сокращение СОЭ; ρ — плотность рабочей среды; p — давление внутри оболочки; t — время; $F_{\text{н}}$ — усилие, затрачиваемое СОЭ на преодоление нагружающих сил; $F_{\text{возм}}$ — возмущающее воздействие на СОЭ; $F_{\text{тр}}$ — усилие, затрачиваемое СОЭ на преодоление сил вязкого трения; $F_{\text{пм}}$ — усилие, развиваемое СОЭ; m — масса объекта управления (ОУ), приведенная к продольной оси СОЭ; r — текущее значение радиуса оболочки СОЭ; $L_{\text{т}}$, $L_{\text{н}}$ — текущая и начальная длина СОЭ соответственно; $Q_{1,2}$ — объемный расход газа, поступающий в оболочку СОЭ; p_p , r_p , ρ_p , V_p — давление, радиус оболочки, плотность и внутренний объем оболочки одного СОЭ для выбранной рабочей точки (РТ), которая соответствует нейтральному положению ОУ; r_0 , p_0 — постоянные величины, k_F — коэффициент жесткости; $k_{\delta p}$ — коэффициент, связывающий приращение относительного сокращения $\Delta\delta$ с изменением давления Δp ; $k_{r\delta}$ — коэффициент, связывающий изменение приращения радиуса оболочки Δr с приращением относительного сокращения $\Delta\delta$; k_u — коэффициент пропорциональности; k_{pp} — коэффициент, связывающий изменение плотности газа ρ с изменением давления p .

С учетом того, что имеется два СОЭ, работающих встречно, система (1) предстает в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\rho_p} \frac{d\rho_{1,2}}{dt} + \frac{k_r}{r_p} \frac{dr_{1,2}}{dt} = k_u \frac{Q_{1,2}}{V_p}; \\ p_{1,2}(\rho) = k_{pp}\rho_{1,2} + p_0; \\ r_{1,2} = \delta_{1,2}/k_{r\delta} + r_0; \\ F_{\text{пм}} = k_F(k_{\delta p}\Delta p - \Delta\delta); \\ F_{\text{пм}} = k_{\text{тр}} \frac{d(\Delta L_{\text{т}})}{dt} + m \frac{d^2(\Delta L_{\text{т}})}{dt^2} + F_{\text{н}} + F_{\text{возм}}; \\ \delta_{1,2} = (L_{\text{н}} - L_{\text{т},2})/l_{\text{н}} \cdot 100\%; \\ \Delta\delta = \mp\delta_p \pm \delta_{1,2}; \\ \Delta p = \mp p_p \pm p_{1,2}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где индексы 1,2 соответствуют порядковому номеру СОЭ.

Преобразуем систему (2) к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\delta = \mp\delta_p \pm \delta_{1,2}; \quad (a) \\ \Delta p = \mp p_p \pm p_{1,2}; \quad (b) \\ \frac{2}{k_{pp}\rho_p} \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{k_r}{k_{r\delta}r_p} \frac{d\delta_1}{dt} = k_u \frac{Q_1}{V_p}; \quad (c) \\ -\frac{2}{k_{pp}\rho_p} \frac{d\rho_2}{dt} - \frac{k_r}{k_{r\delta}r_p} \frac{d\delta_2}{dt} = k_u \frac{Q_2}{V_p}; \quad (d) \\ k_F(k_{\delta p}\Delta p - \Delta\delta) = m \frac{L_{\text{н}}}{100\%} \frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + \\ + k_{\text{тр}} \frac{L_{\text{н}}}{100\%} \frac{d(\Delta\delta)}{dt} + F_{\text{н}} + F_{\text{возм}}. \quad (e) \end{array} \right. \quad (3)$$

При решении системы (3) примем допущение, что значения расхода газа на входах СОЭ Q_1 и Q_2 одинаковы по модулю и отличаются только знаком, т. е.

$$Q_1 = -Q_2 = Q. \quad (4)$$

Подставляя в (3c) и (3d) выражения (3a), (3b) и вычитая из (3c) выражение (3d), а также учитывая (4), получим

$$\frac{2}{k_{pp}\rho_p} \frac{d(2\Delta p)}{dt} + \frac{k_r}{k_{r\delta}r_p} \frac{d(2\Delta\delta)}{dt} = k_u \frac{2Q}{V_p},$$

или

$$\frac{2}{k_{pp}\rho_p} \frac{d\Delta p}{dt} + \frac{k_r}{k_{r\delta}r_p} \frac{d\Delta\delta}{dt} = k_u \frac{Q}{V_p}. \quad (5)$$

Применяя преобразование Лапласа к соотношениям (3e) и (5), имеем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{k_{pp}\rho_p} s\Delta p(s) + \frac{k_r}{k_{r\delta}r_p} s\Delta\delta(s) = k_u \frac{Q(s)}{V_p}; \\ k_F(k_{\delta p}\Delta p(s) - \Delta\delta(s)) = m \frac{L_{\text{н}}}{100\%} s^2\Delta\delta(s) + \\ + k_{\text{тр}} \frac{L_{\text{н}}}{100\%} s\Delta\delta(s) + F_{\text{н}}(s) + F_{\text{возм}}(s). \end{array} \right. \quad (6)$$

Из системы (6) получаем операторное уравнение динамики СЧ оболочкового СБПЦ двустороннего действия:

$$k_F k_u \frac{k_{\delta p}\rho_p}{k_{pp}2V_p} \frac{Q(s)}{s} - F_{\text{н}}(s) - F_{\text{возм}}(s) = \left(s \frac{k_{\text{тр}}L_{\text{н}}}{100\%} + s^2 \frac{mL_{\text{н}}}{100\%} + k_F \left(k_{\delta p} \frac{\rho_p k_r}{2k_{r\delta}k_{pp}r_p} + 1 \right) \right) \Delta\delta(s). \quad (7)$$

Заменив в (7) переменную $\Delta\delta(s)$ в соответствии с работой [2] из соотношения

$$X(s) = \frac{\Delta\delta(s)}{100\%} L_{\text{н}},$$

Таблица 1

C_p , МПа	Давление внутри оболочки СОЭ, МПа							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Для изотермического процесса								
	0,049	0,121	0,204	0,295	0,394	0,498	0,607	0,720
Для адиабатического процесса								
	0,049	0,099	0,149	0,199	0,248	0,298	0,348	0,398

где $X(s)$ — изображение по Лапласу абсолютной величины перемещения ОУ, и сгруппировав коэффициенты линеаризации, окончательно получим:

$$k_F k_{\delta p} \frac{C_p}{V_p} \frac{Q(s)}{s} - F_H(s) - F_{\text{возм}}(s) = \left(s^2 \frac{m L_H}{100 \%} + s \frac{k_{\text{тр}} L_H}{100 \%} + k_F (k_{\delta p} C_p C_{\delta} + 1) \right) \frac{100 \%}{L_H} X(s), \quad (8)$$

где C_p и C_{δ} определяются следующими выражениями:

$$C_p = \frac{k_{u\rho p}}{2k_{\rho p}}, \quad C_{\delta} = \frac{k_r}{k_{r\delta} k_{u\rho p}}.$$

Параметры C_p и C_{δ} зависят только от выбора РТ и типоразмера СОЭ, в то время как другие параметры определяются требованиями решения конкретной технической задачи по применению СБПЦ.

Числовые значения параметров C_p и C_{δ} приведены в табл. 1 и 2 для трех типоразмеров СОЭ типа ПМ и для разных процессов расширения газа (адиабатического и изотермического).

Значения коэффициентов k_F и $k_{\delta p}$ для различных значений РТ представлены на рис. 1 и 2 соответственно, согласно работе [1].

Заметим, что числовое значение коэффициента C_p находится для давления, действующего внутри оболочки, в то время как числовые значения коэффициентов k_F и $k_{\delta p}$ находятся для избыточного давления, которое определяется как разность между действующим и атмосферным давлением.

Поскольку оболочковый СБПЦ как ИД состоит из двух элементов — СЧ и электропневматического дроссельного распределителя (ДР), то на основе принципа суперпозиции из (8) находим для оболочкового СБПЦ двустороннего действия передаточные функции:

- по перемещению

$$W_{\text{пер}}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_{\text{пер}}}{s(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)} \cdot W_{\text{ДР}}(s), \quad (9)$$

где $W_{\text{ДР}}(s)$ — передаточная функция ДР; $U(s)$ — изображение по Лапласу напряжения (тока) на входе в ДР.

Таблица 2

C_{δ} , % ⁻¹	Относительное сокращение оболочки СОЭ δ , %											
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
Типоразмер ПМ												
∅10 мм	0,311	0,245	0,200	0,168	0,143	0,124	0,108	0,095	0,084	0,075	0,067	
∅20 мм	0,262	0,212	0,176	0,150	0,129	0,113	0,099	0,088	0,078	0,070	0,062	
∅40 мм	0,248	0,202	0,170	0,145	0,125	0,109	0,096	0,085	0,076	0,068	0,061	

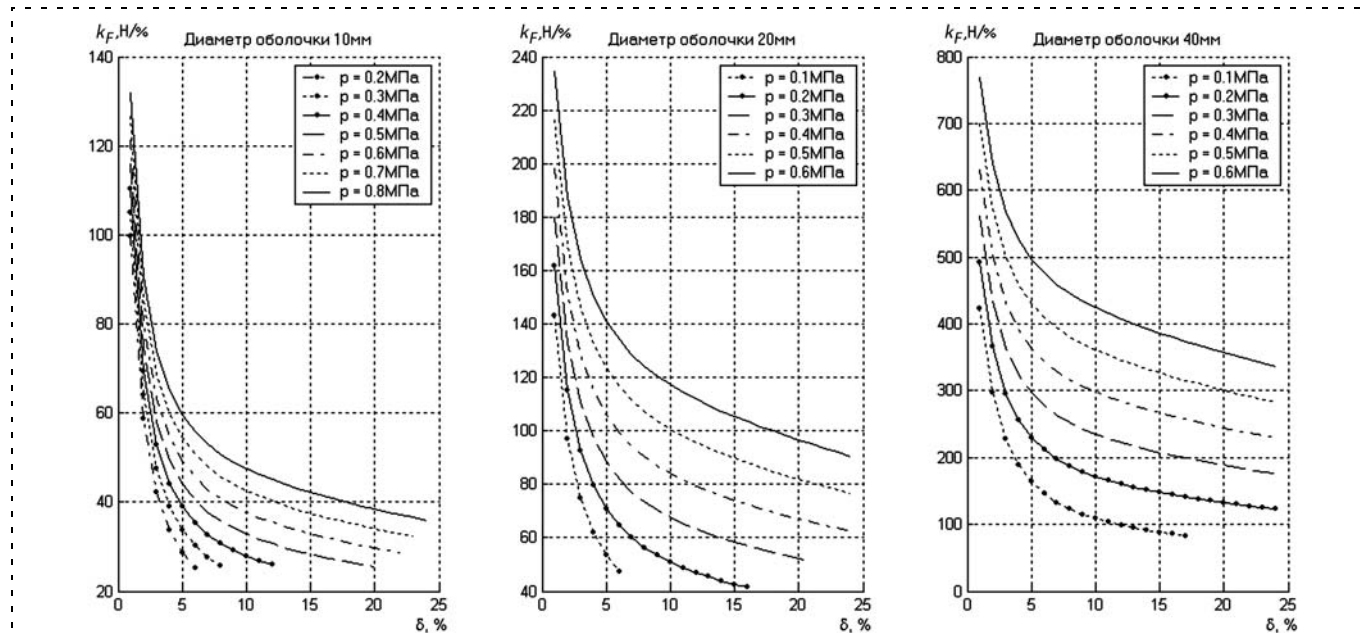


Рис. 1. Значение коэффициента k_F для трех типоразмеров СОЭ типа ПМ для различных значений РТ

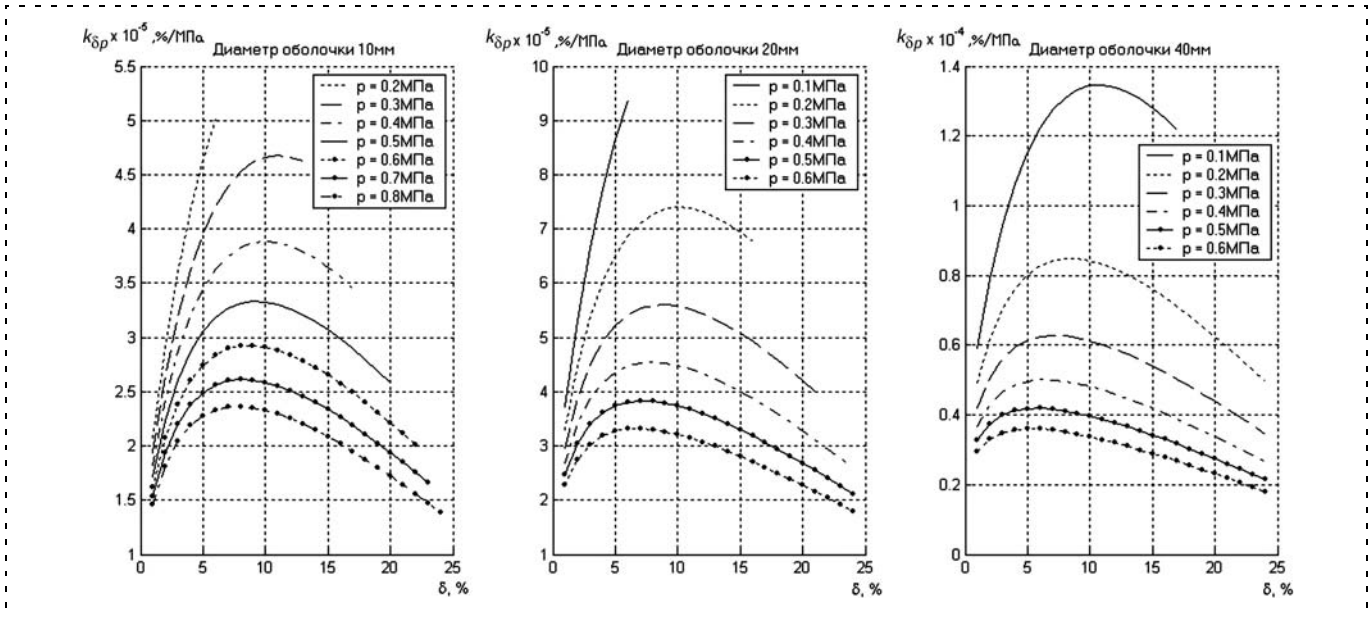


Рис. 2. Значение коэффициента $k_{\delta p}$ для трех типоразмеров СОЭ типа ПМ для различных значений РТ

У этой передаточной функции коэффициент передачи по перемещению $k_{пер}$, постоянная времени T и параметр затухания ξ равны

$$k_{пер} = \frac{k_{\delta p} C_p}{(k_{\delta p} C_p C_{\delta} + 1) V_p} \cdot \frac{L_H}{100 \%};$$

$$T = \sqrt{\frac{m L_H}{k_F (k_{\delta p} C_p C_{\delta} + 1) \cdot 100 \%}};$$

$$\xi = \frac{k_{TP}}{2} \sqrt{\frac{L_H}{m k_F (k_{\delta p} C_p C_{\delta} + 1) \cdot 100 \%}}.$$

Передаточная функция ДР в (9) в конкретной форме не представлена, так как она достаточно широко известна и может использоваться с различ-

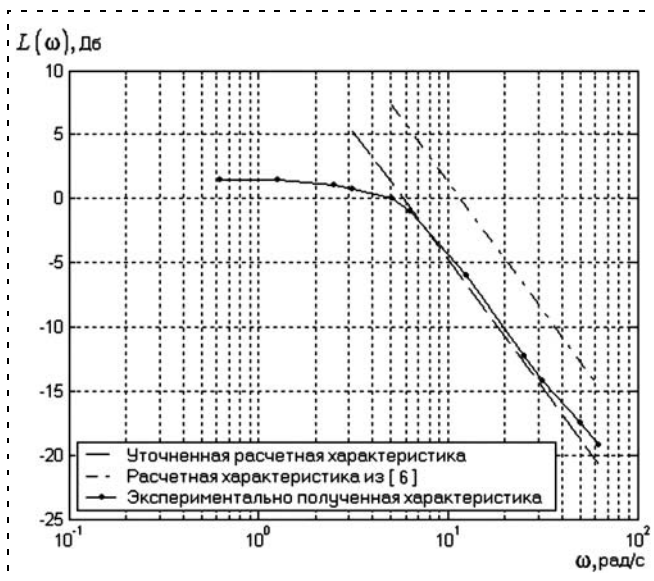


Рис. 3. Расчетные ЛАХ и экспериментально полученная характеристика

ной степенью детализации в зависимости от требований решаемой задачи:

- по возмущению

$$W_{возм}(s) = \frac{X(s)}{F_{возм}(s)} = \frac{k_{возм}}{(T^2 s^2 + 2 T \xi s + 1)}, \quad (10)$$

где коэффициент передачи по возмущению

$$k_{возм} = \frac{1}{k_F (k_{\delta p} C_p C_{\delta} + 1)} \cdot \frac{L_H}{100 \%},$$

а значения постоянной времени T и параметра затухания ξ те же, что в предыдущем случае;

- по усилию

$$W_{ус}(s) = \frac{F_H(s)}{F_{вх}(s)} = \frac{k_{ус}}{s} \cdot W_{ДР}(s) W_{ЧЭ}(s), \quad (11)$$

где коэффициент передачи по усилию

$$k_{ус} = k_F k_{\delta p} C_p / V_p.$$

$F_{вх}(s)$ — изображение по Лапласу задающего усилия на входе в СУ; $W_{ЧЭ}(s)$ — передаточная функция чувствительного элемента (ЧЭ) в цепи главной обратной связи.

Корректность полученной математической модели оболочкового СБПЦ двустороннего действия подтверждается практически полным совпадением расчетной ЛАХ с экспериментальными данными [6] (рис. 3).

Пример применения полученной математической модели СБПЦ двустороннего действия в задаче расчета вибростенда

Современные виброиспытательные системы — вибростенды (ВС) — представляют собой сложные комплексы, включающие подсистемы задания, воспроизведения, управления и измерения, анали-

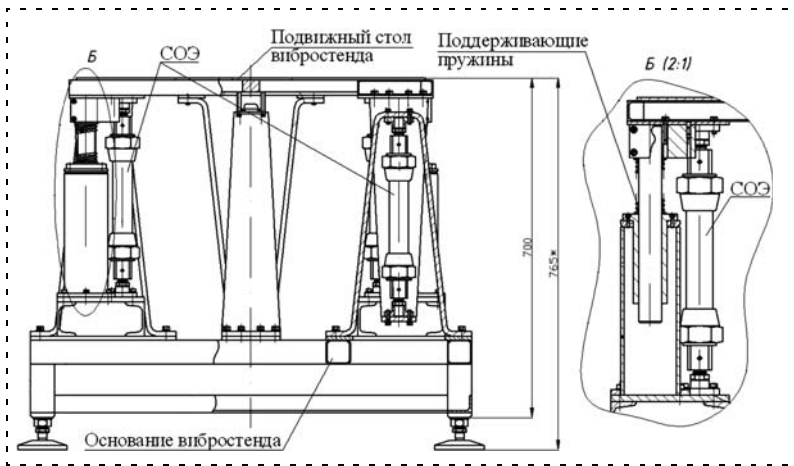


Рис. 4. Внешний вид вибростенда

за и регистрации параметров вибрации. Основным звеном испытательных вибростендов является вибратор — исполнительный элемент, предназначенный для воспроизведения заданных колебаний. В зависимости от принципа действия исполнительного элемента в ВС используют различные способы задания вибрации и методы проведения испытаний [4].

На практике самое широкое распространение получили ВС с электродинамическими, электрогидравлическими и механическими исполнительными элементами. Первые два типа применяются в системах, способных выполнять все современные виды испытаний, при этом электродинамический привод позволяет создавать более широкий спектр колебаний 5...10 000 Гц, нежели электрогидравлический. Механические вибраторы применяются в системах, предназначенных для испытания методом фиксированных частот.

В отличие от электродинамических, электрогидравлических и механических вибраторов вибра-

торы на основе оболочковых СБПЦ двустороннего действия имеют ряд более выгодных технических и экономических показателей, о которых достаточно полно сказано в [7]. С учетом этого факта представляется перспективным применение СОЭ в качестве ИД — вибратора — в ВС.

Определим исходные данные для расчета привода ВС. По данным каталога "Festo" [8] максимальные значения рабочих частот ДР составляют 90...125 Гц. Зададим максимальную частоту для работы вибратора $f_{\max} = 20$ Гц. Вибростенд должен обрабатывать максимальную амплитуду $A_{\max} = 3$ мм и обеспечивать грузоподъемность в 75 кг.

На вход СУ с генератора гармонических сигналов подается задающее напряжение требуемой круговой частоты $\omega = 2\pi f$ с амплитудой

$$A_{\text{вх}}(t) = A_{\max} \sin \omega t, \quad (12)$$

где $A_{\text{вх}}(t)$ — функция изменения амплитуды входного сигнала во времени.

Найдем скорость и ускорение изменения задающего входного сигнала последовательным дифференцированием (12):

$$\dot{A}_{\text{вх}}(t) = A_{\max} \omega \cos \omega t,$$

$$\ddot{A}_{\text{вх}}(t) = -A_{\max} \omega^2 \sin \omega t.$$

Таким образом,

$$\ddot{A}_{\text{вх}}(t)/\omega^2 = -A_{\max} \sin \omega t.$$

Отсюда, приняв закон изменения выходного звена $A_{\text{вых}}(t)$ синусоидальным, получим

$$\ddot{A}_{\text{вх}}(t)/\omega^2 = -A_{\text{вх}}(t). \quad (13)$$

Выражение (13) удобно использовать в СУ, поскольку в ВС в качестве датчика обратной связи, как правило, используется акселерометр, дающий на выходе сигнал, пропорциональный ускорению ОУ.

В связи с вышеизложенным для нахождения сигнала рассогласования достаточно уменьшить сигнал с акселерометра в ω^2 раз, инвертировать его и суммировать с задающим сигналом.

Возможный вариант конструкции вибростенда приведен на рис. 4.

Принципиальная пневматическая схема ВС представлена на рис. 5.

При выборе схемы расположения СБПЦ необходимо учитывать, что СБПЦ должны перемещать ОУ как вверх, так и вниз. Исходя из этого требования примем расположение одного СБПЦ относительно ОУ, показанное на рис. 6.

Для устойчивого расположения подвижного стола используем четыре СБПЦ.

Выбор комплектующих элементов и динамический синтез СУ вибратором ВС. Для выбора СОЭ в ка-

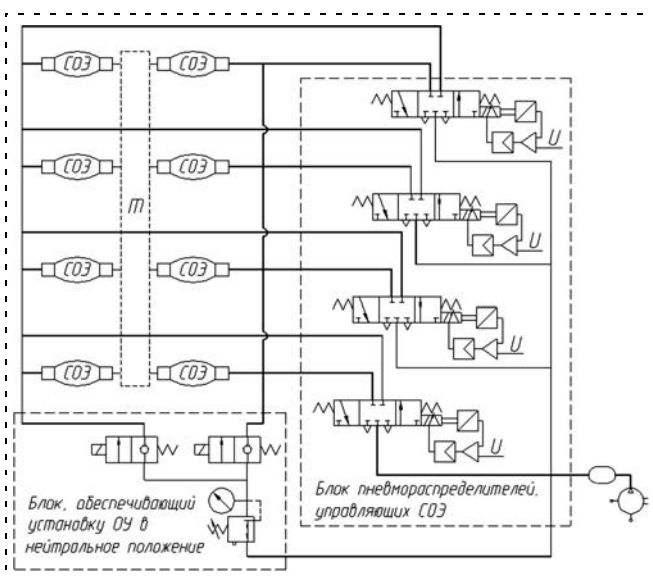


Рис. 5. Принципиальная пневматическая схема

честве силовой части СБПЦ необходимо определить требуемое усилие со стороны СЧ на ОУ, для чего воспользуемся выражением

$$F_{\text{СОЭ}} = \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \Big|_{\text{max}} (m_{\text{стола}} + m_{\text{о.и}}), \quad (14)$$

где $m_{\text{стола}}$ — масса стола, на котором располагается испытуемый объект (в данном случае $m_{\text{стола}} = 15$ кг), $m_{\text{о.и}}$ — масса объекта испытаний (60 кг).

Подставляя (13) в (14), получим

$$F_{\text{max}} = A_{\text{max}} \omega^2 (m_{\text{стола}} + m_{\text{о.и}})$$

или

$$F_{\text{max}} = A_{\text{max}} (2\pi f)^2 (m_{\text{стола}} + m_{\text{о.и}}).$$

Для заданных исходных данных имеем

$$F_{\text{max}} = 0,003 \cdot (2\pi \cdot 20)^2 \cdot (15 + 60) = 3553 \text{ Н.}$$

Поскольку в каждом направлении работают четыре СБПЦ, найдем усилие, которое должен развивать один СОЭ:

$$F_{\text{СОЭ}} = F_{\text{max}}/4 = 3553/4 \approx 900 \text{ Н.} \quad (15)$$

Исходя из требований к величине усилия и амплитуде гармонического сигнала в качестве СЧ СБПЦ выбирается СОЭ фирмы "Festo" — DMSP-20-100N-AM-СМ со следующими характеристиками [9]:

- подвод воздуха — осевой, с одной стороны;
- длина оболочки — 100 мм;
- диаметр оболочки в исходном состоянии — 20 мм.

Силовые статические характеристики для данного типоразмера СОЭ приведены на рис. 7 [9].

На приведенном графике рабочая область СОЭ находится в границах, обусловленных:

- 1 — максимальной действующей на ПМ внешней нагрузкой (Н);
- 2 — максимальным рабочим давлением (МПа);
- 3 — максимальной деформацией (%);
- 4 — максимальным растяжением (%).

Осуществив выбор СОЭ, найдем координаты РТ δ_p и p_p для определения числовых значений параметров передаточной функции (8):

- так как требуемое относительное сокращение СОЭ 6 % ($2A_{\text{max}}$), выберем $\delta_p = 3$ %;
- зная усилие, развиваемое одним СОЭ в соответствии с (14), с помощью рис. 7 определяем избыточное рабочее давление $p_p = 0,4$ МПа.

Выполним расчет величин, необходимых для нахождения параметров передаточной функции (8), и найдем числовое значение самих параметров:

- из [1] находим значение радиуса оболочки в РТ $r_p = 0,0114$ м и значение коэффициента, учиты-

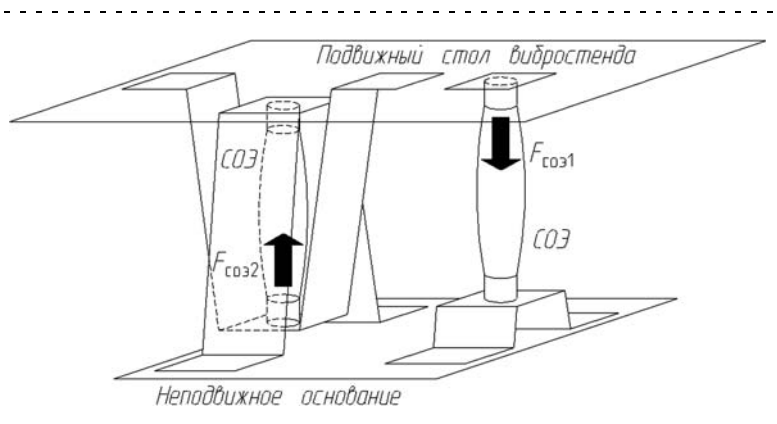


Рис. 6. Расположение одной пары СОЭ относительно ОУ

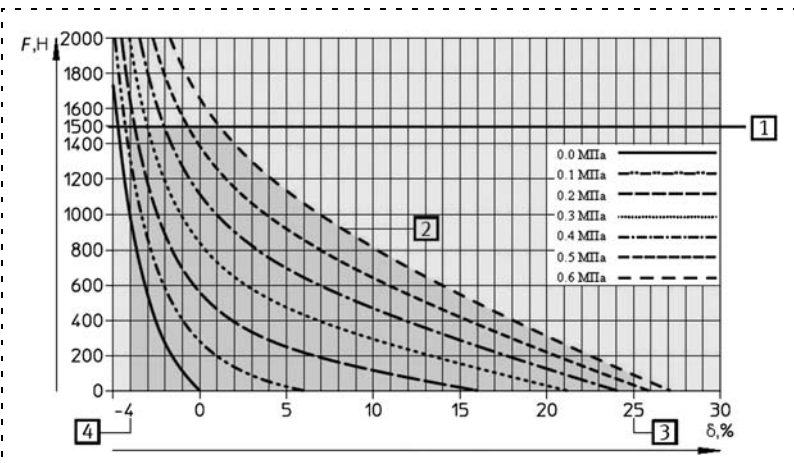


Рис. 7. Силовые статические характеристики СОЭ типа ПМ с диаметром оболочки 20 мм

вающего деформацию оболочки вблизи присоединительных фланцев, $k_{VY} = 0,92$;

- по формуле для объема оболочки в РТ [1] вычисляем этот объем, учитывая, что в каждом направлении работают четыре СОЭ:

$$V_p = 4k_{VY}\pi r_p^2 L_H \left(1 - \frac{\delta_p}{100\%}\right) = 0,92\pi \cdot 0,0114^2 \cdot 0,1(1 - 0,03) \cdot 4 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

- с помощью табл. 1 и 2 и рис. 3 и 4 получим:

$$C_p = 0,248 \text{ МПа}; C_\delta = 0,194 (\%)^{-1}; k_F = 133 \text{ Н}/\%; k_{\delta p} = 38 \text{ } \%/ \text{МПа}.$$

Зная числовые значения всех коэффициентов, входящих в (9), и учитывая, что в каждом направлении работают четыре СОЭ, находим:

$$k_{\text{пер}} = 91,76 \text{ м}/\text{м}^3; T = 0,0071 \text{ с}; \xi = 0,019.$$

В СБПЦ будем использовать ДР с пропорциональным управлением фирмы "Festo" — МРУЕ-5-1/4-010-В — с характеристиками [8]:

- функция клапана — 5/3;
- номинальный расход (при 0,6 МПа) — 1400 л/мин;

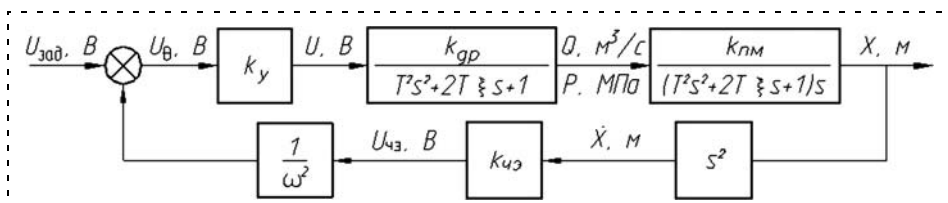


Рис. 8. Структурная схема системы управления вибратором

- предельная частота f — 90 Гц;
- рабочая температура — 0...+50 °С;
- коэффициент передачи $k_{др} = Q/U = 1400 \text{ л/мин} / 5 \text{ В} = 4,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/(\text{с} \cdot \text{В})$;
- постоянная времени $T_{др} = 1/\omega_{др} = 1/(2\pi \cdot f) = 0,0018 \text{ с}$.

Для обеспечения требуемых характеристик для ВС необходимо использовать четыре ДР.

В качестве ЧЭ применим линейный акселерометр АТ1105-50 фирмы "Темп-Авиа" [10]. Он обеспечивает электрический аналоговый сигнал в виде постоянного напряжения, который пропорционален действующему ускорению, а знак соответствует направлению действия ускорения.

Технические характеристики ЧЭ:

- диапазон измеряемых линейных ускорений $a = -50...+50 \text{ м/с}^2$;
- номинальное выходное напряжение на диапазоне измерений $U = \pm 5 \text{ В}$;
- нелинейность не более 5 % от диапазона;
- коэффициент передачи $k_{чэ} = U/a = 5/50 = 0,1 \text{ В} \cdot \text{с}^2/\text{м}$.

Поскольку сигнал с ЧЭ значительно меньше входного управляющего сигнала на ДР, то в систему управления вибратором включен промежуточный усилитель с коэффициентом передачи $k_y = 16\,500$, который позволяет выравнять значение сигнала с ЧЭ с уровнем сигнала на входе ДР.

На рис. 8 приведена структурная схема нескорректированной СУ вибратором.

В качестве исходных данных для динамического синтеза СУ также задается максимальной динамической ошибкой $\theta_d = 0,0005 \text{ м}$.

На основании выбранных элементов для СУ и проведенного динамического синтеза методом об-

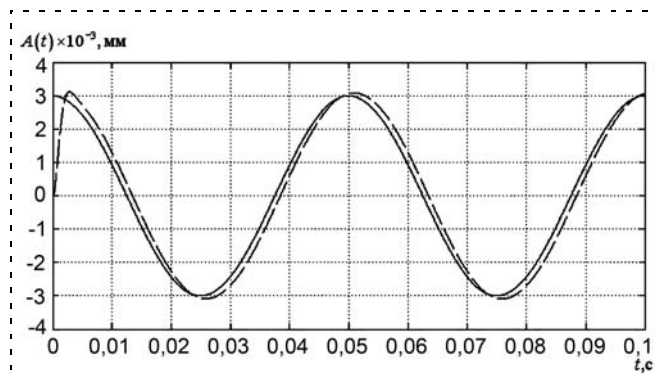


Рис. 9. График динамического процесса при подаче на вход СУ гармонического сигнала

ратных ЛАЧХ [8], а также моделирования в среде *Simulink* получены графики динамических процессов при гармоническом входном воздействии (рис. 9).

Результаты моделирования на рис. 9 показывают, что синтез СУ выполнен кор-

ректно и требования, предъявляемые к вибростенду, полностью выполнены.

Анализ результатов. Данный вибростенд уступает по максимально возможной задаваемой частоте испытаний его аналогам, реализованным на базе электромагнитов, однако нельзя не учитывать существенную простоту изделия, а следовательно, его низкую стоимость, малое энергопотребление и доступность для конечного потребителя при сравнительно высоких значениях развиваемых частот и реализуемых нагрузок.

Выводы

Линеаризованная динамическая математическая модель оболочкового СБПЦ двустороннего действия, в значительной степени учитывающая особые свойства сжатого газа, и методика расчета и проектирования СУ с применением СБПЦ данного типа, использующая ряд графиков и таблиц, упрощающих процедуру расчетов, открывают широкие возможности для практического применения упомянутых СБПЦ в современных СУ.

Список литературы

1. Шароватов В. Т., Лошицкий П. А. Математическая модель силового бесштокового пневмоцилиндра одностороннего действия оболочкового типа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 2. С. 30–36.
2. Липатов А. А., Марти А. Н., Шароватов В. Т. Исследование статики и динамики оболочкового гидро-пневмодвигателя // Известия вузов. Машиностроение. 2002. С. 36–49.
3. Ching-Ping Chou, Hannaford B. Measurement and modeling of McKibben pneumatic artificial muscles // Robotics and Automation, IEEE Transactions on. V. 12. N. 1. (1996). P. 90–102.
4. Daerden F., Lefeber D. Pneumatic artificial muscles: Actuators for robotics and automation // European Journal of Mechanical and Environmental Engineering. 2002. 47 (1). P. 11–21.
5. Лошицкий П. А., Шароватов В. Т. Идентификация некоторых параметров математической модели двигателя оболочкового типа. // Известия вузов. Приборостроение, 2008. № 12. С. 56–63.
6. Липатов А. А., Шароватов В. Т. Экспериментальное исследование исполнительного двигателя оболочкового типа. // Известия вузов. Машиностроение. 2005. № 3. С. 17–23.
7. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. Т. 6 / Под ред. К. В. Фролова. М.: Машиностроение, 1981.
8. Распределители с пропорциональным управлением серии "МРУЕ". URL: http://www.festo.com/cat/ru_ru/data/doc_ru/PDF/RU/MPYE_RU.PDF
9. Пневмомускул MAS. URL: http://www.festo.com/cat/ru_ru/data/doc_ru/PDF/RU/MAS_RU.pdf
10. "Темп-Авиа", каталог продукции. URL: <http://www.temp-avia.ru/catalog/detail/52/>
11. Следящие приводы / Под ред. Б. К. Чемоданова в 3 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.

УДК 681.518

С. Ю. Боровик, канд. техн. наук, вед. науч. сотр.,
borovik@iccs.ru,

О. П. Скобелев, д-р техн. наук, гл. науч. сотр.,
iccs@iccs.ru,

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления
сложными системами РАН, г. Самара

Методические погрешности систем измерения радиальных и осевых смещений торцов лопаток¹

Рассматриваются методические погрешности систем измерения радиальных и осевых смещений торцов лопаток в компрессорах или турбинах газотурбинных двигателей. В системах используются сосредоточенные и распределенные на статоре кластеры, каждый из которых состоит из двух одновитковых вихретоковых датчиков с чувствительными элементами в виде отрезка проводника. Приводятся описания методики определения рассматриваемых погрешностей и результаты оценки статических составляющих, связанных с изменениями переднего фронта синхросигнала и неравномерным шагом лопаток в торцевой части, а также оценки динамической составляющей при изменении во времени угловой скорости вращения лопаточного колеса.

Ключевые слова: системы измерения, радиальные и осевые смещения торцов лопаток, сосредоточенный и распределенный кластеры, одновитковый вихретоковый датчик, методические погрешности

Введение

Системы измерения радиальных и осевых смещений торцов лопаток в компрессорах или турбинах газотурбинных двигателей (ГТД) [1, 2] построены на основе методов, предусматривающих использование сосредоточенных или распределенных на статоре кластеров одновитковых вихретоковых датчиков (СК или РК ОВТД) [3–5]. В соответствии с этими методами проводится предварительное измерение периода вращения лопаточного колеса ($T_{\text{ЛК}}$), и по полученному результату и известному числу лопаток ($n_{\text{Л}}$) вычисляются моменты времени, когда подаются импульсы питания измерительной цепи (ИЦ)², период которых $T_0 = T_{\text{ЛК}}/n_{\text{Л}}$. При этом последовательность импульсов синхро-

низируется с помощью "метки" на валу лопаточного колеса. Обычно измерение периода и синхронизация осуществляются с помощью датчика частоты вращения промышленного изготовления (ДЧВ-2500) и простейшего АЦП "период — код". Тот же датчик обеспечивает и необходимую синхронизацию последовательности импульсов питания ИЦ (с периодом T_0), гарантирующую получение искомой измерительной информации точно в моменты прохождения замками лопаток геометрического центра (ГЦ) СК ОВТД или ГЦ и виртуального ГЦ (ВГЦ) в РК ОВТД [3–5].

Разумеется, при этом предполагается строго стационарный режим работы ГТД и, как следствие, постоянство угловой скорости вращения лопаточного колеса, а также равномерное изначальное размещение замков лопаток, что регламентируется соответствующими техническими требованиями.

Однако фронт нарастания сигнала на выходе ДЧВ-2500 (принцип действия датчика — индукционный) изменяется при изменении угловой скорости вращения лопаточного колеса и сохранении при этом стационарного режима работы ГТД, и длительность фронта увеличивается с уменьшением скорости. Это, соответственно, приводит к временному сдвигу всей последовательности импульсов питания ИЦ и, в конечном счете, к погрешности в полученной искомой информации, хотя точность измерения периода сохраняется и, как правило, велика, а погрешности пренебрежимо малы.

Кроме того, необходимо отметить, что существует технологический допуск на установку замков и точность изготовления пера лопаток, а потому их торцовые части могут оказаться на неравном расстоянии друг от друга, что также становится причиной погрешности.

Погрешности, связанные с синхросигналом и неравномерным расстоянием торцов лопаток друг от друга следует классифицировать как статические составляющие методических погрешностей.

Очевидно, что нестационарные режимы работы ГТД, например форсажа или сброса газа, приводят к изменениям во времени угловой скорости вращения, а следовательно, и периода ($T_{\text{ЛК}}(t)$). Это означает, что импульсы питания ИЦ (с периодом T_0 , рассчитанным по результатам измерения $T_{\text{ЛК}}$ на первом обороте) будут опережать или отставать от моментов прохождения замками лопаток ГЦ или ВГЦ кластеров ОВТД, что вызывает появление динамической составляющей методических погрешностей.

В работах [1, 2, 5, 6] в основном приводятся результаты исследований инструментальных погрешностей (и, в частности, систематических и случай-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-08-01032а).

² Предусматривается применение ИЦ с импульсным питанием, в которых реализован метод первой производной [6].

ных составляющих основной погрешности в каналах ОВТД). Вместе с тем, в работе [2] даны оценки погрешностей вычисления радиальных и осевых смещений — в выбранной системе отсчета это координаты y и x соответственно, а в работе [7] к ним добавляется координата z — смещение в направлении вращения лопаточного колеса. Эти погрешности также можно классифицировать как статические составляющие методических погрешностей систем измерения.

Однако в литературе отсутствуют какие-либо сведения об оценках выше перечисленных статических и динамической составляющей методической погрешности, связанной с изменениями во времени угловой скорости вращения и периода $T_{\text{лк}}(t)$. Поэтому данная статья призвана восполнить существующий пробел.

Методика определения погрешностей

Для определения как статических, так и динамических составляющих погрешностей использовали имитатор объекта, представляющий собой лопаточное колесо компрессора ГТД, и имитатор статора с закрепленными на нем СК и РК ОВТД. Размещение чувствительных элементов (ЧЭ) показано на рис. 1. Статор оснащен механизмами перемещений торцов лопаток в осевом направлении вместе с лопаточным колесом (координата x), в радиальном направлении (координата y) и в направлении вращения (координата z) с соответствующими индикаторами перемещений (их разрешающая способность 0,01 мм) [1].

Там же изображены системы отсчета, начала которых совмещены с ГЦ СК ОВТД в точке O (рис. 1, *a*), а также с ГЦ РК в точке O и ВГЦ в точке O' (рис. 1, *b*).

С помощью имитатора объекта и систем измерения были получены зависимости цифровых кодов (C) от координаты z для СК и РК ОВТД при неизменных значениях координат y и x .

В зависимостях $C_1(z)$ и $C_2(z)$, которые получены в системе с СК ОВТД (рис. 2), максимумам кодов $C_{1\text{max}}$ и $C_{2\text{max}}$ соответствуют координаты $z_{1\text{max}} = 0,5$ мм и $z_{2\text{max}} = 4,6$ мм. При этом расстояние от начала отсчета до ГЦ — 2,55 мм (оно определяется по формуле $(z_{1\text{max}} + z_{2\text{max}})/2$).

Следует также отметить, что в СК ОВТД на оба датчика (соответственно на оба ЧЭ) импульсное питание подается одновременно, а потому они выполняют рабочие функции (компенсационные ЧЭ на рис. 1, *a* не показаны). Напротив, в РК ОВТД смена функций ЧЭ с рабочих (ЧЭ-Р) на компенсационные (ЧЭ-К) происходит поочередно при смещении лопаточного колеса на каждые $0,5 \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — угловой шаг установки замков лопаток (на рис. 1, *b* эти состояния лопаток иллюстрируются пунктирными линиями, а ЧЭ — прямым и наклонным шрифтом [5]).

Так как оба датчика РК ОВТД включаются в смежные плечи одной мостовой схемы в составе ИЦ, то проведение аналогичного эксперимента завершается получением одной зависимости $C(z)$ (рис. 3), а не двух, как это было в системе с СК ОВТД.

Согласно полученным данным минимум кода (C_{min}) соответствует прохождению торцом выбранной лопатки (I) ЧЭ₁, а максимум кода (C_{max}) — ЧЭ₂ (выполняющих функции рабочих, т. е. ЧЭ-Р на рис. 1, *b*). Координаты минимума $z_{\text{min}} = 2,88$ мм, а максимума — $z_{\text{max}} = 36,54$ мм.

Далее определяется координата z , соответствующая ГЦ в точке O (z_0). Ее поиск ведется при $z > z_{\text{min}}$

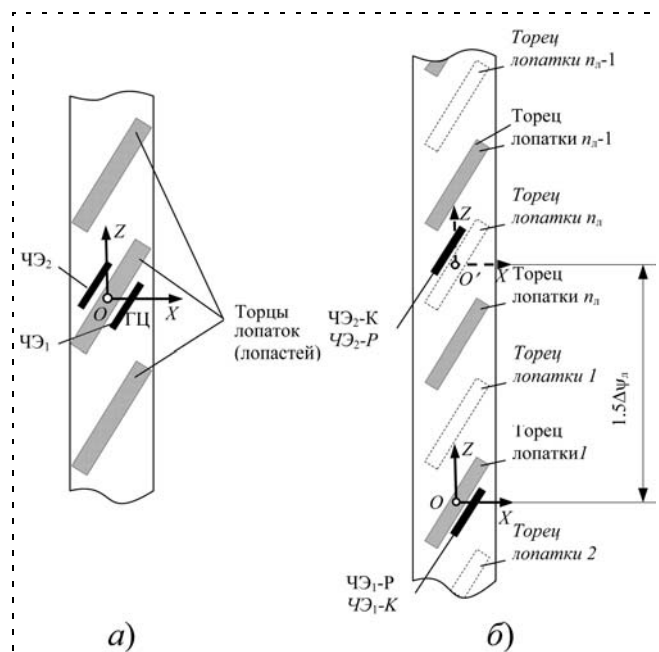


Рис. 1. Размещение чувствительных элементов (ЧЭ) СК (*a*) и РК (*b*) из двух ОВТД на статоре

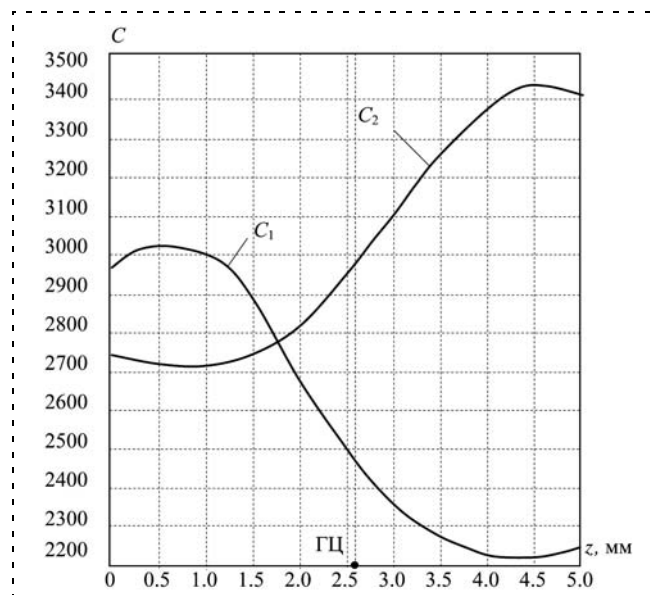


Рис. 2. Зависимости $C_1(z)$ и $C_2(z)$ в каналах СК ОВТД₁ и ОВТД₂

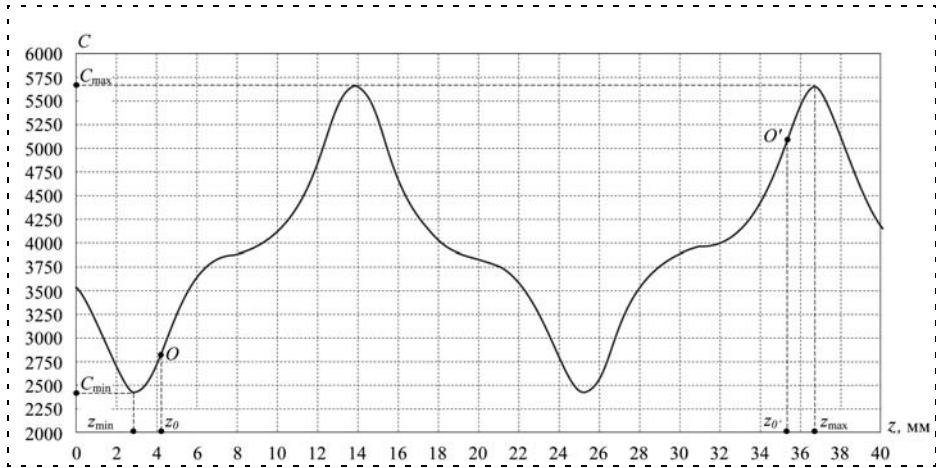


Рис. 3. Зависимость $C(z)$ (РК ОВТД₁ и ОВТД₂)

на участке функции $C(z)$ справа от ее минимума и поблизости от него, где чувствительность к координате z максимальна (рис. 3). ВГЦ в точке O' соответствует координате z_0' , но ее поиск ведется при $z < z_{\max}$ на участке $C(z)$ слева от ее максимума и поблизости от него, где чувствительность к координате z также максимальна. Найденные значения z_0 и z_0' составляют 4,12 и 35,3 мм соответственно (рис. 3)³.

Полученные данные используются для оценки искомых погрешностей, но предварительно зависимости $C(z)$ преобразуются в зависимости $C(\Psi)$ (т. е. в зависимости кода от угла поворота лопаточного колеса Ψ) с помощью формулы $\Psi = \text{arctg}(z/R)$, где R — радиус лопаточного колеса ($R = 410$ мм).

³ Координаты z_0 и z_0' найдены путем визуальных качественных оценок максимальных значений чувствительности. Если необходимо расширение диапазона изменений x и более равномерное распределение чувствительности внутри него, то в поиске максимума следует предусмотреть процедуры пошаговой количественной оценки производных $\frac{dc}{dz} \left(\frac{\Delta c}{\Delta z} \right)$.

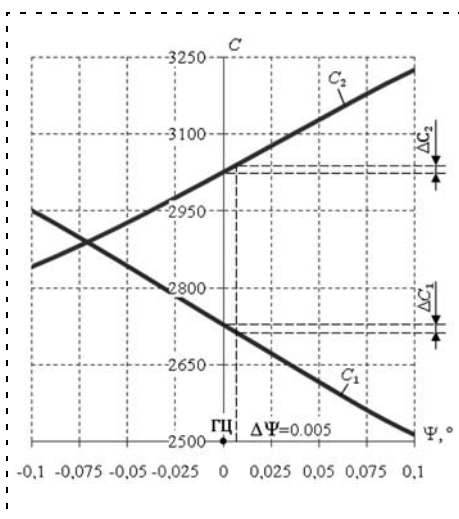


Рис. 4. Зависимость $C(\Psi)$ (СК ОВТД)

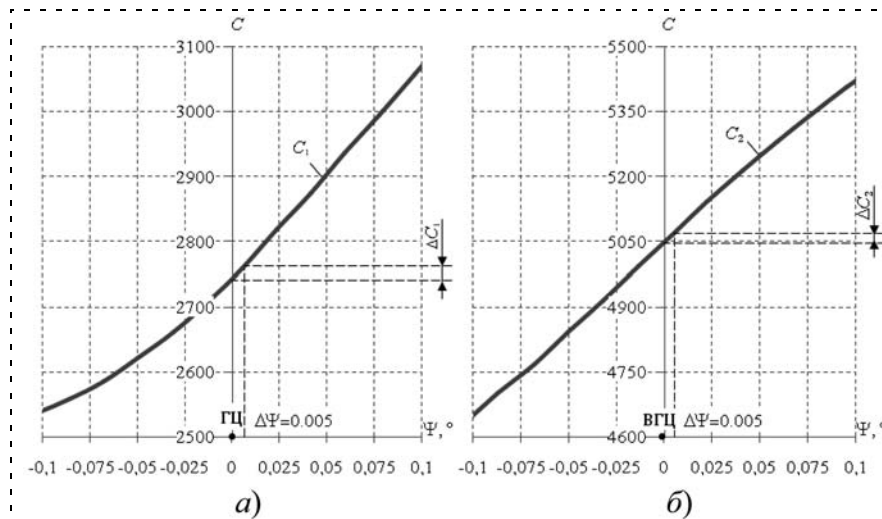


Рис. 5. Зависимость $C(\Psi)$ (РК ОВТД) в области ГЦ (а) и ВГЦ (б)

На рис. 4 и 5 приведены пересчитанные таким образом зависимости, причем эти зависимости представлены в небольших пределах изменения угла $\Delta\Psi = \Psi - \Psi_{\text{ГЦ}}$ или $\Delta\Psi = \Psi - \Psi_{\text{ВГЦ}}$, которые соответствуют реальным угловым сдвигам импульса синхронизации, смещениям торцовых частей лопаток из-за неравномерности их шага, а также угловым смещениям, связанным с изменениями угловой скорости вращения во времени. Там же показаны изменения кодов при $\Delta\Psi = 0,005^\circ$. Аналогичным образом находятся изменения кодов для других $\Delta\Psi$.

Относительные приведенные погрешности находятся по формуле $\delta_C = \frac{|\Delta C|}{C_{\max} - C_{\min}} \cdot 100\%$, где

ΔC — изменения кодов, полученные при угловом смещении $\Delta\Psi$, а C_{\max} , C_{\min} — границы изменений кодов по градуировочным характеристикам (ГХ) СК или РК ОВТД (предполагается, что ГХ известны).

Результаты проведенных исследований

Статические составляющие методических погрешностей. Если предположить, что при переходе на частоту вращения вала 3000 мин^{-1} (период $20 \cdot 10^{-3} \text{ с}$) передний фронт синхроимпульса увеличился всего на $0,6 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, то такому изменению будет соответствовать $\Delta\Psi = 0,001^\circ$, что приводит к погрешностям в каналах СК ОВТД порядка 0,9 % и 0,25 % для РК ОВТД, которые растут с увеличением сдвига сигнала синхронизации, достигая 4,4 % для СК ОВТД при $\Delta\Psi = 0,005^\circ$.

Вместе с тем, погрешности в каналах с РК остаются почти вчетверо меньшими, чем в каналах с СК, что связано с более высокой чувствительно-

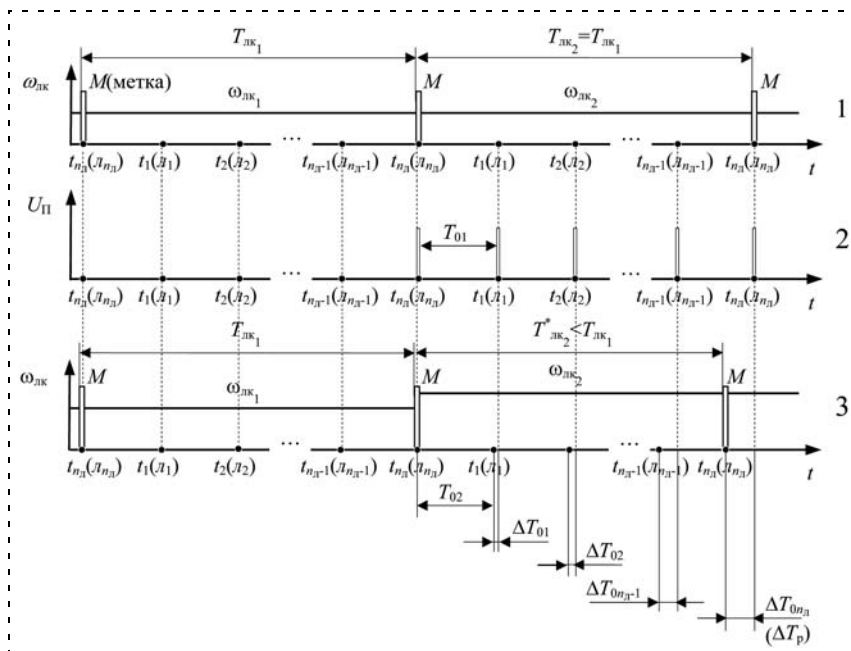


Рис. 6. Временные диаграммы скорости вращения ($\omega_{лк}$), моментов появления замков лопаток ($t_1, t_2, \dots, t_{nл}$) в ГЦ СК ОВТД и импульсов питания ИЦ ($U_{П}$)

стью первых и, соответственно, большей разностью $C_{\max} - C_{\min}$ в формуле для вычисления δ_C^4 .

Оценивая составляющие погрешности, связанные с неравномерностью шага в торцевой части лопаток, следует отметить, что согласно работе [8] замковая часть, с помощью которой лопатки крепятся к дискам, изготавливается с точностью $\pm 0,01 \dots \pm 0,02$ мм, а в соответствии с работой [9] точность изготовления пера лопатки находится в пределах $\pm 0,03$ мм. Поэтому расчеты погрешностей велись в пределах $\Delta\Psi$ от 0 до $0,007^\circ$, которым соответствует неравномерность шага торцов лопаток от $-0,05$ до $+0,05$ мм. При этом наибольших значений погрешность δ_C (до 6 %) достигает для СК ОВТД. Для РК ОВТД она составляет всего 1,5 % (по причинам, указанным ранее).

Динамическая составляющая методических погрешностей. Пусть на лопаточном колесе замки лопаток и их торцевые части расположены строго равномерно, и угловая скорость его вращения постоянна как на первом, так и на последующих периодах вращения ($\omega_{лк1} = \omega_{лк2} = \dots = \text{const}$). При этом, как уже отмечалось, период импульсов питания ИЦ определяется по формуле⁵ $T_{01} = T_{лк1}/n_{л}$.

На рис. 6 представлены временные диаграммы скорости вращения $\omega_{лк}$, моменты $t_1, t_2, \dots, t_{nл}$ появления замков лопаток в ГЦ СК ОВТД и импульсы питания ИЦ ($U_{П}$) (эпюры 1 и 2).

⁴ Разность $C_{\max} - C_{\min}$, найденная из семейства ГХ ($C_1(x, y)$ и $C_2(x, y)$) для СК ОВТД в диапазонах изменений $x \pm 0,6$ мм составляет 256 и 239 ед., а для РК ОВТД в диапазонах изменений $x \pm 2$ мм — 1347 и 2054 ед., соответственно [1, 2].

⁵ Предполагается (в целях упрощения), что угловое положение "метки" на валу в начале периода совпадает с угловым положением ГЦ кластера и замка последней лопатки под номером $n_{л}$ ($n_{л} = 114$ на лопаточном колесе имитатора объекта).

На эпюре 3 показано ступенчатое изменение угловой скорости вращения лопаточного колеса ($\omega_{лк2} = \omega_{лк1} + \Delta\omega_{лк}$) на втором периоде его вращения, причем скорость $\omega_{лк2} = \text{const}$ в течение всего второго периода⁶.

Увеличение угловой скорости вращения $\omega_{лк2}$ на величину $\Delta\omega_{лк} = \text{const}$ приводит к уменьшению периода вращения $T_{лк2}^*$ на величину $\Delta T_{лк} = T_{лк2} - T_{лк2}^*$, при этом уменьшаются и периоды прохождения лопатками ГЦ СК ОВТД: $\Delta T_{02} = T T_{02}^* / n_{л}$.

Это означает, что моменты прохождения лопатками 1, 2, ..., $n_{л}$ ГЦ СК ОВТД со скоростью $\omega_{лк2}$ (эпюра 3) будут опережать аналогичные моменты прохождения лопатками ГЦ кластера со скоростью $\omega_{лк1}$. Найти величину этого опережения можно по разнице в периодах вращения ($\Delta T_{лк}$) и числу лопаток $n_{л}$. Для лопатки 1 оно

составит $\Delta T_{02} = \Delta T_{лк} / n_{л}$, лопатки 2 $\Delta T_{02} = 2 \Delta T_{лк} / n_{л}$ и т. д. Опережение будет возрастать, и для последней лопатки $n_{л}$ оно окажется равным $\Delta T_{лк}$ ($\Delta T_{0n_{л}} = \Delta T_{лк}$).

Зная $\Delta T_{01}, \Delta T_{02}, \dots, \Delta T_{0n_{л}}$ и угловую скорость вращения $\omega_{лк2}$, можно определить соответствующие угловые смещения $\Delta\Psi_1 = \omega_{лк2} \Delta T_{01}, \Delta\Psi_2 = \omega_{лк2} \Delta T_{02}, \dots, \Delta\Psi_{0n_{л}} = \omega_{лк2} \Delta T_{0n_{л}}$, а также изменения кодов ΔC для выбранных лопаток (1, 2, ..., $n_{л}$), и погрешности $\delta_{C\omega}$.

При уменьшении скорости ($\omega_{лк2} = \omega_{лк1} - \Delta\omega_{лк}$) вместо отмеченного выше опережения будет наблюдаться запаздывание, а искомая погрешность поменяет знак.

Однако более адекватным является предположение об изменении угловой скорости вращения лопаточного колеса, например, с постоянным угловым

ускорением $\varepsilon_{лк} = \frac{d^2\Psi}{dt^2} = \text{const}$ (т. е. на втором пе-

риоде вращения угловая скорость изменяется линейно во времени $\omega_{лк2} = \omega_{лк1} + \varepsilon_{лк} t$). Тогда на втором периоде вращения за время, равное T_{01} , лопатка 1

переместится на угол $\Psi^* = \omega_{лк1} T_{01} + \frac{\varepsilon_{лк} T_{01}^2}{2}$ [10].

Угловое смещение лопатки 1 относительно положения, которое она заняла бы в момент времени T_{01} при равномерном движении ($\Psi_1 = \omega_{лк1} T_{01}$), соста-

вит $\Delta\Psi_1 = \Psi_1^* - \Psi_1 = \frac{\varepsilon_{лк} T_{01}^2}{2}$, а для лопатки 2 по

⁶ Предположение о ступенчатом изменении угловой скорости вращения лопаточного колеса носит гипотетический характер и используется только для большей наглядности представления о причинах возникновения рассматриваемой динамической погрешности.

аналогии можно записать $\Delta\Psi_2 = \frac{\varepsilon_{\text{лк}}(2T_{01})^2}{2}$. И, наконец, для лопатки под номером $n_{\text{л}}$ это будет наибольшее смещение $\Delta\Psi_{n_{\text{л}}} = \frac{\varepsilon_{\text{лк}}(n_{\text{л}}T_{01})^2}{2}$.

В случае равнозамедленного вращения вместо опережения моментов прохождения лопатками ГЦ кластера будет наблюдаться запаздывание и $\Delta\Psi$ поменяет знак.

Следует отметить, что применительно к РК из двух ОВТД выше приведенными выражениями ($\Delta\Psi_1, \Delta\Psi_2, \dots, \Delta\Psi_{n_{\text{л}}}$) можно воспользоваться только для расчетов угловых смещений при прохождении лопатками ГЦ (вблизи ОВТД₁). Для расчета угловых смещений при прохождении лопатками ВГЦ (вблизи ОВТД₂) в выражениях для $\Delta\Psi_1, \Delta\Psi_2, \dots, \Delta\Psi_{n_{\text{л}}}$ появляются дополнительные слагаемые, зависящие от углового положения ВГЦ (ВГЦ смещен на угол $1,5\Delta\Psi_{\text{л}}$ относительно ГЦ (см. рис. 1, б)).

Тогда для лопатки 1 можно записать $\Delta\Psi'_1 = \frac{\varepsilon_{\text{лк}}(T_{01} + 1,5T_{01})^2}{2}$, для лопатки 2 — $\Delta\Psi'_2 = \frac{\varepsilon_{\text{лк}}[2(T_{01} + 1,5T_{01})]^2}{2}$ и, наконец, для лопатки $n_{\text{л}}$ — $\Delta\Psi'_{n_{\text{л}}} = \frac{\varepsilon_{\text{лк}}[n_{\text{л}}(T_{01} + 1,5T_{01})]^2}{2}$.

Найденные таким образом угловые смещения лопаток позволяют определить изменения кодов ΔC и относительные приведенные динамические составляющие погрешности δ_C аналогично статическим составляющим (т. е. использовать те же зависимости $C(\Psi)$, семейства ГХ $C(x, y)$, полученные для СК и РК ОВТД).

Расчеты δ_C выполнялись при частотах вращения лопаточного колеса, равных 3000, 6000 и 9000 мин⁻¹, и угловых ускорениях ($\varepsilon_{\text{лк}}$) в диапазоне от 0 до $\pm 72^\circ/\text{с}^2$ (от 0 до $\pm 0,2 \text{ с}^{-2}$) для выбранных лопаток 1, 2 и 114 ($n_{\text{л}}$).

Как и ожидалось, для первых лопаток колеса искомая погрешность ничтожно мала и для обеих разновидностей кластеров ОВТД она не превышает $\pm 0,001\%$ во всех рассматриваемых диапазонах изменений частот вращения и угловых ускорений. В максимальной степени погрешность δ_C проявляется на последних лопатках при низких оборотах. Действительно, максимальные значения δ_C при 3000 мин⁻¹ для последней лопатки составляют $\pm 12,6\%$ в каналах СК ОВТД и $\pm 17\%$ в каналах РК ОВТД. С увеличением скорости погрешности уменьшаются, и в каналах с СК ОВТД их максимальные значения для последней лопатки (114) не превышают $\pm 3,2\%$ (частота 6000 мин⁻¹) и $\pm 1,4\%$ (9000 мин⁻¹). В каналах РК максимальные значения погрешности для последней лопатки (114) не превышают $\pm 4,2\%$ и $\pm 1,9\%$ (6000 мин⁻¹ и 9000 мин⁻¹ соответственно).

Заключение

Получены оценки статических и динамических составляющих погрешностей.

Погрешности первого вида связаны с синхросигналом и неравномерностью шага в торцевой части лопаток. Они возрастают с увеличением временного сдвига синхросигнала и неравномерности шага. Снижения погрешностей можно добиться уменьшением фронта выходного напряжения формирователя сигнала ДЧВ-2500 или использованием в качестве датчика угловой скорости вращения ОВТД и доработанных преобразователей их сигналов [11]. Погрешности, связанные с неравномерностью шага, зависят только от технологии изготовления лопаточного венца и могут быть уменьшены при ее совершенствовании.

Погрешности второго вида возникают лишь на нестационарных режимах работы ТД и в случае равноускоренного характера вращения лопаточного колеса возрастают на малых скоростях его вращения с увеличением ускорения и номера лопатки, достигая максимального значения на последней лопатке.

Список литературы

1. Белослудцев В. А., Боровик С. Ю., Кутейникова М. М., Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Экспериментальная проверка работоспособности кластерных методов измерения координат смещения торцов лопаток и деформаций статора в лабораторных условиях // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Тр. XII Междунар. конф. Самара: Изд-во СамНЦ РАН. 2010. С. 316–322.
2. Боровик С. Ю. Система измерения смещений торцов лопаток с распределенным кластером одновитковых вихретоковых датчиков // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 4. С. 36–41.
3. Бельский Л. Б., Боровик С. Ю., Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Методы измерения смещений торцов лопаток в компрессорах и турбинах на основе распределенных кластеров датчиков. Часть 1. Обоснование предлагаемых методов и их описание // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 4. С. 16–19.
4. Бельский Л. Б., Боровик С. Ю., Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Методы измерения смещений торцов лопаток в компрессорах и турбинах на основе распределенных кластеров датчиков. Часть 2. Реализуемость методов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 5. С. 21–30.
5. Бельский Л. Б., Боровик С. Ю., Райков Б. К., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П., Тулупова В. В. Уменьшение длительности получения информации о смещениях торцов лопаток // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 5. С. 53–59.
6. Методы и средства измерения многомерных перемещений элементов конструкций силовых установок / Под ред. Секисова Ю. Н., Скобелева О. П. Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2001. 188 с.
7. Тулупова В. В. Системы измерения многокоординатных смещений торцов лопаток компрессора и лопастей винтовентилятора: Дисс. канд. техн. наук: 05.11.16. Самара, 2005. 200 с.
8. Разработка и анализ технологического процесса обработки сопловых лопаток ТНД. URL: <http://new.turbine.ru/main/turbine/98-razrabotka-i-analiz-tekhnologicheskogo-processa.html>
9. Гейкин В. Совершенство двигателя определяется совершенством технологий // Двигатель. 2003. № 3. С. 11–15.
10. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и для самообразования. М.: Наука, 1989. 576 с.
11. Белопухов В. Н., Секисов Ю. Н., Скобелев О. П. Система измерения вращения ротора ГТД на основе одновитковых вихретоковых датчиков // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Тр. XIII Междунар. конф. Самара, 2011. С. 311–315.

С. И. Коршаковский, канд. техн. наук, доц.,
korshakovsky.mirea@gmail.com

М. А. Красненков, д-р техн. наук, проф.,
МГТУ МИРЭА

Увеличение эффективности инструментальных средств неразрушающего контроля энергоемких технических объектов для управления средствами аварийной защиты

Предлагаются новые способы и устройства для повышения эффективности первичных преобразователей информационных сигналов, основанные на электромагнитных взаимодействиях в элементах изделий при создании в контролируемых зонах постоянного магнитного поля с последующим преобразованием вторичного магнитного поля в этих зонах в электрические сигналы.

Ключевые слова: электрический сигнал, вторичное магнитное поле, электромагнитные взаимодействия, аварийная защита, первичный преобразователь, вибрации

Введение

Создание энергоемких объектов техники различного целевого назначения должно сопровождаться разработкой высокоэффективных методов контроля и их программно-инструментального обеспечения, позволяющего в реальном времени осуществлять непрерывный контроль режимов работы, диагностику состояния их отдельных элементов, определять параметры окружающей среды.

При решении задач обеспечения технической безопасности и экономической эффективности использования авиакосмической техники успех все больше становится зависимым от рентабельности эксплуатации, а она, в свою очередь, зависит от безотказности работы техники. Надежность этой техники во многом определяется степенью ее защиты от воздействия негативных внешних и внутренних факторов, которая в дальнейшем приобретет еще большую актуальность по мере внедрения в конструкции аппаратов композиционных материалов и нанотоковой электроники в аппаратуре как в типовых, так и в экстремальных условиях.

Используемые в настоящее время традиционные средства контроля элементов объекта в режиме реального времени недостаточно надежны. Известные физические методы дефектации элементов техники — магнитный, электростатический, люминесцентный и другие — весьма эффективны [1]. Однако они, в основном, используются в целях штатного контроля в режиме регламентных испытаний перед и после эксплуатационных мероприятий. Целью работы является создание новых и усовершенствование известных методов технической ди-

агностики и неразрушающего контроля для повышения надежности и эффективности управления средствами аварийной защиты.

Модифицированный вихретоковый метод технической диагностики

Традиционный вихретоковый метод диагностики [1], широко используемый в технике, требует применения частотного генератора, что ограничивает возможности контроля в реальном времени, в том числе, из-за существенных потерь и искажений информационных сигналов. Созданный авторами статьи на его основе новый метод неразрушающего контроля отличается тем, что вблизи контролируемого изделия устанавливается источник постоянного магнитного поля, включенный непосредственно в конструкцию первичного преобразователя сигналов [2—4]. Контролируемое изделие (или датчик) приводится в движение. Вихревые токи, возникающие при этом в зоне контроля, создают вторичное магнитное поле, которое в индикаторной катушке датчика преобразуется в электрические сигналы. Если в процессе испытаний или эксплуатации технического объекта в нем возникает дефект, например трещина, то сигналы с датчика будут отличаться от сигналов кондиционного изделия. Сравнение этих сигналов по форме и амплитуде дает возможность судить о его механической целостности и, в случае появления дефекта, реализовать средства аварийной защиты [5]. Индукционный датчик с намагниченным сердечником назовем модифицированным (МИД). Введение постоянного магнита в конструктивную схему датчика позволяет одновременно решить и другую системную задачу — уменьшение магнитного потока рассеяния вторичного поля за счет использования внутри измерительной обмотки датчика ферромагнитной среды — магнитопровода. Этот базовый принцип дает возможность широкого выбора построения оптимального облика системы контроля, основой которого является повышение эффективности работы датчика за счет оптимизации его элементной базы.

Пути увеличения эффективности первичного преобразователя информационных сигналов

Одним из важнейших направлений развития вихретокового метода диагностики является повышение эффективности работы индукционных датчиков [6—9]. Эффективность инструментальных средств обеспечения неразрушающего контроля энергоемких объектов техники определяется, прежде всего, чувствительностью датчика. Повысить чувствительность МИД можно разными способами: уменьшением расстояния между датчиком и рабочей зоной контроля, увеличением числа витков измерительной катушки, использованием криогенной техники и другими способами, которые могут быть неприемлемы из-за ряда технических ограничений при использовании на реальных объектах. Структура системных исследований по названной

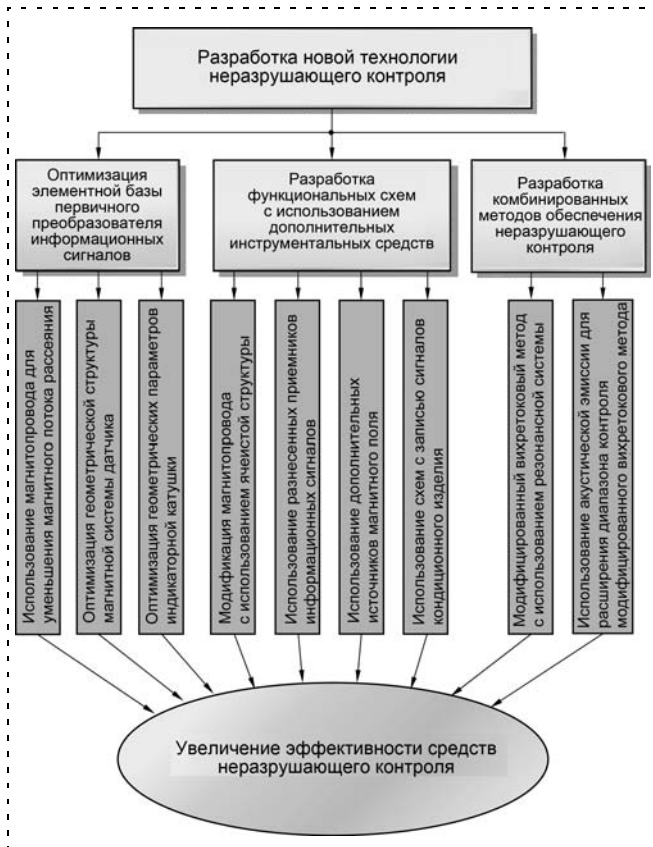


Рис. 1. К определению системной задачи

проблеме показана на рис. 1 графом связей вопросов, определяющих ее решение.

Ниже рассмотрены некоторые схемы построения эффективной системы контроля объектов техники с использованием МИД.

Повышение достоверности контроля элементов энергетических установок

Предложенный способ дефектоскопии лопаток турбин [10], имеющий целью повышение надежности контроля энергетических установок, использующих турбинные агрегаты, в частности, жидкостно-реактивные двигатели, основан на создании в них вихревых токов путем наложения локального постоянного магнитного поля. Способ заключается в том, что в процессе работы турбины непрерывно записывают сигналы ЭДС индукции вторичного магнитного поля на магнитный носитель информации. Через интервал времени $\Delta t = T/N$, где $T = 1/n$ — период вращения ротора турбины, n — его частота, N — число лопаток, эти сигналы считывают и сравнивают с измеряемыми сигналами в процессе эксплуатации изделия. Описанная процедура позволяет в реальном времени обнаружить дефекты в элементах турбины независимо от ее частоты вращения, установочных параметров датчика, его температуры, магнитных свойств среды и других внешних факторов, что повышает надежность и быстродействие системы аварийной защиты изделия. В самом деле,

в предложенном способе происходит непрерывное сравнение сигнала, записанного от "предыдущей" лопатки, с сигналом, измеренным от "последующей" лопатки, т. е. практически сигналов от двух соседних лопаток. Различие их амплитуд зависит только от дефектов в лопатках.

Схема нового способа контроля и функциональные связи элементов устройства его реализации показана на рис. 2. Амплитуда измеренного датчиком сигнала при прочих равных условиях определяется характером распределения вихревых токов в теле и на поверхности лопаток. При наличии дефектов (трещина, сколы и т. п.) амплитуда уменьшается. На поверхности вала 3 турбины по его периметру нанесен магнитный носитель информации 4 (магнитная лента). Подключив индукционный датчик к записывающей головке 7, измеренный сигнал непрерывно записывают на магнитную ленту. Через интервал времени, равный T/N , записанный сигнал считывают с помощью воспроизводящей магнитной головки 8, размещенной вблизи магнитной ленты и смещенной по направлению вращения турбины по отношению к записывающей

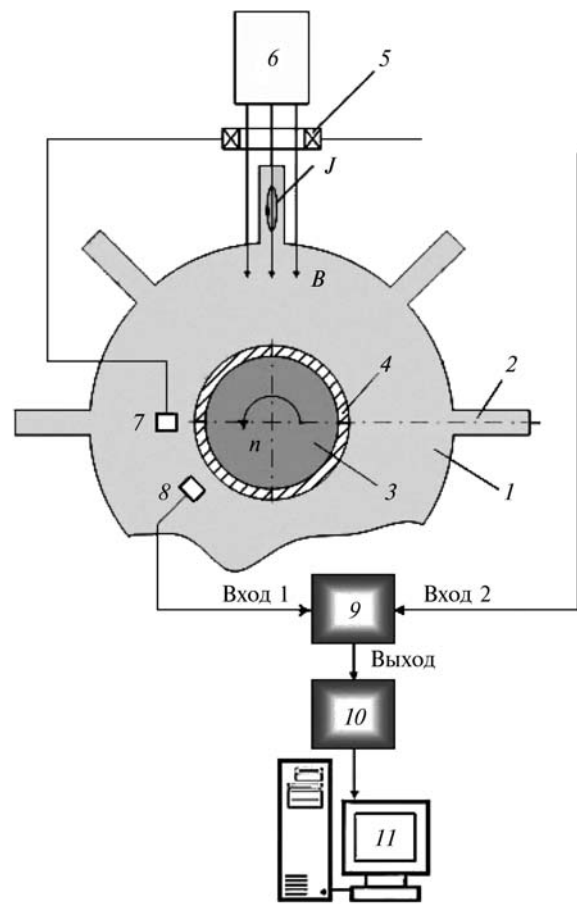


Рис. 2. Схема дефектоскопии лопаток ротора турбинного агрегата с использованием записи и воспроизведения сигналов: 1 — ротор турбины; 2 — лопатка ротора; 3 — вал ротора; 4 — магнитный накопитель информации; 5 — индикаторная обмотка датчика; 6 — источник постоянного магнитного поля; 7, 8 — магнитные головки записи и воспроизведения электрических сигналов; 9 — схема сравнения; 10 — АЦП; 11 — компьютер

головке на угол $\alpha = 360^\circ/N$. Считываемый сигнал подается на первый вход схемы сравнения, на второй — измеряемый индукционным датчиком. При отсутствии дефектов в лопатках эти сигналы имеют одинаковую амплитуду (с точностью до технического разброса в изготовлении лопаток турбины), и сигнал на выходе схемы сравнения равен нулю. Амплитуда сигнала от дефектной лопатки уменьшится, и схема сравнения выработает сигнал, отличный от нуля (два сигнала за один оборот турбины), что зафиксирует регистрирующее устройство.

Экспериментальные исследования, целью которых была проверка эффективности способа и отработка элементов устройства, проводились на испытательном стенде кафедры физики МГТУ МИРЭА. В качестве турбины использовали ротор диаметром 130 мм с 16 лопатками. На его вал диаметром 38 мм была наклеена магнитная лента типа А-4311 толщиной 0,1 мм. Частота вращения ротора изменялась до 100 с^{-1} . Индукционный датчик представлял собой катушку, имеющую 2000 витков медного провода, намотанную на магнитопровод специальной формы. В качестве источника магнитного поля использовали постоянный магнит с индукцией на срезе $\sim 0,06 \text{ Тл}$. Схема сравнения была собрана на базе компаратора К56 ЧМП 2. Для записи и воспроизведения сигналов использовали стандартные магнитные головки, установленные по периметру вала под углом $22^\circ 30'$ по отношению друг к другу. Амплитуды измеренных и записанных сигналов в эксперименте были практически одинаковы, и на выходе схемы сравнения формировался устойчивый нулевой сигнал.

Для моделирования дефекта использовали специальный ротор с искусственным пропилом в основании одной из лопаток. При его вращении амплитуда сигнала с дефектной лопатки резко уменьшается, а в схеме сравнения дважды за период его вращения формируется импульс, сигнализирующий о нарушении механической целостности изделия.

Расширение диапазона контроля целостности элементов изделия

Надежный контроль состояния компрессорных и турбинных агрегатов, широко используемых в авиакосмической и другой технике, требует расширенного диапазона диагностируемых параметров объекта.

Известны способы контроля целостности различных конструкций на основе явления акустической эмиссии (АЭ), основанные на регистрации и анализе эмиссии волн напряжений, возникающих при появлении дефектов [1, 11]. Эти волны фиксируются с помощью преобразователей, установленных на самой конструкции, например, с помощью пьезодатчиков. Однако скорость передачи информационных сигналов ограничена сравнительно низкой скоростью распространения звука в данной среде. Кроме этого, сигналы могут искажаться из-за различных свойств среды, эффектов отражения и поглощения волн, что приводит к недостоверности принимаемой информации.

Предложенный способ неразрушающего контроля с использованием МИД отличается тем, что предварительно в процессе испытаний контролируемые элементы изделия доводят до разрушения, фиксируют при этом диапазон частот АЭ и амплитуду ЭДС индукции. Далее в процессе работы изделия измеряют эту амплитуду в диапазоне частот АЭ и по ее величине судят о состоянии механической целостности этих элементов [12].

В процессе эксплуатации изделия в его элементах может инициироваться достаточно широкий спектр волн напряжений, которые возникают в материале вследствие скачкообразного развития дефекта, пластического деформирования, разрыва связей и роста трещин под воздействием накопленной энергии упругой деформации. Интенсивности волн АЭ очень многообразны. Однако для конкретного материала ее спектр достаточно узок.

Анализ измеренных параметров ЭДС индукции в частотном диапазоне АЭ позволяет судить не только о механической целостности объекта в более широком диапазоне его параметров, но и о назревающем разрушении узла. В процессе предварительных регламентных испытаний объекта проводят моделирование разрушений его элементов с фиксацией частот АЭ, характерных для появления волн напряжений в их материале при прогрессирующей деградации свойств объекта с последующим разрушением. Появление волн напряжения в теле элементов изделия, находящегося в постоянном магнитном поле, при нарушении его механической целостности, вызванных действием разрушающих факторов, инициирует образование вихревых токов достаточно высокой интенсивности. Амплитуда сигналов в измерительной катушке датчика зависит от амплитуды упругих волн, а следовательно, от процессов нарастания механических напряжений, образования и накопления свободной энергии в материале, прогрессирующего развития дефекта, приводящего при эксплуатации изделия к его отказу. При этом вторичное магнитное поле вихревых токов будет меняться с частотами, соответствующими волнам напряжения, сопровождающими АЭ. Измерение ЭДС индукции этого поля позволяет зафиксировать значения амплитуд сигналов и другие параметры, характерные для процесса разрушения от его начала до его конца.

Общая схема предложенного способа показана на рис. 3.

Экспериментальные исследования, целью которых была отработка способа и обеспечение инструментария для его реализации, проводили на модельной установке, действующей на базе разрывной машины кинематического типа Р-5. На установке подвергались растяжению образцы из стали 1Х18Н9Т, сплавов 30ХГСА и 40Х, а также Д16. Образцы представляли собой ленту длиной 200 мм сечением $2 \times 18 \text{ мм}$. В зоне размещения образца индукция постоянного магнитного поля, направленная перпендикулярно его поверхности, составляла

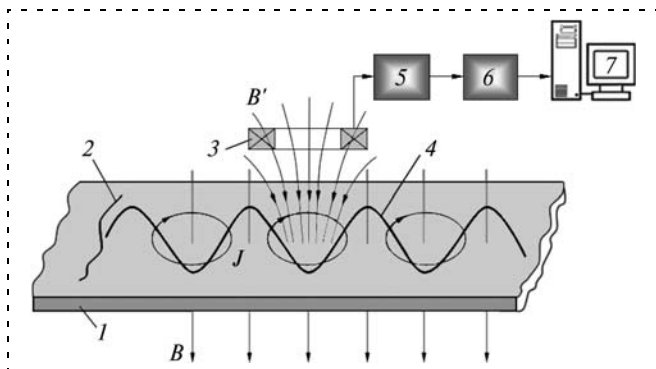


Рис. 3. Способ контроля целостности электропроводных элементов изделия с использованием акустической эмиссии:

1 — контролируемый элемент изделия; 2 — дефект (трещина); 3 — измерительная катушка датчика; 4 — волна механического напряжения; 5 — блок первичной обработки сигнала; 6 — решающий блок; 7 — компьютер

величину $\sim 7 \times 10^{-2}$ Тл. На расстоянии 2 мм от поверхности образца размещали индукционную катушку диаметром 12 мм, содержащую 3000 витков медного провода, которая была подключена к регистрирующему устройству. При растяжении образца под действием продольной силы от 0 до 19 600 Н появлялись сигналы электродвижущей силы индукции с амплитудой до 15 мВ в диапазоне частот (0,1...0,8) МГц. При нагрузке $\sim 18\ 000$ Н происходил полное разрушение образца. При этом наблюдался пакет сигналов длительностью 10^{-5} с, содержащий импульсы с амплитудой 120 мВ и частотой $\sim 0,7$ МГц. Эксперименты показали, что сигналы меняются с частотой, соответствующей распространению волн в образце. Значение амплитуды сигналов определяется "интенсивностью" дефекта, т. е. напряжениями в теле образца, которые приводят к его разрушению. Поэтому амплитудно-частотный спектр сигналов ЭДС индукции представляет собой отражение процессов разрушения образца в реальном масштабе времени.

Проведенные эксперименты показали особую важность начальной стадии процесса, когда в элементе возникают напряжения, которые могут привести к возникновению дефектов, прогрессирующей деградации материала и к последующему отказу контролируемого узла изделия. Измерение параметров сигнала ЭДС электромагнитной индукции в диапазоне частот АЭ позволяет не только расширить диапазон контроля элементов изделия, включающий напряженное состояние материала изделия, но и осуществить раннее обнаружение дефекта и назревающий отказ оборудования объекта.

Уменьшение влияния вибраций при реализации методов неразрушающего контроля

Одним из опасных разрушающих факторов при эксплуатации энергоемких объектов техники являются вибрации, имеющие широкий спектр частот из-за многообразия причин их возникновения [13—15]. Вибрации воздействуют не только на эле-

менты конструкции, они вносят искажения в электрические сигналы измерительных блоков, обеспечивающих контроль и техническую диагностику элементов и узлов объекта, нарушают работу систем навигации и жизнеобеспечения и т. п.

В функциональной диагностике машин и оборудования по вибрации используется информация, содержащаяся в характеристиках колебательных сил и свойствах колебательной системы. В наиболее общем виде колебательные силы описываются суммой периодических, случайных и ударных составляющих, а передаточные характеристики — амплитудно-частотными и фазово-частотными компонентами. Максимальный объем диагностической информации, содержащейся в структуре колебательных сил, можно получить, лишь разделив сигнал на составляющие (периодические, случайные и ударные) и анализируя каждую из них отдельно. Практическое решение подобной задачи возможно лишь для частных случаев с использованием эвристических моделей.

Для борьбы с вибрациями обычно используют виброизолирующие прокладки из металлогорезины, представляющие собой вязкоупругие виброгасящие элементы, имеющие коэффициент демпфирования до 0,4 в диапазоне частот от 5 Гц до 5 кГц [16, 17]. Несмотря на то, что эти меры позволяют снизить уровень вибраций в 6...10 раз, их использование не всегда возможно для защиты от вибраций элементов техники.

По характеру воздействия вибраций на процессы формирования информационных сигналов с датчика при контроле механической целостности лопаток турбин их можно условно разбить на три основные группы:

- вибрации, вызванные смещением датчика относительно корпуса турбины;
- вибрации за счет перемещений ротора относительно корпуса турбины;
- вибрации, вызванные нагрузками ударного типа, непосредственно воздействующими на датчик.

Хаотические смещения этих элементов приводят к изменениям расстояния между измерительной обмоткой датчика и зоной контроля, и при определенном уровне интенсивности вибраций изменения параметров информационного сигнала вызовут неизбежные ошибки в интерпретации этих сигналов при их обработке. В самом деле, крепежный узел вместе с индукционным датчиком представляет собой механическую колебательную систему с определенным числом степеней свободы, имеющую собственную резонансную частоту. Наложение этой частоты на вибрационные вызывает хаотические изменения в амплитуде и форме полезного сигнала. В то же время, если смещения лопаток из-за вибраций носят достаточно регулярный характер, то характерные изменения сигнала могут быть подавлены стандартными средствами — с помощью активных электрических фильтров [18].

Нагрузки ударного типа вызывают в постоянном магните акустические волны, приводящие к изме-

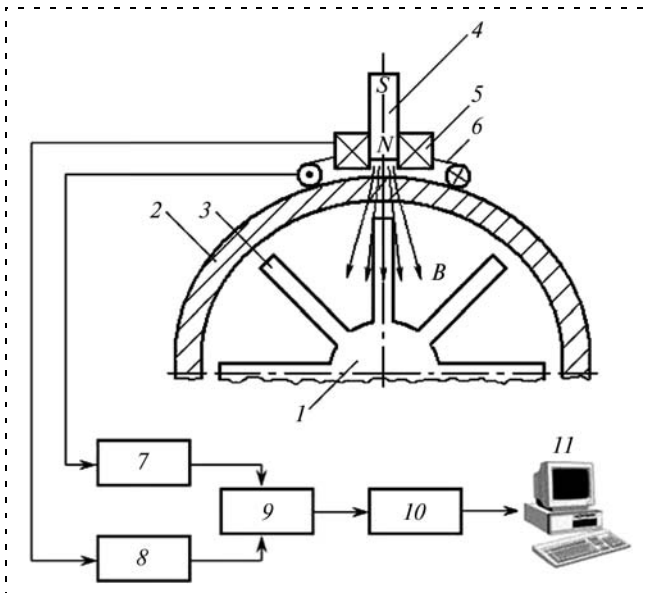


Рис. 4. Устройство для уменьшения влияния вибраций, вызванных смещениями датчика:

1 — ротор турбины; 2 — корпус турбины; 3 — лопатки; 4 — постоянный магнит; 5 — индикаторная катушка датчика; 6 — электропроводный виток; 7, 8 — усилители-формирователи; 9 — вычитающее устройство; 10 — АЦП; 11 — компьютер

нениям его магнитной индукции и, следовательно, к изменению магнитного потока в индукционной катушке. Ударная нагрузка на измерительный блок системы контроля порождает импульсную помеху, по характеру воздействия на полезный сигнал являющаяся мультипликативной. Таким образом, искажения информационных сигналов паразитными составляющими, вызванными вибрациями, могут привести к появлению на выходе вычислительного блока системы контроля ложных сигналов и, следовательно, к снижению надежности контроля.

Для устранения влияния вибраций, отнесенных к первой группе, была применена функциональная схема, в которой содержится дополнительный электропроводный контур, охватывающий основание индукционного датчика и неподвижно укрепленный на корпусе турбины (рис. 4). За счет вибраций элементов крепежного узла в контуре возбуждаются сигналы ЭДС индукции, вызванные смещениями постоянного магнита датчика относительно корпуса турбины. Таким образом, в процессе реализации метода одновременно будут фиксироваться аддитивная сумма полезного сигнала, сигнала, обусловленного вибрациями (индукционная катушка датчика), и сигналы ЭДС индукции за счет относительного перемещения датчика и корпуса турбины (электропроводный контур). Заметим, что индикаторная катушка не реагирует на изменения первичного магнитного поля B , так как при вибрациях ее смещения происходят одновременно с постоянным магнитом. В то же время ЭДС индукции в проводящем контуре зависит от изменения B за счет смещений постоянного магнита, а также от изменений вторичного магнитного поля B' . Однако вклад за счет составляющей вторичного поля мал,

и им можно пренебречь ($B'/B \sim 10^{-2}$). Выделение и обработка полезного сигнала осуществляется с помощью стандартных блоков, показанных на рис. 4.

Экспериментальную отработку описанного устройства проводили на агрегатном стенде РКК ЭНЕРГИЯ при испытаниях ротора турбонасосного агрегата (ТНА). Индукционный датчик МИД 1 устанавливали на корпусе турбины с помощью кронштейна и хомутового соединения. На корпусе турбины с помощью клея был укреплен виток диаметром 30 мм из медной проволоки толщиной 1 мм, который охватывал основание датчика. Индикаторная катушка датчика и виток подключали к электроизмерительному устройству — магнитофону Revox. Испытания проводили при частоте вращения ротора $20\,000\text{ мин}^{-1}$. Вибрации датчика имитировали путем введения искусственного дисбаланса при вращении ротора. Напряжение, снимаемое с индикаторной обмотки датчика, представляло собой практически регулярный гармонический сигнал с частотой $\sim 5300\text{ Гц}$ и амплитудой $\sim 180\text{ мВ}$, модулированный частотой $\sim 330\text{ Гц}$ с амплитудой $\sim 90\text{ мВ}$. Модуляция сигнала вызвана колебаниями индукционного датчика относительно корпуса турбины. Эти вибрации вызывают периодические смещения постоянного магнита относительно проволочного витка, жестко скрепленного с корпусом. Суммарный сигнал, полученный с помощью компаратора Revox, соответствовал бездефектному ротору турбинного агрегата.

Вибрации, сопровождающиеся относительными перемещениями ротора турбины и ее корпуса, связаны с разбалансом ротора и продольным люфтом. Как правило, эти вибрации носят регулярный характер, а их частота зависит от частоты вращения ротора. Несмотря на ряд сложностей применение специальных фильтров позволяет решить и эту задачу.

Для устранения вибраций второй группы была предложена функциональная схема, показанная на рис. 5. В отличие от рассмотренного устройства контроля в схему введены дополнительный источник магнитного поля (постоянный магнит), неподвижный относительно вращающегося ротора и запрессованный в его вал, и индукционная катушка, установленная соосно с валом неподвижно на корпусе турбины. В этой катушке формируется сигнал ЭДС индукции за счет изменения магнитного потока, созданного в ней от дополнительного источника при любом изменении положения ротора относительно корпуса турбины. В то же время амплитуда сигнала в индикаторной катушке датчика зависит от угловой скорости вращения ротора и его смещений в продольном и поперечном направлениях, вызванных вибрациями. Сигналы ЭДС индукции с датчика 5 (суммарный сигнал) и дополнительной катушки 4 (вибрации) подаются на входы блока 6, на выходе которого в результате их вычитания выделяется информационный сигнал, очищенный от вызванных вибрациями помех.

Ротор ТНА подвергался предварительной технологической обработке. В его теле был установлен

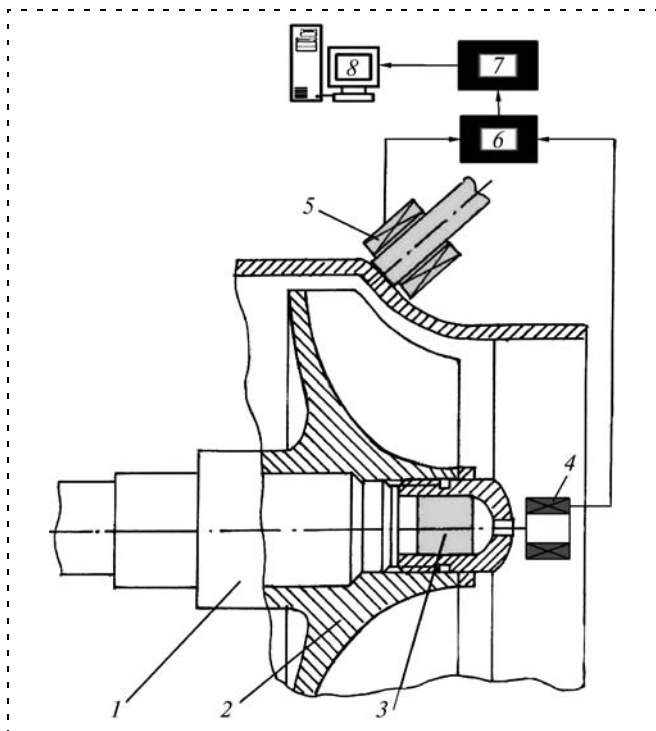


Рис. 5. Схема устройства для уменьшения влияния вибраций, вызванных смещениями ротора:

1 — ротор турбины; 2 — лопатки; 3 — постоянный магнит; 4 — дополнительная индукционная катушка; 5 — индикаторная обмотка датчика; 6 — схема вычитания; 7 — АЦП; 8 — компьютер

постоянный стержневой магнит длиной 30 мм и диаметром 18 мм, изготовленный из сплава типа ЮНДК. После установки магнита технологическое отверстие заливали компаундом. В качестве дополнительной индукционной катушки использовали обмотку малогабаритного реле РЭС-49. Катушка крепилась на корпусе с помощью клеевого соединения. Расстояние от рабочего торца катушки до обращенного к ней торца магнита составляло ~70 мм. Постоянный магнит создавал в катушке поле с индукцией $\sim 8 \times 10^{-3}$ Тл. Блок вычитания был собран на базе компаратора К564МП2.

Частоту вращения ротора в эксперименте поддерживали постоянной в диапазоне от 5×10^3 до 20×10^3 мин⁻¹, а его поперечные вибрации создавались путем введения искусственного дисбаланса при вращении. В дополнительной индукционной катушке за счет вибраций инициировались сигналы с частотой ~330 Гц и амплитудой ~20 мВ. Сигналы с датчика имели такие же параметры, как в описанном выше аналогичном эксперименте.

Для устранения влияния вибраций третьей группы применяли аналогичные схемы, в которых для формирования дополнительного вибросигнала использовали пьезодатчик, укрепленный на удаленном торце индукционного датчика. Для работы вычитающего блока использовали усилитель, так как сигнал с датчика составлял всего ~10 мкВ. Важно отметить, что предложенная функциональная схема контроля объекта не требует конструктивной дора-

ботки ротора ТНА: для создания дополнительного магнитного поля было использовано имеющееся технологическое отверстие в вале ротора ТНА. При этом размещение магнита в полости вала не приводит к нарушению балансировки ротора при вращении.

Предложенные способы и устройства для повышения эффективности первичных преобразователей информационных сигналов отличаются простотой, универсальностью, однако в каждом конкретном случае проектирования системы контроля потребуется проведение дополнительных исследований. Технологическая направленность этих работ зависит от штатных режимов работы контролируемого объекта, общего уровня электромагнитных помех, механических нагрузок и других факторов.

Список литературы

1. Клюев В. В., Соснин Ф. Р., Ковалев А. В. и др. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник / Под ред. В. В. Клюева. М.: Машиностроение, 2003.
2. Коршаковский С. И., Красненков М. А., Маклашевский В. Я. Индукционный метод неразрушающего контроля электропроводных изделий в динамическом режиме // Приборы и системы управления. Т. 3. М.: Машиностроение, 1997. С. 14—15.
3. Korshakovsky S. I., Krasnenkov M. A. Test Technology of Moving Electric Conductive Component Defects // 10-th International Trade Fair and Conference, May 8—10, 2001, Exhibition Centre Nuremberg, Germany // MAT—2001 Proceedings. P. 359—362.
4. Коршаковский С. И., Красненков М. А. Способ неразрушающего контроля для создания системы управления и аварийной защиты энергоемких технических объектов // Контроль. Диагностика. 2008. № 4 (118). С. 51—56.
5. Коршаковский С. И., Красненков М. А. Измерительная система для неразрушающего контроля элементов энергоемких установок // Мир измерений. 2006. № 5. С. 9—11.
6. Зудин Б. В., Коршаковский С. И., Красненков М. А., Силаев В. А. Диагностика вращающихся частей электрических машин // Мир измерений. 2008. № 9. С. 9—10.
7. Горкунов Э. С., Табачник В. П. О выборе места регистрации магнитного потока в магнитопроводе приставного электромагнита при контроле изделий по коэрцитивной силе // Дефектоскопия. 2009. № 10.
8. Скальский В. Р., Клиш Б. П., Почанский Е. П. Расчет индукции, создаваемой приставным электромагнитом постоянного магнитного поля, в ферромагнетике // Дефектоскопия. 2010. № 5.
9. Гусев Л. П., Косовец С. А., Зацепин Е. Н. Влияние зазора в магнитной цепи электромагнит—объект на магнитное поле поверхностных дефектов различных сталей // Дефектоскопия. 2010. № 5.
10. Жежеря А. П., Коршаковский С. И., Красненков М. А. и др. Способ дефектоскопии лопаток ротора. Авт. свид-во СССР № 1829628, 1992.
11. Коллакот Р. Диагностика повреждений. М.: Мир, 2003.
12. Додонова Л. Г., Коршаковский С. И., Красненков М. А., Соловьев В. А. Способ контроля целостности электропроводных элементов изделия. Авт. свид-во СССР № 1829620, БИ № 37, 1992.
13. Хронин Д. В. Колебания в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980.
14. Барков А. В., Баркова Н. А. Вибрационная диагностика машин и оборудования. Анализ вибрации. С-Петербург: Изд. центр СПбГМТУ, 2004. 156 с.
15. Кирпичев М. В. Теория двигателестроения // Сб. науч. тр. Ч. 2. Самара: РИО СГАУ, 2006. С. 397—401.
16. Ponomarev J. K., Gunin W. A., Kotov A. S., Mednikov M. V. Account of the elastic and damping characteristics for pipelines support using MR material (metallic rubber) // IV International Congress: Mechanical Engineering Technologies 04: Варна, Болгария: Изд-во Болгарской АН и Межд. конгресса по машиностроительным технологиям, 2004. С. 232—235.
17. Петров В. Ф., Волохов Г. М., Котов А. С. и др. Способ установки дизель-генератора на раму тепловоза. Патент РФ № 2295455 // Официальный бюллетень "Изобретения. Полезные модели". 2007. № 8.
18. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Гардарики, 2007. 586 с.

УДК 004.3.07

Н. Г. Чикуров, канд. техн. наук, доц.,
tchikurov@yandex.ru,

А. В. Гончаров, аспирант,
Уфимский государственный
авиационный технический университет

Построение кинематической модели пятизвенного робота с использованием метода электроаналогий

Показана методика математического моделирования механических систем методом электроаналогий. Получено решение обратной позиционной задачи робота с пятью вращательными парами в виде дифференциально-алгебраических уравнений.

Ключевые слова: математическое моделирование систем, метод электромеханических аналогий, манипуляционный робот

О методе электроаналогий

Математическое описание электрических процессов часто совпадает с описанием процессов в объектах иной физической природы. В связи с этим появляется возможность заменить исследования в неэлектрических системах исследованиями явлений в электрических цепях [1, 7]. В табл. 1 сравниваются компонентные уравнения механических и электрических систем, и показывается их динамическая аналогия [4, 5].

Этот метод наряду с законами теоретической механики позволяет использовать законы электротехники. В результате расширяется представление о происходящих явлениях, и появляется возможность формализовать синтез математических моделей сложных механических систем. Возможность применения для решения задач электротехники за-

конов Кирхгофа дает электрическим моделям значительное преимущество перед моделями иной физической природы, так как в других областях техники нет законов, полностью адекватных законам Кирхгофа.

Механические объекты обычно представляют в виде структурно-кинематических схем. Кинематическая схема характеризует одновременно геометрию механизма и его движение, что затрудняет топологическое представление механических систем. Наиболее сложно в механике применить аналог первого закона Кирхгофа, в соответствии с которым сумма токов в узле электрической схемы равна нулю. Продифференцировав уравнение токов в узле, получим важное следствие, вытекающее из первого закона Кирхгофа: сумма производных токов (применительно к механике — ускорений) в узле также равна нулю. Данное утверждение в терминах механики не столь очевидно, как в электротехнике.

Другой аспект метода электроаналогий сводится к применению в эквивалентных электрических схемах замещения идеальных трансформаторов как с постоянными, так и с переменными коэффициентами трансформации. Трансформатор с переменным коэффициентом трансформации (случай плоских криволинейных и пространственных движений тел) представляет собой амплитудный модулятор напряжений, токов и производных токов. Математическое описание таких объектов уравнениями механики также затруднительно.

С помощью электрических разъемных соединений эквивалентные электрические схемы замещения можно собирать из отдельных независимых модулей (подсистем), что позволяет конструировать математические модели по агрегатному (расширяемому) принципу.

Применение метода электроаналогий предусматривает декомпозицию — разделение сложных динамических систем на элементарные звенья трех видов: инерционные, диссипативные и упругие (табл. 1). В результате создается имитационная математическая модель, которая в конечном итоге представляет собой совместную систему дифференциальных и линейных алгебраических уравнений. При моделировании на ЭВМ эти уравнения имеют устойчивое численное решение [5].

Постановка задачи

Ставится задача: с помощью пятизвенного робота, состоящего из звеньев AB , BC , CD , DE , EF (рис. 1), осуществить движение конечной точки F манипулятора по некоторому контуру обработки, расположенному на поверхности H , с заданной скоростью V_F , причем конечное звено EF всегда должно

Таблица 1

Компонентные уравнения

Вид системы	Тип компонента		
	Инерционный	Диссипативный	Упругий
Механическая поступательная	$F_n = m \frac{dv_n}{dt}$	$F_d = \mu v_d$	$F_y = \frac{1}{g} \int v_y dt$
Механическая вращательная	$M_n = J \frac{d\omega_n}{dt}$	$M_d = \mu \omega_d$	$M_y = \frac{1}{g} \int \omega_y dt$
Электрическая	$U_n = L \frac{di_n}{dt}$	$U_d = Ri_d$	$U_y = \frac{1}{C} \int i_y dt$

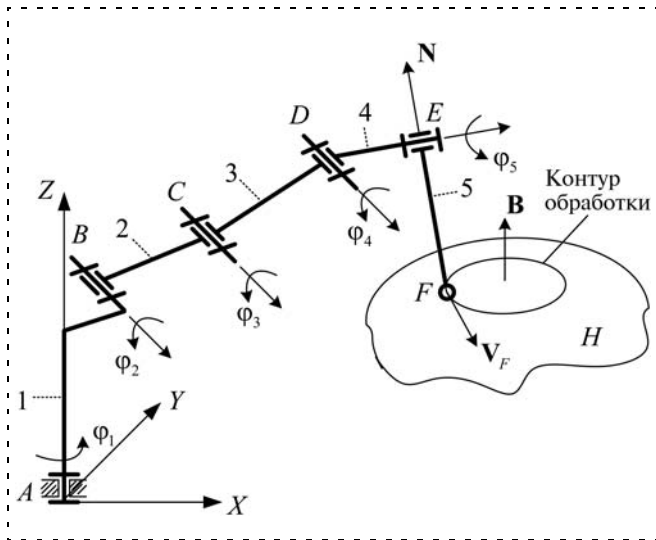


Рис. 1. Кинематическая схема пятизвенового робота с реальными сочленениями

быть ориентировано по нормали \mathbf{N} к поверхности. Указанные параметры движения конечного звена робота определяются интерполятором устройства ЧПУ. Все необходимые данные поступают в интерполятор из управляющей программы, которая обычно формируется в CAD/CAM-системе.

Для простоты рассмотрим частный случай задачи. Будем считать, что обрабатываемая поверхность — сфера, а контур обработки — окружность, расположенная на сфере. Плоскость, в которой лежит окружность, ориентирована в пространстве с помощью вектора \mathbf{B} , ортогонального к плоскости окружности. Этот вектор задан направляющими косинусами A, B, C .

Кинематическая модель такого робота базируется на решении так называемой "обратной позиционной задачи". Она формулируется следующим образом [2]. При заданном положении и ориентации конечного звена \mathbf{S} манипулятора требуется найти обобщенные координаты манипулятора $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$. Если обозначить $\mathbf{S} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$, то искомые координаты можно выразить соотношением $\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{S})$. Решение обратной позиционной задачи необходимо для управления манипулятором. Общего метода решения этой задачи в явном виде не существует, применение же численных методов часто приводит к расходимости соответствующих итерационных схем [2, 3]. До настоящего времени обратная позиционная задача робототехники остается проблемной [2].

Алгоритм построения кинематической модели

Алгоритм решения обратной позиционной задачи с использованием метода электроаналогий сводится к следующей последовательности действий:

1) каждую из точек сочленений в манипуляторе разделим условно на две точки, которым присвоим символы m_i, n_i (рис. 2). Точку, расположенную в начале звена, если двигаться от первого звена к по-

следнему звену, обозначим символом m_i , а точку, расположенную в конце звена, — символом n_i . Здесь i — номер звена, к которому привязана точка. С учетом принятых обозначений точка n_0 принадлежит неподвижному основанию, а точка m_1 — звену 1. Точка n_1 принадлежит звену 1, а точка m_2 — звену 2 и т. д.;

2) примем допущение, что все сочленения звеньев манипулятора сферические. Каждое из них имеет три степени свободы. Через такие сочленения могут передаваться от звена к звену лишь силы, и не могут передаваться моменты сил. Принятое условие упрощает математическую модель манипулятора, хотя и противоречит реальной конструкции кинематических пар;

3) применяя принцип Даламбера, составим уравнения кинестатики, определяющие движение каждого звена с выделенной массой;

4) построим на основе полученных уравнений эквивалентную электрическую схему замещения для каждого выделенного звена. Уравнения Кирхгофа для контуров созданной электрической схемы должны совпадать с уравнениями кинестатики для сил и моментов сил;

5) на основе электрической схемы запишем уравнения по первому закону Кирхгофа и уравнения трансформаторов. Продифференцируем эти уравнения. Добавим к полученным уравнениям компонентные уравнения;

6) чтобы учесть реальный тип сочленений, надо добавить в математическую модель манипулятора уравнения связи. Они учитывают фактическую конструкцию кинематических пар, относящихся к кинематическим парам пятого класса.

Входящие в кинематическую цепь манипулятора звенья совершают в пространстве сложные движения. Рассмотрим движение некоторого i -го звена (рис. 3). Звено имеет два виртуальных шаровых сочленения m и n . Под действием сил реакций \mathbf{R}_m и \mathbf{R}_n в сочленениях звено совершает как поступательное, так и вращательное движения вокруг центра масс c_i .

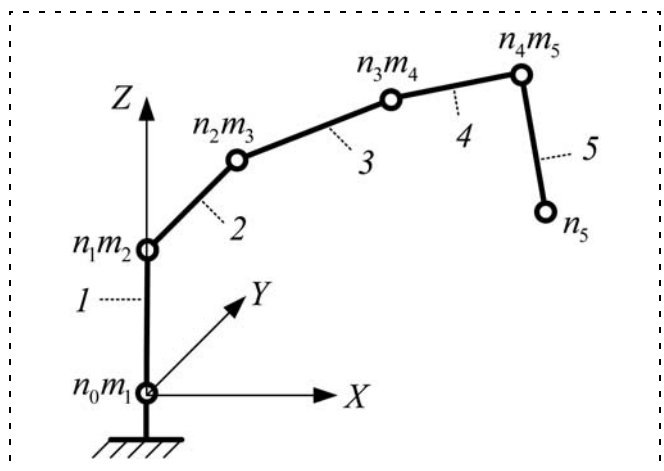


Рис. 2. Кинематическая схема пятизвенового робота с виртуальными шаровыми шарнирами

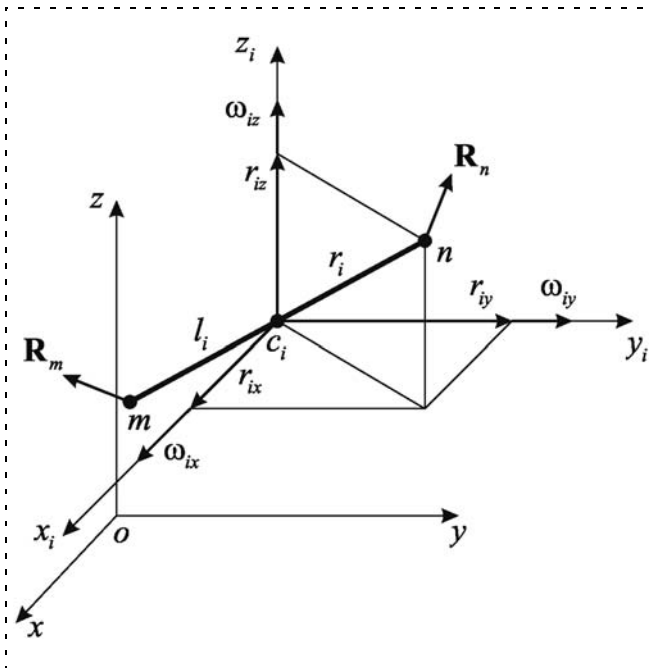


Рис. 3. Движение в пространстве i -го звена

Введем помимо неподвижной системы координат $Oxyz$ еще и подвижную систему координат $C_ix_iy_iz_i$, перемещающуюся поступательно относительно осей $Oxyz$ и связанную со звеном в точке c_i . Таким образом, в подвижной системе координат звено участвует только во вращательном движении.

Запишем уравнения движения звена в подвижной системе координат [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dr_{ix}}{dt} &= \omega_{iy}r_{iz} - r_{iy}\omega_{iz}; \\ \frac{dr_{iy}}{dt} &= \omega_{iz}r_{ix} - r_{iz}\omega_{ix}; \\ \frac{dr_{iz}}{dt} &= \omega_{ix}r_{iy} - r_{ix}\omega_{iy}. \end{aligned} \quad (1)$$

В правых частях уравнений (1) неизвестны проекции вектора угловой скорости ω_i . Чтобы их определить, рассмотрим последовательно движение звена в проекциях на каждую из трех координатных плоскостей неподвижной системы координат $Oxyz$. Используя метод кинестатики [1], запишем для каждой плоскости уравнения сил и уравнения моментов сил. Рассмотрим координатную плоскость Oxy :

$$\begin{aligned} -R_{mx} + R_{nx} - F_{ix}^u &= 0; \\ -R_{my} + R_{ny} - F_{iy}^u &= 0; \\ M_{iz}^{R_{mx}} + M_{iz}^{R_{my}} - M_{iz}^{R_{nx}} + M_{iz}^{R_{ny}} - M_{iz}^u &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $M_{iz}^{R_{mx}} = R_{mx}l_{iy}$; $M_{iz}^{R_{my}} = R_{my}l_{ix}$; $M_{iz}^{R_{nx}} = R_{nx}r_{iy}$; $M_{iz}^{R_{ny}} = R_{ny}r_{ix}$, в свою очередь, l_{ix} , l_{iy} , r_{ix} , r_{iy} — проекции векторов \mathbf{l}_i и \mathbf{r}_i на координатные оси y и x .

Далее записываем компонентные уравнения:

$$\begin{aligned} F_{iy}^u &= m_i \dot{V}_{iy}; \\ F_{ix}^u &= m_i \dot{V}_{ix}; \\ M_{iz}^u &= -J_{izx}\dot{\omega}_{ix} - J_{izy}\dot{\omega}_{iy} + J_{iz}\dot{\omega}_{iz} - \\ &- \dot{J}_{izx}\omega_{ix} - \dot{J}_{izy}\omega_{iy} + \dot{J}_{iz}\omega_{iz}. \end{aligned} \quad (3)$$

На основе уравнений (2) и (3) строится эквивалентная электрическая схема замещения (рис. 4).

По аналогии записываем уравнения равновесия сил и уравнения равновесия моментов сил для координатных плоскостей Oyz и Oxz . На основе этих уравнений строим недостающие две схемы замещения. Объединяя их с предыдущей схемой, получаем одну общую схему замещения для рассматриваемого звена.

Эта электрическая схема не является в полном смысле электрической, поскольку размерности электрических величин заменены в ней соответствующими размерностями механических величин.

В действительности, данная электрическая схема представляет собой образ механического устройства, т. е. звена i , представленного в виде электрической схемы. С помощью известных теорем подобия [5] можно определить коэффициенты подобия и перейти от механических величин к электрическим, т. е. тем самым привести эквивалентную электрическую схему замещения к натуральному виду. Однако такой переход не требуется, поскольку из теории раз-

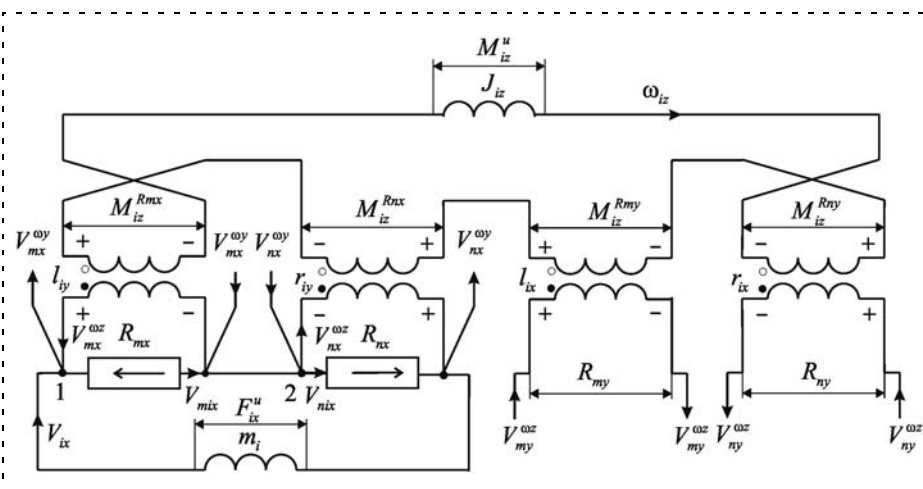


Рис. 4. Часть эквивалентной электрической схемы замещения для i -го звена

мерностей физических величин известно, что основные единицы измерений выбираются произвольно, и они не зависят от остальных единиц. Следовательно, к описанию процессов в эквивалентных электрических схемах замещения применимы как законы электротехники, так и законы механики. Таким образом, метод электроаналогий позволяет строить математические модели механических устройств путем совмещения законов механики с законами электротехники.

Продолжим рассмотрение звена i . Запишем уравнения трансформаторов. Поскольку мы строим не динамическую, а кинематическую модель, то соотношения напряжений (сил и моментов сил) в этих уравнениях опускаем:

$$\begin{aligned} \omega_{iz}^l l_{iy} &= V_{mx}^{\omega z}, \omega_{ix}^l l_{iz} = V_{my}^{\omega x}, \omega_{iy}^l l_{ix} = V_{mz}^{\omega y}, \\ \omega_{iz}^r r_{iy} &= V_{nx}^{\omega z}, \omega_{ix}^r r_{iz} = V_{ny}^{\omega x}, \omega_{iy}^r r_{ix} = V_{nz}^{\omega y}, \\ \omega_{iz}^l l_{ix} &= V_{my}^{\omega z}, \omega_{ix}^l l_{iy} = V_{mz}^{\omega x}, \omega_{iy}^l l_{iz} = V_{mx}^{\omega y}, \\ \omega_{iz}^r r_{ix} &= V_{ny}^{\omega z}, \omega_{ix}^r r_{iy} = V_{nz}^{\omega x}, \omega_{iy}^r r_{iz} = V_{nx}^{\omega y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Записываем по первому закону Кирхгофа уравнения баланса токов в каждом из шести узлов:

$$\begin{aligned} V_{ix} - V_{mix} + V_{mx}^{\omega z} - V_{mx}^{\omega y} &= 0, \\ V_{ix} - V_{nix} - V_{nx}^{\omega z} + V_{nx}^{\omega y} &= 0, \\ V_{iy} - V_{miy} + V_{my}^{\omega x} - V_{my}^{\omega z} &= 0, \\ V_{iy} - V_{niy} - V_{ny}^{\omega x} - V_{ny}^{\omega z} &= 0, \\ V_{iz} - V_{miz} + V_{mz}^{\omega y} + V_{mz}^{\omega x} &= 0, \\ V_{iz} - V_{niz} - V_{nz}^{\omega y} + V_{nz}^{\omega x} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Упростим задачу. Полагая $\mathbf{l}_i + \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i$, исключим из соотношений (4) и (5) внутренние переменные. В результате получим только три уравнения, которые являются основными кинематическими уравнениями первого порядка i -го звена:

$$\begin{aligned} V_{mix} - V_{nix} + R_{iz} \omega_{iy} - R_{iy} \omega_{iz} &= 0, \\ V_{miy} - V_{niy} + R_{ix} \omega_{iz} - R_{iz} \omega_{ix} &= 0, \\ V_{miz} - V_{niz} + R_{iy} \omega_{ix} - R_{ix} \omega_{iy} &= 0, \quad i = \overline{1, 5}. \end{aligned} \quad (6)$$

Присваивая индексу i значения от 1 до 5, получаем основные кинематические уравнения для каждого из пяти звеньев манипулятора.

Уравнения (6) применимы к любым вращательным кинематическим парам различных манипуляторов и, следовательно, представляют собой фундаментальное решение задачи. Эти уравнения следует рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных проекций векторов \mathbf{V}_{mi} , \mathbf{V}_{ni} , ω_i . Входящие в уравнения проекции векторов \mathbf{R}_i будут найдены из дифференциальных уравнений. Как будет показано ниже,

представление решения (6) в виде СЛАУ не связано с линейной аппроксимацией функций и поэтому не ухудшает точность решения задачи.

Заметим, что число уравнений в системе (6) меньше числа неизвестных. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо к уравнениям (6) присоединить уравнения связи.

Вывод уравнений связи

Прежде чем перейти к уравнениям связи, необходимо определить орты осей подвижных систем координат [3, 6], связанных со звеньями 1, ..., 5. Примем правило, в соответствии с которым ось Z_i подвижной системы координат должна быть совмещена с осью вращательной пары так, чтобы при взгляде с конца вектора Z_i поворот звена в положительном направлении совершался против вращения часовой стрелки. Если ось Z_i ортогональна оси звена, то ось X_i совмещаем с осью звена, а ось Y_i направляем ортогонально к оси звена.

В качестве примера рассмотрим первые три звена (рис. 5). Со звеном 1 свяжем систему координат $Ax_1y_1z_1$, направив ось z_1 по оси вращательной пары A , а ось y_1 — по оси пары B . Со звеном 2 свяжем систему координат $Bx_2y_2z_2$, направив ось z_2 по оси пары B , и ось x_2 — по оси звена 2. Со звеном 3 свяжем систему координат $Cx_3y_3z_3$, направив ось z_3 по оси шарнира C , а ось x_3 — по оси звена 3. Считаем также, что главные центральные оси звеньев параллельны соответствующим осям x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), связанным со звеньями.

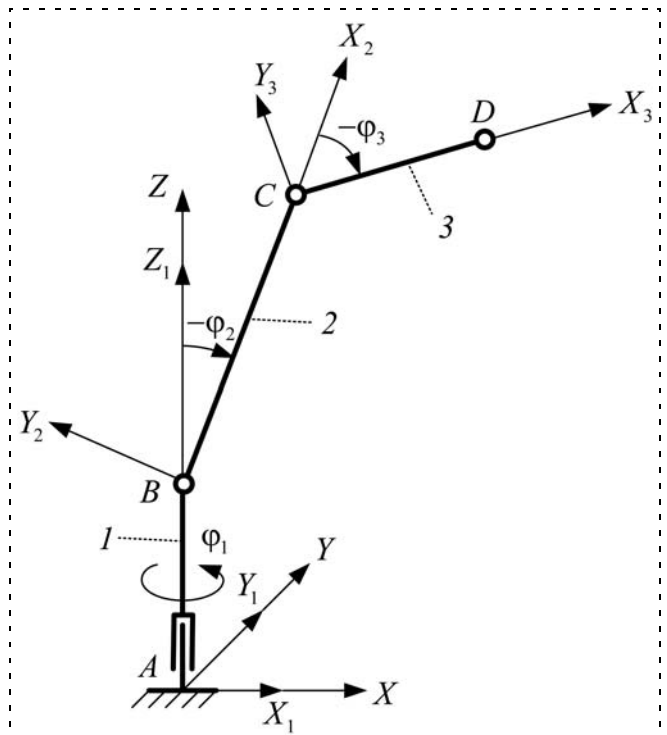


Рис. 5. Подвижные системы координат, связанные со звеньями 1, 2, 3

Сначала определим направление осей подвижной системы координат $Ax_1y_1z_1$ в неподвижной системе $Axyz$. Из рис. 5 следует:

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Далее определяем орты осей подвижной системы координат $Bx_2y_2z_2$, связанной со звеном 2. Для этого сначала найдем эти орты относительно предыдущей смежной системы координат $Ax_1y_1z_1$:

$$\mathbf{i}_2^1 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_2 \\ 0 \\ \cos \varphi_2 \end{bmatrix}, \mathbf{j}_2^1 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_2 \\ 0 \\ -\sin \varphi_2 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда в системе $Axyz$ координаты этих же векторов могут быть определены с помощью известного преобразования координат

$$\mathbf{i}_2 = \mathbf{L}_1 \mathbf{i}_2^1, \mathbf{j}_2 = \mathbf{L}_1 \mathbf{j}_2^1, \mathbf{k}_2 = \mathbf{L}_1 \mathbf{k}_2^1,$$

где

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} -$$

матрица перехода от системы $Ax_1y_1z_1$ к системе $Axyz$. Элементы α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots$) матрицы \mathbf{L}_1 есть направляющие косинусы осей системы $Ax_1y_1z_1$ относительно осей системы $Axyz$. Эти элементы уже найдены на предыдущем шаге решения задачи. Подставляя выражения элементов α_{ij} в формулы, определяем орты осей подвижной системы координат $Bx_2y_2z_2$ в неподвижной системе координат $Axyz$:

$$\mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{j}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ -\cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Продолжая рассмотренные преобразования, запишем орты осей подвижных систем координат, связанных с оставшимися звеньями 3–5:

$$\mathbf{i}_3 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \\ -\sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \\ \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{j}_3 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \\ -\sin \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \\ -\sin(\varphi_2 + \varphi_3) \end{bmatrix}, \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ -\cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$\mathbf{i}_4 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ -\sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{j}_4 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ -\sin \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ -\sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \end{bmatrix}, \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ -\cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$\mathbf{i}_5 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \cos \varphi_5 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_5 \\ \sin \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \cos \varphi_5 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_5 \\ \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \cos \varphi_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{j}_5 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \sin \varphi_5 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_5 \\ -\sin \varphi_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \sin \varphi_5 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_5 \\ -\sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \sin \varphi_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_5 = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ -\sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Обратимся теперь к уравнениям связи. Уравнения связи устанавливают соотношения между угловыми и линейными скоростями смежных звеньев. Звено $i - 1$ манипулятора соединено со звеном i осью (рис. 6). Точки n_{i-1}, m_i , совмещенные во вращательной паре, имеют одинаковые линейные скорости:

$$\mathbf{V}_{m_i} = \mathbf{V}_{n_{i-1}}. \quad (12)$$

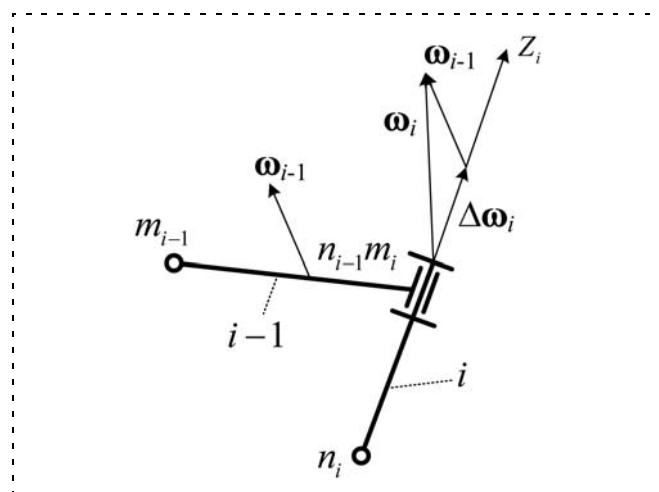


Рис. 6. Угловые скорости смежных звеньев

Угловые скорости звеньев $i-1$ и i в общем случае не равны между собой: $\omega_i \neq \omega_{i-1}$. Уравнения связи для угловых скоростей определим с помощью векторного сложения угловых скоростей смежных звеньев. Вращательное движение звена i относительно звена $i-1$ определяется вектором угловой скорости $\Delta\omega_i$, направленным по оси вращения. Если известны абсолютная угловая скорость ω_{i-1} звена $i-1$ и угловая относительная скорость $\Delta\omega_i$, то абсолютную угловую скорость звена i можно определить с помощью векторного соотношения:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \Delta\omega_i. \quad (13)$$

С осью вращательной пары связана координатная ось Z_i . Орт \mathbf{k}_i этой оси задан в базовой системе координат с помощью направляющих косинусов. Вектор угловой скорости $\Delta\omega_i$ звена i относительно звена $i-1$ направлен по оси Z_i и определяется формулой

$$\Delta\omega_i = \Delta\omega_i \mathbf{k}_i.$$

В последнем уравнении неизвестна скалярная величина относительной угловой скорости $\Delta\omega_i$. Из кинематической схемы на рис. 6 видно, что она определяется соотношением

$$\Delta\omega_i = \omega_{iz} - \omega_{(i-1)z}, \quad (14)$$

где $\omega_{iz} = \omega_i \cdot \mathbf{k}_i$, $\omega_{(i-1)z} = \omega_{(i-1)} \cdot \mathbf{k}_i$; \cdot — здесь и далее обозначает скалярное произведение векторов.

Подставляя полученные выражения переменных в исходное уравнение (13), получаем векторное уравнение связи для угловых скоростей вращательной пары

$$\Delta\omega_i = (\Delta\omega_i \cdot \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{k}_i, \quad (15)$$

где $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$.

Исследуем свойства этого уравнения. Запишем уравнение (15) в координатной форме. После простых преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных составляющих вектора $\Delta\omega_i$:

$$\begin{aligned} (k_{ix}^2 - 1)\Delta\omega_{ix} + k_{iy}k_{ix}\Delta\omega_{iy} + k_{iz}k_{ix}\Delta\omega_{iz} &= 0; \\ k_{ix}k_{iy}\Delta\omega_{ix} + (k_{iy}^2 - 1)\Delta\omega_{iy} + k_{iz}k_{iy}\Delta\omega_{iz} &= 0; \\ k_{ix}k_{iz}\Delta\omega_{ix} + k_{iy}k_{iz}\Delta\omega_{iy} + (k_{iz}^2 - 1)\Delta\omega_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (k_{ix}^2 - 1) & k_{iy}k_{ix} & k_{iz}k_{ix} \\ k_{ix}k_{iy} & (k_{iy}^2 - 1) & k_{iz}k_{iy} \\ k_{ix}k_{iz} & k_{iy}k_{iz} & (k_{iz}^2 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому для решения задачи можно использовать только два уравнения данной системы.

Решать векторное уравнение (15) в направлении справа — налево, т. е. находить сначала скалярное произведение $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_i$, а затем умножать полученное произведение на вектор $\Delta\omega_i$ бессмысленно, по-

скольку произведение $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_i = 1$, и мы приходим к тождеству $\Delta\omega_i = \Delta\omega_i$.

Теперь возникает вопрос, какие два уравнения системы (16) следует использовать в качестве уравнений связи? Не прибегая к строгим математическим доказательствам, которые выходят за рамки данной статьи, покажем особенности таких уравнений на конкретном примере. Задав индекс значения $i = 2$, запишем первое и второе уравнения системы (16) для второго звена. Подставив в эти уравнения выражения направляющих косинусов вектора \mathbf{k}_2 из формулы (8), получим

$$\Delta\omega_{2x}\cos^2\varphi_1 + \Delta\omega_{2y}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = 0;$$

$$\Delta\omega_{2x}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + \Delta\omega_{2y}\sin^2\varphi_1 = 0.$$

При $\varphi_1 = \pi/2$ первое уравнение обращается в нулевое тождество, а при $\varphi_1 = 0$ второе уравнение обращается в нулевое тождество.

Чтобы в процессе решения СЛАУ исключить появления особых точек, следует в качестве первого уравнения связи взять сумму первого и второго уравнений системы (16), а в качестве второго уравнения связи — сумму второго и третьего уравнений этой системы. В результате получаем искомые уравнения связи для вращательных пар, которые не приводят к появлению особых точек:

$$\begin{aligned} [k_{ix}(k_{ix} + k_{iy}) - 1]\Delta\omega_{ix} + [k_{iy}(k_{ix} + k_{iy}) - 1]\Delta\omega_{iy} + \\ + [k_{iz}(k_{ix} + k_{iy})]\Delta\omega_{iz} = 0, \\ [k_{ix}(k_{iy} + k_{iz})]\Delta\omega_{ix} + [k_{iy}(k_{iy} + k_{iz}) - 1]\Delta\omega_{iy} + \\ + [k_{iz}(k_{iy} + k_{iz}) - 1]\Delta\omega_{iz} = 0, \quad i = \overline{1, 5}. \end{aligned} \quad (17)$$

Присваивая индексу i значения от 1 до 5, получаем уравнения связи для каждой из пяти кинематических вращательных пар нашего манипулятора. Входящие в уравнения (17) проекции векторов \mathbf{k}_i — переменные величины. Однако ниже будет показано, что особенности численного интегрирования дифференциальных уравнений, с которыми связаны уравнения (17), позволяют считать эти уравнения, как и уравнения (6), уравнениями с постоянными коэффициентами.

К уравнениям связи относятся также векторные уравнение (12) и (13), которые в координатной форме принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{mix} - V_{n(i-1)x} = 0, \quad \Delta\omega_{ix} - \omega_{ix} + \omega_{(i-1)x} = 0, \\ V_{miy} - V_{n(i-1)y} = 0, \quad \Delta\omega_{iy} - \omega_{iy} + \omega_{(i-1)y} = 0, \\ V_{miz} - V_{n(i-1)z} = 0, \quad \Delta\omega_{iz} - \omega_{iz} + \omega_{(i-1)z} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$i = \overline{1, 5}.$$

Уравнения связи (17) и (18) представляют собой фундаментальное решение задачи. Они применимы к любым вращательным парам разных манипуляторов.

Вектор задающих воздействий

Чтобы получить замкнутую СЛАУ, уравнений (6), (17) и (18) недостаточно. Число неизвестных оказывается больше числа уравнений. В связи с этим

необходимо самим задать некоторое число переменных. Эти переменные образуют *вектор задающих воздействий*, который определяет (задает) траекторию движения робота в пространстве. Число задающих воздействий зависит от числа степеней свободы, т. е. от числа звеньев и числа кинематических пар манипулятора (табл. 2).

Например, для трехзвенного манипулятора вектором задающих воздействий может служить вектор скорости конечной точки (три задающих воздействия), движущейся по некоторой заданной траектории. Для шестизвенного манипулятора можно определить векторы скоростей для двух точек (шесть задающих воздействий), одна из которых движется по заданному контуру, а вторая — по эквидистанте к этому контуру. Вообще, задающие воздействия могут определяться различными уравнениями, связывающими между собой некоторые искомые переменные. В соответствии с табл. 2, для нашего пятизвенного манипулятора необходимо определить пять задающих воздействий.

Таблица 2

Анализ числа задающих воздействий

Число звеньев и число кинематических пар	Число уравнений в СЛАУ	Число неизвестных	Число задающих воздействий
1 звено + 1 пара	8	9	1
2 звена + 2 пары	16	18	2
3 звена + 3 пары	24	27	3
4 звена + 4 пары	32	36	4
5 звеньев + 5 пар	40	45	5
6 звеньев + 6 пар	48	54	6

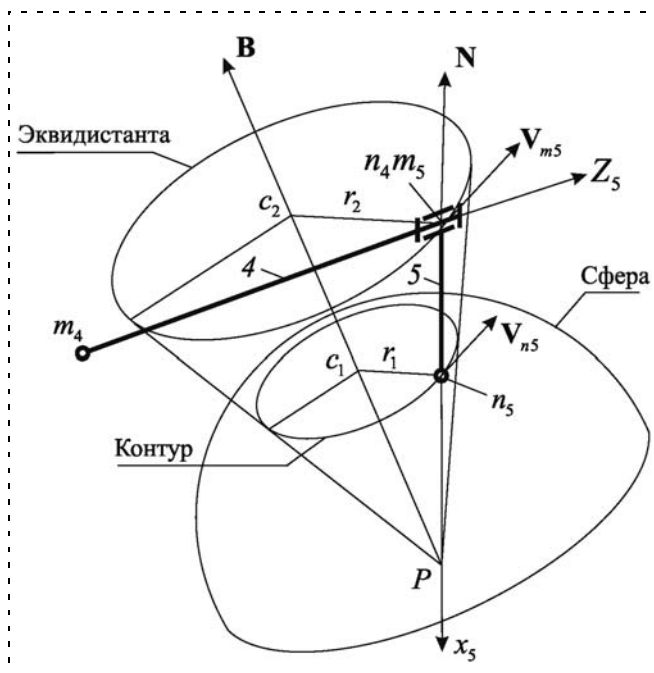


Рис. 7. Движение конечной точки n_5 манипулятора по дуге окружности, расположенной на сфере

Зададим движение конечной точки n_5 манипулятора по контуру, который представляет собой дугу окружности, расположенную на сфере (рис. 7).

Запишем общую систему дифференциальных уравнений окружности, ориентированной произвольно в пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n5}}{dt} &= V_{n5x}; \\ \frac{dy_{n5}}{dt} &= V_{n5y}; \\ \frac{dz_{n5}}{dt} &= V_{n5z}. \end{aligned} \quad (19)$$

Правые части уравнений (19) представляют собой вектор скорости конечной точки n_5 манипулятора. Этот вектор определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} V_{n5x} &= \frac{V_1}{r_1} [B(z_{n5} - z_{c1}) - C(y_{n5} - y_{c1})], \\ V_{n5y} &= \frac{V_1}{r_1} [C(x_{n5} - x_{c1}) - A(z_{n5} - z_{c1})], \\ V_{n5z} &= \frac{V_1}{r_1} [A(y_{n5} - y_{c1}) - B(x_{n5} - x_{c1})], \end{aligned} \quad (20)$$

где A, B, C — направляющие косинусы нормали к плоскости окружности; x_{c1}, y_{c1}, z_{c1} — координаты центра окружности относительно начальной точки дуги; r_1 — радиус окружности контура; V_1 — контурная скорость.

Звено 5 манипулятора ориентировано по нормали \mathbf{N} к поверхности сферы. В этом случае точка m_5 манипулятора должна перемещаться по окружности, которая является эквидистантой по отношению к заданному контуру (рис. 7).

Эквидистанта рассчитывается путем решения дифференциальных уравнений, которые в данном случае аналогичны уравнениям (19):

$$\begin{aligned} \frac{dx_{m5}}{dt} &= V_{m5x}; \\ \frac{dy_{m5}}{dt} &= V_{m5y}; \\ \frac{dz_{m5}}{dt} &= V_{m5z}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} V_{m5x} &= \frac{V_2}{r_2} [B(z_{m5} - z_{c2}) - C(y_{m5} - y_{c2})]; \\ V_{m5y} &= \frac{V_2}{r_2} [C(x_{m5} - x_{c2}) - A(z_{m5} - z_{c2})]; \\ V_{m5z} &= \frac{V_2}{r_2} [A(y_{m5} - y_{c2}) - B(x_{m5} - x_{c2})]. \end{aligned} \quad (22)$$

Из уравнений (22) в качестве задающих воздействий надо выбрать два любых уравнения. Вместе с уравнениями (20) получим в итоге пять задающих воздействий.

Дифференциальные уравнения движений звеньев

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для звена, совершающего сферическое движение [1]:

$$\frac{d\mathbf{R}_i}{dt} = \mathbf{R}_i \times \boldsymbol{\omega}_i, \quad (23)$$

где \mathbf{R}_i — радиус-вектор звена; $\boldsymbol{\omega}_i$ — вектор абсолютной угловой скорости звена; i — номер звена; \times — здесь и далее — векторное произведение векторов.

Вернемся к системе скалярных уравнений (6). Запишем их в виде векторного соотношения:

$$\mathbf{R}_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{V}_{ni} - \mathbf{V}_{mi}. \quad (24)$$

Подставляя выражение для векторного произведения из уравнения (24) в уравнение (23), получаем универсальную систему дифференциальных уравнений движения i -го звена:

$$\frac{d\mathbf{R}_i}{dt} = \mathbf{V}_{ni} - \mathbf{V}_{mi}, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (25)$$

Обобщенные координаты найдем с помощью следующего уравнения:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{k}_i, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (26)$$

Присваивая индексу i в уравнениях (25) и (26) значения от 1 до 5, получаем дифференциальные уравнения движений для каждого из пяти звеньев манипулятора. Данные уравнения также представляют собой фундаментальное решение задачи, поскольку применимы к любым манипуляторам с вращающимися кинематическими парами.

Компьютерное моделирование

В целом, мы получили замкнутую дифференциально-алгебраическую систему, которая включает 45 линейных алгебраических уравнений (6), (17), (18), (20), (22) и 26 дифференциальных уравнений (ДУ) (19), (21), (25), (26). Моделирование движений робота на компьютере или управление этим роботом с помощью компьютерной системы управления в реальном времени сводится к решению данной системы уравнений численными методами. На каждом шаге интегрирования ДУ решается СЛАУ столько раз, сколько вычислительных стадий имеет каждый шаг. Решение СЛАУ определяет численные значения функций в правых частях ДУ, а решение ДУ определяет значения проекций векторов, входящих в СЛАУ.

Проекции векторов в уравнениях (6) и (17) — переменные величины. Однако на каждой стадии вычислений шага интегрирования эти переменные сохраняют постоянные значения. Исходя из этого, уравнения (6) и (17) мы рассматриваем как СЛАУ с постоянными коэффициентами.

Было проведено моделирование движений рассмотренного пятизвенного робота со следующими параметрами: $A = 0$, $B = -\cos(\pi/3)$, $C = \sin(\pi/3)$, $R = 0,01$, $R_2 = 3\sqrt{0,03}/2$, $R_3 = 3 \cdot 0,1/2$, $R_4 = 0,1/2$, $R_5 = \sqrt{0,03}/2$. Начальные условия: $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = -\pi/3$, $\varphi_3 = -\pi/2$, $\varphi_4 = 2\pi/3$, $\varphi_5 = 0$. Результаты моделирования представлены в виде графиков на рис. 8 (см. вторую сторону обложки). На графиках показаны изменения углов поворотов звеньев в зависимости от времени. Это результат решения обратной позиционной задачи. Один шаг вычислений на ноутбуке средней мощности с процессором AMDPhenomII N620-2.8GHz составил 0,18 мс, что при периоде таймера УЧПУ 10 мс можно считать вполне приемлемым результатом.

Задавая необходимый шаг интегрирования дифференциальных уравнений, можно вычислять передаваемые на электроприводы манипулятора управляющие воздействия весьма точно. Точность будет ограничена лишь погрешностью выбранных для решения задачи численных методов. Если любую пространственную траекторию аппроксимировать сочетаниями прямых и дуг окружностей, то с помощью рассмотренного алгоритма можно управлять движениями робота по любой из этих траекторий.

Метод электроаналогий применим не только для решения кинематических задач, но и для решения задач динамики многозвенных механизмов, включая манипуляционные роботы, гироскопические устройства, узлы и устройства металлорежущих станков и т. д. [5].

Список литературы

1. Бутенин Н. В., Луцк Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов. 9-е изд. СПб.: Лань, 2007. 736 с.
2. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами: Учеб. для вузов. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 480 с.
3. Механика промышленных роботов: учеб. пособ. для вузов / Под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е. И. Воробьев, С. А. Попов, Г. И. Шевелева. М.: Высшая школа, 1988. 304 с.
4. Чикуров Н. Г. Синтез математических моделей механических систем методом электроаналогий // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 4. С. 37—43.
5. Чикуров Н. Г. Моделирование технических систем: Учеб. пособ. Уфа: изд. УГАТУ, 2009. 358 с.
6. Чикуров Н. Г., Гончаров А. В. Построение математической модели манипуляционного робота методом электроаналогий // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 9. С. 36—42.
7. Positive real synthesis using matrix inequalities for mechanical networks: application to vehicle suspension, by C. Papageorgiou and M. C. Smith // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2006. V. 14. N. 3. P. 423—435.

С. Л. Крутиков, аспирант,
serrk10@yandex.ru,
Научно-учебный центр "Робототехника"
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Способ получения уравнений движения роботов-манипуляторов в терминах базовых инерционных параметров

Предложен новый метод получения уравнений движения исполнительных механизмов роботов-манипуляторов, использующий базовые инерционные параметры вместо классических масс-инерционных параметров. Рассмотрен пример вывода с помощью предложенного метода уравнений движения плоского двухзвенного манипулятора.

Ключевые слова: базовые инерционные параметры, динамическая модель манипулятора, уравнения движения в форме Лагранжа

Введение

Роботами-манипуляторами (РМ) называют машины, исполнительный механизм которых представляет собой систему твердых тел (звеньев), соединенных кинематическими парами 5-го класса¹ и образующих разомкнутую кинематическую цепь. Многие современные методы управления такими машинами учитывают динамику исполнительного механизма, для чего требуется знание его уравнений движения. Однако существует ряд задач, когда коэффициенты этих уравнений, т. е. масс-инерционные параметры² звеньев, неизвестны. В таких случаях применяют идентификацию — процедуру экспериментальной оценки параметров по данным о движении робота. Идентификация базируется на хорошо известном в механике манипуляторов факте линейности кинетической энергии исполнительного механизма и потенциальной энергии веса относительно масс-инерционных параметров [1]. Благодаря этому свойству полная энергия H может быть представлена в виде $H = \mathbf{w}_H \mathbf{p}$, где \mathbf{p} — вектор-столбец, составленный из всех масс-инерционных параметров всех звеньев; \mathbf{w}_H — вектор-строка, компоненты которого являются функциями обобщенных координат и скоростей. Эти функции будем называть *коэффициентами влияния* и далее будем рассматривать их как элементы линейного

¹ Здесь имеется в виду подвижное сочленение двух твердых тел, допускающее их относительное движение с одной степенью свободы. В зависимости от типа этого движения выделяют поступательные и вращательные пары 5-го класса (далее — просто сочленения).

² Имеются в виду масса, статические моменты и моменты инерции.

пространства подобных функций. Для идентификации необходимо измерить в m временных отсчетах значения обобщенных координат \mathbf{q} и скоростей $\dot{\mathbf{q}}$, а также оценить силы и моменты \mathbf{Q} приводов сочленений манипулятора. Затем, воспользовавшись теоремой об изменении полной энергии в интегральной форме, можно составить следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно оценки $\hat{\mathbf{p}}$ вектора неизвестных параметров:

$$[\mathbf{w}_H(\mathbf{q}(t_{i+1}), \dot{\mathbf{q}}(t_{i+1})) - \mathbf{w}_H(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i))] \hat{\mathbf{p}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} dt, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Однако обычно коэффициенты влияния оказываются линейно зависимыми [2], что приводит к дефекту основной матрицы этой линейной системы и, следовательно, к невозможности получения однозначной оценки неизвестных параметров. Одним из подходов к решению этой проблемы является поиск среди коэффициентов влияния подсистемы базисных векторов и последующее разложение функции H по этим векторам [3]. Коэффициенты базисного разложения будем называть *базовыми инерционными параметрами*. Нетрудно видеть, что идентифицируемыми являются только базовые параметры. Другие способы решения проблемы идентифицируемости подробно описаны в работе [2], а различные методы поиска базовых параметров и их связи с классическими параметрами — в работах [1, 3–6]. Однако остается неясным применение этих параметров в уравнениях движения, ибо существующие методы их получения используют классические масс-инерционные параметры [7]. Поэтому в данной статье предложен способ записи уравнений движения исполнительного механизма РМ, использующий именно базовые параметры. Также рассмотрен пример вывода уравнений движения плоского двухзвенника с помощью предложенного метода.

Лагранжево описание динамики РМ

Поскольку исполнительный механизм манипуляционного робота представляет собой систему твердых тел, стесненных голономными связями, для записи его уравнений движения можно воспользоваться уравнениями Лагранжа 2-го рода, которые имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^T.$$

Здесь L — функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий механизма, а \mathbf{Q} — вектор обобщенных сил от непотенциальных силовых факторов. Рассмотрим ненагруженный манипулятор, т. е. движущийся под действием веса звеньев и сил и моментов приводов сочленений.

Это значит, что в функцию Лагранжа будет входить только потенциальная энергия веса, ибо приводные силовые факторы являются непотенциальными. Поэтому, согласно свойству линейности, лагранжиан L для исполнительного механизма РМ, подобно полной энергии, может быть представлен в виде $L = \mathbf{w}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{p}$. Очевидно, что компоненты вектора-строки \mathbf{w}_L также являются коэффициентами влияния в смысле данной выше интерпретации. В работе [3] была сформулирована и доказана теорема о базисном множестве, согласно которой все коэффициенты влияния на функцию Лагранжа принадлежат некоторому конечномерному линейному пространству \mathcal{F} . Пусть \mathbf{b} — вектор-строка, составленная из базисных векторов этого пространства, а \mathbf{Z} — соответствующая им матрица координат коэффициентов влияния. Тогда для лагранжиана справедливо следующее соотношение:

$$L = \mathbf{bZp}.$$

В действительности оказывается, что лишь небольшая часть проекций коэффициентов влияния отлична от нуля. Поэтому далее будем считать, что из матрицы \mathbf{Z} удалены нулевые строки, а из вектора \mathbf{b} — соответствующие этим строкам элементы. В результате получим следующие уравнения движения относительно классических масс-инерционных параметров:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbf{Zp} = \mathbf{Q}.$$

Выражение в круглых скобках можно рассматривать как результат действия на вектор-строку \mathbf{b} линейного дифференциального оператора, далее будем обозначать его \mathcal{L} .

Приведение уравнений движения РМ к базовым параметрам

Как было отмечено ранее, базовые инерционные параметры являются коэффициентами разложения по базисным коэффициентам влияния. Найти координаты этих коэффициентов влияния можно, исключив из матрицы \mathbf{Z} линейно зависимые столбцы. Получившуюся матрицу обозначим $\tilde{\mathbf{Z}}$. Очевидно, что столбцы этой матрицы являются координатами линейно независимых компонент вектора-строки \mathbf{w}_L . Поэтому для лагранжиана справедливо следующее соотношение:

$$L = \mathbf{b}\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{p}}, \quad (1)$$

где $\tilde{\mathbf{p}}$ — вектор, составленный из базовых инерционных параметров. Подставляя (1) в уравнения Лагранжа и вводя матрицу $\mathbf{B} = \mathcal{L}\mathbf{b}$, получим

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}. \quad (2)$$

Компоненты матриц \mathbf{Z} и $\tilde{\mathbf{Z}}$ могут быть вычислены с помощью рекуррентной процедуры, подробно описанной в работе [8]. Столбцы матрицы \mathbf{B} также могут быть рассчитаны рекуррентно. Выводу соответствующих соотношений посвящен следующий параграф.

Замкнутая форма уравнений движения РМ

В соответствии с упомянутой ранее теоремой о базисном множестве линейное пространство \mathcal{F} может быть представлено в виде тензорного произведения пространств

$$\mathcal{F} = \mathcal{Y}_0 \otimes \mathcal{Y}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{Y}_n,$$

где n — число звеньев манипулятора, а пространства \mathcal{Y}_k определяются следующим образом:

1) при $k = 0$

$$\mathcal{Y}_0 = \text{span}\{\{1\} \cup \{\dot{q}_i^2/2, i = 1, \dots, n\} \cup \{\dot{q}_i \dot{q}_j, i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, i-1\}\};$$

2) при $k = \overline{1, n}$

• в случае вращательного сочленения

$$\mathcal{Y}_k = \text{span}\{1, \cos q_k, \sin q_k, \cos(2q_k), \sin(2q_k)\};$$

• в случае поступательного сочленения

$$\mathcal{Y}_k = \text{span}\{1, q_k, q_k^2\}.$$

Поэтому каждому базисному вектору пространства-произведения можно взаимно однозначно сопоставить индекс $l_0 l_1 \dots l_n$, $l_k \in \mathbb{N}_0$, $k = \overline{0, n}$. Каждое из натуральных чисел, составляющих этот индекс, определяет номер базисного вектора в соответствующем пространстве-множителе. Отметим, что индексы $l_0 \dots l_k$ и $l_0 \dots l_k 1 \dots 1$, где $k < n$, задают один и тот же базисный вектор. Таким образом, любой элемент вектора-строки \mathbf{b} однозначно определяется с помощью своего индекса следующим образом:

$$b^{l_0 l_1 \dots l_k} = y_0^{l_0} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k}, \quad 0 < k \leq n, \quad (3)$$

где элементы $y_k^{l_k} \in \mathcal{Y}_k$ могут быть вычислены по следующим правилам:

1) при $k = \overline{1, n}$

• в случае вращательного сочленения

$$y_k^{l_k} = \begin{cases} 1, & l_k = 1; \\ \cos q_k, & l_k = 2; \\ \sin q_k, & l_k = 3; \\ \cos(2q_k), & l_k = 4; \\ \sin(2q_k), & l_k = 5; \end{cases} \quad (4a)$$

- в случае поступательного сочленения

$$y_k^{l_k} = \begin{cases} 1, & l_k = 1; \\ q_k, & l_k = 2; \\ q_k^2, & l_k = 3. \end{cases} \quad (4b)$$

2) при $k = 0$

$$y_0^{l_0(i,j)=J^{-1}(l_0)} = \begin{cases} 1, & i = j = 0; \\ \dot{q}_i^2/2, & i = j \neq 0; \\ \dot{q}_i \dot{q}_j, & i \neq j. \end{cases} \quad (4c)$$

Используемое в последнем соотношении отображение $J: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ позволяет присвоить порядковый номер каждому базисному вектору пространства \mathcal{Y}_0 и определяется формулой

$$l_0 = J(i, j) = \begin{cases} \max(i, j)(\max(i, j) - 1)/2 + \min(i, j), & i, j > 0; \\ 0, & i = 0 \text{ или } j = 0. \end{cases}$$

Это отображение становится взаимнооднозначным, если определить обратное отображение $(i, j) = J^{-1}(l_0)$ с помощью соотношений

$$i = \lceil (\sqrt{1 + 8l_0} - 1)/2 \rceil, \\ j = l_0 - i(i - 1)/2.$$

Найдем результат действия оператора \mathcal{L} на базисный вектор с индексом $l_0 \dots l_{k+1}$ ($0 \leq k < n$). Учитывая соотношение (3) и тот факт, что от обобщенных скоростей зависит только сомножитель $y_0^{l_0}$, можно записать

$$\frac{\partial b^{l_0 l_1 \dots l_{k+1}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}}.$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial b^{l_0 l_1 \dots l_{k+1}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} \right) y_{k+1}^{l_{k+1}} + \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} \dot{y}_{k+1}^{l_{k+1}}. \quad (5)$$

Кроме того, очевидно следующее

$$\frac{\partial b^{l_0 l_1 \dots l_{k+1}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (y_0^{l_0} \dots y_k^{l_k}) y_{k+1}^{l_{k+1}} + y_0^{l_0} \dots y_k^{l_k} \frac{\partial y_{k+1}^{l_{k+1}}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6)$$

Заметим, что $y_{k+1}^{l_{k+1}}$ является функцией только q_{k+1} , поэтому

$$\dot{y}_{k+1}^{l_{k+1}} = \frac{\partial y_{k+1}^{l_{k+1}}}{\partial q_{k+1}} \dot{q}_{k+1}. \quad (7)$$

Для краткости обозначим $\partial y_{k+1}^{l_{k+1}} / \partial q_{k+1}$ как $g_{k+1}^{l_{k+1}}$. Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости следующих правил:

- в случае вращательного сочленения

$$g_k^{l_k} = \begin{cases} 0, & l_k = 1; \\ -y_k^3, & l_k = 2; \\ y_k^2, & l_k = 3; \\ -2y_k^5, & l_k = 4; \\ 2y_k^4, & l_k = 5; \end{cases} \quad (8a)$$

- в случае поступательного сочленения

$$g_k^{l_k} = \begin{cases} 0, & l_k = 1; \\ y_k^1, & l_k = 2; \\ 2y_k^2, & l_k = 3. \end{cases} \quad (8b)$$

Пусть \mathbf{e}_k — единичный вектор размера $n \times 1$ такой, что k -я его компонента равна 1. Для упрощения записи будем далее полагать, что производная скалярной функции по векторному аргументу является вектором-столбцом. Тогда можно записать, что

$$\frac{\partial y_{k+1}^{l_{k+1}}}{\partial \mathbf{q}} = g_{k+1}^{l_{k+1}} \mathbf{e}_{k+1}, \quad (9)$$

а также

$$\frac{\partial y_0^{l_0(i,j)=J^{-1}(l_0)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{cases} \dot{q}_i, \mathbf{e}_i, & i = j \neq 0; \\ \dot{q}_i \mathbf{e}_j + \dot{q}_j \mathbf{e}_i, & i \neq j; \\ 0, & i = j = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Пусть вектор-столбец $\mathbf{B}^{l_0 l_1 \dots l_k}$ размера $n \times 1$ есть результат действия оператора \mathcal{L} на $b^{l_0 l_1 \dots l_k}$. С учетом соотношений (5)—(7) и (9) получим

$$\mathbf{B}^{l_0 \dots l_{k+1}} = \mathbf{B}^{l_0 \dots l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}} + \left(\dot{q}_{k+1} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} - b^{l_0 \dots l_k} \mathbf{e}_{k+1} \right) g_{k+1}^{l_{k+1}}.$$

Обозначим выражение в круглых скобках как $\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0 \dots l_k}$. Тогда

$$\mathbf{B}^{l_0 \dots l_{k+1}} = \mathbf{B}^{l_0 \dots l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}} + \mathbf{Y}_{k+1}^{l_0 \dots l_k} g_{k+1}^{l_{k+1}}, \\ k = \overline{0, n-1}. \quad (11)$$

Из соотношения (10) следует, что

$$\dot{q}_{k+1} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{q}} \stackrel{(i,j)=J^{-1}(l_0)}{=} \begin{cases} y_0^{J(k+1,i)} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i = j \neq 0; \\ 2y_0^{l_0} \mathbf{e}_i, & k+1 = i = j \neq 0; \\ y_0^{J(k+1,i)} \mathbf{e}_j + y_0^{J(k+1,j)} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i \neq j; \\ 2y_0^{J(i,i)} \mathbf{e}_j + y_0^{l_0} \mathbf{e}_i, & k+1 = i \neq j; \\ y_0^{l_0} \mathbf{e}_j + y_0^{J(j,j)} \mathbf{e}_i, & k+1 = j \neq i; \\ 0, & i = j = 0. \end{cases}$$

Учитывая (3), имеем

$$\dot{q}_{k+1} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{q}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} \stackrel{(i,j)=J^{-1}(l_0)}{=} \begin{cases} b^{J(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i = j \neq 0; \\ 2b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = i = j \neq 0; \\ b^{J(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j + b^{J(k+1,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i \neq j; \\ 2b^{J(i,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j + b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = i \neq j; \\ b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_j + 2b^{J(j,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = j \neq i; \\ 0, & i = j = 0. \end{cases}$$

Тогда векторные коэффициенты $\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0\dots l_k}$ могут быть вычислены по правилам:

$$\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0\dots l_k} \stackrel{(i,j)=J^{-1}(l_0)}{=} \begin{cases} b^{J(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_i - b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & k+1 \neq i = j \neq 0; \\ b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = i = j \neq 0; \\ b^{J(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j + b^{J(k+1,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i - b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & k+1 \neq i \neq j; \\ 2b^{J(i,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j, & k+1 = i \neq j; \\ 2b^{J(j,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = j \neq i; \\ -b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & i = j = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Базисные векторы $b^{l_0\dots l_k}$, определяющие эти правила, рассчитываются с помощью следующих рекуррентных соотношений, очевидным образом вытекающих из (3):

$$\begin{aligned} b^{l_0 l_1 \dots l_{k+1}} &= b^{l_0 l_1 \dots l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}}, \\ k &= \overline{0, n-1}, \quad b^{l_0} = y_0^{l_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

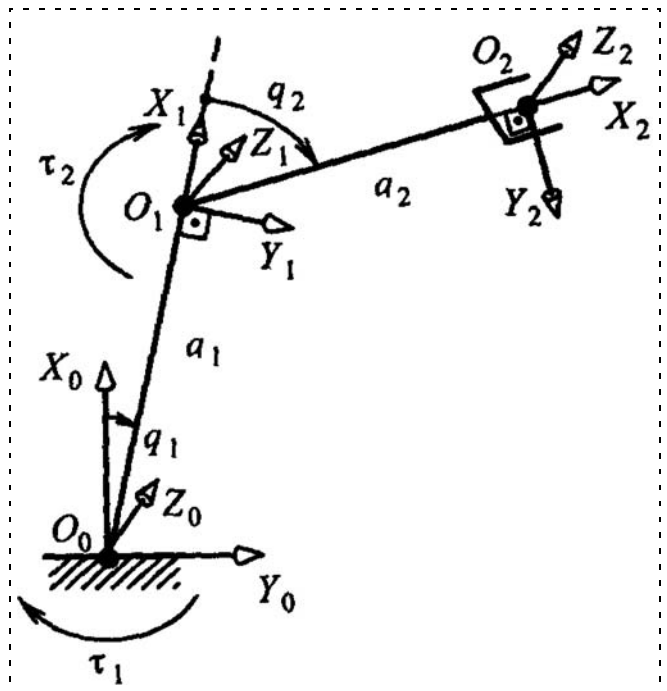
Для инициализации рекурсивной процедуры (11) необходимо знать \mathbf{V}^{l_0} . По определению $\mathbf{V}^{l_0} = \mathcal{L} b^{l_0}$, но $b^{l_0} = y_0^{l_0}$, поэтому

$$\mathbf{V}^{l_0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{q}} \stackrel{(i,j)=J^{-1}(l_0)}{=} \begin{cases} \ddot{q}_i \mathbf{e}_i, & i = j \neq 0; \\ \dot{q}_i \mathbf{e}_j + \dot{q}_j \mathbf{e}_i, & i \neq j; \\ \mathbf{0}, & i = j = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, рекуррентные соотношения (11) и (13) вкуче с правилами (4), (8), (12) и (14) образуют замкнутую систему, позволяющую вычислять столбцы $\mathbf{V}^{l_0 l_1 \dots l_k}$ матрицы \mathbf{V} , которая, в свою очередь, определяет уравнения движения исполнительного механизма РМ.

Пример

Рассмотрим плоский двухзвенный манипулятор с двумя вращательными сочленениями, кинематическая схема которого представлена на рисунке. Звенья манипулятора будем считать бесконечно тонкими однородными стержнями с длинами a_i и массами m_i ($i = 1, 2$). С каждым звеном свяжем подвижную систему координат $O_i X_i Y_i Z_i$ ($i = 1, 2$), а также введем абсолютную систему координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, связанную с неподвижным основанием, как показано на рисунке. Нетрудно видеть, что в качестве обобщенных координат q_i ($i = 1, 2$) можно выбрать углы между осями X_{i-1} и X_i . Предполагается, что приводы манипулятора располагаются непосредственно в сочленениях и действуют на ис-



Кинематическая схема плоского двухзвенника

полнительный механизм с моментами τ_i ($i = 1, 2$), а вектор ускорения свободного падения в абсолютной системе координат имеет компоненты $(-g \ 0 \ 0)^T$.

Для записи уравнений движения в форме (2) необходимо сначала найти вектор базовых инерционных параметров $\tilde{\mathbf{p}}$. Из работы [3] известно, что для рассматриваемого механизма

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} I_{xx}^1 + I_{yy}^1 - a_1^2 m_1 - a_2^2 m_2 \\ S_x^1 + a_1 m_1 + a_2 m_2 \\ S_y^1 \\ I_{xx}^2 + I_{yy}^2 - a_2^2 m_2 \\ S_x^2 + a_2 m_2 \\ S_y^2 \end{pmatrix}.$$

Для простоты будем считать, что звенья манипулятора имеют одинаковые массы m и длины l , т. е. $a_1 = a_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$. Тогда можно вычислить моменты инерции и статические моменты, входящие в выражение базовых параметров: $I_{xx}^1 = I_{xx}^2 = ml^2/3$,

$$I_{yy}^1 = I_{yy}^2 = 0, \quad S_x^1 = S_x^2 = -ml/2, \quad S_y^1 = S_y^2 = 0.$$

В итоге получим, что

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left(-\frac{5}{3}ml^2 \quad \frac{3}{2}ml \quad 0 \quad -\frac{2}{3}ml^2 \quad \frac{1}{2}ml \quad 0 \right)^T.$$

Далее необходимо найти матрицу $\tilde{\mathbf{Z}}$ координат базисных коэффициентов влияния. Это было сделано с помощью специальной компьютерной программы, разработанной согласно оригинальному методу, описанному в работе [8]. В результате имеем:

$$\tilde{\mathbf{Z}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2l & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2l & 2l & 2l & 0 & 0 & 2l & 0 & l & 0 & -g & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2l & 0 & -l & 0 & g & g & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для получения уравнений движения необходимо найти матрицу $\mathbf{B} = \mathcal{L}\mathbf{b}$. Сначала с помощью уже упомянутой программы были установлены базисные векторы, на которые функция Лагранжа имеет ненулевые проекции:

$$\mathbf{b} = (b^{111} \ b^{211} \ b^{311} \ b^{021} \ b^{031} \ b^{112} \ b^{113} \\ b^{212} \ b^{213} \ b^{022} \ b^{023} \ b^{032} \ b^{033}).$$

Затем вычисляем столбцы матрицы \mathbf{B} согласно рекуррентным соотношениям (13) и (11), а также

правилам (8), (12) и (14). На первом шаге итерационного процесса имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{111} &= \mathbf{B}^{11} y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{11} g_2^1 = \mathbf{B}^{11}, \\ \mathbf{B}^{211} &= \mathbf{B}^{21} y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{21} g_2^1 = \mathbf{B}^{21}, \\ \mathbf{B}^{311} &= \mathbf{B}^{31} y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{31} g_2^1 = \mathbf{B}^{31}, \\ \mathbf{B}^{021} &= \mathbf{B}^{02} y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{02} g_2^1 = \mathbf{B}^{02}, \\ \mathbf{B}^{031} &= \mathbf{B}^{03} y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{03} g_2^1 = \mathbf{B}^{03}, \\ \mathbf{B}^{112} &= \mathbf{B}^{11} y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{11} g_2^2 = \mathbf{B}^{11} y_2^2 - (b^{21}\mathbf{e}_1 - b^{11}\mathbf{e}_2)y_2^3, \\ \mathbf{B}^{113} &= \mathbf{B}^{11} y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{11} g_2^3 = \mathbf{B}^{11} y_2^3 + (b^{21}\mathbf{e}_1 - b^{11}\mathbf{e}_2)y_2^2, \\ \mathbf{B}^{212} &= \mathbf{B}^{21} y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{21} g_2^2 = \mathbf{B}^{21} y_2^2 - 2b^{31}\mathbf{e}_1 y_2^3, \\ \mathbf{B}^{213} &= \mathbf{B}^{21} y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{21} g_2^3 = \mathbf{B}^{21} y_2^3 + 2b^{31}\mathbf{e}_1 y_2^2, \\ \mathbf{B}^{022} &= \mathbf{B}^{02} y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{02} g_2^2 = \mathbf{B}^{02} y_2^2 + b^{02}\mathbf{e}_2 y_2^3, \\ \mathbf{B}^{023} &= \mathbf{B}^{02} y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{02} g_2^3 = \mathbf{B}^{02} y_2^2 - b^{02}\mathbf{e}_2 y_2^2, \\ \mathbf{B}^{032} &= \mathbf{B}^{03} y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{03} g_2^2 = \mathbf{B}^{03} y_2^2 + b^{03}\mathbf{e}_2 y_2^3, \\ \mathbf{B}^{033} &= \mathbf{B}^{03} y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{03} g_2^3 = \mathbf{B}^{03} y_2^2 - b^{03}\mathbf{e}_2 y_2^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Можно видеть, что столбцы матрицы \mathbf{B} зависят от векторов-столбцов \mathbf{B}^{11} , \mathbf{B}^{21} , \mathbf{B}^{31} , \mathbf{B}^{02} , \mathbf{B}^{03} и скалярных коэффициентов b^{11} , b^{21} , b^{31} , b^{02} , b^{03} . Известные векторы-столбцы непосредственно вычисляются на второй итерации:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{11} &= \mathbf{B}^1 y_1^1 + \mathbf{Y}_1^1 g_1^1 = \ddot{q}_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{B}^{21} &= \mathbf{B}^2 y_1^1 + \mathbf{Y}_1^2 g_1^1 = \ddot{q}_1 \mathbf{e}_2 + \ddot{q}_2 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{B}^{31} &= \mathbf{B}^3 y_1^1 + \mathbf{Y}_1^3 g_1^1 = \ddot{q}_2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{B}^{02} &= \mathbf{B}^0 y_1^2 + \mathbf{Y}_1^0 g_1^2 = \mathbf{e}_1 y_1^3, \\ \mathbf{B}^{03} &= \mathbf{B}^0 y_1^3 + \mathbf{Y}_1^0 g_1^3 = -\mathbf{e}_1 y_1^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Для вычисления неизвестных скалярных величин должен быть инициирован отдельный итерационный процесс согласно соотношениям (13) и правилам (4), состоящий в данном случае из одного шага:

$$\begin{aligned} b^{11} &= b^1 y_1^1 = \dot{q}_1^2/2, \\ b^{21} &= b^2 y_1^1 = \dot{q}_1 \dot{q}_2, \\ b^{31} &= b^3 y_1^1 = \dot{q}_2^2/2, \\ b^{02} &= b^0 y_1^2 = y_1^2, \\ b^{03} &= b^0 y_1^3 = y_1^3. \end{aligned} \quad (17)$$

После подстановки (16) и (17) в (15) с учетом правил (4) и алгебраических преобразований получим

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & 0 & s_1 & -c_1 & \ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2 & \ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2 & \ddot{q}_2 c_2 - \dot{q}_2^2 s_2 & \ddot{q}_2 s_2 + \dot{q}_2^2 c_2 & s_1 c_2 & s_1 s_2 & -c_1 c_2 & -c_1 s_2 \\ 0 & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & 0 & 0 & \dot{q}_1^2 s_2 / 2 & -\dot{q}_1^2 c_2 / 2 & \ddot{q}_1 c_2 & \ddot{q}_1 s_2 & c_1 s_2 & -c_1 c_2 & s_1 s_2 & -s_1 c_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь функции $\cos q_i$ и $\sin q_i$ для краткости обозначены как c_i и s_i соответственно. В соответствии с (2) окончательно получаем известные уравнения движения плоского двухзвенного манипулятора [7]:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left(\frac{5}{3}ml^2 + ml^2c_2\right) \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}ml^2c_2\right) \ddot{q}_2 - \\ &- ml^2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{1}{2}ml^2s_2\dot{q}_2^2 - \frac{3}{2}mgls_1 - \frac{1}{2}mgls_{12}, \\ \tau_2 &= \left(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}ml^2c_2\right) \ddot{q}_1 + \frac{1}{3}ml^2\ddot{q}_2 + \\ &+ \frac{1}{2}ml^2s_2\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}mgls_{12}. \end{aligned}$$

Заключение

Базовые инерционные параметры являются фундаментальным понятием в динамике манипуляторов, так как именно они являются коэффициентами уравнений движения, и только они могут быть определены путем идентификации. В предыдущих работах автором был предложен новый метод поиска базовых параметров [3], а также эффективный с вычислительной точки зрения подход к его реализации [8]. Рассмотренный здесь способ получения уравнений движения манипуляционного механизма, являясь развитием этих работ, устраняет неясность в вопросе использования базовых инерционных параметров в задачах управления и моделирования. Достоинством предложенного метода является рекуррентность основных соотношений (11) и (13), что снижает число вычислений по сравнению с конечными соотношениями. В качестве недостатка можно отметить необходимость пред-

варительного вычисления матрицы $\tilde{\mathbf{Z}}$ координат базисных коэффициентов влияния, а также определения индексов базисных векторов $b^{l_0 \dots l_n}$, соответствующих ненулевым строкам этой матрицы. Вместе с тем, все это делается автоматически программой поиска базовых инерционных параметров, алгоритм которой описан в [8]. Что же касается вычислительной сложности, то пока можно лишь дать ей оценку как $O(n^2)$. В будущем предполагается провести более подробное исследование этого вопроса, включающее подсчет числа операций и сравнение с классическими методами, такими как рекуррентные соотношения Ньютона—Эйлера.

Список литературы

1. **Mayeda H., Yoshida K., Osuka K.** Base parameters of manipulator dynamic models // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 1990. V. 6. N 3. P. 312—320.
2. **Atkeson Ch. G., An C. H., Hollerbach J. M.** Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links // Intl. Journal of Robotics Research. 1986. V. 5. N 3. P. 101—118.
3. **Крутиков С. Л.** Базовые инерционные параметры манипуляционных роботов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2011. N 1. С. 28—45.
4. **Gautier M., Khalil W.** Identification of the minimum inertial parameters of robots // Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation. 1989. P. 1529—1534.
5. **Gautier M., Khalil W.** Numerical calculation of the base inertial parameters of robots // Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation. 1989. P. 1529—1534.
6. **Sheu S.-Y., Walker M. W.** Basis sets for manipulator inertial parameters // Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation. 1989. P. 1517—1522.
7. **Зенкевич С. Л., Ющенко А. С.** Основы управления манипуляционными роботами // М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
8. **Крутиков С. Л.** Рекурсивный метод поиска базовых инерционных параметров манипуляционных механизмов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2012. № 1. С. 38—59.

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



Управление и информатика в авиакосмических и морских системах

№ 4 (133)

АПРЕЛЬ

2012

Главный редактор:

ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСЕЕВ В. В.
БЕЛОКОНОВ И. В.
БУКОВ В. Н.
ВАСИЛЬЕВ В. И.
ГОДУНОВ В. А.
ГУРЕВИЧ О. С.
ГУРСКИЙ Б. Г.
ЕФИМОВ В. В.
ЗАЙЦЕВ А. В.
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.
НЕСТЕРОВ В. А.
ОХТИЛЕВ М. Ю.
ПАНКРАТОВ В. М.
РАСПОПОВ В. Я.
САБО Ю. И.
СТЕПАНОВ О. А.
СОЛДАТКИН В. М.
ТЕРЯЕВ Е. Д.
ФИЛИМОНОВ Н. Б.
ШИРЯЕВ В. И.
ШКОЛИН В. П.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.
ЧУГУНОВА А. В.

СОДЕРЖАНИЕ

Шибанов Г. П.

Оптимизация систем управления летательным аппаратом по критериям управляемости и наблюдаемости 57

Старовойтов Е. И.

Устройство контроля ориентации пассивных космических аппаратов на основе дифракционных решеток 61

Соллогуб А. В., Скобелев П. О., Симонова Е. В., Царев А. В., Степанов М. Е.

Проблемы автономного согласованного межспутникового взаимодействия в гетерогенных мультиагентных системах малоразмерных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли 65

Г. П. Шибанов,

д-р техн. наук., проф., вед. науч. сотр.,
soldat_11@mail.ru,

Государственный летно-испытательный центр
им. В. П. Чкалова

Оптимизация систем управления летательным аппаратом по критериям управляемости и наблюдаемости

Рассмотрена методология использования количественных критериев управляемости и наблюдаемости системы управления летательным аппаратом при заданных наборах или совокупностях датчиков информации и исполнительных элементов

Ключевые слова: система управления летательным аппаратом, оптимизация числа исполнительных и измерительных элементов, критерии управляемости и наблюдаемости, степень управляемости, диагностика неисправностей исполнительных элементов

Проблема проектирования систем управления современными летательными аппаратами решается как проблема поиска совокупности необходимых команд управления относительно выходов системы. Такой поиск предполагает, что набор датчиков и исполнительных элементов задан априорно. На практике это создает серьезные трудности при формировании структуры системы, поскольку оптимальный набор указанных элементов, как правило, отличается от заданного. Особые трудности возникают при проектировании систем управления со сложной и большой пространственной структурой [1].

Чтобы оказать помощь конструктору подобных систем управления летательными аппаратами и их заказчикам в установлении оптимального числа и мест размещения в структуре системы датчиков информации и исполнительных элементов, предложена методология, в основу которой положено использование количественных критериев управляемости и наблюдаемости системы [2] при данных наборах или совокупностях датчиков информации и исполнительных элементов. Эти критерии учитывают действие возможных неисправностей составных элементов системы в течение периода их функционирования. Вопрос размещения исполнительных элементов и датчиков информации в структуре системы решается путем нахождения мест их установки, которые позволяют максимизировать числовые значения выбранных критериев.

Удобство данных критериев состоит в том, что они могут быть использованы не только на начальном, но и на конечном этапах создания системы управления для оценки ее соответствия заданным требованиям. Такая оценка может пролить допол-

нительный свет на адекватность совокупности элементов системы, объединенных в единую конструктивную схему, установить степень правильности предварительного определения перечня компонентов и их местоположения в общей структуре системы, а также уточнить специфические особенности структуры системы в целом.

Критерий управляемости устанавливает, какой должна быть количественная индикация, чтобы система отвечала заданным требованиям по управляемости при данном наборе исполнительных элементов. Он представляет собой функцию связи между входами и различными переменными состояниями системы. Отдельная переменная состояния системы неуправляема, если вход не оказывает воздействия на эту переменную, и не наблюдаема ни в одном из выходов системы, если не существует связи между этой переменной и произвольным выходом системы.

Критерий наблюдаемости определяет, какой должна быть количественная индикация, чтобы система обеспечивала требуемое наблюдение за объектом управления и окружающим пространством при данном наборе датчиков информации. Данный критерий устанавливает связь между переменными состояниями системы и ее выходом.

В целом количественная индикация должна обеспечивать оценку управляемости при данном наборе исполнительных элементов независимо от конструкции системы управления. Аналогично должна обеспечиваться и наблюдаемость при заданном наборе чувствительных элементов (датчиков информации).

Рассмотрим существо обоих критериев более подробно.

Критерий управляемости представляется как результат последовательного выполнения следующих четырех процедур.

1. Устанавливаем стратегию поиска минимума энергии управления для перехода объекта управления

$$x = Ax + Bu$$

из данного начального состояния к состоянию, условно принимаемому в заданное время за номинальное (эталонное). Здесь x , u — векторы состояния и управления соответственно; A , B — числовые матрицы. Энергия управления оценивается интегрально-квадратичным критерием вида

$$E = \frac{1}{2} \int_0^T u^T R u dt, \quad (1)$$

где R — положительно определенная весовая матрица.

В этом случае выражение для гамильтониана можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2} u^T R u + p^T (Ax + Bu),$$

где

$$\dot{p} = -A^T p, \quad (2)$$

p — вспомогательный вектор, являющийся функцией начального состояния объекта управления.

В результате получаем следующий закон оптимального управления:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T p(t). \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) позволяют найти точное решение для $p(t)$ и $u^*(t)$.

2. Находим область начальных состояний, которые могут быть переведены в номинальное состояние с ограниченной энергией управления и временем использования оптимальной стратегии управления, не превышающим заданное значение.

С этой целью используем выражение для оптимальной оценки энергозатрат на управление $E^* =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T (u^*)^T R u^* dt \text{ как функцию начального состояния, а также зависимость вида}$$

$$x = Wp. \quad (4)$$

Дифференцируя (4) с учетом (1)–(3) и приравнявая полученное выражение нулю, для произвольного p получаем уравнение Риккати

$$\dot{\Gamma} = A\Gamma + \Gamma A^T - BR^{-1}B^T \quad (5)$$

с начальным условием

$$\Gamma(T) = 0,$$

при котором удовлетворяются условия

$$x(T) = 0, p(T) \neq 0. \quad (6)$$

Граничные условия для V выбраны как практически удобные. Любое другое конечное значение, которое удовлетворяет требованию $V(T) = p(T) = 0$, будет обеспечивать тождественный результат для управляющей энергии

$$E = \frac{1}{2} x(0)^T \Gamma(0)^{-1} x(0). \quad (7)$$

Для исходного объекта управления n -го порядка ($x \in R^n$) выражение (7) с фиксированным значением E определяет n -размерную эллипсоидальную поверхность в пространстве начальных состояний. Любая точка внутри эллипсоида может быть возвращена в номинальное положение за время T с энергией E , используемой при оптимальном управлении, реализуемом в соответствии с выражением (3). Таким образом, область управления ограничена в пространстве состояний управляемой системы эллипсоидальной поверхностью.

3. Выбираем такой масштаб осей области управления, при котором элементарное смещение вектора x в каждом направлении будет равнозначным или одинаково значимым. Важность или значимость в данном случае относится не к точности, с которой переменная величина окончательно регулируется

или измеряется, а к значению одного шага регулирования, позволяющего получить одинаковое воздействие на объект управления

Выбор масштаба основан на предположении, что $x_{i \min}$ ($i = \overline{1, n}$) является минимальным значением отклонения, при котором система управления способна вернуть объект в номинальное положение за данное время, используя заданную энергию управления. Тогда устанавливается преобразование $z = Dx$, где D — диагональная матрица вида

$$D = \text{diag} \left\{ \frac{1}{|x_{i \min}|}, i = \overline{1, n} \right\}, \quad (8)$$

при котором элементарная величина z в любом направлении представляется управляемыми смещениями равной значимости (важности).

В качестве примера можно упомянуть случай управления по двум направлениям, при котором начальное смещение в направлении x_1 должно быть вдвое больше, чем в направлении x_2 . В этом случае пространство управления описывается эллипсоидом, определяемым из уравнения (7), в котором полуоси совпадают с направлениями x_1 и x_2 , причем $x_1 = 2x_2$. При преобразовании по выражению (8) пространства управления в равноуправляемое эллипсоид становится сферой, радиус которой $x = x_1 = x_2$.

4. Считая, что управляемость является линейной мерой весового "объема" эллипсоида в равноуправляемом пространстве, выбираем альтернативу управления и находим числовое значение критерия управляемости из выражения

$$K_y = \left[V_S + \frac{V_S}{V_E} (V_E - V_S) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (9)$$

где V_E — n -размерный объем эллипсоида в равноуправляемом пространстве; V_S — наибольший объем сферы, вписываемой в эллипсоид; n — размерность пространства состояний.

Первый член, стоящий справа в равенстве (9), является преобладающим в критерии управляемости. Он отражает наименьшую значимость начального положения управляемого объекта в равноуправляемом пространстве, которое может быть доведено до номинального в определенное время при использовании заданной энергии управления.

Если бы управления были идеально распределены, то начальные условия были бы представлены сферой, и объем V_S был бы мерой управляемости. Второй член в уравнении (9) добавляется для опознания предельной области пространства состояний, из которого объект управления может быть возвращен (восстановлено его номинальное состояние), если поверхность отличается от сферической. Дополнительный объем $V_E - V_S$ масштабируется посредством отношения V_S/V_E так, чтобы большая часть этого члена могла суммироваться при $V_E \rightarrow \infty$ как V_S .

n -й источник весового объема берется как мера управляемости, делающая его пропорциональным к линейным измерениям области, из которой система может быть возвращена в исходное состояние. Объемы определяются квадратичной поверхностью $x^T A x = d$ с положительно определенной и симметричной матрицей A , определяемой своими собственными значениями.

Так как объем имеет малое интуитивное значение в пространствах размерностью выше чем 3, то автором предложено вычислять его просто как

$$V = \left(\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Для использования равенства (10) в близком к рассматриваемому случаю подставим выражение (8) в (7) и получим уравнение, описывающее эллипсоидальную поверхность в равноуправляемом пространстве:

$$E = \frac{1}{2} z^T(0) (D \Gamma(0) D)^{-1} z(0). \quad (11)$$

Тогда V_E определяется из выражения (10), где λ_i является собственным значением матрицы $(D \Gamma(0) D)^{-1}$, входящей в уравнение (11). Более удобно использовать собственное значение $D \Gamma(0) D$, которое условно обозначим v_i . Тогда эллипсоидальный объем определим из выражения

$$V_E = \prod_{i=1}^n \sqrt{v_i}, \quad (12)$$

а сферический объем представим как

$$V_S = (\sqrt{v_{\min}})^n. \quad (13)$$

Числовое значение критерия управляемости, таким образом, может быть найдено с использованием выражений (9), (12) и (13). Оно равно нулю, когда система оказывается неуправляемой. При этом

$$v_{\min} = 0.$$

Степень управляемости определяется в допустимых пределах изменения управляющей энергии без ограничения значения управления. Она может меняться в зависимости непосредственно от числа исполнительных элементов, если последние имеют равную эффективность, устанавливаемую посредством масштабирующих элементов R обратно пропорционально числу m исполнительных элементов в объекте. Обычно R принимается диагональной.

Критерий наблюдаемости динамических систем должен отражать количество информации, которое может быть получено о состояниях объекта управления от выходов датчиков информации в пределах заданного интервала времени практически немедленно. Числовое значение критерия может быть

найдено на основе оценки ошибок установления истинного состояния наблюдаемой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu;$$

$$y = Cx,$$

где C — числовая матрица соответствующей размерности.

Для этого целесообразно воспользоваться ковариационной матрицей Π оцениваемой ошибки с фильтром Калмана, являющейся решением уравнения Риккати

$$\dot{\Pi} = A \Pi + \Pi A^T - \Pi C^T N^{-1} C \Pi + Q, \quad (14)$$

где Π — ковариационная матрица оцениваемой ошибки, а N и Q — матрицы результатов измерения и интенсивности шума соответственно.

Поскольку ошибка оценивания или ее ковариационная матрица есть обратное отображение итоговой информации об одном из состояний системы, то числовое значение критерия наблюдаемости выводится непосредственно на индикатор так, чтобы конечный результат представлялся в виде информационной матрицы, обратной ковариационной матрице ошибок:

$$J = \Pi^{-1}. \quad (15)$$

Так как измерительный шум является свойством набора чувствительных элементов, то в уравнении (14) сохраняется матрица N и удаляется матрица, характеризующая интенсивность шума, поскольку внешние шумовые воздействия, не относящиеся к набору чувствительных элементов, оказываются превалирующими.

Таким образом, если $Q = 0$, то уравнение (14) с учетом (15) принимает вид

$$J = -JA - A^T J + C^T N^{-1} C. \quad (16)$$

Возьмем в качестве стандартной ситуации случай, при котором отсутствует информация о начальном состоянии системы и собраны данные вплоть до определенного времени T . Тогда $J(T)$ может быть найдена из выражения

$$U^T J^{-1} U = 1, \quad (17)$$

описывающего эллипсоидальную поверхность в пространстве U . Чем больше J , тем больше объем, окружаемый поверхностью, описываемой выражением (17). Это означает, что данный объем прямо пропорционален сумме информации, получаемой от управляемой и наблюдаемой системы.

Для установления масштаба переменных состояния системы и отражения их относительной важности вводится преобразование

$$W = FU,$$

в котором F — матрица вида

$$F = \text{diag}\{e_{i_{\max}}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

где $e_{i\max}$ — предельно допустимая ошибка в направлениях x_i , $i = \overline{1, n}$. Чем больше ошибка, предельно допустимая в данном направлении, тем изменение состояния в таком направлении становится больше. Таким образом, масштабирование при определении критерия наблюдаемости является совместимым с идеями, представленными применительно к решению задачи масштабирования числовых значений критерия управляемости.

Если масштабирование осуществляется так, что позволяет получить равноважную информацию в каждом направлении, то может использоваться то же самое определение для степени наблюдаемости, которое было использовано и для описания меры управляемости в равноуправляемом пространстве.

Идеальное распределение чувствительных элементов будет реализовывать сфера в пространстве так, что критерий наблюдаемости K_H включит в себя сферический объем и весовое превышение объема, вызываемое отличием распределения от идеального.

С учетом сказанного критерий наблюдаемости может быть представлен в виде

$$K_H = \left[V_S + \frac{V_S}{V_E} (V_E - V_S) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Значения V_E и V_S можно найти из выражений

$$V_E = \prod_{i=1}^n \sqrt{v_i}, \quad V_S = (\sqrt{v_{\min}})^n,$$

где v_i — собственное значение матрицы $FJ(T)F^T$.

Следует отметить, что уравнение (16) и его граничные условия оказываются проще, чем требуемые для определения V по формулам (5) и (6), используемым при вычислении критерия управляемости. Установление переменной времени $\tau = T - t$ таким, что $dJ/d\tau = -(dJ/dt)$, позволяет уравнение (16) представить в виде

$$\dot{J} = JA + A^T J - C^T N^{-1} C, \quad J(T) = 0. \quad (19)$$

Выражение (19) с матрицами A^T , C^T , N по своей структуре аналогично уравнению (5) с граничными условиями (6) и матрицами A , B и R . Таким образом, если для определения $V(0)$ даны A , B и R , то те же самые правила могут быть использованы для вычисления $J(T)$ с матрицами A^T , C^T , N .

Поскольку на практике в процессе функционирования системы управления неизбежно возникают неисправности ее элементов, значения критериев управляемости (наблюдаемости) целесообразно усреднять по набору комбинаций неисправных элементов, при котором система может еще выполнять свои функции. В [1] показано, что, если ввести некоторый показатель f состояния неисправных элементов и вектор l , определяющий их местоположение в структуре системы управления, то для данного набора или совокупности функционирующих исполнительных элементов можно вычислить сте-

пень управляемости $K_y(f, l)$, воспользовавшись описанным выше методом. Локализованные элементы, индицируемые посредством вектора l , являются детерминированными. Показатель же f представляет собой случайную переменную. Таким образом, $K_y(f, l)$ является также случайной переменной, определяемой посредством распределения f .

Для вычисления полного значения степени управляемости системы в детерминистском представлении можно логически использовать ожидаемое значение $K_y(f, l)$ с требуемой вероятностью по распределению f неисправного состояния элементов системы. Это позволяет получить представление критерия, которое зависит от времени t . Такое представление позволяет оценить требуемое управление системы за время t на основе оценки вероятностей различных неисправных состояний за данное время. Но для указанной оценки управления необходимо функционирование системы свыше некоторого периода T_m , в течение которого осуществляется реализация управляющих воздействий на объект управления и ее успокоение после этого. Предпочтительнее, чем оптимальная степень управляемости в любое заданное время, такое как конец указанного периода, будет оптимизация усредненной степени управляемости по всему периоду. В этом усреднении результирующее представление от неисправных состояний при более длинных периодах будет более весомым, чем при периодах короче T_m . А вероятностная весовая мера представления критерия управляемости по всему периоду функционирования получается быстрее, чем точная мера его представления в заданное время.

Усредненное значение ожидаемой степени управляемости по действующему периоду T_m составит

$$K_y(l) = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} K_y(l, f) dt.$$

Ожидаемое значение K_y является весовой суммой различных неисправных состояний

$$K_y(l, f) = \sum_i K_y(l, f_i) P_i(t),$$

где $P_i(t)$ — вероятность неисправного или аварийного состояния f_i за время t .

Конечная мера управляемости системы может быть определена как

$$K_y(l, f) = \sum_i K_y(l, f_i) \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} P_i(t) dt. \quad (20)$$

Она зависит от периода T_m статистических данных по неисправным элементам и местам их размещения.

Модифицированная степень наблюдаемости вычисляется тем же способом. Основное выражение для среднего значения $P_i(t)$ находится исходя из условия, что неисправности появляются независимо

одна от другой и что на практике имеет место экспоненциальное распределение времени их появления.

Вычисленная мера (20) позволяет оценить, насколько хорошо структура управляема (наблюдаема) с любым заданным набором исполнительных и чувствительных элементов и ожидаемым действием неисправных элементов за время T_m функционирования системы.

Она также может обеспечить поиск оптимальной альтернативы мест размещения элементов для данного их числа. Найденный оптимальный набор местоположений элементов системы и соответствующий им максимум степени управляемости (наблюдаемости) для данного числа элементов позволяет вычислить максимум представленной меры для нескольких альтернатив числа элементов.

При большом числе элементов эта задача может вызвать серьезные вычислительные трудности, но она концептуально решима. Нельзя не учитывать и назначение элементов, которое заставляет ограничивать дискретный ряд допустимых мест их разме-

щения. Структурные соображения, например, могут потребовать, чтобы управление моментом гироскопа было реализовано только в узловых точках структуры. В работе [1] на примере четырех исполнительных элементов было найдено оптимальное их размещение в структуре системы и установлена зависимость максимума критерия управляемости от числа таких элементов. Были рассмотрены случаи, в которых опознание возможного неисправного исполнительного элемента осуществлялось по отклонению критерия наблюдаемости от его значения, соответствовавшего оптимальному размещению исправного элемента, когда значение указанного критерия достигает локального минимума.

Список литературы

1. Шибанов Г. П. О возможности повышения живучести бортовых однородных вычислительных структур летательных аппаратов // Информационные технологии. 2007. № 1. С. 2–6.
2. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

УДК: 629.7.05

Е. И. Старовойтов, инженер 2-й категории,
post@rsce.ru,
ОАО "РКК "Энергия" им. С. П. Королева"

Устройство контроля ориентации пассивных космических аппаратов на основе дифракционных решеток

Рассмотрены существующие оптические устройства контроля ориентации, применяемые в авиационной и космической технике. Предложено оптическое устройство контроля ориентации пассивного объекта на основе дифракционных элементов.

Ключевые слова: контроль ориентации, визуальное наблюдение, видеoinформация, дифракционные элементы

В различных областях техники возникает необходимость определения взаимной ориентации взаимодействующих объектов. Это необходимо для выполнения совместного маневрирования, обеспечения безопасности полетов и посадки летательных аппаратов (ЛА), осуществления сближения и стыковки космических аппаратов (КА), при управлении движением и навигацией различных транспортных средств, в робототехнике, в строительстве и промышленности.

Эти задачи решаются оператором, визуально контролирующим процесс посредством оптических средств или по видеoinформации, либо решаются системой автоматического управления с использованием технического зрения. Идентификация и

определение положения объекта, с которым осуществляется взаимодействие (пассивного объекта), выполняются по имеющимся или специально внесенным в его конструкцию элементам.

Примером внесенных элементов конструкции являются механические мишени сближения [1], используемые при стыковке КА. По мишеням определяется положение пассивного КА относительно активного при сближении. Контроль осуществляется с помощью телекамеры или перископического визира активного КА.

Механическая мишень включает в себя круглое или асимметричное основание и выносной крест черного цвета с нанесенными белыми крестом и метками. Рассогласование по углам между КА определяется оператором визуально по отклонению изображения креста относительно основания.

Механические мишени требуют засветки от внешнего источника. Покрытия мишени производятся по специальной технологии, позволяющей длительное время сохранять оптические характеристики при нахождении в космическом пространстве.

Недостатком механических мишеней являются сложность определения малых угловых отклонений взаимодействующих объектов и серьезные ограничения по светотехническим условиям во время сближения.

Представляет интерес разработка средств, позволяющих увеличить точность определения углов отклонения взаимодействующих объектов, в том числе в условиях недостаточной освещенности.

Задание координат объекта или его отдельных частей можно осуществить установкой лазерных

излучателей в определенных точках объекта [2]. Их использование облегчает обнаружение и обеспечивает устойчивое сопровождение объекта в сложных светотехнических условиях.

Примером технической реализации являются лазерные визуальные средства посадки, предложенные в ВМС США [3, 4]. Разработаны две лазерные системы, предназначенные для обеспечения посадки палубных ЛА на авианосец. Для обозначения отклонений от посадочного курса и глиссады используются лазеры, генерирующие на различных длинах волн непрерывное и модулированное излучение.

Лазерный указатель посадочного курса помогает экипажу ЛА удерживать посадочный курс при посадке на палубу движущегося авианосца. Отклонению вправо соответствует зеленый цвет, влево — красный. При увеличении отклонения от курса зеленые и красные огни начинают вспыхивать. Частота вспышек возрастает при увеличении отклонения. При строгом выдерживании посадочного курса наблюдается только огонь желтого цвета.

Лазерный индикатор глиссады позволяет экипажу ЛА выйти на глиссаду. При выдерживании глиссады виден огонь желтого цвета, превышению высоты соответствует зеленый цвет, снижению — красный, при значительном отклонении также используется модуляция излучения.

При правильном заходе на посадку пилот ЛА видит на авианосце два желтых огня. Точность определения курса и глиссады составляет десятые доли градуса. Лазерные лучи видны на дистанции свыше 10 морских миль. На расстоянии 0,5 морской мили заходящий на авианосец ЛА выходит из зоны действия лазерных средств и экипаж ориентируется по оптической системе посадки на линзах Френеля.

Испытания показали, что эти устройства позволяют легко обнаружить малейшие отклонения при заходе на посадку и могут использоваться в палубной авиации.

Недостатком устройств данного типа является большое число источников излучения, что приводит к увеличению массы, габаритных размеров аппаратуры и потребляемой ею мощности, а также непосредственное наблюдение оператором лазерных пучков, что требует тщательной оценки безопасности данных средств для органов зрения.

На практике излучение лазерного устройства может считаться безопасным на определенном расстоянии, однако при значительном приближении источника плотность излучения может выйти за допустимые пределы. При работе на близких расстояниях целесообразно ограничить использование лазерных пучков и исключить их прямое наблюдение оператором.

Альтернативой лазерам являются сверхъяркие полупроводниковые светоизлучающие диоды. Их достоинством является безопасность для органов зрения. Однако более широкая по сравнению с лазерами индикатриса излучения светоизлучающих

диодов затрудняет определение малых отклонений относительно источника.

В настоящее время во многих точных измерительных приборах и датчиках линейных и угловых перемещений используются дифракционные элементы. Автором предложено устройство контроля ориентации пассивных КА на основе дифракционных элементов [5], не требующее наличия внешней засветки для определения угловых отклонений. Контроль ориентации осуществляется визуально оператором или посредством оптоэлектронных датчиков с распознаванием цвета.

Устройство содержит корпус, нелазерный источник излучения и две плоские отражательные дифракционные решетки, причем плоскости *A* и *B* дифракционных решеток перпендикулярны плоскостям *C* и *D* соответственно, пересекающимся под прямым углом на оси X_1 , которая проходит через общий источник излучения, при этом плоскости плоских дифракционных решеток *A* и *B* образуют, соответственно, с осью X_1 углы α_1 и α_2 , значение которых лежит в диапазоне от 0 до 90°.

На рис. 1 показана конструкция устройства в изометрии.

Корпус обеспечивает защиту элементов конструкции от внешних воздействующих факторов, а также служит для экранирования от наблюдателя источника излучения (имеющего значительно большую яркость по сравнению с дифрагировавшими пучками излучения) и имеет выходные отверстия, предназначенные для наблюдения дифрагировавшего излучения в заданном угловом поле.

В устройстве используется источник света видимого диапазона с непрерывным спектром излучения (например, лампа накаливания). Плоские дифрак-

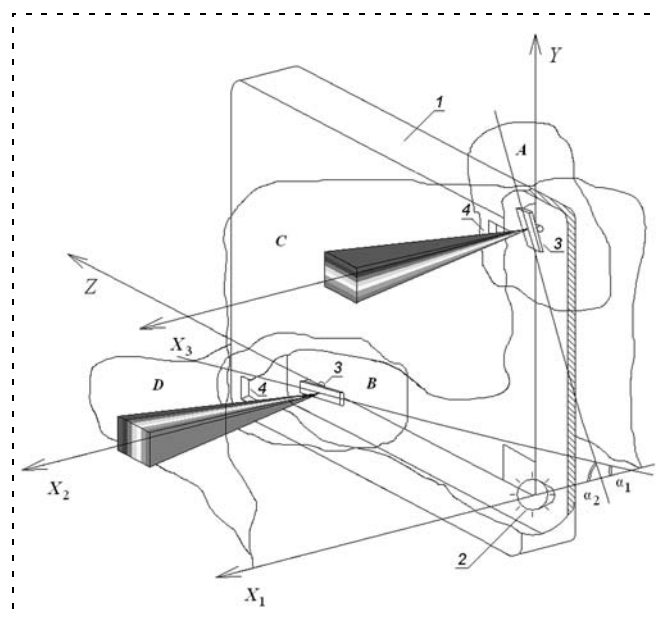


Рис. 1. Устройство контроля ориентации:
1 — корпус; 2 — источник излучения; 3 — плоские дифракционные решетки; 4 — выходные отверстия

ционные решетки разлагают излучение источника в спектр, и при наблюдении со стороны выходные отверстия представляют собой индикаторы отклонения от линии X_1 .

Ось X_1 совпадает с направлением, в котором находится максимум для длин волн 0,50...0,56 мкм (зеленый цвет). Отклонению от оси соответствует сдвиг свечения индикаторов в более коротко- или длинноволновую область (синюю или красную). Принцип ориентации заключается в поддержании направления, соответствующего зеленому свечению обоих плоских индикаторов. Кроме того, на область зеленого света также приходится максимум чувствительности зрения (0,55 мкм днем и 0,51 мкм — в сумерках).

Таким образом, каждый индикатор по изменению своего свечения позволяет определять угол отклонения (например, в плоскости тангажа или курса ЛА или КА). В варианте конструкции, представленном на рис. 1, отклонению вправо соответствует смена зеленого свечения первого индикатора (по оси X_2) на желтое, переходящее в оранжевое и сменяющееся красным; при отклонении влево индикатор становится голубым, при дальнейшем увеличении угла — синим и при больших углах — фиолетовым. Аналогичным образом изменяется свечение второго индикатора (по оси X_3) при отклонении вниз или вверх соответственно.

На рис. 2 для индикатора отклонения в плоскости D (по курсу) показаны углы падения светового пучка источника Ψ_1 и угол дифракции лучей зеленого цвета Ψ_2 относительно нормали дифракционной решетки.

Углы Ψ_1 и Ψ_2 определяются соотношениями:

$$d(\sin\Psi_1 - \sin\Psi_2) = m\lambda; \quad (1)$$

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \pi/2, \quad (2)$$

где d — период дифракционной решетки; $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; λ — длина волны.

Формула (1) представляет собой условие главных максимумов дифрагировавшего излучения, а формула (2) ограничивает диапазон углов Ψ_1 и Ψ_2 .

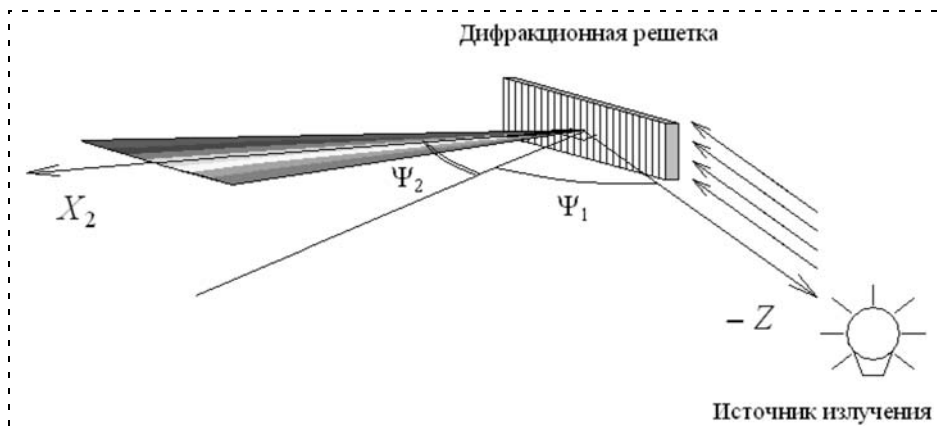


Рис. 2. Взаимное расположение источника света, дифракционной решетки и осей устройства

Распределение интенсивности дифракционных максимумов описывается выражением

$$I(\Psi_1, \Psi_2) = \left[\frac{\sin \frac{(\pi b (\sin \Psi_1) - \sin \Psi_2)}{\lambda}}{\frac{\pi b (\sin \Psi_1) - \sin \Psi_2}{\lambda}} \right]^2 \times \left[\frac{\sin \frac{N\pi d (\sin \Psi_1 - \sin \Psi_2)}{\lambda}}{\frac{\pi b (\sin \Psi_1 - \sin \Psi_2)}{\lambda}} \right]^2, \quad (3)$$

где b — ширина одного штриха; N — число штрихов. Первый множитель характеризует распределение интенсивности излучения в дифракционной картине от одного штриха, а второй множитель учитывает влияние интерференции между всеми дифрагировавшими пучками.

Формулы (1)—(3) позволяют определить порядок и интенсивность получаемых дифракционных спектров, а также соответствующие им значения углов Ψ_1 и Ψ_2 .

Чувствительность устройства зависит от угловой дисперсии дифракционной решетки, показывающей изменение длины волны, соответствующее изменению угла отклонения Ψ_2 от нормали. Угловая дисперсия определяется как

$$\vartheta = \frac{\Delta\Psi_2}{\Delta\lambda}. \quad (4)$$

Чтобы получить формулу для угловой дисперсии, возьмем дифференциал от обеих частей (1), считая переменными Ψ_2 и λ :

$$d\cos\Psi_2 \cdot \delta\Psi_2 = m \cdot \delta\lambda.$$

Отсюда

$$\vartheta = \frac{m}{d\cos\Psi_2}. \quad (5)$$

По формуле (5) можно определить угол отклонения для соответствующего порядка дифракционного спектра. С помощью формул (4)—(5) также можно найти максимальную чувствительность устройства к небольшим изменениям углов отклонения, определяемую угловой дисперсией.

Работоспособность предложенной конструкции устройства подтверждена светотехническим макетированием. На рис. 3 (см. вторую сторону обложки) представлено изменение свечения индикаторов макета, соответствующее отклонениям в разные стороны от линии визирования устройства.

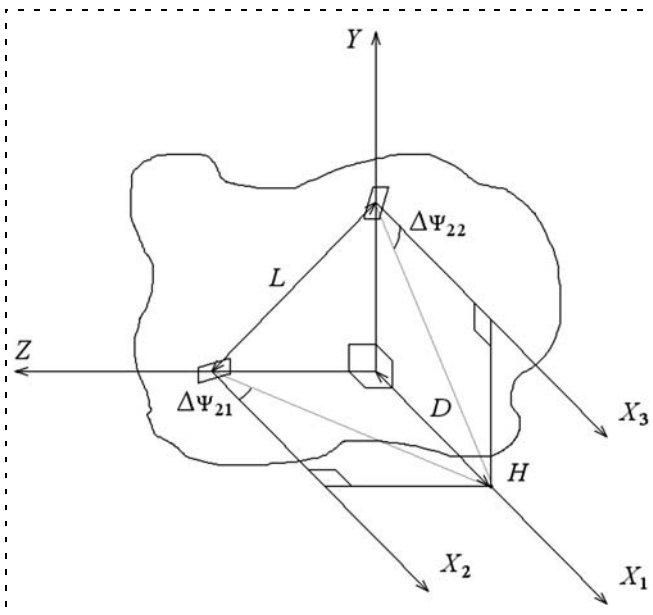


Рис. 4. Параллакс при наблюдении обоих индикаторов на близкой дистанции

При установке устройства на пассивный объект осуществляется привязка осей устройства к его системе координат с требуемой точностью. Для точной юстировки в корпусе устройства могут быть предусмотрены регулируемые крепления, на которых установлены плоские дифракционные решетки.

Максимальная дистанция, на которой действует устройство, ограничивается разрешающей способностью оптической или телевизионной системы, позволяющей отдельно наблюдать оба индикатора, и длиной базы между ними L . Наличие яркого фона может снизить дальность обнаружения индикаторов. В качестве мер снижения вредного воздействия можно предложить использование козырьков и бленд над индикаторами, а для облегчения их обнаружения — применение пространственной селекции.

Минимальная рабочая дистанция устройства ограничивается следующим фактором. Каждое из двух выходных отверстий имеет свои оси X_2 , X_3 , параллельные друг другу. При одновременном наблюдении обоих индикаторов из точки H на оси X_1 возникает параллакс (рис. 4), увеличивающийся с уменьшением дистанции. Так как угловое отклонение вызывает изменение длины волны $\Delta\lambda$, соответствующее изменению свечения, то с увеличением углов $\Delta\Psi_{21}$ и $\Delta\Psi_{22}$ при сближении с устройством искажается восприятие относительно истинного положения наблюдателя.

Дистанция, на которой проявляется параллакс, вызывающий сдвиг длины волны $\Delta\lambda$, определяется следующим соотношением:

$$D = \frac{L}{\sqrt{2} \operatorname{tg}(\Delta\lambda \cdot \vartheta)}. \quad (6)$$

Снизить вредное влияние параллакса возможно за счет использования нескольких комплектов индикаторов с разной длиной базы для ориентации в дальней и ближней зонах (использование дополнительных дифракционных элементов не потребует увеличения энергопотребления и значительного усложнения конструкции) либо путем совместного применения описываемого устройства с традиционной механической мишенью.

Более радикальным решением является использование двух приемных каналов для каждого индикатора, разнесенных на базовое расстояние, равное базе между индикаторами. Техническая реализация в этом случае усложняется, но данный прием позволяет избежать параллакса. Также возможен вариант, когда оси устройства X_1 , X_2 и X_3 пересекаются в одной точке, в которой выполняется взаимная ориентация взаимодействующих объектов.

Использование дополнительной оптики или дифракционных решеток специальной формы позволит установить ширину спектра, соответствующую требуемому диапазону измеряемых углов.

Использование предлагаемого устройства может повысить точность определения углов между осями взаимодействующих объектов за счет высокой чувствительности дифракционных элементов, что позволит снизить нагрузки на их конструкцию объектов при осуществлении контакта.

Простота конструкции и безопасность использования позволяют рекомендовать описанное устройство для визуального и автоматического контроля ориентации взаимодействующих объектов в различных областях техники.

Список литературы

1. **Устройство** контроля ориентации наблюдаемого объекта. Патент РФ № 2093432 / РКК "Энергия" / Пименов Б. П., Агеев А. А. Заявка № 93041285/11 от 17.08.1993.
2. **Старовойтов Е. И.** Использование оптоэлектронных устройств для позиционирования космических объектов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2011. Вып. 5, Ч. 1. С. 162—168.
3. **Nordwall B. D.** Navy Tests Lasers To Help Carrier Pilots // Aviation Week & Space Technology. 1990. Nov. 19. 46 p.
4. **Nordwall B. D.** Lasers Improve Night Landing // Aviation Week & Space Technology. 1995. January 2. 56 p.
5. **Устройство** контроля ориентации пассивных космических аппаратов. Заявка на изобретение № 2011142314. Приоритет от 19.10.2011 / РКК "Энергия" / Е. И. Старовойтов.

А. В. Соллогуб, д-р техн. наук, гл. науч. сотр.,
sollogubav@mail.ru,

ГНП РКЦ "ЦСКБ — Прогресс",

П. О. Скобелев, д-р техн. наук, вед. науч. сотр.,

Институт проблем управления
сложными системами РАН;

Президент/Генеральный конструктор,

Группа компаний "Генезис знаний",

petr.skobelev@gmail.com,

Е. В. Симонова, канд. техн. наук, вед. аналитик,

simonova.elena.v@gmail.com,

А. В. Царев, Генеральный директор,

at@anarun.net,

М. Е. Степанов, разработчик,

multinodus@gmail.com,

ООО "НПК "Разумные решения"

Проблемы автономного согласованного межспутникового взаимодействия в гетерогенных мультиагентных системах малоразмерных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли

Рассматриваются вопросы автономного согласованного межспутникового взаимодействия в мультиагентных системах малоразмерных космических аппаратов (КА) дистанционного зондирования Земли, имеющих нерегулярную структуру, при решении малоразмерными КА пакета задач с использованием в качестве ретрансляторов системы из трех КА, расположенных на геостационарной орбите. Взаимодействие может быть обеспечено при наличии распределенной по агентам системы бортовых баз знаний, структура которых определяется решаемыми при взаимодействии задачами.

Ключевые слова: распределенная космическая система дистанционного зондирования Земли, кластер малоразмерных космических аппаратов, мультиагентная система, бортовая база знаний, мультиагентная система

Введение

Большинство известных космических систем или сетей имеют регулярную структуру. Это, прежде всего, относится к их баллистическому построению. Здесь под регулярной структурой систем космических аппаратов (КА) понимается "правильно организованная" структура, баллистические параметры которой не меняются (постоянно поддерживаются) в течение времени ее функционирования. Обычно КА размещаются в нескольких орбитальных плоскостях, и в каждой плоскости используется определенное одинаковое число КА. Параметры орбит этих КА также одинаковы. Выбор регулярной структуры, как правило, определяется необходимостью максимально возможного покрытия

земной поверхности при решении тех задач, для которых создается система.

Примером регулярной сети спутников является сеть *Iridium*, состоящая из 66 активных низкоорбитальных ($H = 780$ км) приполярных ($i = 86,4^\circ$) спутников, размещенных в шести орбитальных плоскостях (по 11 спутников в каждой плоскости) с периодом обращения 100 мин. Каждый спутник имеет четыре межспутниковых канала связи: два со спутниками, находящимися спереди и сзади в той же орбитальной плоскости, и два со спутниками в соседних плоскостях по обе стороны. Такое построение сети позволяет передавать данные от спутника к спутнику без использования наземных средств и доставлять их в требуемое место потребителю. Каждый спутник может формировать 48 лучей с диаметром каждого луча 50 км.

Система *GlobalStar*, состоящая из 48 спутников, также имеет регулярную структуру, но не имеет межспутниковой линии передачи данных. Здесь каждый из спутников используется как ретранслятор для передачи данных из одной точки земной поверхности в другую.

Регулярные структуры нашли широкое применение для построения навигационных, связных, метеорологических и других типов систем. Такое построение облегчает управление системой, вносит предсказуемость в ее поведение при эксплуатации. Например, отечественная группировка КА "Молния", включающая восемь аппаратов, расположенных на высокоэллиптических орбитах с 12-часовым периодом обращения с расположением апогея в северном полушарии, разбита на две пары по четыре КА в каждой. Это позволяет спутникам каждой пары двигаться по одной и той же наземной трассе с интервалом 6 ч друг за другом. В период связи КА находятся высоко над территорией России и относительно слабо перемещаются относительно наземных станций, что упрощает процессы наведения, удержания и управления антенными устройствами.

В статье рассматриваются вопросы согласованного взаимодействия в гетерогенных мультиагентных системах (МАС) малоразмерных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли (МКА ДЗЗ), не имеющих регулярной структуры. При построении систем ДЗЗ могут решаться задачи как плано-периодического зондирования (здесь предпочтительны регулярные структуры), так и оперативного и высокодетального зондирования (пожары, наводнения, розлив нефти, результаты стихийных бедствий, поиск людей, терпящих бедствия, и др.). Задачи оперативного и высокодетального зондирования могут возникать спонтанно, случайным образом, и для их решения могут использоваться МКА, имеющие различные типы аппаратуры зондирования и различные орбитальные параметры. Решение проблемы согласованного взаимодействия МКА, когда для выполнения одной и той же задачи используется не один, а коллектив различных МКА и, кроме того, когда МАС может

одновременно выполнять несколько задач, состоит в использовании для этих целей спутников-посредников. Наиболее перспективный подход заключается в применении группировки из трех КА, находящихся на геостационарной орбите (ГСО). Наличие трех КА на ГСО (равномерно разнесенных по долготе стояния) позволяет обеспечить видимость с борта этих КА практически любых объектов на земной поверхности (за исключением приполярных зон). Информацию о каждом объекте наблюдения (ОН) целесообразно хранить в базе знаний того КА ГСО, в зоне прямой видимости которого находится ОН. Так как три КА ГСО всегда "видят" друг друга, информация об ОН легко доступна для любого МКА.

1. Взаимодействие КА в МАС и проблема кластеризации при решении задач

Будем полагать, что каждый КА ДЗЗ оснащен датчиками глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) *GPS/GLONASS* (для определения положения центра масс КА в геоцентрической вращающейся системе координат: широты и долготы центра масс КА, а также высоты полета над поверхностью Земли) и системой астродатчиков (АД) (для определения текущего углового положения осей КА в инерциальном пространстве). Для получения достаточной точности одновременно используются два АД. Для надежности иногда на КА устанавливаются три АД — два для работы и один в резерве. Выходным параметром АД является кватернион положения осей КА относительно инерциальной системы координат. Работа АД основана на использовании бортового каталога звезд, хранящегося в памяти процессора АД. Кроме АД в систему управления движением (СУД) КА входят волоконно-оптические гироскопы (ВОГ), использующие в своей работе принцип Саньяка. Обычно датчики ВОГ являются основным инструментом определения ориентации КА, а АД используются для периодической коррекции показаний ВОГ.

Укрупненная схема взаимодействия МАС КА ДЗЗ с орбитальными и наземными системами и объектами приведена на рис. 1 (ОН — объекты на-

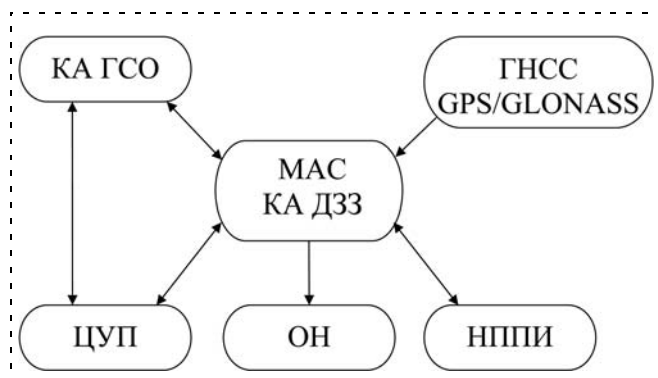


Рис. 1. Схема взаимодействия МАС КА ДЗЗ

блюдения, ЦУП — центр управления полетом, НППИ — наземные пункты приема информации).

Будем полагать, что МАС одновременно может решать несколько задач. При этом одна и та же задача может решаться с участием нескольких КА. КА, которые определены для решения одной конкретной задачи, образуют кластер КА. Таким образом, множество КА МАС разбивается на множество кластеров. Вместе с тем, один и тот же КА может входить в несколько кластеров, т. е. использоваться для решения нескольких задач.

Процесс разбиения КА по кластерам назовем кластеризацией МАС. Подмножество КА, образующих кластер для решения одной конкретной задачи, а также подмножество задач, в решении которых принимает участие конкретный КА, может быть задано в виде матрицы кластеризации K следующего вида:

$$K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,m} \end{bmatrix},$$

где $k_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если КА } i\text{-го типа не участвует} \\ & \text{в решении } j\text{-й задачи;} \\ 1, & \text{если КА } i\text{-го типа участвует} \\ & \text{в решении } j\text{-й задачи;} \\ 2, & \text{если КА } i\text{-го типа активен} \\ & \text{при решении } j\text{-й задачи.} \end{cases}$

Назовем КА в кластере, который в данный момент выполняет задачу, активным КА. Остальные КА в кластере являются пассивными с точки зрения выполнения соответствующей задачи. Пассивный КА может быть активным при выполнении другой задачи, т. е. активным в другом кластере.

Каждая из решаемых задач и соответствующий ей кластер имеют свой приоритет. Приоритетная политика может быть различной. Например, какой-либо задаче может быть присвоен абсолютный приоритет, а приоритет остальных задач является относительным и определяется в порядке поступления задач. Приоритет задачи может назначаться в момент ее поступления на исполнение. Матрица K строится таким образом, что кластер Z_v имеет более высокий приоритет относительно кластера Z_ψ , если $v < \psi$. Таким образом, положение столбца в матрице K определяет приоритет соответствующей задачи.

Приоритетность решаемых системой задач влияет на циклограмму работы КА. Циклограмма — это укрупненный план функционирования КА. Здесь определяются временные интервалы, в которых решаются задачи зондирования ОН, "слива" информации на пункты ее приема, связь с КА на ГСО, с наземным комплексом управления и с другими КА соответствующего кластера. Возможен как непосредственный "слив" информации на ППИ, так и передача ее через спутники-ретрансляторы, в качестве которых используются КА на ГСО (для увеличения оперативности доставки информации потре-

бителю). При планировании работы КА возможно совмещение режимов работы КА по зондированию ОН и передачи информации на ППИ.

Важным режимом работы КА является передача управления на продолжение зондирования ОН (продолжение выполнения целевой задачи) другому КА, входящему в кластер этой задачи.

Работы по составлению циклограммы функционирования КА, обеспечению передачи управления на продолжение выполнения зондирования другому КА должны выполняться непосредственно на борту активного КА. При передаче управления на продолжение выполнения задачи зондирования другому КА активный КА должен в памяти своего процессора содержать следующую информацию: матрицу кластеров K , циклограмму своей работы и циклограммы работы КА, входящих в соответствующий кластер, информацию о пространственном положении всех КА кластера.

На начальном этапе процедура кластеризации и получение матрицы K могут осуществляться централизованно средствами наземного комплекса управления (НКУ) и передаваться на все КА ГСО. В дальнейшем эта задача может решаться автономно с использованием непосредственно КА, входящих в МАС. Но в любом случае, независимо от того, какой из КА модифицирует эту матрицу, она передается на все КА ГСО и поддерживается в актуальном состоянии. Это дает возможность всем КА ДЗЗ при обращении к одному из КА ГСО иметь на борту эту матрицу.

При принятии решения на борту КА ДЗЗ о передаче управления для продолжения решения задачи другому КА из соответствующего кластера матрица K модифицируется (актуализируется другой КА из кластера) и передается в КА ГСО и НКУ. Таким образом, матрица K поддерживается в актуальном состоянии средствами самой МАС. Информация о местоположении и ориентации КА ДЗЗ формируется непосредственно на борту КА и в привязке ко времени также передается в КА ГСО.

В базе знаний КА ГСО хранится также информация о параметрах КА и их орбитах. В результате любой КА ДЗЗ, обращаясь к КА ГСО, может получить информацию о местоположении в текущий момент времени любого КА ДЗЗ, входящего в МАС.

Вопросы построения циклограмм работы КА и операций над ними, а также условия видимости друг другом КА и совместной видимости КА и ППИ, НКУ, ОН рассмотрены в работах [1–4].

Алгоритмы и программы построения циклограмм, определения условий видимости должны присутствовать в базах знаний КА ГСО и КА ДЗЗ.

При проверке условий видимости необходимо знание как местоположения самого КА, так и положения того объекта, с которым устанавливается видимость. Местоположение последнего, если он находится в постоянном движении, определяется при обращении к базе знаний одного из КА ГСО. Однако установление факта видимости еще недо-

статочно для обеспечения условий передачи и приема информации. Для обеспечения связи необходимо сориентировать антенны передатчика и антенны приемника информации таким образом, чтобы их оси лежали на линии прямой видимости. В общем случае положение приемо-передающих антенн на каждом КА относительно собственных осей КА может быть как фиксированным (антенны неподвижно закреплены на КА), так и произвольным (антенны могут изменять свое положение относительно осей КА). В любом случае в базе знаний каждого КА должно храниться текущее значение кватерниона положения антенны относительно осей КА. Это позволит решить задачу наведения антенн либо путем обеспечения нужной ориентации осей КА, либо непосредственно средствами наведения самих антенн.

2. Модели и алгоритмы наведения антенных устройств

Рассмотрим задачу наведения антенны, находящейся на борту КА m_1 , на КА m_2 . Будем полагать, что на борту m_1 известны координаты центров масс m_1 и m_2 в инерциальной системе координат (ISK) (координаты m_1 определяются непосредственно на борту m_1 , а координаты m_2 — при обращении к базе знаний одного из спутников-ретрансляторов на ГСО). На рис. 2 показано взаимное пространственное положение КА m_1 и m_2 .

В результате имеем.

$$R_{m_1} + R_{m_1 - m_2} = R_{m_2}; e_{m_1 - m_2}^{ISK} = \frac{R_{m_2} - R_{m_1}}{|R_{m_2} - R_{m_1}|},$$

где $e_{m_1 - m_2}^{ISK}$ — орт направления из центра масс m_1 в центр масс m_2 в ISK; R_{m_1} — радиус-вектор КА m_1 ; R_{m_2} — радиус-вектор КА m_2 ; $R_{m_1 - m_2}$ — радиус-вектор взаимного положения КА m_1 и m_2 .

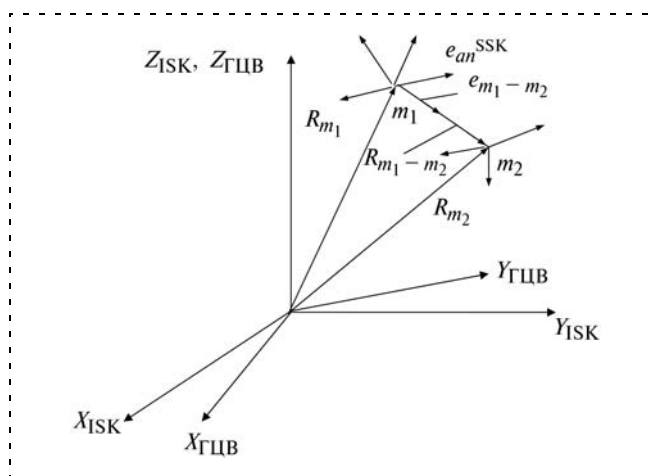


Рис. 2. Взаимное пространственное положение КА m_1 и m_2

Кватернион перехода от ISK к геоцентрической вращающейся вместе с Землей системе координат (ГЦВ) равен

$$\Lambda_{ISK}^{ГЦВ} = \begin{bmatrix} \cos\left(\omega_z \cdot \frac{s}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\omega_z \cdot \frac{s}{2}\right) \end{bmatrix},$$

где $\omega_z = 7,2921 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ (угловая скорость вращения Земли); $s = s_0 + (t - t_0)$, s_0 — звездное время на гринвичском меридиане в момент t_0 мирового времени; t — текущее время.

В этом случае орт направления между КА в ГЦВ равен

$$e_{m_1-m_2}^{ГЦВ} = \Lambda_{ISK}^{\widetilde{ГЦВ}} \circ e_{m_1-m_2}^{ISK} \circ \Lambda_{ISK}^{ГЦВ},$$

где \circ — операция кватернионного умножения; здесь и далее Λ^{\sim} — кватернион, сопряженный к Λ .

При известном кватернионе Λ_{ISK}^{SSK} ориентации связанной с m_1 системы координат (SSK) относительно ISK (по показаниям с АД) можно вычислить кватернион положения SSK относительно ГЦВ:

$$\Lambda_{ГЦВ}^{SSK} = \Lambda_{ГЦВ}^{ISK} \circ \Lambda_{ISK}^{SSK} = \Lambda_{ISK}^{\widetilde{ГЦВ}} \circ \Lambda_{ISK}^{SSK}.$$

Положение орта e_{an}^{SSK} центральной линии антенны на КА m_1 относительно SSK известно из конструктивных соображений. Отсюда положение орта в ГЦВ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{an}^{ГЦВ} &= \Lambda_{SSK}^{\widetilde{ГЦВ}} \circ e_{an}^{SSK} \circ \Lambda_{SSK}^{ГЦВ} = \\ &= \Lambda_{ГЦВ}^{SSK} \circ e_{an}^{SSK} \circ \Lambda_{ГЦВ}^{\widetilde{SSK}}. \end{aligned}$$

Сформируем в системе координат ГЦВ кватернионное представление векторов $e_{an}^{ГЦВ}$ и $e_{m_1-m_2}^{ГЦВ}$ следующего вида:

$$\Lambda_{an}^{ГЦВ} = \begin{bmatrix} 0 \\ (e_{an}^{ГЦВ})_x \\ (e_{an}^{ГЦВ})_y \\ (e_{an}^{ГЦВ})_z \end{bmatrix}; \Lambda_{m_1-m_2}^{ГЦВ} = \begin{bmatrix} 0 \\ (e_{m_1-m_2}^{ГЦВ})_x \\ (e_{m_1-m_2}^{ГЦВ})_y \\ (e_{m_1-m_2}^{ГЦВ})_z \end{bmatrix}.$$

Кватернион $\Delta\Lambda_{an}$ поворота антенны КА m_1 в системе ГЦВ для совмещения направления ее центральной оси с направлением на центр масс КА m_2 равен

$$\Delta\Lambda_{an} = \Lambda_{an}^{\widetilde{ГЦВ}} \circ \Lambda_{m_1-m_2}^{ГЦВ}.$$

Если антенна закреплена неподвижно на КА m_1 , то следует добиться такого совмещения путем разворота SSK КА m_1 . В этом случае новое положение SSK КА m_1 в ГЦВ определяется кватернионом

$$\Lambda_{ГЦВ}^{SSK} = \Lambda_{ГЦВ}^{SSK} \circ \Delta\Lambda_{an}.$$

Обычно все вычисления на борту выполняются в ISK, поэтому имеет смысл определить новое положение SSK КА m_1 в ISK:

$$\Lambda_{ISK}^{SSK} = \Lambda_{ISK}^{ГЦВ} \circ \Lambda_{ГЦВ}^{SSK}.$$

Рассмотрим алгоритм и программу определения параметров наведения антенны, находящейся на поверхности Земли (например, в ЦУПе) на КА, расположенный на ГСО.

Обращение к программе имеет вид:

$$AzMKAGSO(\varphi_{an}, \lambda_{an}, \lambda_{ka}, v_{zdogka}),$$

где φ_{an} , λ_{an} — широта и долгота точки расположения антенны на поверхности Земли; λ_{ka} — долгота КА на ГСО;

$$v_{zdogka} = \begin{cases} 0 & \text{— признак восточной долготы,} \\ 1 & \text{— признак западной долготы.} \end{cases}$$

Выходные параметры программы: Az , α_M — азимут и угол места направления "антенна — КА ГСО".

Широта и долгота антенны, долгота КА ГСО задаются в радианах, а азимут и угол места выводятся в градусах.

В программе используется геоцентрическая вращающаяся система координат (ГЦВ) и горизонтная система координат (ГорСК). Начало ГорСК находится в точке расположения антенны, ось xh направлена из центра Земли в направлении к антенне, ось zh касательна к меридиану в точке расположения антенны и направлена на север, ось yh дополняет систему до правой. В программе используются операции сопряжения и нормализации кватернионов, операции кватернионного умножения и перевода постоянного вектора из одной системы координат в другую. Принято, что Земля — шар радиуса 6378 км, радиус геостационарной круговой орбиты 42 164 км. Азимут направления на КА ГСО отсчитывается от направления на север в точке установки антенны (ось zh) по часовой стрелке. Угол места — угол между плоскостью горизонта (плоскость $zh - yh$) в месте установки антенны и направлением "антенна — КА ГСО".

Орт направления "антенна — КА ГСО" в ГЦВ равен

$$e_{anka}^{ГЦВ} = \frac{R_{anka}}{|R_{anka}|},$$

где R_{anka} — радиус-вектор расстояния от антенны до КА ГСО в ГЦВ,

$$R_{anka} = R_{ka} - R_{an},$$

$$R_{an} = \begin{vmatrix} R_z \cos(\varphi_{an}) \cos(\lambda_{an}) \\ R_z \cos(\varphi_{an}) \sin(\lambda_{an}) \\ R_z \sin(\varphi_{an}) \end{vmatrix};$$

$$R_{ka} = \begin{vmatrix} R_{gco} \cos(\lambda_{ka}) \\ R_{gco} \sin(\lambda_{ka}) \\ 0 \end{vmatrix},$$

где R_{an} , R_{ka} — радиус-векторы направления из центра Земли на антенну и КА ГСО в ГЦВ соответственно.

Кватернион перехода от ГорСК к ГЦВ равен

$$\Lambda_{\text{ГорСК}}^{\text{ГЦВ}} = \Lambda_{an} \circ M_{an},$$

где $\Lambda_{an} = \left(\cos\left(\frac{\varphi_{an}}{2}\right) \ 0 \ \sin\left(\frac{\varphi_{an}}{2}\right) \ 0 \right)^T$ — кватернион поворота ГорСК на угол φ_{an} относительно оси yh ;

$M_{an} = \left(\cos\left(-\frac{\lambda_{an}}{2}\right) \ 0 \ 0 \ \cos\left(-\frac{\lambda_{an}}{2}\right) \right)^T$ — кватернион последующего доворота ГорСК на угол λ_{an} относительно оси zh в отрицательном направлении.

Орт направления "антенна — КА ГСО" в ГорСК равен

$$e_{anka}^{\text{ГорСК}} = \Lambda_{\text{ГорСК}}^{\text{ГЦВ}} \circ e_{anka}^{\text{ГЦВ}} \circ \widetilde{\Lambda_{\text{ГорСК}}^{\text{ГЦВ}}}.$$

Отсюда определяются азимут Az и угол места α_M направления "антенна — КА ГСО":

$$\alpha_M = \arctg \left[\frac{(e_{anka}^{\text{ГорСК}})_0}{\sqrt{(e_{anka}^{\text{ГорСК}})_1^2 + (e_{anka}^{\text{ГорСК}})_2^2}} \right];$$

$$Az = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + c, & \text{если } (e_{anka}^{\text{ГорСК}})_1 \geq 0, \\ \frac{3\pi}{2} - c, & \text{если } (e_{anka}^{\text{ГорСК}})_1 < 0, \end{cases}$$

$$\text{где } c = \arcsin \left[\frac{-(e_{anka}^{\text{ГорСК}})_2}{\sqrt{(e_{anka}^{\text{ГорСК}})_1^2 + (e_{anka}^{\text{ГорСК}})_2^2}} \right].$$

В программе углы переводятся в градусы.

Рассмотрим алгоритм и программу вычисления угла возвышения и азимут направления линии визирования, соединяющей МКА с КА на ГСО. Здесь антенна располагается на МКА, находящемся на высоте H_{mka} и имеющем координаты подспутниковой точки $(\varphi_{mka}, \lambda_{mka})$. В отличие от предыдущего случая здесь отыскивается не угол места (обычно угол места связывают с точкой, лежащей на поверхности Земли, и плоскостью, касательной к поверхности Земли в этой точке), а угол возвышения,

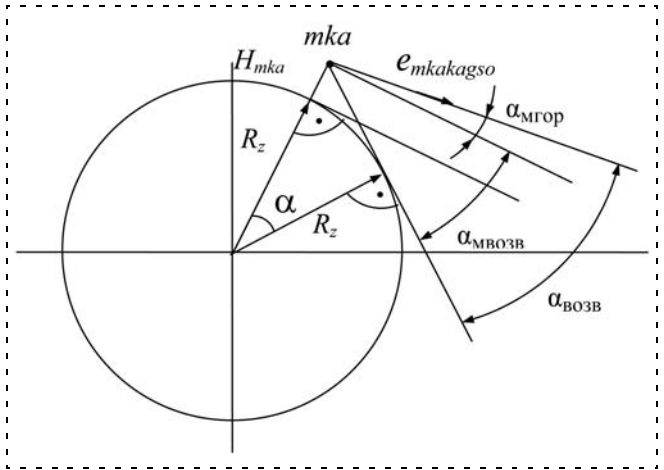


Рис. 3. Углы места и возвышения МКА ($\alpha = \alpha_{\text{МВОЗВ}}$)

равный углу между линией визирования "МКА — КА ГСО" и плоскостью, касательной к поверхности Земли и проходящей через центр масс МКА (рис. 3).

В отличие от предыдущей программы здесь вводится дополнительный входной параметр — высота полета H_{mka} и в качестве координат антенны используются координаты подспутниковой точки. Орт направления "МКА — КА ГСО" в ГЦВ равен

$$e_{mkakagso}^{\text{ГЦВ}} = \frac{R_{mkakagso}}{|R_{mkakagso}|},$$

где $R_{mkakagso}$ — радиус-вектор расстояния от МКА до КА ГСО в ГЦВ,

$$R_{mkakagso} = R_{kagso} - R_{mka};$$

$$R_{mka} = \begin{vmatrix} (R_z + H_{mka}) \cos(\varphi_{mka}) \cos(\lambda_{mka}) \\ (R_z + H_{mka}) \cos(\varphi_{mka}) \sin(\lambda_{mka}) \\ (R_z + H_{mka}) \sin(\varphi_{mka}) \end{vmatrix},$$

$$R_{kagso} = \begin{vmatrix} R_{gco} \cos(\lambda_{ka}) \\ R_{gco} \sin(\lambda_{ka}) \\ 0 \end{vmatrix},$$

R_{mka} , R_{kagso} — радиус-векторы направления из центра Земли на МКА и КА ГСО в ГЦВ соответственно.

Далее по аналогии с предыдущими выражениями определяется угол места $\alpha_{\text{МГОР}}$ линии визирования "МКА — КА ГСО" относительно плоскости, проходящей через центр масс МКА и параллельной плоскости, касательной к поверхности Земли в подспутниковой точке, и азимут Az .

Угол возвышения равен

$$\alpha_{\text{ВОЗВ}} = \alpha_{\text{МГОР}} + \alpha_{\text{МВОЗВ}},$$

$$\text{где } \alpha_{\text{МВОЗВ}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{R_z}{R_z + H_{mka}} \right).$$

Здесь $\alpha_{\text{МВОЗВ}}$ — угол между плоскостью, касательной к поверхности Земли в подспутниковой точке, и плоскостью, относительно которой отсчитывается угол возвышения.

В соответствии с Федеральной космической программой России на 2006—2015 гг., в стране предусматривается создание многофункциональной космической системы ретрансляции (МКСР) "Луч", состоящей из трех геостационарных космических аппаратов: "Луч-5А" (16° западной долготы — над Атлантикой), "Луч-5Б" (95° восточной долготы — над Индийским океаном), "Луч-4" (167° восточной долготы — над Тихим океаном) [5]. Что это дает? Например, интервал времени, в течение которого российский сегмент МКС может взаимодействовать с ЦУПом, в настоящее время составляет около 2,5 ч в сутки. Ввод в действие этой системы позволит низкоорбитальным КА (высота полета менее 2000 км) взаимодействовать со своими ЦУПами, расположенными на территории России, почти 100 % времени.

Рассмотрим ряд примеров. Пусть требуется определить азимут и угол места при наведении антенны из г. Самары на КА "Луч-5Б". Координаты антенны в Самаре и КА на ГСО:

$$\varphi_{an} = \frac{53,2}{180} \pi, \lambda_{an} = \frac{50,1}{180} \pi, \lambda_{ka} = \frac{95}{180} \pi$$

(восточная долгота).

Обращение к программе дает:

$$AzMKAGSO(\varphi_{an}, \lambda_{an}, \lambda_{ka}, 0) = (128,783, 16,78),$$

$$Az = 128,783^\circ, \alpha_M = 16,78^\circ.$$

При наведении антенны на КА Луч-5А имеем:

$$\lambda_{ka} = \frac{16}{180} \pi \text{ (западная долгота),}$$

$$AzMKAGSO(\varphi_{an}, \lambda_{an}, \lambda_{ka}, 1) = (250,464, 5,384),$$

$$\alpha_M = 5,384^\circ.$$

При угле места, меньшем 7...10°, связь с КА ГСО проблематична (помехи от зданий, деревьев, атмосферные явления).

При расчете параметров наведения из Самары на КА "Луч-4" угол места получится равным $\alpha_M = -23,687^\circ$. Отрицательное значение угла места говорит о том, что КА ГСО расположен ниже горизонтальной плоскости в районе Самары, следовательно, не может быть "виден".

Рассмотрим гипотетический пример определения азимута и угла возвышения для случая наведения антенны на КА ГСО с МКА, который пролетает над Самарой на высоте 500 км.

Для КА "Луч-5Б" угол возвышения $\alpha_{\text{ВОЗВ}} = 38,071^\circ$, для КА "Луч-5А" $\alpha_{\text{ВОЗВ}} = 26,67^\circ$, а для КА "Луч-4" угол возвышения отрицателен. Таким образом, с КА "Луч-5А" и "Луч-5Б" МКА может поддерживать устойчивую связь.

В перспективе, для эффективной организации работы коллектива спутников возможны и различные другие варианты коммуникаций, причем как

с прямым, так и косвенным взаимодействием, а также их комбинации.

Например, в работе [6] предлагается перспективная концепция управления микроспутниками оперативного мониторинга на базе сети "Inmarsat — BGAN", позволяющая на базе стандартных сервисов и серийной аппаратуры сети реализовать глобальное однопунктовое управление микроспутниками. Управление каждым спутником осуществляется при этом с помощью наземных станций доступа, использование межспутниковых линий связи не предусматривается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-08-01015а).

Заключение

Для обеспечения большей автономности функционирования и повышения активности МАС необходимо предусмотреть межспутниковую связь через спутники-ретрансляторы (С-Р). Кроме того, элементы "встроенной самоорганизации", включающие механизмы "переговорного процесса", принятие решений в автономном режиме по управлению МАС, могут быть эффективно реализованы при наличии распределенной между агентами МАС базы знаний.

В принципе, в качестве С-Р можно использовать и негеостационарные КА, но в этом случае структура этих С-Р должна быть регулярной, т. е. все КА сети должны "знать", в каких точках пространства в текущий момент времени находятся С-Р. Кроме того, при этом усложнится передача данных, так как спутнику нужно отслеживать во время передачи или приема информации как свое движение, так и движение С-Р.

Список литературы

1. Скобелев П. О., Соллогуб А. В., Иващенко А. В., Симонова Е. В., Степанов М. Е., Царев А. В. Решение задач дистанционного зондирования Земли с применением мультиагентных технологий // Вестник Самарского государственного технического университета. 2010. 7 (28). С. 47—54.
2. Скобелев П. О., Соллогуб А. В., Иващенко А. В., Симонова Е. В., Степанов М. Е., Царев А. В. Мультиагентная система для исследования методов взаимодействия космических аппаратов дистанционного зондирования Земли // Перспективные информационные технологии для авиации и космоса (ПИТ-2010). Тр. Междунар. конф. с элементами научной школы для молодежи. Самара: СГАУ, 2010. С. 226—230.
3. Скобелев П. О., Соллогуб А. В., Иващенко А. В., Симонова Е. В., Степанов М. Е., Царев А. В. Мультиагентные технологии в задачах дистанционного зондирования Земли // Тр. XIII Междунар. конф. "Проблемы управления и моделирования в сложных системах". Самара: Самарский научный центр РАН, 2011. С. 426—434.
4. Соллогуб А. В., Симонова Е. В., Степанов М. Е. Применение мультиагентной системы коллективного управления группировкой малоразмерных космических аппаратов при решении задач дистанционного зондирования Земли // Тр. Междунар. науч.-практ. конф. "Управление большими системами—2011" (УБС'2011). Т. 3. М.: ИПУ РАН, 2011. С. 259—262.
5. Сибирские "Лучи" // Информационные спутниковые системы. 2009. № 8. С. 15—18.
6. Ветринский Ю. А. Концепция управления микроспутниками оперативного мониторинга на базе сети "Inmarsat — BGAN" // Полет. 2011. № 9. С. 37—41.

CONTENTS

Mironov V. I., Mironov Yu. V., Yusupov R. M. The Variation Estimation of Parameters of Space Vehicles Movement Due to Criterion Of Maximum Verisimilitude 2

One considers the application of the variation approach for the decision of problems of complex optimum statistical estimation of parameters of a condition of nonlinear dynamic systems and parameters of models of measurements by criterion of the maximum verisimilitude.

Keywords: complex statistical estimation, nonlinear dynamic systems, criterion of the maximum credibility

Cheburakhin I. F. Mathematical Models for Minimization and Automations of the Syntheses Discrete Controlling Systems 5

It is researched problem to realization boolean functions in class of the advantages-mule and a circuits from functional element (FE) in different bases. The constructive method of the syntheses is offered on base of the functional equations, accompanied beforehand by reception analytically upper estimation of the different factors to difficulties (on count formulas and depth formulas; on count list FE and depth of the circuit). At realization of the free boolean function in base Zhegalkina is removed structure valuing functional on difficulties.

Keywords: boolean function, syntheses formula and circuit, decomposition, difficulty, minimization, functional and difference of the equation

Pyavchenko T. A., Moiseeva E. V. The Device of Control with Correcting Feedback 14

The actuation device for systems of regulation of the electric drive is considered. The electric drive is widely applied in mechatronics systems. Feature of the offered device consists in use of the parametrical correcting feedback, allowing to provide technically optimum transient with the static error equal to zero, in the size of operating influence which is not exceeding admissible value. Theoretical results are confirmed by modeling and experiment at the real stand with the microprocessor actuation device for the direct current engine.

Keywords: mechatronics systems, the electric drive, the device of the control, the parametrical correcting feedback, the direct current engine

German-Galkin S. G., Lyapin A. S. Analysis and Modeling Study of Asynchronous Electric Drive with a Sliding Control of Flux Linkage and Torque

Briefly describes the history of the sliding control method induction motor known as the method of direct torque control. Developed a structural model of an asynchronous electric drive with direct torque control. Carried out a modeling study and are obtained by the dynamic characteristics of the electric drive with direct torque control in various settings of the regulator.

Keywords: electric drive, sliding control, direct torque control, structural model

Sharovатов V. T., Loshitsky P. A. Mathematical Model of the Power Pneumocylinder without a Rod of Bilateral Action Membrane Type 21

The mathematical model of the power pneumocylinder without a rod of bilateral action, membrane type, considering properties of the compressed gas is offered. In research used letup for power pneumocylinder without a rod, of one-sided action of membrane type [1]. A calculation example of the possible use of power pneumocylinder without a rod of bilateral action, membrane type is made. An application of the power pneumocylinder without a rod of bilateral action membrane type – high-precision and high-speed control systems of different function.

Keywords: a power element membrane type, a working point, mathematical model, the pneumocylinder

Borovik S. Yu., Skobelev O. P. Method Errors of the Systems for Measuring of Blade Tips Radial and Axial Displacements 24

Method errors of the systems for measuring of blade tips radial and axial displacements in compressors and turbines of gas-turbine engines are considered. In systems are used concentrated and distributed over the stator clusters each of two single-coil eddy-current sensors with sensitive elements as a conductor length. The descriptions of errors detection technology, results of estimation of errors static components associated with sync pulse leading edge shift and irregular blade pitches as well as a results of estimation of errors dynamic component in the time variation of blade wheel rotational velocity are given too.

Keywords: measuring system, blade tips radial and axial displacements, concentrated and distributed clusters, single-coil eddy-current sensor, method errors

Korshakovsky S. I., Krasnenkov M. A. Instrument Efficiency Improvement Ways of Nondestructive Control for Power-Consuming Engineering Installations 36

Both new ways and equipment for the efficiency improvement of primary information signal converters. These methods are based on the electromagnetic phenomena in the installation elements in the presence of permanent magnetic field in the zones under control, with the formed secondary magnetic field being converted to the electric signals.

Keywords: electric signal, permanent magnetic field, electromagnetic phenomena, emergency protection, information signal, primary converter, vibration

Tchikurov N. G., Gontcharov A. V. Synthesis of 5-Joint Robot's Kinematic Model Using Electro-Mechanical Analogies 42

This paper introduces an approach of mechanical systems mathematic modeling using electro-mechanical analogies. Applying the technique described resulted in the simulation model of with five revolute joints robot's inverse kinematics as a differential-algebraic equation system.

Keywords: mathematical simulation, method of electromechanical analogies, the manipulator

Krutikov S. L. Formulation of Robot Manipulator Equations of Motion Using Base Inertial Parameters Set 50

In this work a new approach to robot manipulator equations of motion formulation is presented. It uses base parameters set instead of classical inertial parameters. Application of suggested approach to 2-DoF planar robot is an example.

Keywords: base inertial parameters, robot manipulator dynamic model, Lagrangian equations of motion

Shibanov G. P. Optimization of Control Systems by Aircraft on Controllability and Observability Criteria 57

Methodology of use of controllability and observability numerical criteria of control systems by aircraft for the given sets or totalities of information generators and executive elements is considered.

Keywords: control systems by aircraft, optimization of executive and measuring elements, controllability and observability criteria, degree of controllability diagnosis of inaccuracies of executive elements

Starovoitov E. I. Device of Control Object Orientation Based on Diffractive Elements 61

Describes the existing optical devices of control orientation used in aviation and space technology. The author suggested optical device of control passive object orientation based on diffractive elements.

Keywords: control of orientation, visual observation, video information, diffractive elements

Sollogub A. V., Skobelev P. O., Simonova E. V., Tsarev A. V., Stepanov M. E. The Problems of Autonomous Coordinated Interaction between Satellites in Heterogenous Multi-Agent Systems of SS ERS 65

Research is focused on autonomous coordinated interaction between satellites with irregular structure in multi-agent systems (MAS) on board of Small Spacecrafts for Earth Remote Sensing (SS ERS). The system of three spacecraft is located in a geostationary orbit being used as retransmission units in order to solve a batch of SS's tasks. The interaction can be achieved by distributing among the system of on-board knowledge bases which structure depends on task solved in course of interaction.

Keywords: distributed space system for earth remote sensing, a cluster of small satellites, multi-agent systems, on-board knowledge base

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Дизайнер *Т. Н. Погорелова.*

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *М. Г. Джавадян.*

Сдано в набор 02.02.2012. Подписано в печать 20.03.2012. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 8,82. Уч.-изд. л. 9,18. Заказ МН412. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
105120, г. Москва, ул. Нижняя Сыромятническая, д. 5/7, стр. 2, офис 2.