

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 7 (136)  
июль  
2012

**Редакционный совет:**

ВАСИЛЬЕВ С. Н.  
КАЛЯЕВ И. А.  
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г.  
КУЗНЕЦОВ Н. А.  
ЛЕОНОВ Г. А.  
МАКАРОВ И. М.  
МАТВЕЕНКО А. М.  
МИКРИН Е. А.  
ПЕШЕХОНОВ В. Г.  
РЕЗЧИКОВ А. Ф.  
СЕБРЯКОВ Г. Г.  
СИГОВ А. С.  
СИРОТКИН О. С.  
СОЙФЕР В. А.  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М.  
ФЕДОРОВ И. Б.  
ЧЕНЦОВ А. Г.  
ЩЕРБАТИЮК А. Ф.  
ЮСУПОВ Р. М.

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б.

**Заместители гл. редактора:**  
ПОДУРАЕВ Ю. В.  
ПУТОВ В. В.  
ЮЩЕНКО А. С.

**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционная коллегия:**

АЛЕКСАНДРОВ В. В.  
АНТОНОВ Б. И.  
АРШАНСКИЙ М. М.  
БУКОВ В. Н.  
ВИТТИХ В. А.  
ВОСТРИКОВ А. С.  
ГОЛУБЯТНИКОВ И. В.  
ГРАДЕЦКИЙ В. Г.  
ИВЧЕНКО В. Д.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г.  
КОЛОСОВ О. С.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф.  
КУЗЬМИН Н. Н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.  
ЛОХИН В. М.  
НОRENКОВ И. П.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е.  
ПРОХОРОВ Н. Л.  
РАПОПОРТ Э. Я.  
СЕРГЕЕВ С. Ф.  
ТИМОФЕЕВ А. В.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф.  
ФРАДКОВ А. Л.  
ФУРСОВ В. А.  
ЮРЕВИЧ Е. И.

**Редакция:**  
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Аналитический синтез систем координирующего управления . . . . . 2  
Мышляев Ю. И., Мишаков В. В. Управление лагранжевыми каскадными объектами на основе настраиваемых скользящих режимов высшего порядка . . . . . 8

### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

- Григорьев А. М., Иванко Е. Е., Князев С. Т., Ченцов А. Г. Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера, осложненной внутренними работами . . . . . 14

### РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Брискин Е. С., Малолетов А. В., Колесов А. М., Серов В. А. О статически устойчивой походке шагающей машины с тремя сдвоенными ортогонально-поворотными движителями . . . . . 22  
Тачков А. А. Применение метода пропорционального наведения для управления мобильным разведывательным роботом в условиях пожара. . . . . 27  
Капустян С. Г., Дьяченко А. А. Распределенная информационно-управляющая система автоматизированного мультироботехнического транспортно-складского комплекса . . . . . 34

### УПРАВЛЕНИЕ МЕХАТРОННЫМИ СТАНОЧНЫМИ СИСТЕМАМИ

- Лысов В. Е., Хоренко М. В. Система автоматического управления мехатронным модулем прецизионного поворотного стола . . . . . 40  
Мартинов Г. М., Нежметдинов Р. А., Соколов С. В. Способ построения инструментария систем мониторинга и настройки параметров мехатронного технологического оборудования на основе специализированных программных средств . . . . . 45

### Журнал в журнале

#### "УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В АВИАКОСМИЧЕСКИЕ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"

- Гайдук А. Р. Управление группой беспилотных летательных аппаратов с ограничением на управление и переменные состояния . . . . . 52  
Раткин Л. С. Сравнительный анализ беспилотных летательных аппаратов самолетного типа, применяемых для решения задач автоматизированного промышленного и экологического мониторинга состояния объектов . . . . . 58  
Яскевич А. В. Математическая модель периферийного стыковочного механизма. Часть 1. Уравнения движения дифференциальных механизмов . . . . . 63  
Contents . . . . . 71

*Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

# МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.51.013; 516.32

**А. Б. Филимонов**, д-р техн. наук, проф.,  
Московский государственный университет  
приборостроения и информатики,

**Н. Б. Филимонов**, д-р техн. наук, проф.,  
Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова,  
nbfilimonov@mail.ru

## Аналитический синтез систем координирующего управления\*

*Излагается метод аналитического синтеза координирующих автоматических систем. Процессы управления формируются посредством двух многомерных контуров: контура агрегатного управления динамикой объекта в целом и контура регулирования межкоординатных соотношений. В предлагаемых решениях ключевую роль играет автономизация второго контура.*

**Ключевые слова:** системы координирующего управления, принцип разделения движений, сепаратные каналы регулирования, контур регулирования соотношений, компенсация возмущений, автономизация

"Управление — это предвидение, планирование, организация, координация и контроль".

Файоль (Henri Fayol)

*Координация многомерных объектов "остается одной из наиболее старых задач, выдвинутых практикой, которая не имеет пока теоретически обоснованных и систематически развитых методов решения".*

Л. М. Бойчук

Бурное развитие современной техники ставит перед разработчиками автоматических систем, применяемых в промышленности, энергетике и на транспорте, все более сложные, нетрадиционные задачи. К числу последних относится специальный класс задач автоматического управления — так называемые задачи координирующего (координационного, координированного) управления многосвязными объектами [1, с. 287], в которых стандартная задача обеспечения обычных требований к качеству управляемого процесса дополняется специфической задачей обеспечения требуемой координации (т. е. соблюдения заданных соотношений)

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-08-01139.

управляемых величин объекта. Автоматические системы, предназначенные для решения данной задачи, именуются системами координирующего (координационного, координированного) управления (СКУ) или системами регулирования соотношений [1, с. 602—603].

Несмотря на актуальность и перспективность задачи координирующего управления, современная теория и практика автоматических систем не располагает необходимой методологической основой, позволяющей успешно ее решать. Как подчеркивает Л. М. Бойчук на основании обзора зарубежных источников, координация "является одной из задач, сравнительно давно поставленных практикой, которая к настоящему времени вообще практически не исследована" [2, с. 5]. Здесь же следует констатировать, что синтез СКУ не нашел еще достаточного отражения не только в отечественной, но и в зарубежной литературе, насчитывающей лишь несколько десятков работ.

Цель настоящей работы — осветить некоторые проблемные аспекты координирующего управления и предложить простую инженерную методологию аналитического синтеза двухконтурных СКУ.

### Ретроспектива и современное состояние проблемы координирующего управления

Термин "координация" [от лат. со (cum) — совместно и ordinatio — упорядочение] означает согласование. Смысл понятия "координация" в литературе интерпретируется весьма широко и по-разному. В работах, посвященных процессам управления, широко рассматриваются различные аспекты проблемы координации или координирующего управления сложными объектами как проблемы обеспечения согласованного функционирования отдельных связанных подсистем или каналов объекта, подчиненных общей цели управления.

Проблема координации имеет давнюю, 90-летнюю историю. Впервые понятие координирования как важнейшей самостоятельной функции процесса управления было выделено выдающимся французским менеджером, "отцом научного управления" Файолем (H. Fayol) еще в 1923 г. в фундаментальном труде "Общее и промышленное управление" [3]. В современном менеджменте [4, п. 17.2] координирующее управление — это центральная функция управления, обеспечивающая достижение согласованности в работе всех звеньев организации путем установления рациональных связей (коммуникаций) и обмена информацией между ними.

Дальнейшее развитие проблема координации в задачах управления получила лишь спустя 40 лет в двух самостоятельных научных направлениях, существенно расширивших область практического применения СКУ.

Первое направление сформировалось в теории "больших систем", рассматриваемых как совокупность иерархически организованных взаимосвязанных подсистем [5]. В рамках данного направления в работе известного системолога Месаровича (M. D. Mesarovic) [6] была выдвинута идея многоуровневой организации процесса управления такими системами (декомпозиции системы управления на ряд взаимодействующих, соподчиненных уровней), в которой центральное место отводится координации как задаче вышестоящей управляющей подсистемы, призванной обеспечить согласованное функционирование нижестоящих управляемых подсистем. В итоге данная идея получила оформление в виде теории многоуровневых систем [7], именуемой иногда теорией координации [8, с. 3].

Второе направление сформировалось в теории автоматического управления многообъектными, многоканальными и многосвязными системами [9]. Координация наряду со стабилизацией и следящим регулированием является одним из основных способов автоматического управления. Под *координацией* здесь понимается автоматическое соблюдение заданных соотношений (условий согласования) управляемых переменных или переменных состояния многоканального объекта или группы объектов в процессе их функционирования. Заданные соотношения между управляемыми переменными в СКУ должны выполняться как в установившемся, так и в переходном режимах, причем необходимая координация осуществляется как путем использования уже имеющихся внутренних естественных перекрестных связей управляемого объекта, так и за счет подключения дополнительных внешних искусственных перекрестных связей.

Пионерскими работами данного направления являются работы Н. Н. Иващенко [10], А. А. Воронова и др. [11], М. Б. Игнатьева [12], В. А. Романова [13], Г. Е. Пухова и К. Д. Жука [14]. Существенный вклад в становление и развитие данного направления внесли, прежде всего, работы Л. М. Бойчука [2; 15; 16, гл. 3—4; 17; 18] и И. В. Мирошника [19; 20, гл. 5; 21, гл. 5].

Следует заметить, что класс СКУ впервые введен в теорию автоматического управления китайским ученым Ту Сюй-Янь (Tu Xu-Yen) в 1961 г. под названием *гармонических систем управления* (т. е. систем, реализующих "гармонический принцип управления", обеспечивающий поддержание определенной "гармонии", "гармонического соотношения" между управляемыми переменными) [22]. В отечественной литературе данный класс систем впервые введен в рассмотрение в работе М. Б. Игнатьева [12] под названием *голономных автоматических систем*, целью которых является отработка

заданий в виде уравнений, связывающих выходные переменные управляемого объекта. Кстати, еще в 1960-х гг. в работах М. В. Меерова [23] предложено многосвязные системы регулирования подразделять на два класса. Качество регулирования систем первого класса определяется показателями качества регулирования каждой регулируемой переменной, а качество регулирования систем второго класса определяется обобщенными показателями, представляющими собой некоторые функционалы от регулируемых переменных. Второй класс систем как раз и относится к классу СКУ. Данный класс систем в работах Л. М. Бойчука часто назывался *системами функционального* [17], а в работах И. В. Мирошника — *системами согласованного управления* [19].

Отметим широту и разнообразие сферы применения СКУ: задачи согласованного изменения управляемых величин, стабилизации соотношений между управляемыми, синхронизации управляемых движений и т. п.

Вопросы согласования движения линейных многосвязных систем, содержащих идентичные или однотипные каналы, впервые рассмотрены в работах В. Т. Морозовского [24] и О. С. Соболева [25] и получили практическое развитие в задачах согласования многодвигательных электроприводов поточных линий (см., например, [26]). Следует заметить, что в ряде задач управления многоканальными и многосвязными объектами требуемое согласование управляемых переменных обеспечивается методами автономного управления, при которых заданные соотношения управляемых переменных поддерживаются за счет согласования задающих воздействий. В этом случае также имеет место координация, но она носит пассивный характер.

Согласованное во времени функционирование двух или нескольких объектов или процессов, т. е. приведение их к синхронному протеканию, называется синхронизацией. В отличие от естественного свойства синхронизации сложных систем — самосинхронизации — широкое практическое применение находит так называемая вынужденная, принудительная или управляемая синхронизация, связанная с добавлением в систему координирующих воздействий. Здесь следует указать, прежде всего, работы И. В. Мирошника, И. И. Блехмана и А. Л. Фрадкова (см., например, [27, 28]).

Различают два типа СКУ: технологические и траекторные [2].

Примеры *технологических* задач координирующего управления: регулирование отношения топливо—воздух в энергоустановках; регулирование частоты вращения исполнительных приводов в многодвигательных технологических линиях; синхронное управление агрегатами (например, электрическими генераторами,ключенными в общую сеть, электрическими двигателями, имеющими общую нагрузку, и т. д.); распределение нагрузок генераторов и двигателей; стабилизация за-

вистимости между напряжением и током электродвигателя и др.

Примеры траекторных задач координирующего управления: программное управление станками (перемещения исполнительных органов в станках с ЧПУ согласно форме обрабатываемой детали); управление движением объектов или группой объектов по пространственным траекториям; управление взаимоположением (строем) подвижных объектов; точное пространственное ориентирование многокомпонентных механических систем (например, элементов антенны радиотелескопа, кинематических звеньев робота и т. п.) и др.

К настоящему времени технологические и траекторные задачи координирующего управления динамическими объектами имеют довольно скромную библиографию и встречаются в различных постановках — как задачи координирующего управления [29—34], согласованного управления [35], функционального регулирования [36], управления по заданному многообразию [37—39], синергетического управления [40] и др.

### Особенности классической концепции координирующего управления

Остановимся вкратце на базовых положениях классической концепции координирующего управления Л. М. Бойчука, опираясь в основном на материалы первой обобщающей работы по СКУ как в нашей стране, так и за рубежом [2].

Совокупность координируемых связей между выходными (управляемыми) переменными объекта задает *координационное целевое многообразие* (КЦМ) в пространстве переменных. Задача координации заключается в локализации управляемой траектории движения на данном многообразии.

Функционирование СКУ подчинено двум связанным целям: отработке внешнего задающего воздействия и координации переменных. В связи с этим задача координирующего управления декомпозируется на две подзадачи, порождаемые указанными целями. Для их решения в работе [2] вектор управляющих переменных раскладывается на две компоненты — стабилизирующую и варьирующую: первая обуславливает движение к КЦМ, а вторая — движение по КЦМ в процессе отработки задания. При этом реализуется *принцип разделения движений* [41]: стабилизация КЦМ осуществляется в режиме "быстрых движений", а последующая отработка заданий по выходу осуществляется в режиме "медленных движений". Медленные движения для составного объекта интерпретируются как усредненная динамика образующих его простых объектов.

Согласно работе [2] синтезируемая СКУ включает два блока — блок однотипных стандартных регуляторов (ПИД-регуляторов) и блок координирующих связей (либо на входе, либо на выходе) блока регуляторов.

Еще одна ограничительная особенность предлагаемых решений в работе [2] — стационарность целевого установившегося режима.

В данной статье задача координации исследуется в иной постановке по сравнению с работой [2]. Во-первых, рассматриваются объекты управления общего вида, для которых предлагаемые в работе [2] проекционные преобразования вектора управления лишены смысла. Во-вторых, структура синтезируемой СКУ не является надстройкой над матрицей однотипных стандартных регуляторов. В-третьих, внешние задания для СКУ могут изменяться произвольным образом, т. е. рассматриваются процессы следящего регулирования. В-четвертых, процедуры расчета контуров регулирования базируются на аппарате передаточных матриц. В-пятых, принцип разделения движений реализуется схемами автономного регулирования.

### Структура СКУ

Обратимся к задаче синтеза линейных стационарных СКУ.

Пусть объект управления представлен уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (2)$$

где  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  — вход,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  — состояние,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  — управляемый выход,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  — постоянные коэффициентные матрицы системы, причем полагаем, что  $r \geq m > 1$ .

Координирующее управление подчинено двум целям. Главная цель — отработка внешнего задания — произвольных командных сигналов  $\mathbf{y}^*(t)$ :

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{y}^*(t). \quad (3)$$

Подчиненная цель — соблюдение заданных соотношений между выходными переменными объекта:

$$\Phi_i(\mathbf{y}) = 0, i = \overline{1, q}, \quad (4)$$

где  $\Phi_i(\mathbf{y})$  — некоторые функции, причем  $q < m$ . Эти функциональные связи, являющиеся условиями координации, будем именовать *регулируемыми соотношениями* (РС).

Отметим, что функции  $\Phi_i(\mathbf{y})$  можно трактовать как *инварианты* идеального процесса координирующего управления.

Если воспользоваться вектор-функцией

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_q],$$

то равенства (4) перепишутся в векторной форме:

$$\Phi(\mathbf{y}) = 0. \quad (5)$$

Введем также вектор невязок  $\xi \in \mathbb{R}^q$  для регулируемых соотношений:

$$\xi = \Phi(\mathbf{y}).$$

Тогда требованиям (5) отвечает координационная цель регулирования

$$\xi = \xi^* = 0. \quad (6)$$

Далее будем полагать, что вектор-функция  $\Phi(\mathbf{y})$  является линейной:

$$\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{Q}\mathbf{y}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ , причем  $\text{rank } \mathbf{Q} = q$ .

Итак, рассматриваемая задача управления складывается из двух взаимосвязанных подзадач — отработки командных сигналов и отработки регулируемых соотношений. Для решения этих подзадач будем формировать соответствующие многомерные контуры регулирования.

С этой целью вход и выход объекта расщепляются на две компоненты:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_1\mathbf{v} + \mathbf{H}_2\boldsymbol{\eta}; \quad (8)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{y}, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{Q}\mathbf{y}. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{r_1}$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{r_2}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{H}_1 \in \mathbb{R}^{r \times r_1}$ ,

$\mathbf{H}_2 \in \mathbb{R}^{r \times r_2}$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ , причем

$$m = p + q, r = r_1 + r_2, r_1 \geq m_1, r_2 \geq m_2.$$

Посредством управляющего входа  $\boldsymbol{\eta}$  будем осуществлять координационную стабилизацию (6), а посредством управляющего входа  $\mathbf{v}$  — отработку задающих воздействий (3). Для этого формируются *сепаратные* каналы регулирования переменных  $\mathbf{z}$  и  $\boldsymbol{\xi}$ .

Векторная переменная  $\mathbf{z}$  имеет меньшую размерность по сравнению с выходом  $\mathbf{y}$  ( $p < m$ ) и по отношению к нему играет роль управляемого *агрегата* (т. е. укрупненной информации о выходе), посредством которого замыкается контур регулирования выхода.

Двухканальную структуру управления воплощает схема СКУ, представленная на рис. 1. Здесь выделены канал *агрегатного управления динамикой объекта* в целом и канал *регулирования соотношений* между выходными переменными. Соответствующие им управляющие блоки в структуре регулятора будем называть АУ-блоком и РС-блоком. Выделенные каналы образуют два многомерных контура управления: АУ-контур и РС-контур. Поскольку соотношения (4) должны устанавливаться и поддерживаться в процессе отработки командного сигнала (3), то второй контур должен быть более быстродействующим по сравнению с первым.

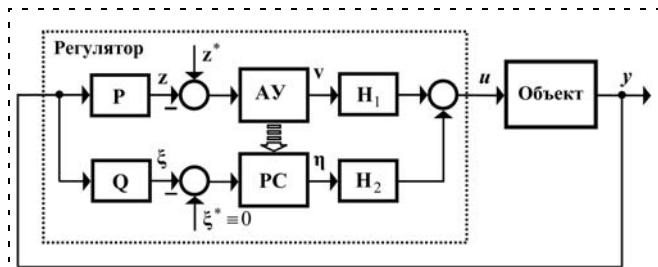


Рис. 1

## Формирование каналов регулирования

Структура (рис. 1) сформированных каналов регулирования определяется заданной матрицей  $\mathbf{Q}$  и неизвестными матрицами  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  и  $\mathbf{P}$ , при выборе которых необходимо соблюдение следующих условий:

$$\text{rank } [\mathbf{H}_1 | \mathbf{H}_2] = r, \text{rank } \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = m.$$

Построим матрицы  $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times r}$ ,  $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times r}$ ,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} [\mathbf{H}_1 | \mathbf{H}_2] = \mathbf{E}_r, [\mathbf{L} | \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_m, \quad (11)$$

где  $\mathbf{E}_k$  — единичная матрица  $k$ -го порядка.

В силу (8)–(11) выполняются соотношения

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}_1\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{G}_2\mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{z} + \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}.$$

Из последнего равенства при выполнении условия (6) получаем

$$\mathbf{y} \equiv \mathbf{L}\mathbf{z}.$$

Следовательно, регулируемый процесс  $\mathbf{z}(t)$  определяет реакцию выхода объекта  $\mathbf{y}(t)$ .

Задающее воздействие  $\mathbf{y}^*$  должно отвечать требованию (5), так что в соответствии с (7) будет выполняться условие

$$\mathbf{Q}\mathbf{y}^* = 0.$$

Отсюда согласно (9) получаем задание для АУ-контура:

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{P}\mathbf{y}^*.$$

**Примечание.** Уравнения связей (4) определяют КЦМ. В линейном случае (7) это многообразие является гиперплоскостью. Целевое значение выхода должно подразумевать локализацию соответствующего целевого состояния объекта на этой гиперплоскости, так что в процессе координирующего управления траектория движения объекта должна притягиваться к ней.

## Автономизация РС-контура

Основная идея предлагаемого метода синтеза СКУ заключается в *автономизации* РС-контура по отношению к АУ-контуру. Для ее воплощения могут использоваться точная или приближенная компенсация возмущений, либо схемы больших коэффициентов усиления.

Для описания процессов управления прибегнем к формализму операционного исчисления. Условимся буквенные обозначения оригиналов переносить на их лаплас-образы. Далее  $s$  — комплексная частота.

Построенные сепаратные каналы регулирования в предположении нулевых начальных условий описываются уравнениями

$$\mathbf{z}(s) = \mathbf{W}_{zv}(s)\mathbf{v}(s) + \mathbf{W}_{z\eta}(s)\boldsymbol{\eta}(s); \quad (12)$$

$$\xi(s) = \mathbf{W}_{\xi v}(s)\mathbf{v}(s) + \mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\boldsymbol{\eta}(s). \quad (13)$$

Здесь лаплас-образы выходных сигналов  $\mathbf{z}(s)$  и  $\xi(s)$  выражены через лаплас-образы входных сигналов  $\mathbf{v}(s)$  и  $\boldsymbol{\eta}(s)$ . Передаточные матрицы объекта  $\mathbf{W}_{zv}(s)$ ,  $\mathbf{W}_{z\eta}(s)$ ,  $\mathbf{W}_{\xi v}(s)$ ,  $\mathbf{W}_{\xi \eta}(s)$  в соответствии с (1), (2), (8)–(10) равны

$$\mathbf{W}_{zv}(s) = \mathbf{P}\mathbf{C}(\mathbf{E}_n s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}_1;$$

$$\mathbf{W}_{z\eta}(s) = \mathbf{P}\mathbf{C}(\mathbf{E}_n s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}_2;$$

$$\mathbf{W}_{\xi v}(s) = \mathbf{Q}\mathbf{C}(\mathbf{E}_n s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}_1;$$

$$\mathbf{W}_{\xi \eta}(s) = \mathbf{Q}\mathbf{C}(\mathbf{E}_n s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}_2.$$

Пусть блоки АУ и РС регулятора реализуют законы управления

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{R}_1(s)(\mathbf{z}^* - \mathbf{z}(s)); \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{R}_2(s)(\xi^* - \xi(s)) + \mathbf{R}_{21}(s)\mathbf{v}(s). \quad (15)$$

Таким образом, этими блоками формируются регулирующие обратные связи, описываемые передаточными матрицами  $\mathbf{R}_1(s)$  и  $\mathbf{R}_2(s)$ . Кроме этого, в РС-блоке предусмотрена цепь компенсации влияния АУ-контура на РС-контур — ее действие определяется вторым слагаемым в (15), т. е. описывается передаточной матрицей  $\mathbf{R}_{21}(s)$ .

Подстановка (14), (15) в (12), (13) дает уравнения для рассматриваемых контуров регулирования:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_p + \mathbf{W}_{zv}(s)\mathbf{R}_1(s))\mathbf{z}(s) &= \mathbf{W}_{zv}(s)\mathbf{R}_1(s)\mathbf{z}^*(s) + \boldsymbol{\psi}_1(s); \\ (\mathbf{E}_q + \mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\mathbf{R}_2(s))\xi(s) &= \mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\mathbf{R}_2(s)\xi^*(s) + \boldsymbol{\psi}_2(s), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\boldsymbol{\psi}_1(s) = \mathbf{W}_{z\eta}(s)\boldsymbol{\eta}(s);$$

$$\boldsymbol{\psi}_2(s) = (\mathbf{W}_{\xi v}(s) + \mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\mathbf{R}_{21}(s))\mathbf{v}(s). \quad (17)$$

Функции  $\boldsymbol{\psi}_1(s)$  и  $\boldsymbol{\psi}_2(s)$  описывают взаимовлияние контуров регулирования.

Процессы регулирования в контурах определяются выбором передаточных матриц  $\mathbf{R}_1(s)$ ,  $\mathbf{R}_2(s)$  и  $\mathbf{R}_{21}(s)$ .

Если  $\mathbf{R}_{21}(s)$  обеспечивает равенство

$$\mathbf{W}_{\xi v}(s) + \mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\mathbf{R}_{21}(s) = 0, \quad (18)$$

то согласно (17) будет осуществляться полная компенсация возмущений РС-контура:

$$\boldsymbol{\psi}_2(s) \equiv 0.$$

Однако обращение или псевдообращение рациональной матрицы  $\mathbf{W}_{\xi \eta}(s)$  для достижения условия (18) порождает две проблемы: во-первых, это физическая нереализуемость компенсационных цепей РС-блока и, во-вторых, трансформация правых передаточных нулей матрицы  $\mathbf{W}_{\xi \eta}(s)$  в неустойчивые полюса в данных цепях.

Другой способ автономизации РС-контура основан на включении в него больших коэффициентов усиления, посредством чего удается его возмущения со стороны АУ-контура ослабить до приемлемого уровня. Поясним это соображение.

Из (16) получаем

$$\xi(s) = \mathbf{W}_{\xi \xi^*}(s)\xi^*(s) + \mathbf{W}_{\xi \psi_2}(s)\boldsymbol{\psi}_2(s), \quad (19)$$

где

$$\mathbf{W}_{\xi \xi^*}(s) = (\mathbf{E}_q + \mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\mathbf{R}_2(s))^{-1}\mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\mathbf{R}_2(s);$$

$$\mathbf{W}_{\xi \psi_2}(s) = (\mathbf{E}_q + \mathbf{W}_{\xi \eta}(s)\mathbf{R}_2(s))^{-1}.$$

Согласно (19) уровень возмущения регулируемого процесса  $\xi(t)$  в результате воздействия  $\boldsymbol{\psi}_2(t)$  можно определить нормой передаточной матрицы  $\mathbf{W}_{\xi \psi_2}(s)$  в пространстве Харди  $H_\infty$  [42, п. 5.1.5]. Эта норма будет уменьшаться в результате увеличения коэффициентов передачи в структуре передаточной матрицы  $\mathbf{R}_2(s)$  РС-блока.

Поскольку в результате настройки регулятора РС-контур должен быть существенно более быстродействующим по сравнению АУ-контуром, то это требование хорошо согласуется с механизмом больших коэффициентов усиления. При синтезе данных контуров может также использоваться методология модального управления.

**Пример.** Обратимся к примеру из [2, с. 29]. Положим:  $m = n = r = 2$ , и объект описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

В процессе регулирования необходимо поддерживать соотношение между выходными переменными:  $x_1/x_2 = 2$ . Ему отвечает линейное РС

$$\Phi(y_1, y_2) = y_1 - 2y_2 = 0.$$

Введем невязку РС:

$$\xi = y_1 - 2y_2.$$

В качестве агрегата выхода возьмем среднюю арифметическую выходных переменных:

$$z = (y_1 + y_2)/2. \quad (20)$$

Полагая  $v = u_2$ ,  $\eta = u_1$ , получим уравнения каналов регулирования

$$\dot{z} = -1,5v + 2\eta, \quad \dot{\xi} = -5\eta.$$

Выберем следующие передаточные функции регулятора:

$$R_1(s) = -\frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{s}\right), \quad R_2(s) = -3, \quad R_{21}(s) = 0.$$

В итоге автономность РС-контура будет обеспечена без дополнительных ухищрений, причем полюсы АУ- и РС-контуров соответственно равны  $\{-2, -2\}$  и  $-15$ , т. е. существенно разнятся величиной затухания.

На рис. 2 представлены переходные процессы в СКУ для начального состояния объекта  $x(0) = \text{col}(0, 2)$  и задания

$$y^* = \text{col}(2, 1). \quad (21)$$

Согласно (20) и (21) уставка для РС-контура равна  $z^* = 1,5$ .

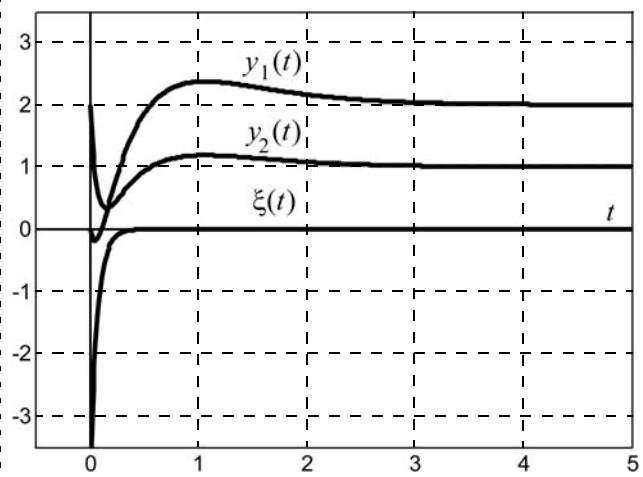


Рис. 2

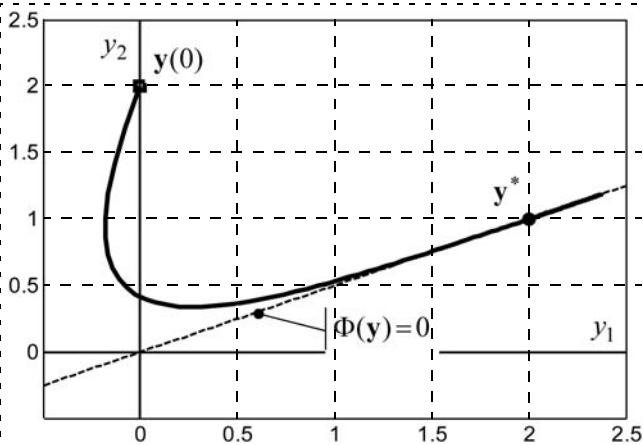


Рис. 3

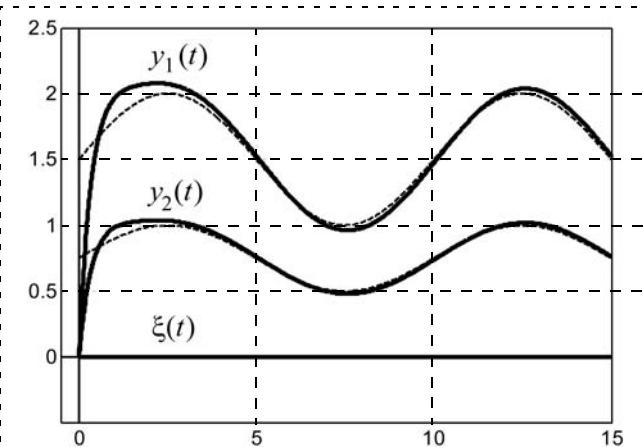


Рис. 4

На рис. 3 представлена соответствующая траектория процесса регулирования в пространстве выходных переменных.

Рис. 4 иллюстрирует отработку СКУ командного сигнала (его скалярные компоненты представлены штриховой линией на рис. 4)

$$y^* = (y_1^*, y_2^*) = \text{col}(1, 0, 5)(1, 5 + 0, 5\sin(2\pi t/10))$$

при нулевых начальных условиях.

#### Список литературы

1. Словарь по кибернетике / Под ред. В. С. Михалевича. К.: Гл. ред. УСЭ им. М. П. Бажана, 1989. 751 с.
2. Бойчук Л. М. Синтез координирующих систем автоматического управления. М.: Энергоатомиздат, 1991. 160 с.
3. Управление — это наука и искусство: А. Файоль, Г. Эмерсон, Ф. Тайлор, Г. Форд. М.: Республика, 1992. 351 с.
4. Лигинчук Г. Г. Основы менеджмента. Часть 2. Электронный учебный курс. Центр дистанционных образовательных технологий МИЭМП, 2010. URL: <http://e-college.ru/xbooks/xbook057/book/index/index.html>
5. Клебанова Т. С., Молдавская Е. В., Чанг Хонгвен. Модели и методы координации в крупномасштабных экономических системах. Х.: Бизнес Информ, 2002. 148 с.
6. Mesarovic M. D. A Conceptual Framework for the Studies of Multi-level, Multigoal Systems. Systems Research Center Report. SRC 101-A-66-43 USA, Hudson, Case Inst. of Technology, 1966.
7. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973. 344 с.
8. Алиев Р. А., Либерзон М. И. Методы и алгоритмы координации в промышленных системах управления. М.: Радио и связь, 1987. 208 с.
9. Шашихин В. Н. Теория автоматического управления. Методы декомпозиции, агрегирования и координации. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007. 116 с.
10. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. М.: Машгиз, 1958. 532 с.
11. Воронов А. А., Гарбузов А. Р., Ермилов Б. Л., Игнатьев М. Б., Корниенко Г. Г., Соколов Г. Н., Ян Си Зен. Цифровые аналоги для систем автоматического управления (цифровые разностные анализаторы). М.-Л.: Ин-т электромеханики, 1960. 169 с.
12. Игнатьев М. Б. Голономные автоматические системы. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 204 с.
13. Романов В. А. Автоматизация типовых производственных процессов. М.-Л.: Энергия, 1964. 288 с.
14. Пухов Г. Е., Жук К. Д. Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов. Киев: Наукова думка, 1966. 218 с.
15. Бойчук Л. М. Метод структурного синтеза систем функционального регулирования одного класса // Автоматика. 1969. № 6. С. 41–48.
16. Бойчук Л. М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971. 112 с.
17. Бойчук Л. М. Структурный синтез автоматических многоуровневых систем функционального управления динамическими объектами. Препринт № 74-23. Киев: ИК АН УССР, 1974. 63 с.
18. Бойчук Л. М. Синтез нелинейных двухуровневых систем координирующего управления // Автоматика. 1982. № 5. С. 86–89.
19. Мирошник И. В. Согласованное управление многоканальными системами. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 128 с.
20. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
21. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. СПб.: Питер, 2006. 272 с.
22. Ту Сюй-Янь. Теория гармонически действующей системы управления со многими регулируемыми величинами // Труды 1-го Междунар. конгр. ИФАК. Т. I. Теория непрерывных систем. Специальные математические проблемы. М.: АН СССР, 1961. С. 216–233.
23. Мееров М. В. Проблемы многосвязного регулирования / Теория многосвязного регулирования. М.: Наука, 1967. С. 5–15.

24. Морозовский В. Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1970. 288 с.
25. Соболев О. С. Однотипные связанные системы регулирования. М.: Энергия, 1970. 136 с.
26. Иванов Г. М., Левин Г. М., Хуторецкий В. М. Автоматизированный многодвигательный электропривод постоянного тока. М.: Энергия, 1970. 160 с.
27. Мирошник И. В., Ушаков А. В. Синтез алгоритма синхронного управления системой однотипных объектов // Автоматика и телемеханика. 1977. № 11. С. 22—29.
28. Управление мехатронными вибрационными установками / Под ред. И. И. Блехмана и А. Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001. 278 с.
29. Козлов В. Н., Шашихин В. Н. Принцип сравнения в синтезе координирующих управлений многомашинными энергосистемами // Изв. РАН. Энергетика. 1995. № 1.
30. Крутько П. Д. Координированное и автономное управление движением лагранжевых систем. Синтез алгоритмов по сепаратным моделям // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 2.
31. Угаров П. А. Координация в иерархических гибридных системах управления с использованием поведенческих абстракций // Изв. Челябинского НЦ УрО РАН. 2004. № 1 (22). С. 186—191.
32. Малафеев С. И. Алгоритмы координирующего управления в мехатронных системах // Седьмая сессия междунар. науч. шк. "Фундаментальные и прикладные проблемы надежности и диагностики машин и механизмов". Санкт-Петербург, 2005. С. 55. URL: <http://mt.ifmo.ru/work/conf/sop/programm.pdf>
33. Кузнецов И. В., Смирнова Е. А. Анализ и синтез систем координированного управления динамическими объектами по показателям качества сепаратных подсистем // Труды 53-й науч. конф. МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и
- прикладных наук". Ч. I. Радиотехника и кибернетика. Т. 2. М.: МФТИ, 2010. С. 37—38.
34. Романенко В. Д., Милянский Ю. Л. Разработка системы координирующего цифрового управления термосмесительной установкой при действии внешнего возмущения // Научные вести НТУУ "Киевский политехнический институт". 2011. № 1. С. 84—89.
35. Елсуков В. С., Ковалев С. В. Каскадная система согласованного управления многоточечным электромагнитным подвесом // Изв. вузов. Электромеханика. 2006. № 5. С. 36—40.
36. Ушаков А. В. Модальное управление в линейной задаче функционального регулирования многомерного объекта // Автоматика. 1990. № 1. С. 69—75.
37. Кирсанов А. П. О синтезе управления нелинейными системами при наличии ограничений в виде равенств на фазовые координаты // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 1. С. 183—187.
38. Мирошник И. В. О стабилизации движения по многообразию // Автоматика. 1986. № 4. С. 65—68.
39. Козлов В. Н., Филипповский В. М. Оптимальная стабилизация линейного динамического объекта // Изв. вузов. Приборостроение. 1991. № 4. С. 19—24.
40. Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. М.: КомКнига, 2006. 240 с.
41. Геращенко Е. И., Геращенко С. М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука, 1975. 296 с.
42. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5 т. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 616 с.

УДК 62—503.51

**Ю. И. Мышляев**, канд. техн. наук, доц.,  
uimysh@mail.ru,

**В. В. Мишаков**, канд. техн. наук, доц.,  
nomack2005@yandex.ru,  
МГТУ им. Н. Э. Баумана (Калужский филиал)

## Управление лагранжевыми каскадными объектами на основе настраиваемых скользящих режимов высшего порядка

Рассматривается методика синтеза управления каскадными лагранжевыми системами в условиях параметрической неопределенности на основе настраиваемых скользящих режимов высшего порядка с пассивацией выходного каскада.

**Ключевые слова:** параметрическая неопределенность, лагранжевые системы, адаптивное управление, скользящий режим, каскадные системы

Во многих прикладных задачах довольно часто необходимо обеспечить желаемую динамику лишь по конечному каскаду, а по входному каскаду

(приводу) достаточно ограниченности движения. Такая постановка задачи позволяет упростить основной контур управления и снизить порядок подсистемы адаптации. Для решения такого рода задачи в данной работе предлагается методика синтеза управления, в основу которой положена идея настраиваемых скользящих режимов высших порядков. Порядок скользящего режима определяет степень гладкости конечного управления, что позволяет избавиться от одного из наиболее серьезных недостатков скользящих режимов — высокочастотных колебаний в реальном скользящем режиме. Настройка поверхности скольжения позволяет системе функционировать в условиях параметрической неопределенности.

Изложим суть предлагаемой методики, для чего введем в рассмотрение двухмассовую механическую систему, состоящую из  $n + 1$  жестких звеньев (включая базовое звено), соединенных друг с другом  $n$  упругими связями, и приводимую в движение некоторой подсистемой приводов. Упругость каждого сочленения моделируется в виде линейной скручивающейся пружины с конечной постоянной упругостью. Тогда упрощенная динамика системы может

быть описана следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} S_1 : M(\theta_l, \xi) \ddot{\theta}_l + B(\theta_l, \dot{\theta}_l, \xi) \dot{\theta}_l + G(\theta_l, \xi) = \\ = K(N^{-1}\theta_m - \theta_l); \end{aligned} \quad (1)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = f(x_2, \xi_2) - g(x_2)(N^{-1}K(N^{-1}\theta_m - \theta_l) + \tau_m); \\ \theta_m = \eta(x_2), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\theta_l, \theta_m \in R^n$  — угловые положения звеньев и осей приводов соответственно;  $M(\theta_l, \xi) : R^n \rightarrow R^{n \times n}$  — симметрическая положительно-определенная матрица для всех  $\theta_l \in R^n$ , представляющая инерционную массу жестких звеньев;  $B(\theta_l, \dot{\theta}_l, \xi) \dot{\theta}_l : R^n \times R^n \rightarrow R^n$  — вектор кориолисовых и центробежных членов;  $G(\theta_l, \xi) : R^n \rightarrow R^n$  — вектор силы тяжести;  $N, K \in R^{n \times n}$  — диагональные положительно-определенные матрицы, представляющие передаточные числа редукторов  $n$  сочленений и постоянные матрицы пружин соответственно;  $\tau_m \in R^n$  — вектор управления приводов;  $x_2 \in R^{kn}$  — вектор состояний подсистемы приводов;  $f(x_2, \xi_2) : R^{kn} \rightarrow R^{kn}$  —  $kn$ -мерная,  $h$  раз непрерывно дифференцируемая вектор-функция;  $\xi, \xi_2 \in \Xi$  — вектор неизвестных квазистационарных по отношению к желаемой динамике системы параметров;  $g(x_2) : R^{kn} \rightarrow R^{kn \times n}$  — известная матрица ( $\text{rank}(g(x_2)) = n, \forall x_2 \in R^{kn}$ );  $\eta(x_2)$  — гладкая вектор-функция выходов подсистемы приводов.

Структурная схема системы представлена на рис. 1.

**Цель управления.** Целью управления (ЦУ) является ограниченность всех траекторий системы и достижение целевого неравенства

$$\|e\| \leq \Delta, \forall t \geq t_*, \Delta > 0, \quad (3)$$

где  $e = \begin{bmatrix} \theta_l & -\theta_d \\ \dot{\theta}_l & -\dot{\theta}_d \end{bmatrix}$ ;  $\theta_d$  — желаемая траектория движения.

Параметрическая неопределенность связана, главным образом, с массогабаритными характеристиками системы.

Для синтеза алгоритма управления предлагается методика настраиваемого скользящего режима  $h$ -порядка, дающая условия пошагового решения поставленной задачи.

Методика синтеза состоит из четырех этапов. На *первом этапе* осуществляется приведение подсистемы приводов  $S_2$  к нормальной форме с учетом расширения ( $h-1$ ) интеграторами по входу подсистемы (для обеспечения скользящего режима высшего порядка) с выделением внутренней и внешней динамики. Для приведенной системы формируется новый виртуальный выход подсистемы  $y$ , обеспечивающий выполнение условий пас-

сивируемости. На *втором этапе* синтезируется идеальное виртуальное управление  $\theta_m^*$  по входу конечного каскада, обеспечивающее достижение желаемой динамики выходного каскада  $S_1$  в условиях полной априорной информации о параметрах системы. На основе идеального виртуального управления  $\theta_m^*$  и полученного на первом этапе виртуального выхода  $y$  строится идеальная поверхность скольжения для расширенного объекта так, что при возникновении скользящего режима в системе достигается ЦУ (3). На *третьем этапе* идеальные параметры поверхности скольжения заменяются настраиваемыми, и в предположении возникновения идеального скользящего режима синтезируется алгоритм адаптации, обеспечивающий достижение цели управления в условиях параметрической неопределенности. На *четвертом этапе* для системы с учетом контура адаптации синтезируется закон управления, обеспечивающий возникновение устойчивого скользящего режима.

Ниже приведены условия, обеспечивающие выполнение описанных выше этапов синтеза.

**Этап 1.** На первом этапе проводится расширение входной подсистемы интеграторами по входу, преобразование к нормальной форме и ее пассивификация.

Расширим входную подсистему  $S_2(h-1)$  интеграторами (число интеграторов определяет степень гладкости управления):

$$\bar{S}_2 : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = \bar{f}(\bar{x}_2, \theta_l, \xi_2) + \bar{B}_2 v; \\ \theta_m = \bar{\eta}(\bar{x}_2), \end{cases} \quad (4)$$

где  $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{h-1} \end{bmatrix}$ ;  $\bar{f}(\bar{x}_2, \theta_l, \xi_2) =$

$$= \begin{bmatrix} f(x_2, \xi_2) + g(x_2)(N^{-1}K(N^{-1}\theta_m - \theta_l) + v_1) \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{h-1} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}.$$

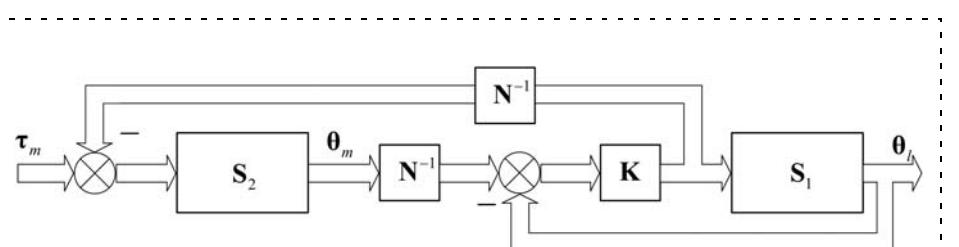


Рис. 1. Структурная схема системы

Тогда расширенная система (1), (2) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 : \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_l, \xi) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_l + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_l, \dot{\boldsymbol{\theta}}_l, \xi) \dot{\boldsymbol{\theta}}_l + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_l, \xi) = \\ = \mathbf{K}(\mathbf{N}^{-1} \boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_l); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_2 : \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \xi_2) + \bar{\mathbf{B}}_2 v; \\ \boldsymbol{\theta}_m = \bar{\eta}(\bar{\mathbf{x}}_2), \end{cases} \quad (6)$$

где  $v = \tau_m^{(h-1)}$ ,  $\bar{\eta}(\bar{\mathbf{x}}_2)$  — вектор-функция выходов приводов в преобразованной системе координат.

Приведем подсистему (6) к нормальной форме, для чего введем диффеоморфное преобразование координат:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varsigma(\bar{\mathbf{x}}_2) \\ \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \dot{\boldsymbol{\theta}}_l, \dots, \boldsymbol{\theta}_l^{(p-2)}) \end{bmatrix}; \\ \text{rank} \left( \begin{bmatrix} \varsigma(\bar{\mathbf{x}}_2) \\ \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \dot{\boldsymbol{\theta}}_l, \dots, \boldsymbol{\theta}_l^{(p-2)}) \end{bmatrix} \right) &= (k+h-1)n, \end{aligned}$$

где  $p$  — относительная степень системы (6);

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2 &= \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \dot{\boldsymbol{\theta}}_l, \dots, \boldsymbol{\theta}_l^{(p-2)}) = \\ &= \text{col}\{\boldsymbol{\eta}_0(\cdot), \boldsymbol{\eta}_1(\cdot), \dots, \boldsymbol{\eta}_{p-1}(\cdot)\}; \\ \boldsymbol{\eta}_0(\cdot) &= \boldsymbol{\theta}_m = \bar{\eta}(\bar{\mathbf{x}}_2); \\ \boldsymbol{\eta}_1(\cdot) &= \dot{\boldsymbol{\theta}}_m = \frac{d\boldsymbol{\eta}_0(\bar{\mathbf{x}}_2)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_0(\bar{\mathbf{x}}_2)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \xi_2); \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{p-1}(\cdot) &= \boldsymbol{\theta}_m^{(p-1)} = \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_{p-2}(\cdot)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \xi_2) + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_{p-2}(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\theta}_l^{(i)}} \boldsymbol{\theta}_l^{(i+1)}. \end{aligned}$$

Выбирая  $\varsigma(\bar{\mathbf{x}}_2)$ :  $\frac{\partial \varsigma(\bar{\mathbf{x}}_2)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \bar{\mathbf{B}}_2 = 0$ , подсистему (6)

можно представить в эквивалентной форме

$$\bar{\mathbf{S}}_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \frac{\partial \varsigma(\bar{\mathbf{x}}_2)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \xi_2); \\ \dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\boldsymbol{\alpha}(\cdot) + \boldsymbol{\beta}(\cdot)v); \\ \boldsymbol{\theta}_m = \mathbf{C}_0 \mathbf{z}_2 = \bar{\eta}(\bar{\mathbf{x}}_2), \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{где } \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{(p-1)n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{\rho n \times \rho n}, \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \in R^{\rho n \times n},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= [\mathbf{I}_n \ 0 \dots 0] \in R^{n \times \rho n}, \boldsymbol{\alpha}(\cdot) = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_{p-1}(\cdot)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \xi_2) \\ &+ \sum_{i=0}^{p-2} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_{p-1}(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\theta}_l^{(i)}} \boldsymbol{\theta}_l^{(i+1)}, \boldsymbol{\beta}(\cdot) = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_{p-1}(\cdot)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \bar{\mathbf{B}}_2. \end{aligned}$$

Обозначим  $\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{r}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$  — обратное преобразование координат, тогда систему (7) запишем в виде

$$\bar{\mathbf{S}}_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2); \\ \dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\cdot)v); \\ \boldsymbol{\theta}_m = \mathbf{C}_0 \mathbf{z}_2, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) &= \frac{\partial \varsigma(\bar{\mathbf{x}}_2)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_2} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_2, \boldsymbol{\theta}_l, \xi_2) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{r}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \\ &= \boldsymbol{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}_2) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{r}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \boldsymbol{\beta}(\bar{\mathbf{x}}_2) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{r}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)}. \end{aligned}$$

Форма (8) называется *нормальной формой* и является эквивалентным представлением системы (6), при этом первое уравнение описывает *внутреннюю динамику*, а второе — *внешнюю динамику*. Важным преимуществом нормальной формы является то, что вектор состояния внешней динамики  $\mathbf{z}_2 = \text{col}(\boldsymbol{\theta}_m, \dot{\boldsymbol{\theta}}_m, \dots, \boldsymbol{\theta}_m^{(p-1)})$  состоит только из выхода подсистемы приводов и его производных, что значительно упрощает дальнейший синтез.

Определим теперь информационный выход входного каскада, обеспечивающего его пассивацию. Выбор информационного выхода  $\mathbf{y}$  проводится из условия пассивируемости:

*Условие 1 (условие пассивируемости).* Для системы (8) существует управление  $v = v(\mathbf{y})$  и непрерывно дифференцируемая функция запаса  $V_A(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = V_1(\mathbf{z}_1) + \mathbf{z}_2^T \mathbf{H}_2 \mathbf{z}_2 : R^{(k+h-1)n} \rightarrow R_+$ ,  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^T > 0$ ,  $V_A(0, 0) = 0$  такая, что

$$\begin{cases} (\nabla_{\mathbf{z}_1} V_1(\mathbf{z}_1))^T \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \leqslant 0; \\ \mathbf{z}_2^T \mathbf{H}_2 (\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\cdot)v(\mathbf{y}))) < 0; \\ \mathbf{z}_2^T \mathbf{H}_2 \mathbf{B}_0 = \mathbf{y}^T. \end{cases} \quad (9)$$

В общем виде информационный выход имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{z}_2, \quad (10)$$

где  $\mathbf{C} = \mathbf{B}_0^T \mathbf{H}_2 = [\mathbf{c}_0 \ \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{p-1}]$ ,  $\mathbf{c}_i \in R^{n \times n}$ . При этом легко показать, что в силу симметричности и положительной определенности матрицы  $\mathbf{H}_2$  матрица  $\mathbf{c}_{p-1}$  не вырождена.

Выделяя регулярную часть, систему (8) можно представить в виде

$$\bar{\mathbf{S}}_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2); \\ \dot{\mathbf{z}}_{21} = \mathbf{A} \mathbf{z}_{21} + \mathbf{B} \mathbf{z}_{22}; \\ \dot{\mathbf{z}}_{22} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\cdot)v; \\ \boldsymbol{\theta}_m = \mathbf{C}_0 \mathbf{z}_2, \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{где } \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{21} \\ \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{(\rho-2)n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{(\rho-1)n \times (\rho-1)n};$$

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \in R^{(\rho-1)n \times n}$ . В силу разложения вектора

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{21} \\ \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \text{ выражение (10) приводимо к виду}$$

$$\mathbf{z}_{22} = \mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} [\mathbf{c}_0 \ \mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_{\rho-2}] \mathbf{z}_{21}, \quad (12)$$

$$\text{где } \mathbf{z}_{21} = \text{col}(\boldsymbol{\theta}_m, \dot{\boldsymbol{\theta}}_m, \dots, \boldsymbol{\theta}_m^{(\rho-2)}), \mathbf{z}_{22} = \boldsymbol{\theta}_m^{(\rho-1)}.$$

Тогда с учетом (12) система (11) примет вид

$$\tilde{\mathbf{S}}_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2); \\ \dot{\mathbf{z}}_{21} = \mathbf{A}^* \mathbf{z}_{21} + \mathbf{B}^* \mathbf{y}; \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}(\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\cdot)\mathbf{v})), \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{21} \\ \mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} [\mathbf{c}_0 \ \mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_{\rho-2}] \mathbf{z}_{21} \end{bmatrix}; \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & I_{(\rho-2)n} \\ -\mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} \mathbf{c}_0 & \dots & -\mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} \mathbf{c}_{\rho-2} \end{bmatrix} \text{ гурвицевая матрица}$$

$$(\text{в силу условия 1}); \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \in R^{(\rho-1)n \times n}; \text{ вектор } \mathbf{z}_{21} \text{ можно рассматривать в качестве состояния}$$

внутренней динамики для  $\tilde{\mathbf{S}}_2$  и дополнительной подсистемы, связывающей информационный выход  $\mathbf{y}$  с фактическим входом  $\boldsymbol{\theta}_m$  выходного каскада  $\mathbf{S}_1$ .

Таким образом, исходная система (1), (2) с учетом (13) представима в неминимальной форме

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 : \begin{cases} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_l, \xi) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_l + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_l, \dot{\boldsymbol{\theta}}_l, \xi) \dot{\boldsymbol{\theta}}_l + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_l, \xi) = \\ = \mathbf{K}(\mathbf{N}^{-1} \boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_l); \\ \dot{\mathbf{z}}_{21} = \mathbf{A}^* \mathbf{z}_{21} + \mathbf{B}^* \mathbf{y}; \\ \boldsymbol{\theta}_m = \mathbf{C}^* \mathbf{z}_{21}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2); \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}(\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\cdot)\mathbf{v})), \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{где } \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{21} \\ \mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{c}_{\rho-1}^{-1} [\mathbf{c}_0 \ \mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_{\rho-2}] \mathbf{z}_{21} \end{bmatrix}; \mathbf{C}^* = [\mathbf{I}_n \ 0] \in R^{n \times (\rho-1)n}.$$

Заметим, что подсистемы  $\tilde{\mathbf{S}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_2$  соединены между собой информационным выходом  $\mathbf{y}$ .

**Этап 2.** На втором этапе выбирается многообразие скольжения, обеспечивающее достижение цели управления (3) в условиях полной априорной информации о параметрах объекта.

Многообразие скольжения выбирается в форме

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^* = \mathbf{C} \mathbf{z}_2 - \mathbf{C} \mathbf{z}_2^*, \quad (16)$$

где  $\mathbf{z}_2^* = \text{col}(\boldsymbol{\theta}_m^*, \dot{\boldsymbol{\theta}}_m^*, \dots, (\boldsymbol{\theta}_m^*)^{(\rho-1)})$ ,  $\boldsymbol{\theta}_m^* = \Psi^*(\boldsymbol{\theta}_l, \dot{\boldsymbol{\theta}}_l, \boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d, \mathbf{p}^*)$  — идеальное виртуальное управление, обеспечивающее выходному каскаду достижение цели управления (3). Здесь  $\mathbf{p}^*(\xi)$  — идеальный регулятор выходного каскада. Виртуальное управление выбирается на основе условия достижимости.

**Условие 2 (условие достижимости).** Для любого  $\xi \in \Xi$  существует  $\mathbf{p}^*(\xi)$  такой, что при возникновении скользящего режима  $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$  для замкнутой подсистемы (14) справедливо неравенство

$$\dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{p}^*) \leq -\mu(Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})),$$

где  $Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})$  — положительно определенная функция;  $\mu(\cdot)$  — непрерывная строго возрастающая функция;  $\mathbf{e}_{21} = \mathbf{z}_{21} - \mathbf{z}_{21}^*$ ,  $\mathbf{z}_{21}^* = \text{col}(\boldsymbol{\theta}_m^*, \dot{\boldsymbol{\theta}}_m^*, \dots, (\boldsymbol{\theta}_m^*)^{(\rho-2)})$ .

**Этап 3.** На третьем этапе синтезируется контур адаптации, обеспечивающий достижение ЦУ в условиях параметрической неопределенности. Заменяя в выражении многообразия скольжения (16) идеальные параметры на настраиваемые, получим

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\mathbf{z}_2 - \hat{\mathbf{z}}_2),$$

где  $\hat{\mathbf{z}}_2 = \text{col}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_m, \dots, (\hat{\boldsymbol{\theta}}_m)^{(\rho-2)})$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \hat{\Psi}(\boldsymbol{\theta}_l, \dot{\boldsymbol{\theta}}_l, \boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d, \hat{\mathbf{p}})$ .

При возникновении устойчивого скользящего режима  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv 0$  предполагается выполнение условия выпуклости:

**Условие 3 (условие выпуклости).** Функция  $\dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}})$  выпукла по  $\hat{\mathbf{p}}$ , т. е. для любых  $\mathbf{p}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\mathbf{e}$  выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{p}) - \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}}) &\geq \\ &\geq (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}})^T \nabla_{\hat{\mathbf{p}}} \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Закон подстройки параметров выбирается в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\Gamma^{-1} \nabla_{\hat{\mathbf{p}}} \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}}), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0. \quad (17)$$

**Этап 4.** На четвертом этапе синтезируется управление  $\tau_m = \tau_m(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t)$ , гарантирующее возникновение скользящего режима.

Управление выбирается в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}_m^{(h-1)} = -\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{-1}(\cdot) \gamma \text{sign} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_m = -\gamma \int_0^t \dots \int_0^t \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{-1}(\cdot) \text{sign} \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\tau_1 \dots d\tau_{h-1},$$

где  $\gamma = \gamma(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dot{\mathbf{z}}_2) > 0$ .

**Теорема 1.** Пусть объект управления описывается системой (1), (2), пусть также выполнены условия 1—3, алгоритм управления имеет вид  $\tau_m = -\gamma \int_0^t \dots \int_0^t \tilde{\mathbf{B}}^{-1}(\cdot) \text{sign} \hat{\mathbf{G}} d\tau_1 \dots d\tau_{h-1}$ , закон подстройки

параметров  $\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\Gamma \nabla_{\hat{\mathbf{p}}} (\dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}}))$ ,  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ ,  
тогда все траектории системы ограничены и достигается целевое неравенство (3). При этом для замкнутой системы существует функция Ляпунова вида

$$V = Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}^* - \hat{\mathbf{p}})^T \Gamma (\mathbf{p}^* - \hat{\mathbf{p}}) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{\sigma}}^T \hat{\mathbf{\sigma}}. \quad (18)$$

*Доказательство.* Рассмотрим производную функции (18) по времени в силу траекторий системы (14), (15) с учетом условий 1–3:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}}) + \frac{\partial Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})}{\partial \mathbf{e}_{21}} \mathbf{B}_* \hat{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{p}^* - \hat{\mathbf{p}})^T \boldsymbol{\Gamma} \dot{\mathbf{p}} + \\ & + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C} (\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0 (\tilde{\mathbf{a}}(\cdot) + \tilde{\mathbf{p}}(\cdot) v) - \dot{\hat{\mathbf{z}}}^*_2). \quad (19) \end{aligned}$$

С учетом условия достижимости 2 выражение (19) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{V} = & \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}}) + \frac{\partial Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})}{\partial \mathbf{e}_{21}} \mathbf{B}_* \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{p}^*) - \\ & - \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{p}^*) - (\mathbf{p}^* - \hat{\mathbf{p}})^T \Gamma \dot{\hat{\mathbf{p}}} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{C}(\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\tilde{\mathbf{a}}(\cdot) + \tilde{\mathbf{b}}(\cdot)v) - \dot{\hat{\mathbf{z}}}^*_2) \leqslant \\
\leqslant & -\mu(Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})) + \frac{\partial Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})}{\partial \mathbf{e}_{21}} \mathbf{B}_* \hat{\mathbf{e}} + \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \hat{\mathbf{p}}) - \\
& - \dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{p}^*) - (\mathbf{p}^* - \hat{\mathbf{p}})^T \Gamma \dot{\hat{\mathbf{p}}} + \\
& + \hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{C}(\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\tilde{\mathbf{a}}(\cdot) + \tilde{\mathbf{b}}(\cdot)v) - \dot{\hat{\mathbf{z}}}^*_2).
\end{aligned}$$

Выберем закон подстройки параметров в форме (17), тогда с учетом условия выпуклости З получим

$$\dot{V} \leq -\mu(Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})) + \frac{\partial Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})}{\partial \mathbf{e}_{21}} \mathbf{B}_* \hat{\mathbf{\sigma}} + \\ + \hat{\mathbf{\sigma}}^T \mathbf{C} (\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0 (\tilde{\mathbf{a}}(\cdot) + \tilde{\mathbf{b}}(\cdot)v) - \dot{\mathbf{z}}_2^*).$$

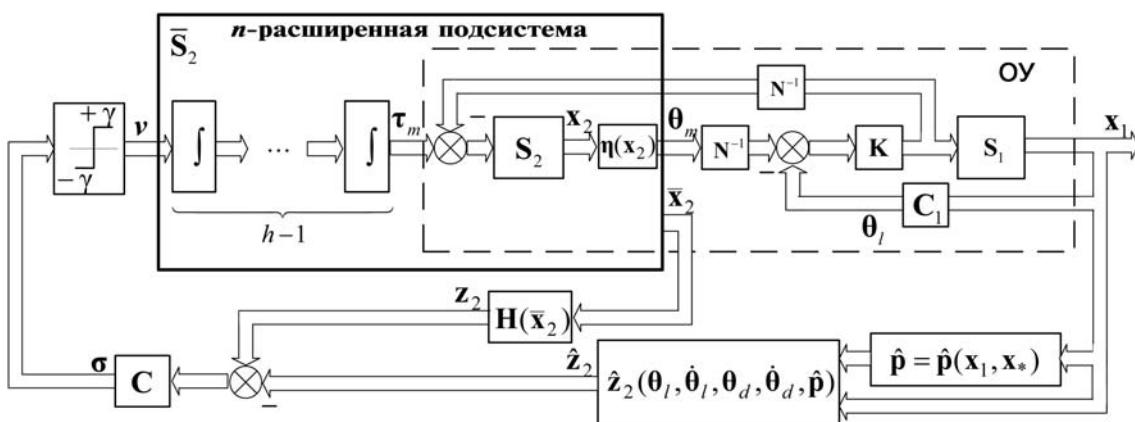
Выбирая управление в виде  $\nu = -\tilde{\beta}^{-1}(\cdot)\gamma \text{sign}\hat{\sigma}$ , с учетом условия пассивируемости 1 будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu(Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})) + \frac{\partial Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})}{\partial \mathbf{e}_{21}} \mathbf{B}_* \hat{\mathbf{e}} + \\ &+ \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{C} (\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0 (\tilde{\mathbf{a}}(\cdot) - \gamma \text{sign} \hat{\mathbf{e}}) - \dot{\mathbf{z}}_2^*). \end{aligned}$$

Тогда при  $\gamma \geq \left\| \left( \frac{\partial Q(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{21})}{\partial \mathbf{e}_{21}} \mathbf{B}_* \right)^T + \mathbf{C}(\mathbf{A}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_0(\tilde{\mathbf{a}}(\cdot) - \dot{\hat{\mathbf{z}}}_2^*)) \right\|$  выражение (18) является функцией Ляпунова.

нова для системы (14), (15). Следует заметить, что в силу выполнения условия пассивируемости вектор внутренней динамики  $\mathbf{z}_1$  системы (15) ограничен. Таким образом, в системе достигается цель управления. При этом в силу эквивалентности для системы (1), (2) также достигается ЦУ (3).

Структурная схема системы управления представлена на рис.2.



**Рис. 2. Замкнутая система управления**

**Следствие 1.** Пусть относительная степень системы (2)  $\rho = 1$ , тогда ввиду отсутствия динамики, порожденной введением нового виртуального выхода, условие достижимости рассматривается только для выходной подсистемы  $\dot{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{p}^*) \leq -\mu(Q(\mathbf{e}))$ , где  $Q(\mathbf{e})$  – положительно определенная функция;  $\mu(\cdot)$  – непрерывная строго возрастающая функция.

**Следствие 2.** Пусть относительная степень системы (2)  $\rho > 1$ . Выбирая информационный выход так, чтобы порожденная новым виртуальным выходом  $\mathbf{y}$  внутренняя динамика  $\varepsilon \dot{\mathbf{z}}_{21} = \mathbf{A}_* \mathbf{z}_{21} + \mathbf{B}_* \mathbf{y}$  имела достаточно малый параметр  $\varepsilon$ , замкнутую систему можно рассматривать в условиях *следствия 1*. При этом будет иметь место  $\Delta$ -точное слежение, где

$$\Delta \approx \left| \frac{\varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{A}_*)}{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_*)} \right|, \quad \mathbf{A}_* \text{ — матрица желаемой динамики выходного каскада.}$$

**Замечание 1.** Наиболее сложным условием является условие достижимости. Это условие может быть ослаблено *следствиями 1, 2*.

**Замечание 2.** Третий и четвертый этапы методики можно объединить, в этом случае при настройке параметров будет учитываться отклонение от поверхности скольжения (модифицированные алгоритмы).

#### Список литературы

1. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 548 с.
2. Мишаков В. В., Мышилев Ю. И. Управление электромеханическими системами с гибкими сочленениями в настраиваемом скользящем режиме второго порядка // Вторая Международная конференция "Системный анализ и информационные технологии" САИТ-2007 (10–14 сентября 2007 г., Обнинск, Россия). Тр. конференции. В 2 т. Т. 1. М: Изд-во ЛКИ, 2007. С. 38–41.
3. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990. 292 с.

## ИНФОРМАЦИЯ

6–7 декабря 2012 года в конгресс-центре МТУСИ состоится

### XI Международная научно-практическая конференция

### "Инженерные и научные приложения на базе технологии National Instruments — 2012"

Организаторами конференции выступят филиал корпорации National Instruments в России, СНГ и Балтии, Российский университет дружбы народов

На конференции будут представлены работы, посвященные применению инновационных технологий National Instruments при решении промышленных, образовательных и научных задач, а также рассмотрены преимущества использования современного оборудования и программного обеспечения National Instruments.

#### ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ

##### Пленарные выступления

В конференц-зале конгресс-центра будут обсуждаться успешные проекты в промышленности, области научных исследований и последние тенденции в инженерном образовании.

##### Технические саммиты

На технических саммитах специалисты National Instruments расскажут участникам о новинках компании в следующих областях:

- LabVIEW 2012. Новые возможности среды разработки
- ВЧ платформа NI для приложений связи и телекоммуникаций
- Устройства сбора данных для автоматизации эксперимента
- Встраиваемые системы измерения и управления
- Практикумы по техническим дисциплинам
- Междисциплинарная образовательные платформы NI ELVIS II и NI MyDAQ
- Модульные приборы PXI в радиоэлектронике
- Многоканальные системы измерения сигналов с датчиков для научных и испытательных стендов

##### Дискуссии с экспертами

Живые дискуссии по таким направлениям, как "Кооперация ВУЗ-Промышленность" и "Инженерные стартапы"

Тел. для справок: +7 (495) 783-68-51; Электр., почта: conference.russia@ni.com

Сайт конференции: <http://www.labview.ru/conference/>

# МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.6

**А. М. Григорьев<sup>1</sup>,** рук. группы,  
**Е. Е. Иванко<sup>1</sup>,** канд. физ.-мат наук, ст. науч. сотр.,  
**С. Т. Князев<sup>2</sup>,** д-р техн. наук, проректор,  
**А. Г. Ченцов<sup>1</sup>,** чл.-корр. РАН, зав. отделом,  
<sup>1</sup> Институт математики и механики УрО РАН,  
г. Екатеринбург,  
<sup>2</sup> Уральский федеральный университет  
chentsov@imm.uran.ru

## Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера, осложненной внутренними работами\*

Рассматривается экстремальная задача маршрутизации, связанная на идеином уровне с посещением областей, в пределах которых возможно возникновение тех или иных явлений, представляющих потенциальную опасность; это обстоятельство диктует требования к скорейшему обнаружению упомянутых явлений в целях принятия последующих мер по устранению их последствий (здесь речь может идти о лесных пожарах, радиоактивном или химическом заражении). Изучаются взаимодействия, связанные с маршрутизацией перемещений и последовательно развивается подход, связанный с идеями динамического программирования. Теоретические идеи статьи воплощены в оптимальном с точностью до дискретизации алгоритме для многопроцессорной вычислительной системы (МВС); проведен соответствующий вычислительный эксперимент (ВЭ).

**Ключевые слова:** маршрут, условия предшествования, мегаполис, внутренние работы

### Введение

Предлагаемое исследование связано с вопросами оптимизации маршрутов и соответствующими этим маршрутам трасс при посещении и инспекции районов возможного возникновения опасных аномалий в целях скорейшего обнаружения последних. Упомянутые районы воспринимаются всякий раз как некоторое целое, при посещении которого требуется организовать достаточно надежный просмотр массивов, составляющих данный район. Соответствующее средство может быть, в частности, беспилотным летательным аппаратом (БПЛА) с аппаратурой, которая может фиксировать наличие аномалий исследуемого типа в некоторой окрестности БПЛА. Последнее обстоятельство определяет

возможность дискретизации районов наблюдения и, в конечном итоге, превращения их в своеобразные мегаполисы, что позволяет использовать аппарат дискретной оптимизации с последующим применением МВС. Рассмотрим одну гипотетическую ситуацию такого рода (представляется, что с ней можно связать некоторые естественные задачи авиапожарного патрулирования лесных массивов с использованием БПЛА). Итак, пусть  $(L_1, \dots, L_N)$ , где  $N \geq 2$ , есть заданный кортеж непустых ограниченных и замкнутых множеств на плоскости  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (разумеется,  $N$  — натуральное число). Условимся именовать множества  $(L_1, \dots, L_N)$  (гипотетическими) "лесами". Мы располагаем средством (это может быть БПЛА), позволяющим посетить и обследовать все "леса", выбирая тот или иной маршрут упомянутых посещений. Сам этот маршрут будет складываться из внешних (по смыслу) перемещений между "лесами" и фрагментов, отвечающих для каждого конкретного "леса" за посещение достаточно представительной совокупности "контрольных точек", по состоянию которых можно судить о наличии или отсутствии аномальных явлений (в нашем случае — пожаров). Такая структура маршрута позволяет ввести определенную иерархию, выделяя макрозадачу, связанную с последовательным прибытием и отправлением для каждого из "лесов", и задачи патрулирования в пределах этих "лесов" в целях их достаточно детального просмотра. В последующем изложении будет введено разделение решения на собственно маршрут (перестановка индексов  $1, \dots, N$ ) и трассу движения вдоль выбранного маршрута-перестановки.

Опуская обсуждение упомянутых деталей, отметим, что в содержательных задачах упомянутого типа имеется большое число разнообразных ограничений, некоторые из которых (весома существенные) будут далее участвовать в математической постановке. Это касается прежде всего так называемых условий предшествования, связанных с правилом "одно после другого". Мы выделяем здесь данные условия в связи с очередностью посещения "лесов", хотя такие же требования могут присутствовать и на этапах инспекции каждого "леса"; это обстоятельство может быть отражено на уровне математической постановки посредством введения иерархической схемы, нижний уровень которой обслуживает макрозадачу соответствующими экстремальными задачами инспекции, в которых могут использоваться свои "внутренние" условия предшествования.

В связи с математическими аспектами проблемы отметим, что она восходит на идеином уровне к из-

\* Поддержано грантами РФФИ (10-08-00484, 10-01-96020) и Президиума РАН 09-П-1-1014.

вестной труднорешаемой задаче коммивояжера (ЗК) [1–4]. В данном исследовании мы рассматриваем преимущественно теоретические конструкции. Нашей целью является построение своеобразного математического "образа" вышеупомянутой содержательной задачи (возможны, конечно, и другие приложения: морские и авиационные перевозки, технологические процессы с элементами маршрутизации, задачи о перемещениях работников в условиях повышенной радиации и т. п.). В связи с этим далее используется широко понимаемый метод динамического программирования (МДП). Заметим, что для решения ЗК соответствующий вариант МДП был предложен в работах [5, 6]. Рассматриваемая далее задача содержит целый ряд особенностей в сравнении с ЗК, соответственно, усложняется и МДП. Кроме того, здесь реализуется встраивание в процедуру конструкций, связанных с экономией вычислений, что весьма существенно в данной труднорешаемой (в традиционном понимании) задаче.

Далее будем использовать аппарат, изложенный в работах [7–10], который является развитием конструкций монографии [11]. Здесь следует, конечно, иметь в виду, что в работах [7–11] рассматриваются преимущественно задачи дискретной оптимизации (отметим, однако, более общую постановку [11, части 2, 3]). Вышеупомянутая содержательная задача является "непрерывной": имеется в виду, что наши "леса" континуальны. Точнее, они являются компактными (ограниченными и замкнутыми множествами) на плоскости. Поэтому требуется (и является реализуемой) соответствующая дискретизация "лесов". Вышеупомянутое свойство компактности позволяет в принципе осуществить упомянутую дискретизацию с любой степенью точности ( затруднения возникают позднее, на этапе решения задачи дискретной оптимизации). Итак, первый этап исследования связан, конечно, с дискретизацией "лесов"; он является вполне естественным. В случае использования гипотетического БПЛА надо связать шаг дискретизации с возможностями системы наблюдения, т. е. с видимостью в окрестности БПЛА. Рассматривая данные (сферические) окрестности для всевозможных центров в виде элементов соответствующего "леса", мы конструируем открытое покрытие, из которого затем можно выбрать конечное подпокрытие. На самом же деле речь идет о замене "леса" соответствующей достаточно густой сеткой; степень густоты определяется возможностями БПЛА в части проведения наблюдений за местностью: нам важно, чтобы при посещении узлов сетки мы получали всю требуемую информацию об обстановке в "лесу", а именно: в случае возникновения пожара в точке, не являющейся узлом сетки, БПЛА должен иметь возможность зафиксировать возгорание, находясь в одном из соседних узлов. Если последнее требование будет обеспечено, мы получим возможность контролировать "лес" из конечного числа точек, которые

в последующем изложении будут объединяться в мегаполисы.

Конечно, мы в данном введении рассмотрели всего лишь простейшую гипотетическую модель ситуации, осложненной большим числом других факторов. Так, например, дефицит времени может потребовать использования нескольких БПЛА (см. обсуждения в работе [11, часть 5]). При рассмотрении реального движения БПЛА следует использовать модели управляемых систем. Возможные затруднения могут быть связаны с ограниченностью энергоресурса. Эти и целый ряд других обстоятельств требуют дополнительного исследования.

### Некоторые общие понятия и определения

Для построения математической модели потребуются некоторые понятия теории множеств.

Для всяких двух объектов  $x$  и  $y$  под  $\{x, y\}$  будем понимать двухэлементное множество, содержащее  $x$ ,  $y$  и ничего, кроме  $x$  и  $y$ ; мы используем обозначения, соответствующие работе [12]. Для всякого объекта  $z$   $\{z\} \triangleq \{z, z\}$  (здесь и далее  $\triangleq$  обозначает равенство по определению) есть одноэлементное множество, содержащее  $z$ . В соответствии с работой [12], для всяких объектов  $\alpha$  и  $\beta$  мы предполагаем, что  $(\alpha, \beta) \triangleq \{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$ . Получаем упорядоченную пару с первым элементом  $\alpha$  и вторым элементом  $\beta$ . Последний объект, строго говоря, является непустым семейством. Но для наших целей достаточно следующего свойства: если  $x, y, u$  и  $v$  — объекты, то  $((x, y) = (u, v)) \Leftrightarrow ((x = u) \& (y = v))$ . Итак, если  $z$  — упорядоченная пара ( $z = (x, y)$  для некоторых объектов  $x$  и  $y$ ), то под  $pr_1(z)$  и  $pr_2(z)$  мы понимаем первый и второй элементы  $z$  соответственно. Объекты  $pr_1(z)$  и  $pr_2(z)$  однозначно определяются из соотношения  $z = (pr_1(z), pr_2(z))$ . Если  $A$  и  $B$  — множества, то для всяких  $z \in A \times B$  имеют место включения  $pr_1(z) \in A$  и  $pr_2(z) \in B$ . Если  $S$  — множество, то под  $\mathcal{P}(S)$  (под  $\mathcal{P}'(S)$ ) будем понимать семейство всех (всех непустых) подмножеств  $S$ . Естественно  $\mathcal{P}'(S) = \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ , где  $\emptyset$  — пустое множество. Пусть  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая и  $[0, \infty[ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$ .

Для всякого непустого множества  $S$  под  $\mathcal{R}_+[S]$  будем понимать множество всех неотрицательных вещественнонезначимых функций на  $S$ . Предполагаем, что  $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$  и  $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; \dots\}$ ;  $\overline{k, l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (k \leq i) \& (i \leq l)\}$  при  $k \in \mathbb{N}_0$  и  $l \in \mathbb{N}_0$ ; если  $l < k$ , то  $\overline{k, l} = \emptyset$ . Очевидно  $\overline{1, n} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Если  $H$  — множество, то под  $Fin(H)$  мы понимаем семейство всех непустых конечных подмножеств  $H$ . Если  $K$  — непустое конечное множество, то под  $|K|$  мы понимаем мощность  $K$ ,  $|K| \in \mathbb{N}$ ; предполагаем, что  $(bi)[K]$  — множество всех биекций из  $\overline{1, |K|}$  на  $K$ . По определению  $|K|$  имеем  $(bi)[K] \neq \emptyset$  для всякого непустого конечного множества  $K$ ; также полагаем  $|\emptyset| \triangleq 0$ .

**Некоторые специальные обозначения.** Далее мы фиксируем непустое множество  $X$  и точку  $x^0 \in X$ ; точка  $x^0$  является начальным состоянием (базой нашего процесса). Кроме того, фиксируем число  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $2 \leq N$ . Тогда  $\overline{1, N}$  является полным списком заданий. Всякий номер этого списка связан с некоторым мегаполисом; кортеж мегаполисов имеет вид  $(M_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \rightarrow Fin(X)$ . Для проблемы авиапожарного патрулирования возможна следующая интерпретация: для  $j \in \overline{1, N}$  множество  $M_j$  может рассматриваться как "лес" (в этом случае  $X$  — плоское множество с соответствующей дискретизацией). Далее предполагаем, что  $(x^0 \notin M_j \forall j \in \overline{1, N}) \& (M_k \cap M_l = \emptyset \forall k \in \overline{1, N} \forall l \in \overline{1, N} \setminus \{k\})$ . Под  $\mathbb{P}$  мы понимаем множество всех перестановок в  $\overline{1, N} : \mathbb{P} \triangleq (bi)[\overline{1, N}]$ . Будем рассматривать элементы  $\mathbb{P}$  в качестве полных маршрутов. Если  $\alpha \in \mathbb{P}$ , то  $\alpha : \overline{1, N} \rightarrow \overline{1, N}$ , и под  $\alpha^{-1}$  мы понимаем перестановку, обратную по отношению к  $\alpha : \alpha^{-1} \in \mathbb{P}$  и  $\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \forall k \in \overline{1, N}$ . Напомним, что для непустого множества  $S$  перестановки в  $S$  есть биекции  $S$  на  $S$  [14].

Рассмотрим теперь условия предшествования. Зафиксируем множество  $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})$ . Таким образом,  $\mathbf{K}$  есть подмножество  $\overline{1, N} \times \overline{1, N}$ . Тогда  $\forall z \in \mathbf{K}$

$$(pr_1(z) \in \overline{1, N}) \& (pr_2(z) \in \overline{1, N}). \quad (1)$$

Элементы  $\mathbf{K}$  суть упорядоченные пары, называемые адресными. Для всякой адресной пары  $z \in \mathbf{K}$  элементы (1) называются отправителем и получателем соответственно. Предполагаем, что

$$\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(pr_1(z)) < \alpha^{-1}(pr_2(z)) \forall z \in \mathbf{K}\}. \quad (2)$$

В (2) представлено множество допустимых по предшествованию маршрутов: для  $\alpha \in \mathbb{P}$  мы имеем включение  $\alpha \in \mathbb{A}$  тогда и только тогда, когда  $\forall z \in \mathbf{K}, \forall t_1 \in \overline{1, N}, \forall t_2 \in \overline{1, N} ((\alpha(t_1) = pr_1(z)) \& (\alpha(t_2) = pr_2(z))) \Rightarrow (t_1 < t_2)$ . Далее предполагаем, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : pr_1(z_0) \neq pr_2(z) \forall z \in \mathbf{K}_0. \quad (3)$$

Тогда  $\mathbb{A} \neq \emptyset$  [11]. Отметим только наиболее простой вариант (3):  $\{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\} \cap \{pr_2(z) : z \in \mathbf{K}\} = \emptyset$ . Возможны другие варианты (3) [11], но мы их не обсуждаем и используем (3) в общем виде.

Введем понятие трасс, согласованных с маршрутом. Для этого определяем сначала множество  $\mathbb{X}$

всевозможных кортежей  $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \rightarrow X \times X$ .

Предполагаем далее, что для всякого маршрута  $\alpha \in \mathbb{A}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}[\alpha] \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbb{X} \mid (z_0 = (x^0, x^0)) \& \\ \& \& (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \forall j \in \overline{1, N})\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее мы используем (4) в качестве множества трасс, согласованных с маршрутом  $\alpha$ . Будем рассматривать пару  $(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}})$ ,  $\alpha \in \mathbb{A}$ ,  $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]$

в качестве допустимого решения основной маршрутной задачи. Для математической постановки этой задачи необходимо ввести функции стоимости. Сделаем это в общем виде, а именно: фиксируем

$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[X \times X]; (c_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \rightarrow \mathcal{R}_+[X \times X]$ ;

$\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[X]$ . Функция  $\mathbf{c}$  используется для оценки внешних перемещений. Функции  $c_1, \dots, c_N$  используются для оценки внутренних работ (мы помним, что работы выполняются на множествах  $M_1, \dots, M_N$  соответственно). С помощью  $\mathbf{f}$  мы оцениваем соответствующие конечные состояния. Рассмотрим следующий дискретный процесс:

$$\begin{aligned} x^0 \rightarrow (z_1^{(1)} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow z_2^{(1)} \in M_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow \\ \rightarrow (z_1^{(N)} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow z_2^{(N)} \in M_{\alpha(N)}) \end{aligned} \quad (5)$$

(в связи с (5) см. (4)), где мы можем выбирать  $\alpha \in \mathbb{A}$ ,  $z_1^{(1)} \in M_{\alpha(1)}, z_2^{(1)} \in M_{\alpha(1)}, \dots, z_1^{(N)} \in M_{\alpha(N)}, z_2^{(N)} \in M_{\alpha(N)}$ . Если  $\alpha \in \mathbb{A}$  и  $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]$ , то

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\alpha}[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}(pr_2(z_i), pr_1(z_{i+1})) + \\ + \sum_{i=0}^N c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(pr_2(z_N)) \forall \alpha \in \mathbb{A}, \\ \forall (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]. \end{aligned} \quad (6)$$

Величина (6) оценивает процесс (5). Значением задачи

$$\mathfrak{C}_{\alpha}[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \rightarrow \min, \alpha \in \mathbb{A}, (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha] \quad (7)$$

является величина (глобальный экстремум)

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]} \mathfrak{C}_{\alpha}[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \in [0, \infty[. \quad (8)$$

### Динамическое программирование

Рассмотрим естественное расширение задачи (7). Это расширение соответствует конструкциям, представленным в работах [7—11], и использует естественные преобразования ограничений, а именно: мы заменяем достижимость по предшествованию на достижимость по вычеркиванию [7—11]. В резуль-

тате получаем ограничения на рассматриваемые в данной работе текущие перемещения с множества на множество. Пусть  $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ . Используем следующее соглашение [7–11]: если  $K \in \mathfrak{N}$ , то

$$\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (pr_1(z) \in K) \& (pr_2(z) \in K)\}. \quad (9)$$

Учитывая это,  $\Xi[K] \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$  реализуем как множество всех таких адресных пар, оба элемента которых принадлежат  $K$ ,  $K \subset \overline{1, N}$ . В терминах (9) мы определяем отображение  $\mathbf{I}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$  с помощью следующего правила [7–11]: если  $K \in \mathfrak{N}$ , то  $\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{pr_2(l) : l \in \Xi[K]\}$ . В этом определении мы используем (3) (если  $\Xi[K] \neq \emptyset$ , то  $\Xi[K] \in \mathcal{P}'[K]$  и для некоторых  $z_0 \in \Xi[K]$  свойство  $pr_1(z_0) \neq pr_2(l) \forall l \in \Xi[K]$  имеет место, а значит,  $pr_1(z_0) \in \mathbf{I}(K)$ ).

Заметим, что в работах [7–10] конструируется естественное расширение базовой маршрутной задачи и приводится соответствующее уравнение Беллмана. Рассмотрим эти построения кратко. Для этого введем усеченные маршрутные задачи и рассмотрим понятие достижимости по вычеркиванию. Кроме того, рассмотрим "частичные" маршруты.

Для  $K \in \mathfrak{N}$  будем предполагать, что  $(\mathbf{I} - bi)[K]$  есть множество всех биекций  $\alpha \in (bi)[K]$  таких, что  $\forall m \in \overline{1, |K|} \alpha(m) \in \mathbf{I}(\{\alpha(i) : i \in \overline{m, |K|}\})$ ; в соответствии с работами [7–11]  $(\mathbf{I} - bi)[K] \neq \emptyset$ . Очень важно, что [9, 11]

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I} - bi)[\overline{1, N}]. \quad (10)$$

Свойство (10) является базовым. Рассмотрим усеченные маршруты. Для  $x \in X$ ,  $K \in \mathfrak{N}$  и  $\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]$  обозначим  $\mathfrak{Z}(x, K, \alpha)$  множество всех кортежей  $(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} : \overline{0, |K|} \rightarrow X \times X$  таких, что  $(z_0 = (x, x)) \& (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \forall j \in \overline{0, |K|})$ ; очевидно  $\mathfrak{Z}(x, K, \alpha) \neq \emptyset$  (таким образом, имеем непустое конечное множество). Отметим, учитывая (10) и (4), что

$$\mathfrak{Z}[\alpha] = \mathfrak{Z}(x^0, \overline{1, N}, \alpha) \forall \alpha \in \mathbb{A}. \quad (11)$$

Введем усеченный критерий: если  $x \in X$ ,  $K \in \mathfrak{N}$ ,  $\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]$  и  $(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \alpha)$ , то предполагаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) &\triangleq \sum_{i=0}^{|K|-1} \mathbf{c}(pr_2(z_i), pr_1(z_{i+1})) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{|K|} c_\alpha(i)(z_i) + \mathbf{f}(pr_2(z_{|K|})). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (6), (10), (11) и (12) получаем равенство

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathfrak{C}_{\overline{1, N}}^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \forall \alpha \in \mathbb{A}. \quad (13)$$

Таким образом, базовая задача вкладывается в множество усеченных маршрутных задач. Если  $x \in X$  и  $K \in \mathfrak{N}$ , то предположим, что

$$\begin{aligned} v(x, K) &\triangleq \\ &\triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \alpha)} \mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}); \end{aligned} \quad (14)$$

очевидно,  $v(x, K) \in [0, \infty]$ . Из (10), (11) и (13) получаем, что

$$V = v(x^0, \overline{1, N}). \quad (15)$$

Кроме того, полагаем, что имеет место следующая система равенств:

$$v(x, \theta) \triangleq \mathbf{f}(x) \forall x \in X. \quad (16)$$

Итак, имеем величины  $v(x, K)$ ,  $x \in X$ ,  $K \in \mathfrak{N}$ , где  $\mathbf{N} \triangleq \mathcal{P}(\overline{1, N}) = \mathfrak{N} \cup \{0\}$ . Таким образом, получили (см. (14), (16)) функцию  $v: X \times \mathbf{N} \rightarrow [0, \infty]$ ; тогда  $v$  может рассматриваться как функция Беллмана для нашей задачи. Выражение (16) может рассматриваться как граничное условие. Тогда с помощью конструкций [6–10] может быть получен следующий вариант уравнения Беллмана:  $\forall x \in X \forall K \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} v(x, K) &= \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, pr_1(z)) + \\ &\quad + c_j(z) + v(pr_2(z), K \setminus \{j\})]. \end{aligned} \quad (17)$$

### Усеченная версия метода динамического программирования

Мы получили соотношения (16) и (17), однозначно определяющие функцию Беллмана. Соответствующая вычислительная сложность расчета этих соотношений очень высока. В работах [6–10] построен усеченный вариант метода динамического программирования. Здесь мы представим только базовые аспекты такого построения. Нашей целью является уменьшение числа требуемых операций. Пусть

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} (pr_1(z) \notin K) \vee (pr_2(z) \in K)\}. \quad (18)$$

Элементы семейства (18) называются существенными списками [7–11]. Предположим, что

$$\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\} \forall s \in \overline{1, N}. \quad (19)$$

Для определения  $\mathcal{G}_1$  введем множество  $\mathbf{K}_1 \triangleq \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$  всех отправителей адресных пар. Тогда

$$\mathcal{G}_1 = \{t : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\}. \quad (20)$$

Кроме того, легко проверить, что  $K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}_{s-1} \forall s \in \overline{2, N}$ ,  $\forall K \in \mathcal{G}_s, \forall k \in \mathbf{I}(K)$ . Далее предполагаем, что  $\mathfrak{N}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\} \forall s \in \overline{1, N}$ . Ниже представим некоторые другие свойства. Из (18) получаем, что  $\overline{1, N} \in \mathcal{G}_N$  и более того  $\mathcal{G}_N = \{\overline{1, N}\}$  (действительно,

$\mathcal{G}_N \subset \mathfrak{N}_N = \{\overline{1, N}\}$ ). Ниже рассматриваем положения работ [7–11], связанные с построением слоев в пространстве позиций.

Для общего случая  $\mathbf{K}$  будем предполагать, что  $\mathbf{M}$  есть объединение всех множеств  $M_i, i \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$ ; напомним, что свойство  $\mathbf{M} \neq \emptyset$  прямо следует из упомянутого выше свойства  $\mathbb{A} \neq \emptyset$  [11]. Получаем

$$D_0 \triangleq \mathbf{M} \times \{\emptyset\} = \{(x, \emptyset) : x \in \mathbf{M}\} \in \mathcal{P}'(X \times N). \quad (21)$$

Если  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{G}_s$ , то

$$\begin{aligned} J_s(K) &\triangleq \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\} = \\ &= \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}\}. \end{aligned} \quad (22)$$

В (22) рассматриваем индексы из  $\overline{1, N}$  такие, что при добавлении их к исходному существенному списку  $K$  получается снова существенный список.

Легко проверить, что

$$\{\alpha(i) : i \in \overline{k, N}\} \in \mathcal{G}_{N-k+1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}, \forall k \in \overline{1, N} \quad (23)$$

[11]. Если  $\alpha \in \mathbb{A}$  и  $n \in \overline{1, N-1}$ , то для  $r \triangleq N - n + 1 \in \overline{2, N}$ , учитывая (23), имеем  $\mathbb{T}_1 \triangleq \{\alpha(i) : i \in \overline{r, N}\} \in \mathcal{G}_n$ ,  $r - 1 \in \overline{1, N-1}$  и  $\mathbb{T}_2 \triangleq \{\alpha(i) : i \in \overline{r-1, N}\} = \{\alpha(r-1)\} \cup \mathbb{T}_1 \in \mathcal{G}_{n+1}$  (см. (23)). Как следствие,  $\alpha(r-1) \in J_n(\mathbb{T}_1)$ . Таким образом,  $\tilde{\alpha}(N-s) \in J_s(\{\tilde{\alpha}(i) : i \in \overline{N-s+1, N}\}) \quad \forall \tilde{\alpha} \in \mathbb{A}, \forall s \in \overline{1, N-1}$ .

Итак, имеем естественную связь между условием предшествования в маршруте и множествами (22). Используя (22), введем множества

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{i \in J_s(K)} M_i \quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s. \quad (24)$$

**Предложение 1.** Если  $\mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$ , то  $\exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : pr_1(z) \neq pr_2(z_0) \forall z \in \mathbf{K}_0$ .

Доказательство данного и последующих предложений подобно представленному в работе [13].

**Предложение 2.** Если  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{G}_s$ , то  $\exists j \in J_s(K) : j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$ .

**Следствие 1.** Если  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{G}_s$ , то  $J_s(K) \neq \emptyset$ .

Доказательство очевидно. В итоге  $\mathcal{M}_s[K] \neq \emptyset \forall s \in \overline{1, N-1}, \forall K \in \mathcal{G}_s$ .

**Следствие 2.** Если  $s \in \overline{2, N}$ , то  $\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{j\} : K \in \mathcal{G}_s, j \in \mathbf{I}(K)\}$ .

Последовательность  $(\mathcal{G}_s)_{s \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{G})$  имеет вид

$$(\mathcal{G}_N = \{\overline{1, N}\}) \& (\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{j\} : K \in \mathcal{G}_s, j \in \mathbf{I}(K)\}). \quad (25)$$

Таким образом, мы имеем "траектории" в пространстве списков.

**Предложение 3.** Для любых  $s \in \overline{1, N-1}$ ,  $K \in \mathcal{G}_s$ , и  $n \in J_s(K)$  справедливо включение  $n \in \mathbf{I}(K \cup \{n\})$ .

Рассмотрим клетки функции Беллмана при вышеупомянутом условии непустоты множеств. Итак, используем соответствующее сужение функции  $v$ : если  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{G}_s$ , то предполагаем, что

$$\tilde{V}_s[K] : \mathcal{M}_s[K] \rightarrow [0, \infty[ \quad (26)$$

определяется по следующему правилу:

$$\tilde{V}_s[K](x) \triangleq v(x, K) \quad \forall x \in \mathcal{M}_s[K]. \quad (27)$$

Вернемся к множеству  $D_0$ ,  $D_0 \neq \emptyset$ . Используя (21), введем функцию  $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$  по следующему правилу:  $\mathcal{V}_0(x, \emptyset) \triangleq f(x) \forall x \in \mathbf{M}$ . Будем рассматривать  $\mathcal{V}_0$  как простейший слой функции Беллмана.

Если  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{G}_s$ , введем соответствующую клетку пространства позиций с помощью правила

$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}. \quad (28)$$

Из (28) получаем свойство: если  $s \in \overline{1, N-1}$ ,  $K_1 \in \mathcal{G}_s$  и  $K_2 \in \mathcal{G}_s$ , то

$$(K_1 \neq K_2) \Rightarrow (\mathbb{D}_s[K] \cap \mathbb{D}_s[K_2] = \emptyset). \quad (29)$$

Заметим, что в (28) список  $K$  используется как индекс. Поэтому при условии  $s \in \overline{1, N-1}$  мы имеем проиндексированное семейство  $(\mathbb{D}_s[K])_{K \in \mathcal{G}_s}$  подмножеств  $X \times \mathfrak{N}$ . Таким образом, мы вводим обычные слои позиций как дизъюнктные объединения, а именно, предполагаем, что

$$D_s = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \quad \forall s \in \overline{1, N-1}; \quad (30)$$

в (30) учитываем (29). Наконец, предполагаем, что

$$D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1, N})\}; \quad (31)$$

в (31) имеем синглетон, соответствующий начальной позиции  $(x^0, \overline{1, N})$ .

Напомним, что всякая клетка (28) есть непустое множество:  $\mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(X \times \mathfrak{N}) \forall s \in \overline{1, N-1} \forall K \in \mathcal{G}_s$ . Из (29) и (30) получаем следующее важное свойство: если  $s \in \overline{1, N-1}$ , то  $\mathbb{D}_s[K], K \in \mathcal{G}_s$ , есть разбиение  $D_s$  в дизъюнктное объединение непустых множеств (напомним, что  $D_s \neq \emptyset$  по предложению 4.9.3 в работе [11]; как следствие  $\mathcal{G}_s \neq \emptyset$ ). Привлекая это утверждение, мы можем строить соответствующие слои функции Беллмана, а именно, если  $s \in \overline{1, N-1}$ , то предполагаем, что  $V_s : D_s \rightarrow [0, \infty[$  определяется по следующему правилу: для всякого  $K \in \mathcal{G}_s$  и  $x \in \mathcal{M}_s[K]$   $V_s(x, K) \triangleq \tilde{V}_s[K](x)$  (здесь мы используем (26), (28)–(30)). Очевидно,  $V_s$  есть сужение функции  $v$

на  $D_s$ :  $\mathcal{V}_s = (v(x, K))_{(x, K) \in D_s}$ . Таким образом, получаем следующие системы равенств:

$$\mathcal{V}_s(x, K) = v(x, K) \quad \forall s \in \overline{1, N-1}, \forall (x, K) \in D_s. \quad (32)$$

Наконец, определим  $\mathcal{V}_N : D_N \rightarrow [0, \infty[$  очевидным правилом:  $\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) \triangleq \tilde{V}$ ; здесь мы используем (15) и (31). В результате имеем последовательность  $(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_N)$ .

**Рекурсивная процедура.** Напомним важное свойство, установленное в работе [11]:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N}, \forall (x, K) \in D_s, \\ \forall k \in \mathbf{I}(K), \forall y \in M_k. \quad (33)$$

Используя (32) и (33), получим следующее утверждение: если  $s \in \overline{1, N}$ ,  $(x, K) \in D_s$ ,  $k \in \mathbf{I}(K)$  и  $y \in M_k$ , то  $\mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) = v(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[$ . Более того, учитывая (17), (32) и (33), получаем, что  $\forall s \in \overline{1, N}, \forall (x, K) \in D_s$

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, pr_1(z)) + c_j(z) + \\ + \mathcal{V}_{s-1}(pr_2(z), K \setminus \{j\})]. \quad (34)$$

Рассмотрим следующую самодостаточную рекурсивную процедуру. Действительно, имеем функцию  $\mathcal{V}_0$ . Пусть  $m \in \overline{0, N-1}$ , и все функции  $\mathcal{V}_i$ ,  $i \in \overline{0, m}$  построены. В частности, имеем функцию  $\mathcal{V}_m : D_m \rightarrow [0, \infty[$ . Тогда используем (34) при  $s = m + 1$ :

$$\mathcal{V}_{m+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, pr_1(z)) + \\ + c_j(z) + \mathcal{V}_m(pr_2(z), K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_{m+1}. \quad (35)$$

С помощью (35) мы строим функцию  $\mathcal{V}_{m+1}$ . После конечного числа регулярных шагов типа (35) получим все функции  $\mathcal{V}_i$ ,  $i \in \overline{0, N}$ . В частности, решение исходной задачи есть единственное значение функции  $\mathcal{V}_N$

$$V = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x^0, pr_1(z)) + \\ + c_j(z) + \tilde{\mathcal{V}}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}](pr_2(z))]. \quad (36)$$

В (36) мы завершили последний шаг нашей процедуры, связанной с конструированием слоев функции Беллмана.

Рассмотрим теперь одну гипотетическую схему параллельной реализации  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_N$ . Предполагаем, что доступны  $n$  процессоров; здесь  $n \in \mathbb{N}$  и  $2 \leq n$ . Для всех  $s \in \overline{1, N-1}$  выполним разбиение семейства  $\mathcal{G}_s$  в объединение  $n$  попарно не пересекающихся подсемейств  $\mathcal{G}_i^{(s)}$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , так что

$$(\mathcal{G}_i^{(s)})_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{G}_s) \quad (37)$$

есть набор, удовлетворяющий условиям

$$(\mathcal{G}_s = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i^{(s)}) \& (\mathcal{G}_k^{(s)} \cap \mathcal{G}_l^{(s)} = \emptyset \\ \forall k \in \overline{1, n}, \forall l \in \overline{1, n} \setminus \{k\}). \quad (38)$$

В результате получим наборы  $(\mathcal{G}_i^{(1)})_{i \in \overline{1, n}}, \dots, (\mathcal{G}_i^{(N-1)})_{i \in \overline{1, n}}$  со свойствами (37) и (38). Для шага с номером  $s \in \overline{1, N-1}$  все списки  $\mathcal{G}_1^{(s)}$  передаются процессору  $\Pi_1$ , все списки  $\mathcal{G}_2^{(s)}$  передаются процессору  $\Pi_2$  и т. д. Это означает, что  $\Pi_1$  работает с клетками  $\mathbb{D}_s[K], K \in \mathcal{G}_1^{(s)}$ ,  $\Pi_2$  работает с клетками  $\mathbb{D}_s[K], K \in \mathcal{G}_2^{(s)}$  и т. д. Тогда  $\Pi_1$  вычисляет функции  $\tilde{\mathcal{V}}_s[K], K \in \mathcal{G}_1^{(s)}$ ,  $\Pi_2$  вычисляет функции  $\tilde{\mathcal{V}}_s[K], K \in \mathcal{G}_2^{(s)}$  и т. д. Склеивая все такие клетки функции Беллмана, можно построить слой  $\mathcal{V}_s$ . Здесь используется следующее правило:  $\mathcal{V}_s(x, K) = \tilde{\mathcal{V}}_s[K](x)$   $\forall K \in \mathcal{G}_s, \forall x \in \mathcal{M}_s[K]$ . Клетки  $\tilde{\mathcal{V}}_s[K], K \in \mathcal{G}_s$ , передаются в общую память компьютера. При  $s < N-1$  для реализации шага с номером  $s+1$  каждый процессор  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  извлекает необходимые значения функций  $\tilde{\mathcal{V}}_s[K], K \in \mathcal{G}_s$ . Для построения  $\tilde{\mathcal{V}}_{s+1}[K], K \in \mathcal{G}_{s+1}$  процессор  $\Pi_1$  обрабатывает  $\tilde{\mathcal{V}}_{s+1}[K], K \in \mathcal{G}_1^{(s+1)}$ ,  $\Pi_2$  обрабатывает клетки  $\tilde{\mathcal{V}}_{s+1}[K], K \in \mathcal{G}_2^{(s+1)}$  и т. д. Склеивая все клетки  $\tilde{\mathcal{V}}_{s+1}[K], K \in \mathcal{G}_{s+1}$ , мы определяем функцию  $\tilde{\mathcal{V}}_{s+1}$ . Последующие конструкции аналогичны.

**Замечание 1.** Рассмотрим случай  $\mathbf{K} = \emptyset$ . Этот случай соответствует отсутствию условий предшествования. Поскольку  $\mathcal{P}'(\mathbf{K}) = \emptyset$ , условие (3) выполняется. Кроме того, из (2) имеем равенство  $\mathbb{A} = \mathbb{P}$ . Заметим, что по (9) (в нашем случае)  $\Xi[K] = \emptyset \forall K \in \mathfrak{N}$ . Таким образом,  $\mathbf{I}(K) = K \forall K \in \mathfrak{N}$ , а значит,  $\mathbf{I}$  — тождественное отображение. Как следствие,  $(\mathbf{I} - bi)[K] = (bi)[K] \forall K \in \mathfrak{N}$ . Заметим, что в нашем случае  $\mathcal{G} = \mathfrak{N}$ . Естественно,  $\mathcal{G}_s = \mathfrak{N}_s$ ,  $\forall s \in \overline{1, N}$ . Очевидно, что  $\mathbf{K}_1 = \emptyset$  и  $\mathcal{G}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N}\}$ . Таким образом, в данном случае  $\mathbf{M}$  есть объединение всех множеств  $M_i, i \in \overline{1, N}$ . Кроме того, заметим, что  $J_s(K) = \overline{1, N} \setminus K \forall s \in \overline{1, N-1}, \forall K \in \mathcal{G}_s$ . Как следствие получим, что при  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{G}_s, \mathcal{M}_s[K] =$

=  $\bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus K} M_i$ ; последнее соотношение доставляет равенство  $\mathbb{D}_s[K] = \{(x, K) : x \in \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus K} M_i\}$ . Множества такого типа используются при построении слоев  $D_0, D_1, \dots, D_N$ .  $\square$

### Вычислительный эксперимент

Рассмотрим пример решения задачи маршрутизации на плоскости с помощью компьютерной программы для супервычислителя МВС "Уран", реализующей вариант МДП для параллельных вычислителей. Пусть  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  и  $x^0 = (95.597, 34.922)$ . Функция стоимости внешних перемещений  $c$  определяется как евклидово расстояние на плоскости  $X$ ; функция  $f$  полагается тождественно равной нулю. Рассмотрим случай  $N = 29$  и  $K = \emptyset$ . Речь идет о задаче, в которой условия предшествования отсутствуют. Полагаем, что все множества  $M_j$ , где  $j \in \overline{1, 29}$ , имеют одно и то же число элементов:  $|M_j| = 24 \forall j \in \overline{1, 29}$ . Каждое множество  $M_j$ , где  $j \in \overline{1, 29}$ , определяется узлами сетки, "равномерно заполняющими" круг, радиус которого принадлежит отрезку  $[4, 5]$ , а центр фиксирован в виде вектора  $a_j \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= (98.798, 70.636), & a^{(2)} &= (15.034, 107.440), \\ a^{(3)} &= (75.175, 57.806), & a^{(4)} &= (5.658, 26.839), \\ a^{(5)} &= (28.896, 24.281), & a^{(6)} &= (49.664, 62.085), \\ a^{(7)} &= (5.603, 8.037), & a^{(8)} &= (13.713, 59.251), \\ a^{(9)} &= (61.273, 17.822), & a^{(10)} &= (44.706, 95.763), \\ a^{(11)} &= (24.140, 85.509), & a^{(12)} &= (33.315, 45.687), \\ a^{(13)} &= (66.278, 32.864), & a^{(14)} &= (82.826, 72.310), \\ a^{(15)} &= (87.608, 5.865), & a^{(16)} &= (48.455, 42.793), \\ a^{(17)} &= (5.119, 86.142), & a^{(18)} &= (44.368, 21.635), \\ a^{(19)} &= (62.417, 93.6524), & a^{(20)} &= (12.792, 41.679), \\ a^{(21)} &= (30.823, 65.440), & a^{(22)} &= (48.378, 78.144), \\ a^{(23)} &= (97.352, 109.170), & a^{(24)} &= (77.315, 86.814), \\ a^{(25)} &= (98.107, 23.235), & a^{(26)} &= (100.905, 85.913), \\ a^{(27)} &= (99.896, 54.263), & a^{(28)} &= (88.871, 35.606), \\ a^{(29)} &= (70.338, 4.795). \end{aligned}$$

Для проверки изложенного в предыдущих разделах способа распараллеливания МДП создана программа для МВС "Уран" на языке программирования C++ с использованием библиотеки OpenMP, которая позволяет работать с общей памятью при использовании одного вычислительного модуля МВС "Уран". Программа работает в среде 64-разрядной операционной системы семейства Linux. Используемый для вычислительного эксперимента модуль имеет следующие характеристики:

- процессор Intel Xeon X5675 6-ядерный 3,07 ГГц — 2 шт.;
- оперативная память — 192 Гбайт;
- жесткий диск 160 ГБ SATA;
- сетевой интерфейс 10G Ethernet — 1 шт.

Внутренние работы на каждом множестве  $M_j$  сводятся при выбранных пунктах прибытия  $x \in M_j$  и отправления  $y \in M_j$  к однократному посещению всех оставшихся точек этого множества (всех узлов сетки, равномерно заполняющей область наблюдаемого леса). Функции  $c_1, \dots, c_{29}$  определяются следующим образом. Если  $j \in \overline{1, 29}, x \in M_j$  и  $y \in M_j$ , то  $c_j(x, y)$  есть экстремум (значение) задачи коммивояжера в условиях, когда база (начальный пункт наблюдения) есть  $x$ , а конечный совпадает с  $y$ , стоимость перемещений между узлами  $j$ -го метрополиса определяется евклидовым расстоянием. Иными словами, функции  $c_j(x, y)$  выражают значения соответствующей множеству  $M_j$  внутренней метрической задачи коммивояжера с фиксацией двух пунктов наблюдения: начального пункта  $x$  и конечного  $y$ . С точки зрения решения совокупной задачи мы ограничиваем исполнителя в части выполнения внутренних работ оптимальными вариантами поведения, что, однако, не приводит к потере качества в рассматриваемом случае аддитивного агрегирования затрат.

В результате решения такой задачи был найден маршрут:  $(i_1 = 28, i_2 = 25, i_3 = 15, i_4 = 29, i_5 = 9, i_6 = 13, i_7 = 18, i_8 = 5, i_9 = 7, i_{10} = 4, i_{11} = 20, i_{12} = 8, i_{13} = 17, i_{14} = 2, i_{15} = 11, i_{16} = 21, i_{17} = 12, i_{18} = 16, i_{19} = 6, i_{20} = 22, i_{21} = 10, i_{22} = 19, i_{23} = 24, i_{24} = 14, i_{25} = 3, i_{26} = 27, i_{27} = 1, i_{28} = 26, i_{29} = 23)$  (соответствующая последовательность обхода узлов сетки для каждого множества не приводится) (рис. 1). Искомый экстремум  $V = 1507.492$  был рассчитан за 7015 с.

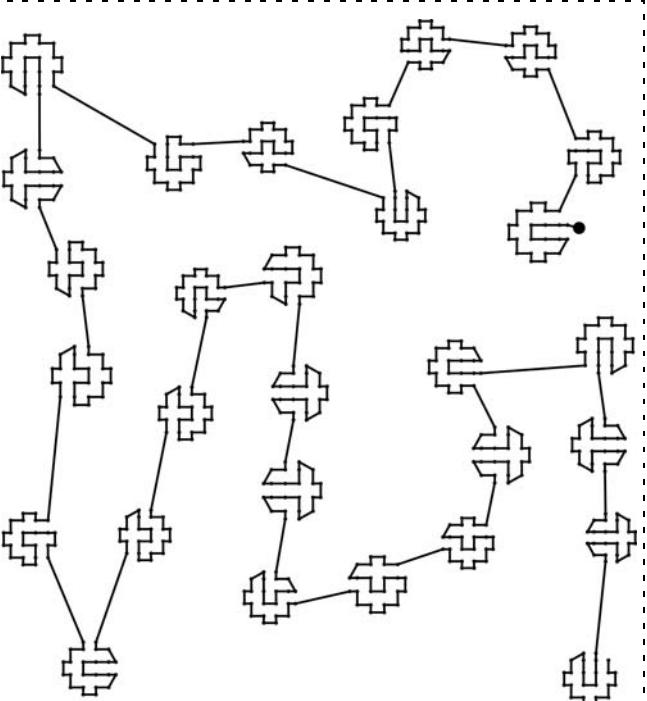


Рис. 1

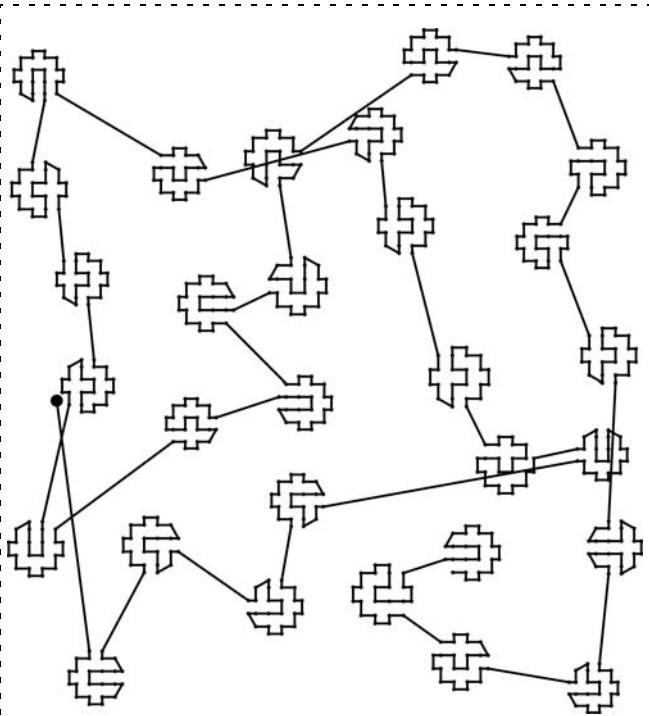


Рис. 2

В следующем эксперименте была поставлена и решена задача с условиями предшествования, в которой к начальным условиям рассмотренной выше задачи добавляется один мегаполис, для которого  $a^{(30)} = (75.378, 104.835)$ , изменяется начальная точка  $x^0 = (8.578; 61.649)$  и вводится ряд условий предшествования:

$$K = \{(1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 8); (2, 9); (2, 10); (2, 11); (2, 12); (1, 13); (1, 14); (2, 15); (3, 16); (4, 17); (6, 18); (5, 19); (9, 20); (10, 21); (11, 22); (16, 23); (19, 24); (15, 25); (10, 26); (17, 18)\}.$$

В остальном задача аналогична рассмотренной выше для случая  $K = \emptyset$ . Применение вышеупомянутых алгоритмов МДП дает следующий оптимальный маршрут, отвечающий всем условиям предшествования из  $K$ :  $i_1 = 2, i_2 = 11, i_3 = 10, i_4 = 22, i_5 = 1, i_6 = 14, i_7 = 3, i_8 = 13, i_9 = 9, i_{10} = 5, i_{11} = 7, i_{12} = 4, i_{13} = 20, i_{14} = 8, i_{15} = 17, i_{16} = 21, i_{17} = 6, i_{18} = 12, i_{19} = 16, i_{20} = 18, i_{21} = 29, i_{22} = 15, i_{23} = 25, i_{24} = 28, i_{25} = 27, i_{26} = 26, i_{27} = 23, i_{28} = 30, i_{29} = 19, i_{30} = 24$  (рис. 2). При этом экстремум задачи  $V = 1710.259$  был найден за 17132 с.

Данные рисунки можно рассматривать как иллюстрацию возможных вариантов перемещения

БПЛА (или какого-то другого средства) в целях обзора лесных массивов для выявления возможных аномалий (в частности, пожаров).

### Заключение

В статье приведена конструкция, обеспечивающая оптимальное с точностью до дискретизации решение маршрутной задачи о посещении и инспекции системы мегаполисов. Алгоритм, построенный на основе МДП, реализован на МВС и обеспечивает решение в приемлемом для широкого класса прикладных задач диапазоне размерностей. Данное решение в естественной для задачи авиапожарного патрулирования лесов (и целого ряда других задач) формулировке получается соединением фрагментов, отвечающих внешним перемещениям, и маршрутов внутренних задач инспекции. Возможно, однако, использование и других типов внутренних работ, что отражено в общей постановке и публикациях, отмеченных в библиографии.

### Список литературы

1. Gutin G., Punnen A. P. The Traveling Salesman Problem and Its Variations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2007. 830 p.
2. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // АиТ. 1989. № 9. С. 3—34.
3. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // АиТ. 1989. № 10. С. 3—29.
4. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // АиТ. 1989. № 11. С. 3—26.
5. Bellman R. Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem // J. Assoc. Comput. Mach. 1962. N 9. P. 61—63.
6. Held M., Karp R. M. A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1962. N 10 (1). P. 196—210.
7. Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Экстремальная задача маршрутизации // Тр. ИММ УрО РАН. 14. № 3. 2008. С. 183—201.
8. Ченцов А. Г. Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423. № 3. С. 303—307.
9. Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Изв. вузов. Матем. 2010. № 6. 64—81.
10. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Ченцов П. А. Условия предшествования в одной задаче экстремальной маршрутизации с внутренними работами // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. 2010. Т. 10. С. 60—76.
11. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Ижевск: НИЦ "РХД", 2007. 238 с.
12. Kuratowski K., Mostowski A. Set theory. Polish scientific publishers, 1968. 417 p.
13. Григорьев А. М., Иванко Е. Е., Ченцов А. Г. Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера с внутренними работами: элементы параллельной структуры // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18. № 3. С. 101—124.
14. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. Introduction to Algorithms (1st ed.). MIT Press and McGraw-Hill, 1990.

УДК 629.1.03

**Е. С. Брискин**, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
dtm@vstu.ru,

**А. В. Малолетов**, канд. техн. наук, докторант,  
**А. М. Колесов**, аспирант,  
**В. А. Серов**, аспирант  
Волгоградский государственный  
технический университет

## О статически устойчивой походке шагающей машины с тремя сдвоенными ортогонально-поворотными двигителями\*

Рассматривается модульная шагающая машина "Ортоног", допускающая реконфигурацию своей кинематической схемы. Описываются допустимые походки и стили движения. Вводятся критерии запаса статической устойчивости: площадь области устойчивости и кратчайшее расстояние от геометрического центра корпуса до границ опорного многоугольника. Решается задача определения параметров регулярной полноопорной походки машины с использованием трех сдвоенных движителей, обеспечивающей прямолинейное поступательное движение корпуса с максимально возможным запасом статической устойчивости.

**Ключевые слова:** шагающая машина, модульная структура, реконфигурация, походка, шагающий движитель, управление движением

## Введение

Рассматривается модульная шагающая машина "Ортоног" (рис. 1, см. вторую сторону обложки), допускающая реконфигурацию своей кинематической схемы [1]. В базовой конфигурации шагающая машина оснащена четырьмя модулями сдвоенных ортогонально-поворотных (СОП) движителей (рис. 2). Однако в ряде эксплуатационных ситуаций могут функционировать не все движители [2], например, при движении по сильно пересеченной местности, когда стопы одного из движителей не взаимодействуют с грунтом, при выходе из строя некоторых приводов, при программной реконфигурации кинематической схемы машины.

Ось  $x$  (рис. 2) совпадает с продольной осью машины, а ось  $y$  — с поперечной. Расстояние между точками крепления движителей вдоль продольной оси определяет продольную базу машины, а вдоль поперечной — поперечную базу.

Каждый из модулей СОП движителей состоит из двух модулей ортогональных механизмов шагания и модуля поворотного привода. Модульный принцип предполагает возможность реконфигурации кинематической схемы машины путем как добавления или исключения модулей движителей, так и замены модулей механизмов шагания, входящих в движитель, например, на рычажные цикловые механизмы шагания [3—5].

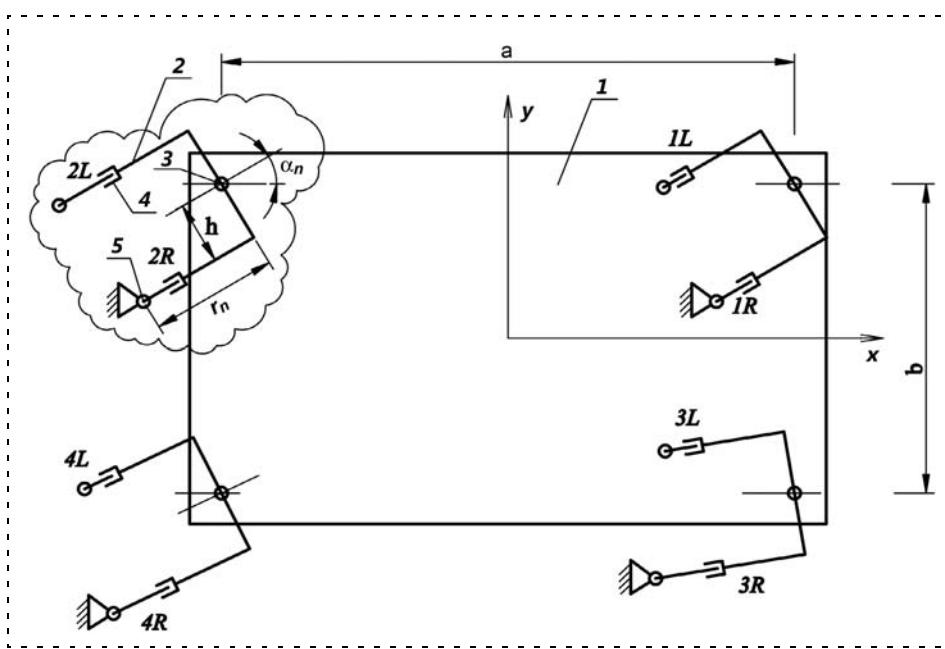


Рис. 2. Кинематическая схема шагающей машины:

1 — корпус; 2 — сдвоенный ортогонально-поворотный движитель; 3 — привод поворота; 4 — привод курсового движения (горизонтальный привод); 5 — привод адаптации (вертикальный привод)

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-08-00955-а.

Аналогично работе [6] задается следующая нумерация движителей по бортам машины: 1 и 2 — по левому борту, 3 и 4 — по правому.

Поворотный привод является общим для обоих механизмов шагания, входящих в движитель, и позволяет поворачивать плоскости механизмов  $i$ -го движителя относительно корпуса на угол  $-\pi \leq \alpha_n \leq \pi$ . Механизм шагания, который относительно направления продольной оси при  $\alpha_n = 0$  находится в движителе слева, обозначается символом  $L$ , а механизм, находящийся справа, — символом  $R$ . Например, левый механизм первого движителя обозначается  $1L$ .

Основным типом походки для машины с СОП движителями является полноопорная походка [1] — походка, при которой в каждый момент времени хотя бы один из механизмов шагания каждого движителя находится в фазе опоры. При движении машины "Ортоног" с опорой на все четыре движителя гарантированно сохраняется положительный запас статической устойчивости — кратчайшее расстояния от проекции центра масс машины на горизонтальную плоскость до границы опорного многоугольника [7].

В работе [1] показано, что при движении с опорой на три СОП движителя возможно обеспечить кинематически точную полноопорную походку и произвольное пространственное программное движение корпуса машины, но одной из основных проблем практической реализации такого движения является необходимость контроля за положением опорного многоугольника относительно центра масс машины.

Ставится задача определения параметров регулярной полноопорной походки шагающей машины с тремя СОП движителями, обеспечивающей прямолинейное поступательное движение корпуса с максимально возможным запасом статической устойчивости.

### Полноопорные походки машины с тремя СОП движителями

Одним из способов символического обозначения состояния машины является способ, когда находящийся в фазе опоры механизм шагания обозначается символом 0, а механизм, находящийся в фазе переноса, — символом 1. Последовательность состояний определяет походку шагающей машины.

В случае полноопорной походки состояние каждого движителя, включающего в себя два механизма шагания, будет меняться из {01} в {10} и наоборот. Если продолжительности фаз опоры и переноса одинаковы и разность фаз между движителями равна нулю, то переступание на всех движителях происходит одновременно, и состояние механизмов одновременно меняется на противоположное. Такую походку можно определить как синхронную.

При отключении одного из движителей его механизмы шагания фиксируются в поднятом положении и формально находятся в фазе переноса.

Состояние такого движителя обозначается символами {11}.

Для машины, использующей три работающих в полноопорном режиме сдвоенных движителя, существуют четыре синхронных полноопорных походки. За счет симметричного расположения движителей на корпусе машины "Ортоног" не существенно, какой именно из них будет отключен. В качестве примера ниже записаны синхронные полноопорные походки машины при отключении движителя номер 2:

$$q_1 = \begin{cases} 01110101 \\ 10111010 \end{cases}; q_2 = \begin{cases} 01110110 \\ 10111001 \end{cases};$$

$$q_3 = \begin{cases} 01111001 \\ 10110110 \end{cases}; q_4 = \begin{cases} 10110101 \\ 01111010 \end{cases}. \quad (1)$$

На рис. 3 показана диаграмма синхронной полноопорной походки  $q_1$ .

В рамках каждой походки могут быть реализованы различные стили движения. В частности, прямолинейное движение центра корпуса может быть организовано двумя различными стилями: "линейным" и "вёсельным".

При "линейном" стиле движения направляющие приводов курсового движения механизмов шагания ориентированы параллельно направлению движения корпуса, поворотные приводы зафиксированы, и перемещение корпуса осуществляется за счет работы курсовых приводов (рис. 4, а, б).

При "вёсельном" стиле движения (рис. 4, в, г, д, е) движители не остаются параллельными направлению движения корпуса. Направляющие приводов курсового движения каждого движителя совершают возвратно-вращательные движения. За счет согласованной работы курсовых и поворотного приводов стопы движутся относительно корпуса по прямолинейным траекториям. При этом стопа одного из механизмов шагания каждого движителя занимает крайнее дальнее положение от оси поворотного привода, проходит больший путь, и при опоре на нее машина осуществляет прямой ход. Стопа же второго механизма шагания занимает крайнее ближнее к оси поворота положение, проходит меньший путь, и при опоре на нее машина осуществляет

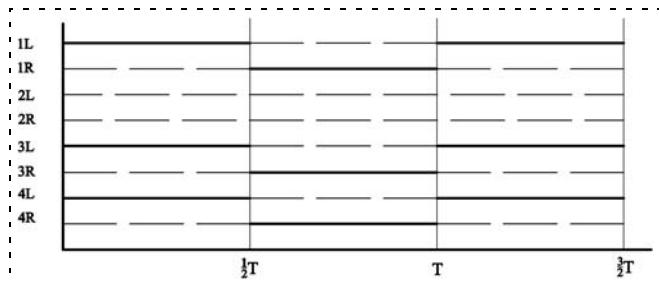


Рис. 3. Диаграмма регулярной полноопорной походки для трех СОП движителей. Сплошные линии — механизм шагания в фазе опоры, штриховые — в фазе переноса,  $T$  — период

обратный ход. Движения механизмов шагания, таким образом, напоминают движения вёсел у лодки, с той только разницей, что контакт с опорной поверхностью сохраняется как при прямом, так и при обратном ходе.

На рис. 4 показаны реализации "линейного" и "вёсельного" стилей для машины с четырьмя сдвоенными движителями, но реализация этих стилей возможна и при отключении одного из движителей. Поскольку отключение приводов может быть незапланированным, а требуемые для обеспечения устойчивости положения приводов относительно

корпуса машины при движении на трех и четырех движителях могут отличаться, то отдельного рассмотрения требует задача вывода корпуса и движителей машины в требуемое положение при отключении одного из движителей. Имеющихся у трех движителей степеней свободы не достаточно для осуществления одновременно произвольного движения корпуса и механизмов шагания, находящихся в опоре. Поэтому переход к движению с опорой на три движителя может осуществляться с проскальзыванием стоп по грунту. А в некоторых случаях возможно также использование для опоры заблокированных механизмов шагания четвертого движителя.

"Линейный" стиль движения является предпочтительным, так как с его помощью можно организовать прямолинейное движение с постоянной скоростью или со скоростью, изменяющейся по произвольному закону, в то время как "вёсельный" стиль движения из-за наличия фаз обратных ходов такой свободы не дает.

Синхронная полноопорная походка "линейным" стилем характеризуется рядом параметров, среди которых следует выделить параметры, влияющие на запас статической устойчивости: угол  $\alpha$  между направлением движения и продольной осью машины, минимальная  $r_{\min}$  и максимальная  $r_{\max}$  длины выдвижения линейного курсового привода (рис. 5), взаимная ориентация движителей.

Угол  $\alpha$  изменяется в диапазоне от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Перемещения линейного курсового привода ограничены конструктивно значениями, обозначенными  $[r_{\min}]$  и  $[r_{\max}]$ . Программные ограничения, в свою очередь, могут варьироваться в диапазонах:  $r_{\min}$  — от  $[r_{\min}]$  до  $r_{\max}$ , а  $r_{\max}$  — от  $r_{\min}$  до  $[r_{\max}]$ . Разность между  $r_{\max}$  и  $r_{\min}$  определяет длину шага машины.

Взаимная ориентация движителей — параметр, принимающий дискретные значения в зависимости от положения направляющих курсовых приводов движителей относительно продольной оси машины. Для реализации "линейного" стиля движители должны быть ориентированы параллельно направлению движения машины. Однако таких ориентаций может быть две, отличающихся на  $\pi$  относительно друг друга. На рис. 6 показаны варианты взаимной ориентации движителей.

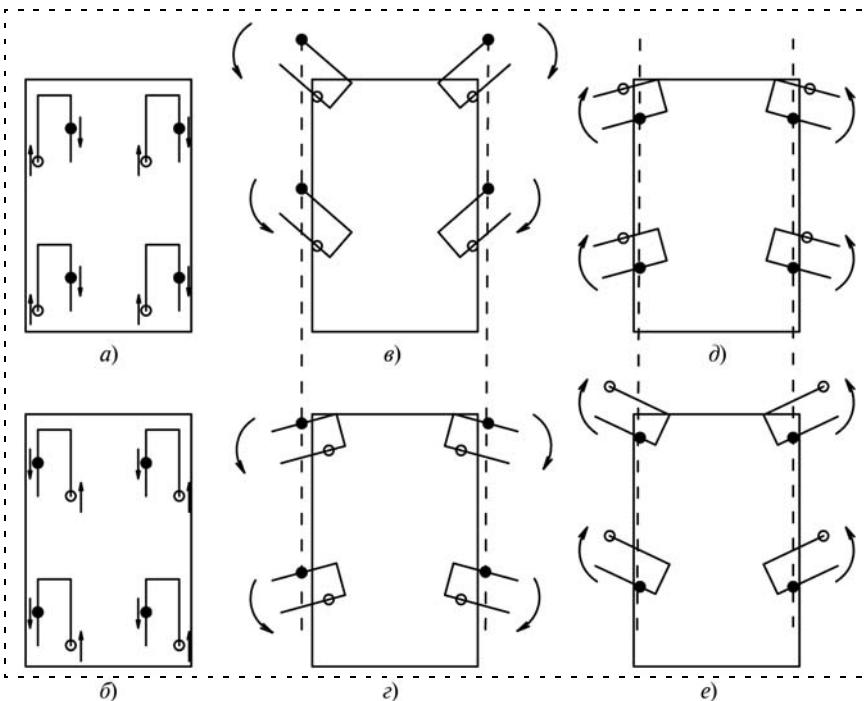


Рис. 4. Движение "линейным" (а, б) и "вёсельным" (в, г, д, е) стилями. Темными

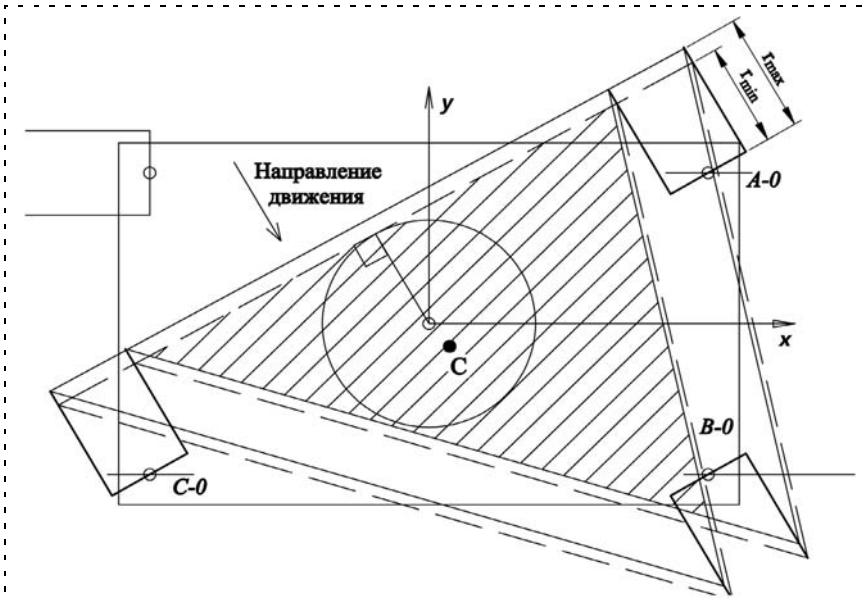


Рис. 5. Область устойчивости

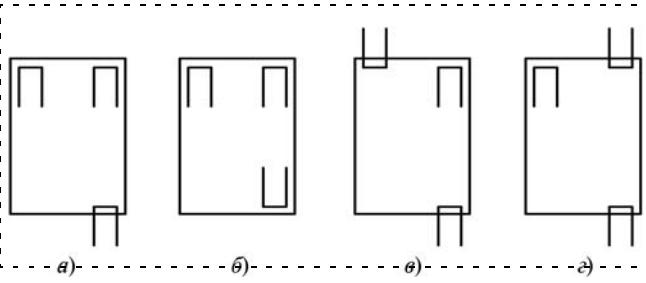


Рис. 6. Варианты взаимной ориентации движителей

Движители условно показаны в положениях 0 и  $\pi$  относительно корпуса, что соответствует движению вдоль продольной оси машины. Для реализации прямолинейного движения под углом  $\alpha$  к продольной оси все движители должны быть повернуты на соответствующий угол.

Обозначим символом 0 движитель, ориентированный по направлению движения, символом  $\pi$  — движитель, ориентированный против направления движения, а прочерком — отключенный движитель. Тогда ориентация движителей, показанная на рис. 6, a кодируется выражением  $\{0, -, 0, 0\}$ , на рис. 6, б — выражением  $\{0, -, 0, \pi\}$  и т. д.

Такая система обозначений является избыточной, так как инвертированное выражение (получающееся путем замены 0 на  $\pi$  и наоборот) в действительности кодирует то же состояние, что и исходное выражение. Например, состояние  $\{0, -, 0, 0\}$  при некотором произвольном угле  $\alpha$  соответствует состоянию  $\{\pi, -, \pi, \pi\}$  при углах  $\alpha \pm \pi$ . Следовательно, рассматривать нужно только четыре случая взаимной ориентации движителей, показанные на рис. 6.

Таким образом, изучению подлежат по четыре случая взаимной ориентации движителей для каждой из четырех "линейных" синхронных полноопорных походок (1) — всего 16 комбинаций. Варьируя  $\alpha$ ,  $r_{min}$ ,  $r_{max}$  в указанных выше пределах, можно определить значения параметров, при которых будет достигаться наибольший запас статической устойчивости.

#### Критерии оценки запаса статической устойчивости

При движении машины с полноопорной походкой на трех движителях опорный многоугольник представляет собой треугольник, форма, размеры и положение относительно корпуса которого меняются с течением времени.

Положения вершин  $\vec{r}_n$  опорных треугольников в системе отсчета, связанной с корпусом машины, определяются по общей формуле:

$$\begin{aligned}\vec{r}_n &= \vec{r}_{o.p.} \pm \vec{h}_n + \vec{r}_n; \\ \vec{h}_n &= -h \sin \alpha_n \vec{i} + h \cos \alpha_n \vec{j}; \\ \vec{r}_n &= -r_n \cos \alpha_n \vec{i} - r_n \sin \alpha_n \vec{j},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\vec{r}_{o.p.}$  — радиус-вектор оси поворотного привода;  $h$  — половина расстояния между плоскостями механизмов шагания в одном движителе; плюс перед  $\vec{h}_n$  соответствует левому механизму шагания, минус — правому механизму;  $\alpha_i$  принимает значения  $\alpha$  или  $\alpha \pm \pi$  в зависимости от исследуемой ориентации движителей;  $r_n$  принимает значения  $r_{min}$  или  $r_{max}$  в зависимости от ориентации и положения опорного треугольника;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  — орты координатных осей  $x$ ,  $y$ .

Область пересечения опорных треугольников в пределах одного цикла определяет область устойчивости. Согласно свойству пересечения выпуклых множеств область устойчивости всегда представляется собой выпуклый многоугольник. В рассматриваемом случае область устойчивости может быть получена в результате взаимопересечения четырех треугольников, соответствующих крайним положениям: началу и концу шага левыми механизмами и началу и концу шага правыми механизмами. В качестве примера на рис. 5 показано движение машины под углом  $60^\circ$  к продольной оси с ориентацией  $\{0, -, \pi, 0\}$ . Штриховыми линиями обозначены опорные треугольники в начале, а сплошными линиями — в конце шага. Область устойчивости заштрихована.

Центр масс машины в общем случае не только не совпадает с геометрическим центром корпуса, но и меняется в результате перемещения механизмов шагания в зависимости от перевозимого груза и при работе навесного оборудования. Поскольку точное положение центра масс заранее не известно, то использовать кратчайшее расстояние до границ опорного многоугольника от центра масс машины в качестве критерия запаса статической устойчивости не целесообразно.

Для оценки запаса статической устойчивости вводятся два параметра: площадь области устойчивости и кратчайшее расстояние от геометрического центра корпуса до границ опорного многоугольника. Первый параметр характеризует размер пространства, где может находиться центр масс без потери устойчивости, а второй — соответствует классическому определению запаса статической устойчивости [7] для идеального случая равномерной нагрузки и безмассовых движителей.

Для анализа результатов вводятся безразмерные относительные величины: относительная площадь и относительное расстояние.

Относительная площадь  $\chi$  определяется как отношение площади области устойчивости к площади прямоугольника, образованного продольной и поперечной базами машины:

$$\chi = S/(ab), \quad (3)$$

где  $S$  — площадь опорного треугольника;  $a$ ,  $b$  — соответственно продольная и поперечная базы.

Относительное расстояние  $\zeta$  — отношение удвоенного кратчайшего расстояния  $R$  от геометрического центра корпуса до границ области устойчивости к меньшему из значений продольной и поперечной баз машины:

$$\zeta = 2R/\min(a, b). \quad (4)$$

### Результаты математического моделирования

Алгоритм вычисления критериев статической устойчивости для заданного набора параметров состоит в последовательном выполнении итераций:

- определяются координаты вершин опорных треугольников согласно выражению (2) для крайних (начальных и конечных) положений движителей на каждом шаге;
- определяется область устойчивости как область взаимного пересечения опорных треугольников;
- определяется площадь области устойчивости и вычисляется относительная площадь по формуле (3);
- если геометрический центр корпуса находится внутри области устойчивости, то определяются

расстояния от центра до границ области устойчивости, выбирается из них минимальное значение, вычисляется относительное расстояние по формуле (4);

- если геометрический центр корпуса находится внутри области устойчивости, то делается вывод о недопустимости движения с рассматриваемыми параметрами походки.

Для каждой комбинации ориентации движителей и "линейной" синхронной полноопорной походки вычисляются зависимости критериев статической устойчивости от угла  $\alpha$  для различных длин шагов.

Числовые значения параметров соответствуют параметрам разработанной машины "Ортоног":  $a = 2,2$  м,  $b = 1,6$  м,  $h = 0,2$  м,  $[r_{\max}] = 0,655$  м,  $[r_{\min}] = 0,200$  м. Максимальное программное выдвижение курсового привода принято равным максимальному конструктивному значению  $r_{\max} = 0,655$  м, а минимальное выдвижение  $r_{\min}$  варьируется в пределах от 0,200 до 0,600 м. Таким образом, длина шага изменяется в пределах от 0,055 до 0,455 м.

Анализ результатов показывает, что с уменьшением длины шага относительная площадь и расстояние увеличиваются, а максимальные значения наблюдаются при соблюдении условий:

- два движителя ориентированы одинаково, а третий — в противоположном направлении;
- фаза опоры на грунт реализуется при максимальном удалении стоп от оси поворотного движителя.

В качестве примера на рис. 7 и 8 показаны зависимости относительной площади и относительного расстояния от угла  $\alpha$  при движении с походкой  $q_3$  (1) и с ориентацией движителей  $\{0, -, \pi, 0\}$ .

В зависимости от параметров машины может существовать диапазон изменения угла  $\alpha$ , в котором площадь области устойчивости достигает нуля, и, следовательно, статически устойчивое движение машины невозможно при любом положении центра масс и любых значениях длины шага. Например, для машины "Ортоног" при походке  $q_3$  и ориентации движителей  $\{0, -, \pi, 0\}$  такой диапазон лежит в пределах от 1,5 до 2,9 рад (рис. 7).

В зависимости от положения центра масс статически устойчивое движение может быть невозможно даже при значительной площади устойчивости. Например, при совпадении центра масс с геометрическим центром корпуса машины "Ортоног" статически устойчивое движение

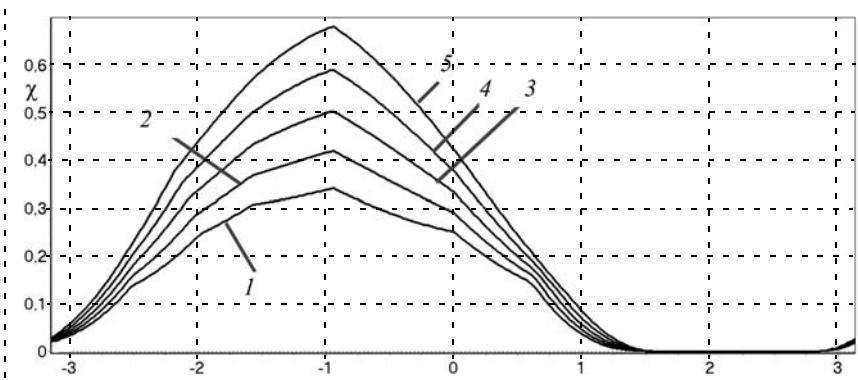


Рис. 7. Относительная площадь опорной поверхности в зависимости от угла поворота движителей для различных длин шагов. Длина шага (м):  
1 — 0,455; 2 — 0,355; 3 — 0,255; 4 — 0,155; 5 — 0,055

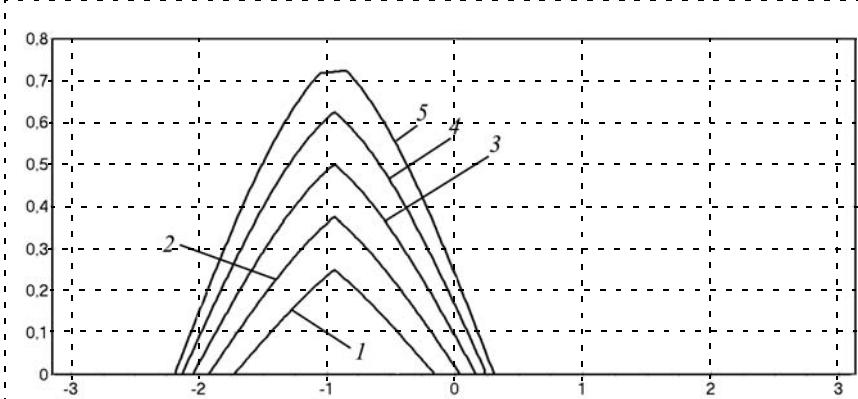


Рис. 8. Относительный расстояние в зависимости от угла поворота движителей. Длина шага (м):  
1 — 0,455; 2 — 0,355; 3 — 0,255; 4 — 0,155; 5 — 0,055

возможно только в диапазоне значений угла  $\alpha$  от -2,2 до 0,3 рад или в более узком — в зависимости от длины шага (рис. 8).

При различных углах  $\alpha$  и различных длинах шагов кратчайшее расстояние от центра масс до границ многоугольника области устойчивости определяется различными его гранями. Это влияет на значение угла  $\alpha$ , при котором достигается максимальный запас статической устойчивости. В рассматриваемом примере для длин шагов от 0,155 до 0,455 м максимальное относительное расстояние  $\zeta$  (рис. 8, кривые 1...4) наблюдается при  $\alpha = -0,94$  радиан, а для длины шага 0,055 м (рис. 8, кривая 5) — при  $\alpha = -0,85$  радиан.

## Выводы

При отключении одного из четырех движителей шагающей машины "Ортоног" машина может продолжать движение, сохраняя статическую устойчивость.

При движении на трех сдвоенных движителях реализуемы четыре различные полноопорные походки. Для каждой из них возможно движение машины различными стилями, наиболее предпочтительным из которых для машины "Ортоног" является "линейный" стиль.

Максимальных значений критерии запаса статической устойчивости достигают при движении с минимально возможной длиной шага, реализации фазы опоры на максимально возможном удалении

от оси поворотного привода и при использовании тех вариантов взаимной ориентации движителей, в которых один из движителей развернут противоположно другим.

Разработанные методы оценки запаса статической устойчивости планируется использовать в системе управления шагающей машины "Ортоног" для реализации алгоритмов управления при выходе из строя или отключении одного из движителей.

## Список литературы

1. Малолетов А. В., Брискин Е. С., Колесов А. М. О походках реконфигурируемой модульной шагающей машины с ортогонально-поворотными движителями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 5. С. 50—55.
2. Брискин Е. С., Колесов А. М., Малолетов А. В., Серов В. А. Об определении предельно допустимых нагрузок, действующих на ортогонально-поворотные движители // Справочник. Инженерный журнал. 2010. № 9. С. 19—23.
3. Шагающая машина "Восьминог" / Е. С. Брискин, В. В. Чернышев, А. В. Малолетов и др. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 5. С. 48—49.
4. Концепция проектирования шагающих машин / Е. С. Брискин, В. В. Чернышев, В. В. Жога и др. // Наука — производству. 2005. № 1. С. 33—38.
5. Брискин Е. С., Чернышев В. В., Малолетов А. В., Жога В. В. The Investigation of Walking Machines with Movers on the Basis of Cycle Mechanisms of Walking // Proc. of the 2009 IEEE International Conf. on Mechatronics and Automation (Changchun, Jilin, August 9—12, 2009). 2009. Р. 3631—3636.
6. Брискин Е. С. Об общей динамике и повороте шагающих машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. № 6. 1997. С. 33—39.
7. Охочимский Д. Е., Голубев Ю. Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука, 1984. 312 с.

УДК 62-523.8; 614.847

**А. А. Тачков**, аспирант,  
МГТУ имени Н. Э. Баумана,  
науч. сотр., ООО НПФ "Спецсистемы", г. Тверь,  
alextachkov@yandex.ru

## Применение метода пропорционального наведения для управления мобильным разведывательным роботом в условиях пожара

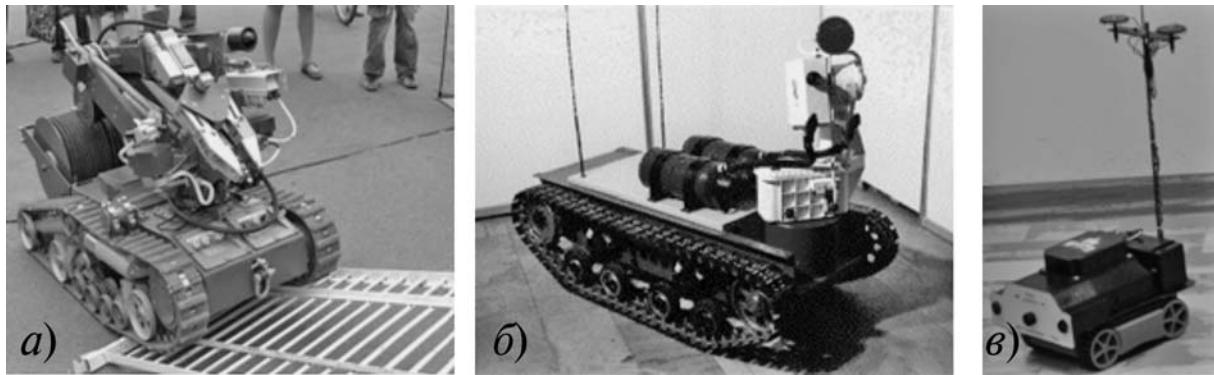
Рассматривается применение метода пропорционального наведения в задаче навигации пожарного разведывательного робота гусеничного типа в условиях закрытого пожара. Анализируется движение робота с учетом его динамических свойств, рассматривается схема совмещения тактического и исполнительного уровней системы управления. Приводятся результаты экспериментальной проверки системы управления роботом методом компьютерного моделирования.

**Ключевые слова:** метод пропорционального наведения, мобильный пожарный робот, скалярное температурное поле

## Введение

В настоящее время находят применение мобильные робототехнические комплексы [1] для разведки и ликвидации очагов возгораний закрытых помещений в условиях высокого теплового воздействия.

Под закрытым пожаром понимается пожар в помещении, которому соответствует сильное задымление и неопределенность местоположения очага пожара, что затрудняет его поиск. Применяемые роботизированные комплексы разведки (рис. 1 *a, б*) для повышения проходимости имеют гусеничный тип шасси, оснащаются телевизионной системой и, как правило, дистанционно управляются оператором. В условиях пожара при таком способе управления, когда оператор непосредственно задает все перемещения робота, оператор испытывает высокую эмоциональную нагрузку. К тому же не всегда ясно, в какую сторону направлять робот. По оценкам отечественных и зарубежных специалистов [2, 3] при поиске очага возгорания пожарными в условиях сильного задымления скорость их целенаправленного продвижения не превышает 5...12 мет-



**Рис.1. Роботизированные разведывательные комплексы:**

*а* — МРК-РП (МГТУ им. Н. Э. Баумана); *б* — мобильный робот, разработанный ЦНИИ РТК; *в* — физическая модель мобильного робота (ООО НПФ "Спецсистемы")

ров в минуту, что существенно увеличивает время обнаружения места (очага) возгорания. Поэтому актуальной задачей является применение разведывательных роботов для автоматизированного поиска очага возгорания в системе связанных между собой помещений.

#### Пропорциональное наведение мобильного робота на очаг пожара

Подобная система может рассматриваться в виде гидравлической схемы [4], узлы которой моделируют помещения здания, а связи — пути распространения продуктов горения и теплопереноса.

Согласно экспериментальным данным [2] при равной удаленности двух точек пространства от очага пожара на высоте 1,5 метров температура дыма будет больше в той точке, где при прочих равных условиях на пути движения дыма площадь проемов больше, при этом последние могут служить для ро-

бота опорными точками. В этом случае задача перемещения робота к очагу возгорания может быть формализована как задача самонаведения в опорную точку по градиенту температуры в скалярном температурном поле, имеющем место при закрытом пожаре. Особенностью задачи является то, что опорная точка непосредственно не наблюдаема.

Отметим, что идея движения робота по градиенту при поиске некоторого источника не нова и рассматривалась в работах зарубежных исследователей [5, 6]. Наибольшую проработку вопрос навигации робота при поиске источника газа в помещении получил в работе [7]. Авторами решалась кинематическая задача без учета динамических свойств робота и измерительной системы. Рассмотрим задачу наведения мобильного разведывательного робота по градиенту температуры для условий пожара (рис. 2).

Пусть направление градиента температуры задано в виде угла  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , ориентированного вдоль возрастающих значений градиента. В соответствии с рис. 2 справедливо выражение:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \theta(t) + \eta(t), \quad (1)$$

где  $\eta(t)$  — угол упреждения.

Так как опорная точка неподвижна, то кинематические уравнения робота (уравнения наведения), входящие в выражение (1), имеют вид

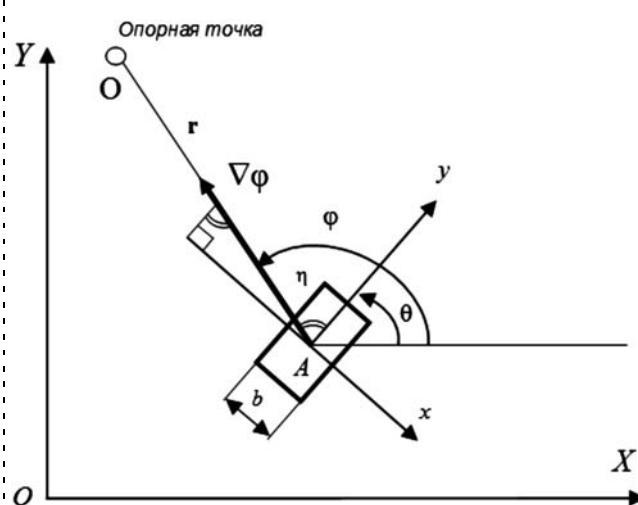
$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -v \cos(\phi - \theta); \\ r \frac{d\phi}{dt} = v \sin(\phi - \theta), \end{cases} \quad (2)$$

где  $v$  — линейная скорость робота (м/с).

Дифференцируя выражение (1) по времени, получим следующую оценку для скорости изменения угла упреждения:

$$\frac{d\eta}{dt} = v \mathbf{u}(\theta) \nabla \phi - \omega + \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $\nabla \phi$  — градиент температуры в точке месторасположения робота в направлении  $\phi$  (рад/м),  $\omega$  —



**Рис. 2. Наведение робота в опорную точку** ( $r$  — радиус-вектор,  $b$  — ширина колеи робота (расстояние между датчиками температуры),  $\theta$  — текущее значение угла поворота робота в абсолютной системе координат  $OXY$ ,  $\nabla\phi$  — градиент температуры)

угловая скорость робота (рад/с);  $\mathbf{u}(\theta)$  — единичный вектор, повернутый на угол  $\theta$ .

Из выражений (2) и (3) следует [7], что скорость вращения линии визирования  $OA$  равна

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v \sin \eta}{r} = v \mathbf{u}(\theta) \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Слагаемое  $\partial \phi / \partial t$  будем рассматривать как аддитивную ошибку, вызываемую неоднородностью температурного поля окружающей среды.

Условие наведения робота в опорную точку требует наложения дополнительной кинематической связи, определяющей закон наведения. Данное условие может быть записано в виде  $r = \frac{2K \sin \eta}{\omega}$  [8].

Тогда,

$$\omega = \frac{2K \sin \eta}{r}, \text{ или } \omega = K_h \dot{\phi} = K_h \frac{d\phi}{dt}, \quad (4)$$

где  $K_h = 2K$  — коэффициент пропорционального наведения,  $K > 0$ . Таким образом, в явном виде определен закон пропорционального наведения: угловая скорость робота должна быть пропорциональна угловой скорости вращения линии визирования.

В условиях пожара распределение температуры  $T$  в зависимости от расстояния  $r$ , отсчитываемого от опорной точки (в том числе и в помещениях, смежных с пожаром), определяется законом струйного течения [9]:

$$T(r) - T_0 = \frac{(T_{o.t} - T_0) H^{0,62}}{(H + r)^{0,62}}, \quad (5)$$

где  $T_0$  — температура в координате начала движения робота (К);  $T_{o.t}$  — температура набегающего потока в проеме (К);  $H$  — высота помещения (м).

Когда значения температуры по бортам робота не слишком различаются, то разность температур, фиксируемая измерительными преобразователями, равна  $\Delta T \approx -b \left| \frac{dT}{dr}(r) \right| \sin \eta$ . Из выражения (5) имеем

$$\frac{dT}{dr}(r) = -\frac{0,62}{r+H} (T(r) - T_0).$$

Подставляя полученные выражения в (4) и учитывая, что  $\frac{dT}{dr} = \frac{1}{v} \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{1}{v} \dot{T}$ , после ряда преобразований можно записать

$$\omega = \frac{K_i v^2 \Delta T}{b(0,62(T(r) - T_0)v + H\dot{T})}, \quad (6)$$

где  $b$  — расстояние между датчиками температур (ширина шасси робота);  $T(r)$  — температура в точке  $A$  (К);  $\dot{T}$  — скорость изменения температуры во времени (К/с). Уравнение (6) представляет собой

зависимость угловой скорости робота от геометрического расположения измерительных средств и характеристик пожара — скалярного температурного поля.

### Система управления роботом

Следует учитывать, что при перемещении к очагу пожара роботу-разведчику требуется преодолевать препятствия, выполнять маневры при проезде через проем с учетом его габаритных размеров. В связи с этим предлагается реализовать двухуровневую систему управления роботом, включающую тактический и исполнительный уровни (рис. 3).

Тактический уровень управления строится на базе контроллера нечеткой логики. Применение контроллера нечеткой логики в полной мере позволяет учесть тактику перемещений робота, включая наряду с правилами пропорционального наведения правила безопасного движения, такие как: плавный откат от препятствий, если их не удается обойти; проезд через проем, если такой маневр позволяют габаритные размеры последнего. Предлагается, что тактический уровень может быть совмещен с телевизионной системой объемного зрения [10]. Введение критериев безопасности и самонаведения позволяет добиться компромиссного решения при перемещении робота — осуществить безопасный проезд к очагу пожара. Примеры подобных правил контроллера тактического уровня представлены ниже:

1. ЕСЛИ "расстояние до препятствия прямо по курсу" мало И "расстояние до препятствия справа" мало ТО "рекомендуемая линейная скорость" нулевая И "рекомендуемая угловая скорость" положительная большая.

2. ЕСЛИ "оценка скорости вращения линии визирования" нулевая ТО "рекомендуемая угловая скорость" нулевая.

3. ЕСЛИ "оценка скорости вращения линии визирования" положительная ТО "рекомендуемая угловая скорость" положительная средняя и т. д.

Выходными сигналами нечеткого контроллера тактического уровня, как это следует из рис. 3 и структуры базы правил, являются сигналы "рекомендуемая линейная скорость"  $v_3$  и "рекомендуемая угловая скорость"  $\omega_3$ , которые поступают на исполнительный уровень, включающий в себя приводную часть гусеничного робота с регулятором угловой скорости поворота.

Динамическая модель робота с гусеничным шасси, приводимого в движение двумя двигателями постоянного тока через редукторы, с учетом допущения о малой скорости изменения момента вращения двигателей имеет вид [11, 12]

$$\begin{cases} T_v \dot{v} + v = K_v U_{\text{лин}} - K_{fv} F_{\text{с.к.}} \\ T_\Omega \dot{\omega} + \omega = K_\Omega U_\omega - K_{f\Omega} M_c, \end{cases} \quad (7)$$

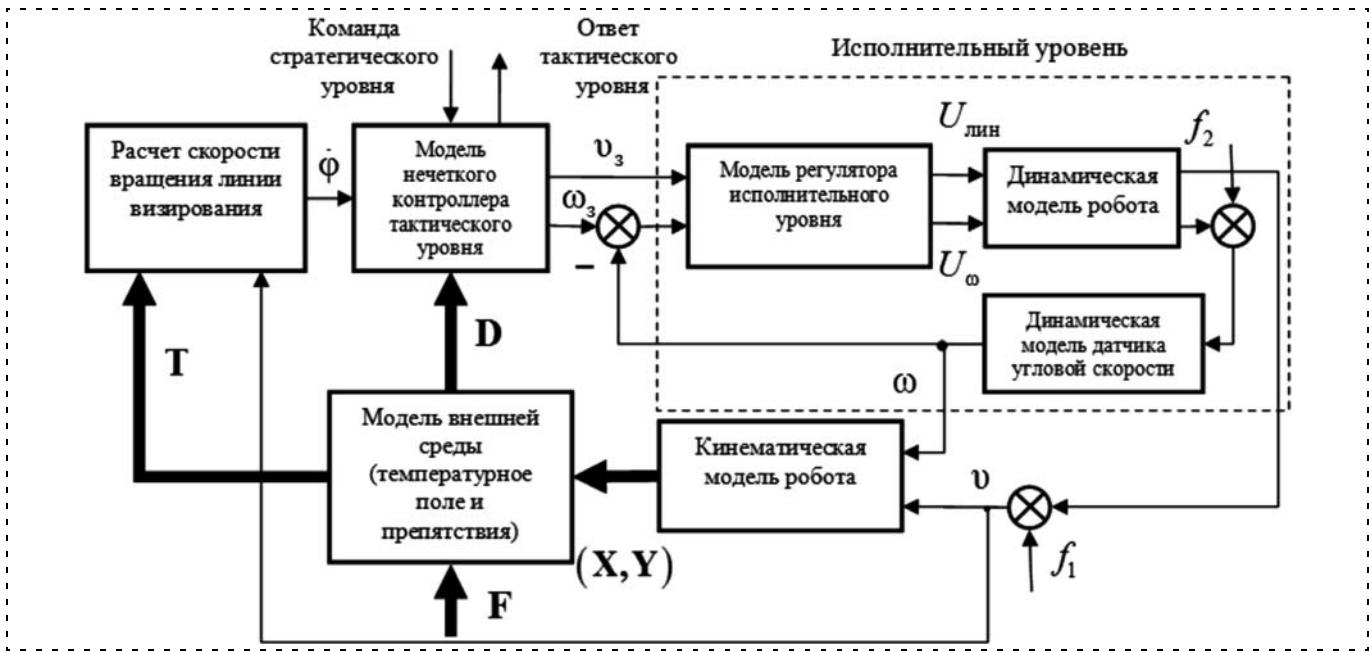


Рис. 3. Схема тактического и исполнительного уровней ( $F$  — вектор возмущений, имитирующий нестационарность температурного поля;  $T$  — вектор измеренных значений температур;  $D$  — вектор дальностей до препятствий;  $XY$  — вектор координат датчиков температуры в глобальной системе координат;  $f_1, f_2$  — возмущающие воздействия)

где  $T_v, T_\Omega$  — постоянные времени скорости и угловой скорости соответственно;  $K_v, K_\Omega$  — коэффициенты передачи по каналу управления скоростью и угловой скоростью;  $K_{fv}, K_{f\Omega}$  — коэффициенты передачи по возмущающему воздействию;  $F_{c,k}$  — сила сопротивления качению;  $M_c$  — момент сопротивления повороту;  $U_{lin}$  — напряжение, обеспечивающее линейную скорость робота;  $U_\omega$  — напряжение, управляющее угловой скоростью.

Заметим, что данная модель является упрощенной моделью динамики и не учитывает бокового проскальзывания робота и смещения эксцентричности поворота, но отражает сущность переходных процессов изменения линейной и угловой скоростей. В моменте сопротивления  $M_c$  учитывается неравномерность распределения веса робота по поверхности гусеницы и зависимость  $M_c$  от радиуса поворота робота и вида поверхности, по которой происходит движение робота. Так как у модели (7) нет неустойчивых нулей и она является инвертируемой, то использование технологии аффинного синтеза [13] позволяет получить ПИ-закон регулирования, обеспечивающий желаемую передаточную функцию замкнутой системы в виде апериодического звена первого порядка с постоянной времени  $T_k$ .

### Исследование системы управления исполнительного уровня

Исследование системы управления исполнительного уровня проводили методами математического моделирования. Параметры математической модели были определены по техническим характе-

ристикам натурной модели (см. рис. 1, в): масса робота  $m = 1,26$  кг, ширина колеи  $B = 0,105$  м, координата центра тяжести по продольной оси робота относительно геометрического центра шасси  $a = 0,047$  м, радиусы ведущих колес  $r = 0,023$  м.

Робот оснащен двумя двигателями постоянного тока (ДПТ) QX-FC-280-18165. Паспортные характеристики двигателя: номинальное напряжение  $U_{nom} = 12$  В, угловая скорость холостого хода  $\omega_{x,x} = 15000$  мин $^{-1}$ , номинальный момент  $M_{d,n} = 3,5$  МН·м, индуктивность якоря  $L_a = 1,3$  мГн (измерения проведены измерителем иммитанса E7-21), сопротивление якоря  $R = 2,95$  Ом (измерения проведены измерителем иммитанса E7-21), передаточное число редуктора  $i = 80$ .

Расчетные значения коэффициентов математической модели динамики движения МПР:  $T_v \approx 0,07$  с,  $K_v \approx 0,038$  м/В·с,  $K_\Omega = 0,72$  В $^{-1}$ ·с $^{-1}$ ,  $T_\Omega \approx 0,13$  с (постоянную времени угловой скорости поворота определяли по переходной характеристике),  $J \approx 0,006$  кг·м $^2$ ,  $K_{fv} = 0,055$ ,  $K_{f\Omega} = 20$ ,  $M_c = 0,023\mu(R_\Pi) = K_p\mu(R_\Pi)$  Н·м,  $\mu_{max} = 0,2...0,5$  (в зависимости от типа поверхности),  $R_\Pi$  — радиус поворота.

Коэффициент  $\mu_{max}$  определяли с помощью динамометра при боковом скольжении робота на различных поверхностях в помещениях.

В результате расчета коэффициентов ПИ-регулятора для приведенных параметров математической модели исполнительного уровня и единственного параметра настройки  $T_k = 0,1$  с (влияющего на подавление выходных возмущений) были получены следующие значения: пропорциональная со-

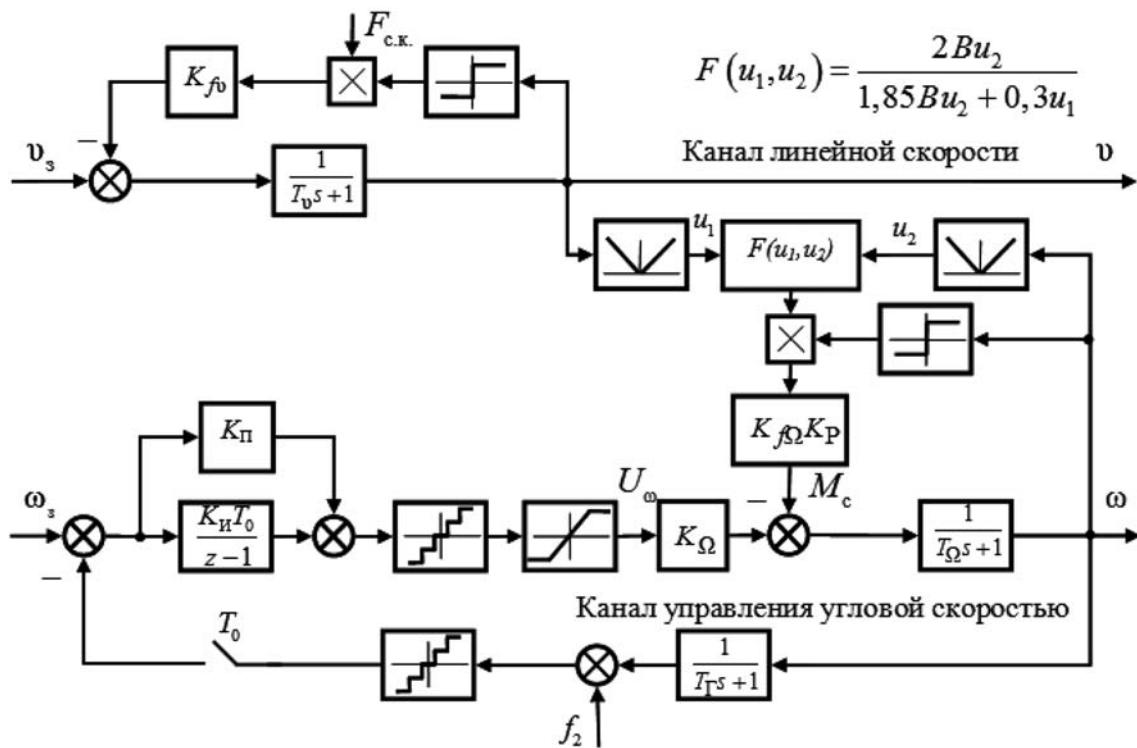


Рис. 4. Структурная схема модели системы управления исполнительного уровня

ставляющая  $K_p = 1,8$ , интегральная составляющая  $K_i = 14$ .

Датчик угловой скорости (ДУС) LY530ALH моделировали апериодическим звеном первого порядка с постоянной времени  $T_\Gamma = 0,0016$  с, рассчитанной по паспортным данным датчика.

В модели следящей системы (рис. 4) учитывается влияние шума измерения  $f_2$  с дисперсией  $0,00027$  рад $^2$ /с $^2$  и периода квантования  $T_0 = 0,01$  с цифровой части натурной модели. Как показал анализ шумов, проведенный на натурной модели, основной их источник — электромагнитные помехи, создаваемые ДПТ и наводимые на соединительный кабель ДУС с регулятором. Амплитуда шума при этом не превышает значения, равного двум разрядам АЦП (0,05 рад/с).

На рис. 5 представлены результаты моделирования работы системы управления, проведенные как на математической, так и на натурной модели. Для соблюдения масштаба в обоих случаях данные для построения графиков считывали с интервалом 20 мс.

По результатам серии модельных экспериментов был сделан вывод, что переходный процесс в рамках принятого допущения о малой скорости изменения моментов двигателей близок к апериодическому, а время переходного процесса изменяется в несколько раз (от 0,3 до 1,5 с) в зависимости от момента сопротивления повороту, что при расчетах позволяет аппроксимировать динамику канала управления угловой скоростью апериодическим звеном первого порядка.

#### Моделирование пропорционального наведения в среде MATLAB

Исследование совместной работы исполнительного и тактического уровней системы управления, реализующих метод пропорционального наведения, проводили путем моделирования в пакете MATLAB с использованием расширения *Fuzzy Logic* для моделирования тактического уровня системы управления и *Simulink3D* для визуализации процесса перемещения робота. Реальный пожар является сложным нестационарным во времени и трехмерным пространством физическим явлением, и его моделирование в уравнениях Навье—Стокса [14] требует очень больших машинных затрат. Поэтому в качестве модели пожара в декартовых координатах принимали двумерное уравнение теплопроводно-

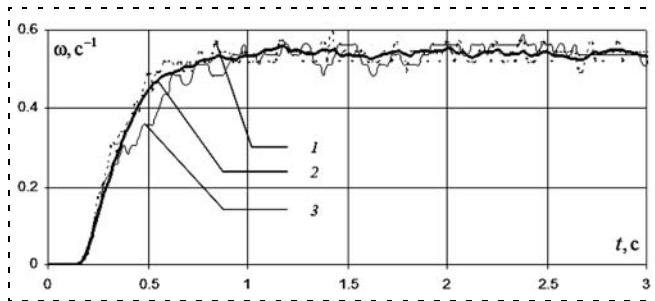


Рис. 5. Переходный процесс при повороте робота на месте при  $\omega_{зад} = 0,54$  рад/с (1 — фактический переходный процесс изменения угловой скорости математической модели, 2 — реальный переходный процесс изменения угловой скорости математической модели, 3 — фактический переходный процесс изменения угловой скорости натурной модели)

сти без учета конвективного члена общего уравнения гидродинамики [15], отражающее в первом приближении распространение теплоты в смежных с горячим помещениях.

Движение робота моделировали в созданном в *Simulink3D* виртуальном помещении  $5 \times 5 \times 3$  м, имеющем два проема, через один из которых (дверной проем) поступали продукты горения из смежного помещения. Таким образом, этот проем играл роль источника теплоты  $S(x, y)$ :

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S(x, y);$$

$$S(x, y) = T_0 e^{-\left( \frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right)}. \quad (8)$$

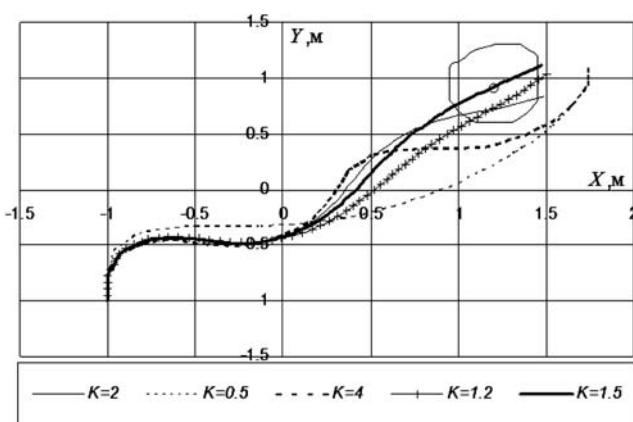


Рис. 6. Траектории движения робота к опорной точке в скалярном температурном поле при начальном значении  $\theta_0 = 1,57$  рад и различных коэффициентах наведения

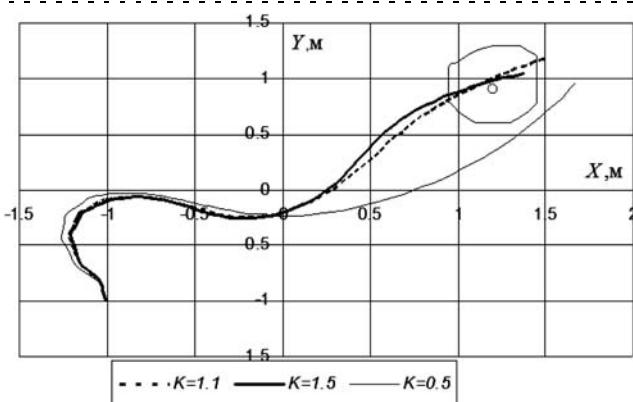


Рис. 7. Траектории движения робота к опорной точке в скалярном температурном поле при начальном значении  $\theta_0 = 2,57$  рад и различных коэффициентах наведения

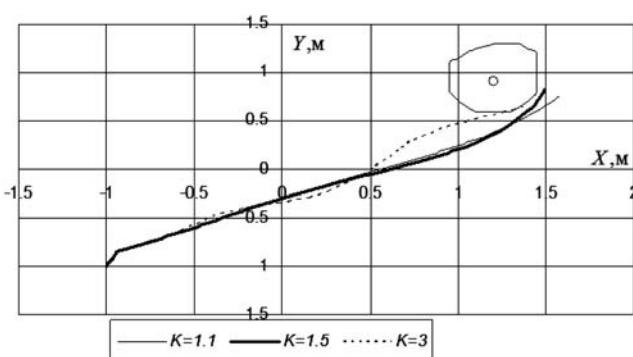
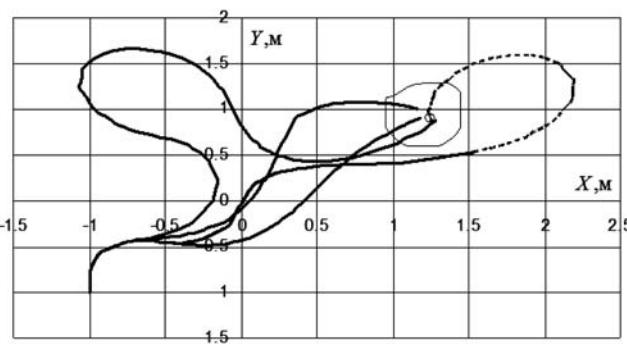


Рис. 8. Траектории движения робота к опорной точке при начальном значении  $\theta_0 = 1$  рад и различных коэффициентах наведения

При моделировании принимали допущение квазистационарности процесса:  $\rho c_v \approx \text{const}$  и в течение малого промежутка времени (5...10 с) распределение теплоты считалось постоянным. Это позволяло задавать двухмерное температурное поле в виде файлов таблиц и периодически обновлять их в MATLAB, а ошибку  $\Delta \phi / \Delta t$  — в виде аддитивного гауссова шума с дисперсией 0,2, поступающего на вход каналов измерения температур.

Коэффициент наведения  $K_h$  выбирали в ходе моделирования при заданной линейной скорости робота 0,25 м/с. Угловую скорость робота в нечетком регуляторе ограничивали диапазоном [-0,5; 0,5] рад/с. В модельном эксперименте использовали вариант базы правил нечеткого контроллера тактического уровня, включающий только правила наведения. Применение усеченной базы правил контроллера объясняется задачей проводимого эксперимента — убедиться в работоспособности полученного закона (6) в целях дальнейшего расширения тактических возможностей робота. Вид функций принадлежностей входной лингвистической переменной "оценка скорости вращения линии визирования" определяли по заданному коэффициенту наведения согласно работе [16] и желаемому виду статической характеристики регулятора, связывающей указанную переменную с "рекомендуемой угловой скоростью" и аппроксимирующей нелинейность типа "ограничение". Постоянные времени дифференциального измерительного канала температуры ( $\Delta T$ ) и канала измерения температуры ( $T$ ) при моделировании принимали равными 3 с и 25 с соответственно по экспериментально определенным характеристикам измерительного оборудования робота.

На рис. 6—8 представлены результаты моделирования — траектории движения робота с учетом его динамических характеристик при разных начальных условиях угловой ориентации относительно опорной точки и при варьировании коэффициентов наведения. Область, представленная на рисунках замкнутой линией — изотермой, является зоной расположения дверного проема. Из рис. 6 также видно, что коэффициенты наведения меньше 0,8 не обеспечивают попадание робота в зону прямой видимости проема, а коэффициент, превышающий значение 2, делает систему неустойчивой относительно прямолинейного движения.



**Рис. 9. Траектории движения робота при выполнении маневров при обходе препятствий**

Из рис. 7–8 следует, что коэффициент наведения, равный 1,5, обеспечивает выход робота в зону опорной точки. Из приведенных графиков видно, что робот не всегда может попасть точно в центр проема. Это объясняется начальной угловой ориентацией робота относительно направления градиента температурного поля применяемой модели (8).

При моделировании определяли также возможность выхода в район опорной точки при выполнении маневров по обходу препятствий. На рис. 9 представлены результаты моделирования подобных маневров. Маневр имитировали суммированием импульсного сигнала прямоугольной формы различной длительности с сигналом задания угловой скорости, формируемым контроллером тактического уровня. Из приведенных траекторий видно, что робот попадает в максимум температурного поля (опорную точку). Пунктирной линией показано продолжение траектории робота при его первоначальном промахе. Попадание в цель объясняется осесимметричностью моделируемого поля (8) и изменением знака  $\dot{T}$ . В реальных условиях такой маневр был бы невозможен, так как робот столкнулся бы со стеной. Но, следует отметить, что робот уверенно попадает в район опорной точки с погрешностью, не превышающей 10 см.

Обобщая результаты проведенного моделирования, можно сделать вывод, что полученный вид закона наведения в температурном скалярном поле обеспечивает выход робота в район ненаблюданной опорной точки с погрешностью, не превышающей 50 см относительно центра проема, приемлемой для точного позиционирования и преодоления проема при подключении к работе системы технического зрения.

## Заключение

В работе обосновано применение метода пропорционального наведения робота при поиске очага возгорания в температурном скалярном поле. Требуется отметить, что в настоящее время ведется

экспериментальная работа по проверке полученного закона навигации с использованием натурной модели в условиях, приближенных к реальным. Также остается открытым вопрос по аналитическому определению оптимального коэффициента наведения, учитывающему динамические характеристики измерительной системы робота, при котором обеспечивается устойчивость траектории движения робота.

## Список литературы

1. Отчет о научно-исследовательской работе "Разработка сценариев основных приемов управления робототехническими средствами для обучения операторов на тренажере" "Сценарий-Р" П.4.1.Д.01.2009, ФГУ ВНИИПО МЧС России, 2009.
2. Горовых О. Г. Обнаружение очага пожара в задымленных помещениях с применением индивидуального поискового устройства / О. Г. Горовых, С. Н. Бардушко // Пожарная безопасность. № 2. 2008. С. 100–106.
3. Bretschneider N. Head Mounted Displays for Fire Fighters / N. Bretschneider, S. Brattke, K. Rein // IFAWC'2006 – 3<sup>rd</sup> International Forum on Applied Wearable Computing 2006, 15.03.2006–16.03.2006, Р. 109–125.
4. Есин В. М. Исследование процесса распространения продуктов горения по зданию при пожаре // Моделирование пожаров и взрывов. М.: Пожнauка, 2000. С. 127–138.
5. Yu Chen. S-nets: smart sensor networks // Thesis for the degree of Master of Scince, The University of Utah, 2000. 75 p.
6. Kumar V. Robot and sensor networks for first responders/ V. Kumar, D. Rus, S. Singh// IEEE Pervasive computing. October–December, 2004. Р. 24–33.
7. Hugues E., Rochel O., Martinez D. Navigation for a robot in a turbulent odor plume using bilateral comparison // International Conference on Advanced Robotics ICAR'2003. Р. 6.
8. Гуткин Л. С. Радиоуправление реактивными снарядами и космическими аппаратами. М.: Советское радио, 1968. 680 с.
9. Молчадский И. С. Пожар в помещении. М.:ВНИИПО, 2005. 456 с.
10. Володин Ю. С., Михайлов Б. Б., Ющенко А. С. Нечеткая классификация препятствий мобильным роботом с использованием телевизионной системы пространственного зрения // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сб. науч. тр. VI междунар. науч.-техн. конф. (16–19 мая 2011 г. Коломна). Т. 1. М.: Физматлит, 2011. С. 372–380.
11. Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 8. С. 29–80.
12. Све Лиц Хту Аунг. Навигация и управление движением мобильного робота в городских условиях: автореф. дис. ... канд. тех. наук. М., 2011. 18 с.
13. Гудвин Г. К., Гребе С. Ф., Сальгадо М. Э. Проектирование систем управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2004. 911 с.
14. Рыжов А. М. Дифференциальный (полевой, CFD) метод моделирования пожаров // Моделирование пожаров и взрывов. М.: Пожнauка, 2000. С. 25–88.
15. Патанкар С. Численные методы решения задач и теплообменника и динамика жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 120 с.
16. Ющенко А. С., Тачков А. А. Управление пожарной робототехнической системой с использованием принципов диалогового управления // Тр. XXI междунар. науч.-техн. конф. "Экстремальная робототехника" (18–20 мая 2010 г., Москва). 2010. С. 305–312.

**С. Г. Капустян**, д-р техн. наук., зав. отделом,

kap@mvs.sfedu.ru,

**А. А. Дьяченко**, конструктор,

aleksandernet@yandex.ru,

Научно-исследовательский институт  
многопроцессорных вычислительных систем

имени академика А. В. Каляева

федерального государственного автономного  
образовательного учреждения

высшего профессионального образования  
"Южный федеральный университет", г. Таганрог

## **Распределенная информационно-управляющая система автоматизированного мультироботехнического транспортно-складского комплекса**

*Рассматриваются вопросы построения информационно-управляющих систем роботизированных транспортно-складских комплексов промышленных предприятий. Основу таких комплексов составляют группы мобильных роботов, осуществляющих транспортировку грузов и погрузочно-разгрузочные операции. Предложена процедура распределения заданий в группе мобильных складских роботов, реализующая методы группового управления.*

**Ключевые слова:** мультироботехнический комплекс, мобильный складской робот, информационно-управляющая система, распределенное управление, централизованное управление, групповое управление, распределение заданий

### **Введение**

Современное состояние дел в российской транспортно-складской инфраструктуре заставляет предпринимать усиленные попытки по разрешению многих проблем, связанных с полным повсеместным устареванием технологии складирования и внутрицеховых складских перевозок. Безнадежно устарели методы обработки грузов на большинстве предприятий, особенно производственного комплекса. Выходом из сложившейся ситуации может стать переход на новейшие технологии обработки, перемещения и хранения грузов в транспортно-складских комплексах.

Состояние дел в аналогичных секторах стран с развитой экономикой гораздо лучше. Оборудование и технологии, которыми оснащены предприятия этих стран, функционируют гораздо эффективнее, в том числе и за счет использования полной или частичной автоматизации технологических процессов в транспортно-складском комплексе.

### **Современная организация транспортно-складского комплекса**

Современный склад — это высокоэффективный автоматизированный объект с развитой инфраст-

руктурой, сервисным оборудованием, транспортными системами, оборудованием для хранения грузов, системой управления, а также оснащенный программными средствами для учета, логистики и управления всем комплексом в целом.

Такой склад оснащается таким оборудованием, как роботы-штабелеры, роботы-пalletировщики, роботы-упаковщики, системы идентификации грузов, контрольно-измерительное оборудование и т. д.

Транспортная система — это традиционные конвейерные системы, человеко-машины системы (транспортная и погрузочно-разгрузочная техника, управляемая человеком-оператором), это и пока еще экзотические для России автоматизированно-управляемые транспортные средства AGV (Automated Guided Vehicles) или AGVS (AGV Systems), их также часто называют транспортными роботами (AGV) или робокарами (robotcars).

Оборудование для хранения — это, как правило, высотные стеллажные линии, обслуживаемые роботами-штабелерами, а также самодвижущиеся стеллажные секции и т. п.

Система управления и программные средства представляют собой единый информационно-управляющий программно-аппаратный комплекс, который управляет всеми процессами, происходящими в транспортно-складской системе предприятия.

Традиционные конвейерные системы нередко усложняют процессы транспортирования, сортировки и управления, да и не отличаются высокой надежностью. Человеко-машины системы не способны корректно решать большинство задач, имеющихся в больших транспортно-складских системах. Одним из путей решения становится использование мультироботехнических транспортно-складских систем на базе AGV, а также комбинированных с применением AGV конвейерных систем и человеко-машины систем там, где это необходимо.

Преимущества AGVS по сравнению с конвейерными транспортными системами, а также с транспортной и погрузочно-разгрузочной техникой, управляемой человеком-оператором, подробно описаны в статьях [1–4]. Вследствие этих преимуществ в последнее время наблюдается устойчивая тенденция перехода от традиционных транспортных систем складов на базе транспортеров (конвейеров) и транспортно-погрузочной техники, управляемой человеком, к AGV-системам [1, 2, 5]. Конечно, нельзя не отметить и тот факт, что и AGV на сегодняшний день имеют ряд недостатков, которые мешают более активному их внедрению. Во-первых, на сегодняшний день практически все AGV изготавливаются как штучный товар, под индивидуальные потребности заказчика [1, 5]. Это не позволяет существенно снижать их стоимость и выводить их на серийное производство. Однако эта проблема медленно, но уверенно решается. Во-вторых, AGV все-таки рассчитаны на разветвленные транспортные сети с большой номенклатурой грузов разного типоразмера, и далеко не каждый склад имеет такие сети. Третий, может быть самый суще-

ственный фактор, мешающий широкому распространению AGV в складском хозяйстве, — это гораздо более высокая сложность управления транспортной системой по сравнению, например, с управлением транспортной системой на базе конвейеров.

Задача управления оборудованием транспортной системы на базе AGV представляет собой задачу группового управления роботами и может быть решена с использованием методов, описанных в работах [5, 6].

Решение задач управления оборудованием транспортных систем современных автоматизированных складов, в том числе и AGV, возлагается на информационно-управляющие системы (ИУС), которые могут строиться на принципах централизованного, децентрализованного (распределенного) и комбинированного управлений [6].

### **Организация ИУС мультиробототехнических складских комплексов**

Современный склад производственного предприятия — это распределенный территориально сложный объект, имеющий множество "узловых точек", в которых происходят различного рода манипуляции с грузами: погрузка, разгрузка, складирование, сортировка, маркирование, паллетирование, упаковывание паллет, взвешивание и т. п., и в котором осуществляется транспортировка грузов между этими узловыми точками. Кроме того, склад имеет множество мест хранения грузов.

Чаще всего грузы хранятся в стеллажах, сгруппированных в зоне хранения и обслуживаемых роботами-штабелерами (РШ). Функции РШ заключаются в перемещении грузов от точки приема грузов в зоне хранения к месту хранения, т. е. в заданную ячейку стеллажа, и из заданной ячейки к точке выдачи грузов из зоны хранения. Указанные точки приема и выдачи грузов, как правило, располагаются во фронтальной и/или тыльной части стеллажей и также являются "узовыми точками" складского комплекса.

Функции транспортной системы заключаются в перемещении грузов между "узовыми точками" в соответствии со складским технологическим процессом обработки, хранения и выдачи грузов.

В работах [5, 6] предложена классификация ИУС мультиробототехнических систем и комплексов в зависимости от стратегий группового управления, среди которых можно выделить две противоположные стратегии — централизованного и децентрализованного (распределенного) управления.

*Централизованные ИУС*, т. е. ИУС, использующие стратегию централизованного управления, называются так, потому что в своем составе имеют центральный узел управления (ЦУУ), который решает все задачи управления оборудованием автоматизированного складского комплекса, в том числе и AGV [6, 7]. Основным преимуществом централизованных ИУС является простота их организации и, соответственно, алгоритмизации решаемых задач [7].

К недостаткам можно отнести, во-первых, высокую вычислительную сложность решаемой задачи группового управления большим числом единиц оборудования и большие объемы обрабатываемой информации, во-вторых, низкую живучесть систем, так как выход из строя или даже сбой ЦУУ может привести к выходу из строя всей системы. Традиционные методы обеспечения живучести, такие как резервирование, приводят к существенному удорожанию систем.

*Децентрализованные (распределенные) ИУС*, реализующие принципы распределенного управления, не имеют ЦУУ, а решение задач группового управления оборудованием автоматизированного мультиробототехнического транспортно-складского комплекса возлагается на устройства управления (УУ) единицами оборудования [7]. УУ, объединенные каналами информационного обмена, образуют вычислительно-управляющую сеть. Децентрализованные ИУС практически избавлены от указанных выше недостатков, присущих централизованным ИУС, но имеют свой существенный недостаток — высокую сложность алгоритмизации задачи группового управления оборудованием транспортно-складского комплекса.

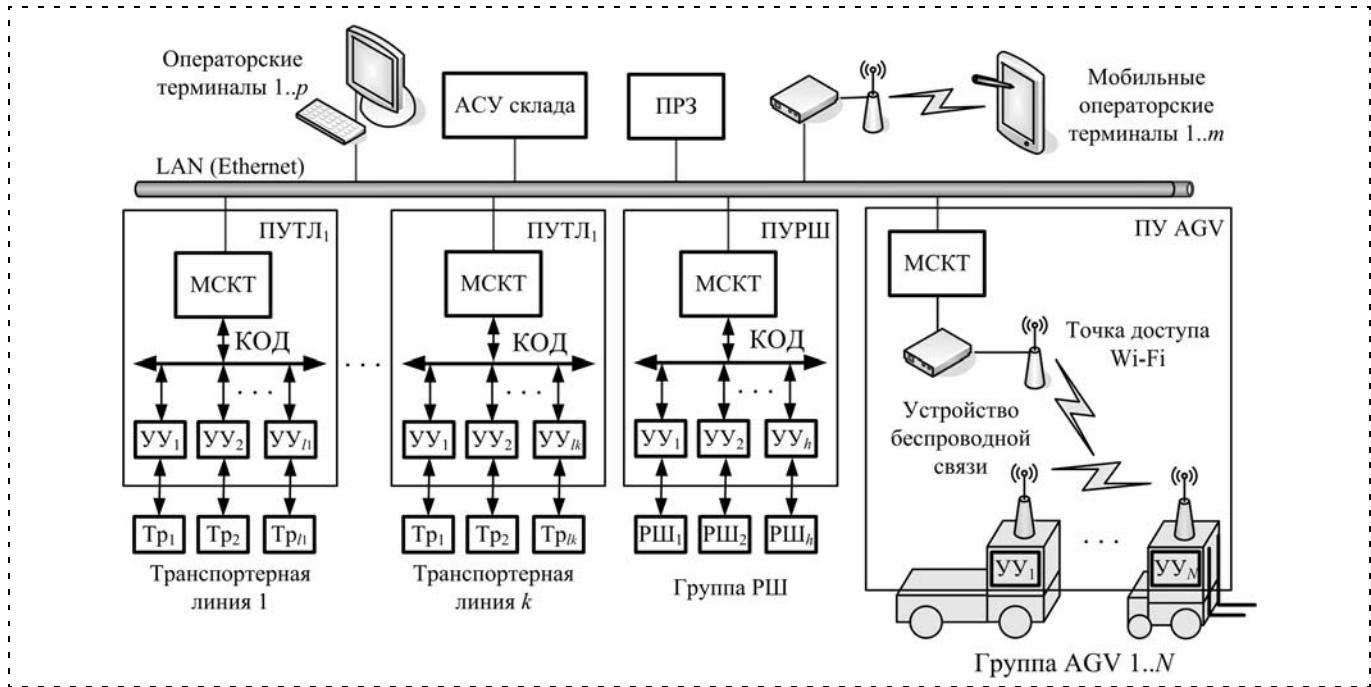
*Иерархические распределенные ИУС*, реализующие смешанные (централизованные и распределенные) стратегии управления, сочетающие в себе свойства централизованных и децентрализованных ИУС, во многом избавлены от недостатков указанных выше централизованных и децентрализованных ИУС, но и имеют большинство их преимуществ [7].

Если проанализировать задачу группового управления оборудованием, перемещающим грузы в автоматизированном мультиробототехническом транспортно-складском комплексе, то можно сделать вывод, что она разбивается на две основные задачи: *распределение заданий* (очереди заданий) по перемещению грузов между единицами оборудования и *управление единицами оборудования* при выполнении заданий.

Задача распределения заданий (очереди заданий) является наиболее трудно алгоритмизируемой для распределенной ИУС, так как очередь заданий на перемещения грузов заранее неизвестна, и задания формируются в произвольные моменты времени в процессе функционирования комплекса. Поэтому предлагается эту задачу решать централизованно.

Задача же управления выполнением заданий единицами оборудования может решаться их УУ, т. е. децентрализованно. Но так как единицы оборудования в процессе выполнения заданий должны взаимодействовать друг с другом, то их УУ должны быть связаны каналами информационного обмена (КОД) и образовывать распределенные подсистемы управления группами оборудования (транспортерами, группами AGV, группами роботов-штабелеров и т. п.).

На рисунке представлена структура распределенной иерархической информационно-управляющей системы автоматизированного склада, реализую-



Структурная схема распределенной информационно-управляющей системы с централизованно-распределенной организацией процессов управления

щая описанный выше подход и базирующаяся на принципах централизованного и распределенного управления [6, 7].

Такая система состоит из трех уровней. На *первом уровне* находится автоматизированная система управления (АСУ) склада, операторские терминалы, с помощью которых осуществляется формирование заданий на перемещение грузов и контроль работы оборудования складского комплекса, а также подсистема распределения заданий (ПРЗ), решаящая возлагаемую на нее задачу распределения заданий между единицами оборудования централизованно. *Второй уровень* составляют функциональные подсистемы, такие как: распределенные подсистемы управления транспортерными линиями (ПУТЛ); распределенная подсистема управления роботами-штабелерами (ПУРШ) стеллажного склада; распределенная подсистема управления AGV (ПУ AGV), включающие модуль связи и контроля трафика (МСКТ) и УУ, объединенные КОД (Profibus, CFN и т. п.) и решаящие задачу управления единицами оборудования при выполнении заданий, а также другие подсистемы, обеспечивающие выполнение заданий. *На третьем уровне* находятся исполнительные и сенсорные устройства AGV, транспортеров (Tp), РШ и т. п.

Первый (верхний) уровень управления реализован на принципах централизованного управления, что позволяет получать оптимальное распределение заданий между единицами оборудования. Второй уровень реализован на принципах децентрализованного управления, что позволяет оборудованию эффективно взаимодействовать и координировать свои действия в процессе выполнения заданий.

МСКТ являются "посредниками" между этими двумя уровнями и обеспечивают передачу заданий от ПРЗ к функциональным подсистемам, а также контроль процессов перемещения грузов и передачу параметров состояния оборудования на верхний уровень.

Из двух указанных выше подзадач, решаемых ИУС, на наш взгляд, наиболее сложной является подзадача распределения.

Задания по перемещению грузов могут выполняться как с использованием только AGV, так и с использованием и другого оборудования (транспортеров, РШ и др.). Транспортерные линии и РШ обычно перемещают грузы по строго определенным маршрутам, число которых относительно невелико и которые, как правило, не пересекаются, и решение задачи распределения заданий между единицами такого оборудования не представляет сложности. Эта же задача для AGV существенно усложняется, так как каждый AGV может иметь несколько вариантов маршрутов перемещения, которые к тому же пересекаются с маршрутами других AGV. Кроме того, даже однотипные AGV в текущей ситуации могут иметь разные функциональные возможности, например, из-за разного энергоресурса на борту.

Ниже предлагается алгоритм решения данной задачи, базирующийся на принципах группового управления роботами [6, 7] и реализуемый ПРЗ.

### Алгоритм распределения заданий

*Постановка задачи распределения заданий между AGV.* Для простоты будем рассматривать задачу распределения заданий в группе однотипных AGV.

Введем некоторые обозначения:  $R_j \in \mathbf{R}$  —  $j$ -й AGV ( $j = \overline{1, N}$ ), входящий в состав группы  $\mathbf{R}$  AGV, обслуживающих склад;  $A_i$  —  $i$ -я узловая точка ( $i = \overline{1, L}$ );  $\mathbf{A}$  — множество узловых точек ( $A_i \in \mathbf{A}$ ), обслуживаемых группой AGV. К узловым точкам относятся начальные и конечные узлы транспортерных линий, стационарные роботы-пalletировщики и роботы-пalletоупаковщики, точки приема и выдачи грузов стеллажного склада и т. п. [9]. Другими словами, это точки, между которыми AGV должны перемещать грузы. Перемещение грузов между узловыми точками осуществляется по запросам на обслуживание узловых точек. Запросы формируют УУ оборудования, находящегося в узловых точках, операторы с использованием операторских терминалов и АСУ склада в соответствии с технологическим процессом. Запрос  $a_i$  на обслуживание узловой точки  $A_i$  представляет собой сообщение формата  $a_i = \langle x1_i, x2_i, x3_i, x4_i, x5_i \rangle$ , содержащего следующую информацию:  $x1_i$  — номер устройства (узловой точки), для которой сформирован запрос;  $x2_i$  — код операции, которую необходимо выполнить;  $x3_i$  — количество груза, которое нужно переместить в соответствии с  $x2_i$ ;  $x4_i$  — идентификационный номер груза (ID);  $x5_i$  — приоритетность операции. При необходимости в запрос могут быть включены дополнительные данные, например, масса, размер, срок хранения и т. д. Запросы поступают в ПРЗ, обрабатываются этой подсистемой, а затем передаются всем AGV, которые анализируют его и формируют ответы  $r_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) в виде сообщений формата  $r_j = \langle y1_j, y2_j, y3_j, y4_j, y5_j \rangle$ , содержащих следующую информацию:  $y1_j$  — номер устройства (AGV), посылающего ответ;  $y2_j$  — номер устройства (узловой точки)  $x1_i$ , на запрос которой посылается ответ;  $y3_j$  — планируемое время, необходимое AGV для выполнения задания по данному запросу (с учетом времени, требуемого для завершения текущего задания, если таковое выполняется на момент поступления запроса);  $y4_j$  — статус текущего состояния AGV (свободен, занят, выполнить задание невозможно);  $y5_j$  — приоритет текущей операции (если занят).

Каждый AGV  $R_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) может выполнять в текущий момент времени только одно задание, при этом для выполнения некоторых заданий может потребоваться несколько AGV.

Процедура распределения заданий заключается в следующем. В некоторый момент времени для узловой точки  $A_i \in \mathbf{A}$  формируется запрос  $a_i$  на ее обслуживание. Этот запрос поступает в ПРЗ. Данная подсистема обрабатывает этот запрос, определяет точки, в которых один из AGV (пока еще неизвестный) должен принять и выдать груз, а затем отправляет этот запрос через МСКТ. В свою очередь, AGV на основе имеющейся у них информации о своем текущем состоянии определяют, во-первых, возможность осуществления обслуживания данного запроса, во-вторых, планируемое время выполнения задания по обслуживанию данного запроса с учетом всех предстоящих перемещений и формируют

ответ. Все ответы AGV собираются МСКТ. Одной из функций МСКТ является анализ ответов AGV на возможность обслуживания узловой точки по данному запросу и уточнение планируемого времени обслуживания запроса каждым AGV с учетом времени занятости узловых точек выполнением текущих операций и времени на возможное разрешение коллизий в местах пересечения маршрутов AGV. Если данный запрос может быть обслужен AGV, то МСКТ направляет обработанные ответы  $r_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) в адрес ПРЗ. Данная подсистема на основе ответов на каждый запрос формирует матрицу  $\mathbf{D}$  эффективности выполнения AGV заданий по обслуживанию запросов. Размерность матрицы —  $M \times N$ , где  $M$  — число запросов, поступивших за некоторый промежуток времени  $\Delta t$ ,  $N$  — число AGV в группе. Элементами  $d_{k,j}$  матрицы  $\mathbf{D}$  являются оценки эффективности выполнения  $j$ -м AGV задания по  $k$ -му запросу ( $k = \overline{1, M}$ ). Если за время  $\Delta t$  поступил только один запрос, то матрица  $\mathbf{D}$  будет иметь размерность  $1 \times N$ . Оценки эффективности могут определяться, например, как

$$d_{k,j} = \begin{cases} p_k(t_{k,j}/t_{\text{доп}}), & \text{если } t_{k,j} < t_{\text{доп}}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $t_{k,j}$  — планируемое время выполнения задания  $j$ -м AGV по  $k$ -му запросу;  $t_{\text{доп}}$  — максимально допустимое время выполнения какого-либо задания;  $p_k$  — коэффициент приоритета операции, содержащийся в запросе ( $0 < p_k \leq 1$ ), причем, чем выше приоритет, тем меньше значение коэффициента.

В общем случае матрица  $\mathbf{D}$  будет иметь вид

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{M1} & d_{M2} & \dots & d_{MN} \end{vmatrix}.$$

Если AGV может выполнить задание по обслуживанию запроса, то соответствующее значение оценки будет  $0 < d_{k,j} < 1$ . Если запрос не может быть обслужен ни одним AGV, в соответствующей строке все элементы равны нулю.

Поскольку для обслуживания одного запроса может потребоваться более одного AGV, например, для первого запроса требуется  $n_1$  AGV, для второго  $n_2$ , то в таком случае матрицу  $\mathbf{D}$  необходимо преобразовать к следующему виду:

$$\mathbf{D}^* = \begin{vmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^M \end{vmatrix}.$$

где  $B^i$  ( $i = \overline{1, M}$ ) — матрица размерности  $n_k \times N$ ;  $n_k$  — число AGV, требуемых для обслуживания  $k$ -го запроса, например

$$\mathbf{B}^1 = \begin{vmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & \dots & b_{1N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_11}^1 & b_{n_12}^1 & \dots & b_{n_1N}^1 \end{vmatrix}, b_{l1}^1 = d_{11}, b_{l2}^1 = d_{12},$$

$b_{l3}^1 = d_{13}, \dots, b_{lN}^1 = d_{1N} (l = \overline{1, n_1});$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{vmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 & \dots & b_{1N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_21}^2 & b_{n_22}^2 & \dots & b_{n_2N}^2 \end{vmatrix}, b_{l1}^2 = d_{21}, b_{l2}^2 = d_{22},$$

$b_{l3}^2 = d_{23}, \dots, b_{lN}^2 = d_{2N} (l = \overline{1, n_2});$

$$\mathbf{B}^M = \begin{vmatrix} b_{11}^M & b_{12}^M & \dots & b_{1N}^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_M1}^M & b_{n_M2}^M & \dots & b_{n_MN}^M \end{vmatrix}, b_{l1}^M = d_{M1}, b_{l2}^M = d_{M2},$$

$b_{l3}^M = d_{M3}, \dots, b_{lN}^M = d_{MN} (l = \overline{1, n_M}).$

Размерность матрицы  $\mathbf{D}^*$  в общем случае равна  $(n_1 + n_2 + \dots + n_M) \times N$ .

Преобразуем матрицу  $\mathbf{D}^*$  к нормальному виду со сплошной нумерацией и обозначим ее  $\mathbf{D}^{**}$ :

$$\mathbf{D}^{**} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{Q1} & d_{Q2} & \dots & d_{QN} \end{vmatrix},$$

где  $Q = (n_1 + n_2 + \dots + n_M)$  — число AGV, требуемых для обслуживания всех текущих запросов. Как видно из общего выражения для размерности  $\mathbf{D}^{**}$ , число требуемых AGV может превышать число AGV, способных обслужить эти запросы, т. е.  $(n_1 + n_2 + \dots + n_M) > N$ . В связи с этим возможны следующие ситуации:  $Q < N$ ,  $Q = N$  и  $Q > N$ .

Рассмотрим процедуру распределения заданий для всех трех случаев.

*Процедура распределения заданий для случая  $Q = N$ .* Для получения оптимального или близкого к оптимальному решения задачи распределения заданий как задачи о назначениях могут применяться алгоритмы коллективного улучшения плана, предложенные в работах [6–8], но для централизованного решения данной задачи требуется модификация этих алгоритмов.

Алгоритм заключается в последовательном циклическом выполнении процедуры оптимизации некоторого опорного плана распределения заданий, состоящей из ряда шагов.

*Шаг 1 (выполняется один раз в начале процедуры оптимизации).* На первом шаге алгоритма формируется опорный план. Опорный план является базой для последующего улучшения общего плана.

Опорный план можно сформировать несколькими способами. Один из таких способов заключается в следующем.

По имеющейся матрице оценок  $\mathbf{D}^{**}$  для каждого  $R_j$ -го AGV, начиная с  $j = 1$ , в соответствующем столбце выбирается минимальное значение оценки  $d_j = \min_{k=1, Q} (d_{k,j})$  (кроме нулевых), и соответствую-

щее задание закрепляется за данным AGV. После этого элементы строки  $k$  в матрице  $\mathbf{D}^{**}$  обнуляются, и строка в дальнейшем не используется в формировании опорного плана. После того, как для всех AGV таким образом будут выбраны задания, опорный план считается сформированным. Такой способ задания опорного плана позволяет в будущем сократить число шагов по его улучшению. После того как опорный план сформирован, матрица  $\mathbf{D}^{**}$  восстанавливается, и осуществляется переход к следующему шагу.

*Шаг 2 (выполняется в каждом цикле процедуры оптимизации).* На этом шаге осуществляется поиск улучшений плана путем выявления наилучших вариантов попарной замены заданий у AGV  $R_j$  и  $R_r$  ( $j, r = \overline{1, N}, j \neq r$ ) следующим образом.

Сначала для AGV  $R_1$  в соответствующем (т. е. первом) столбце матрицы  $\mathbf{D}^{**}$  ищется наименьшее ненулевое значение оценки эффективности (меньшее, чем значение  $d_{k,1}$  в опорном плане). Пусть такое значение найдено в  $n$ -й строке, например, это значение  $d_{n,1}$ . Тогда за AGV  $R_1$  закрепляется задание на обслуживание  $n$ -го запроса, имеющее значение оценки  $d_{n,1}$ , а за AGV  $R_r$  закрепляется задание, ранее закрепленное за AGV  $R_1$ , которое будет для него иметь значение оценки эффективности  $d_{k,r}$  вместо задания, имевшего значение оценки  $d_{n,r}$ . Такой обмен заданиями фиксируется при условии, что этот обмен улучшит план, т. е. если будет выполняться условие

$$(d_{n,1} + d_{k,r}) < (d_{k,1} + d_{n,r}). \quad (1)$$

В противном случае обмен заданиями не осуществляется.

Далее эта же процедура выполняется для AGV  $R_2$ ,  $R_3$  и т. д. вплоть до  $R_N$  включительно.

По окончании выполнения данного шага формируется новый план, если обмен заданиями был осуществлен хотя бы для одной пары AGV. Далее осуществляется переход к шагу 3.

*Шаг 3 (выполняется в каждом цикле процедуры оптимизации).* На этом шаге оценивается улучшение опорного плана, полученное в текущем цикле. План считается улучшенным, если выполняется условие

$$S^{c-1} - S^c > \varepsilon, \quad (2)$$

где  $S^{c-1}$  — сумма оценок эффективности выполнения AGV заданий, входящих в план, полученный в предыдущем цикле процедуры оптимизации (или при выполнении шага 1);  $S^c$  — сумма оценок эффективности выполнения AGV заданий, входящих

в план, полученный в текущем цикле процедуры оптимизации;  $\varepsilon$  — достаточно малое число, определяющее точность решения задачи распределения. Если условие (2) выполняется, то осуществляется переход к шагу 2 и выполняется следующий цикл оптимизации.

Условием окончания процедуры поиска оптимированного распределения является невыполнение одного из условий (1) или (2) в текущем цикле оптимизации.

Результатом работы алгоритма является план  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]$ , где  $p_j$  — номер обслуживаемого  $j$ -м AGV запроса.

*Процедура распределения для случая  $Q < N$ .* Для этого случая распределение осуществляется следующим образом.

*Шаг 1 (выполняется один раз).* На этом шаге формируется опорный план. По имеющейся матрице оценок  $\mathbf{D}^{**}$  для каждого задания на обслуживание запроса, начиная с  $k = 1$ , в соответствующей строке выбирается минимальное значение оценки  $\beta_k = \min_{j=1, N} (d_{k,j})$  (кроме нулевых). Задание  $k$  закрепляется за  $j$ -м AGV. После этого элементы столбца  $j$  в матрице  $\mathbf{D}^{**}$  обнуляются, и столбец в дальнейшем не используется в формировании опорного плана.

После того, как все задания будут закреплены за AGV, опорный план считается сформированным, матрица  $\mathbf{D}^{**}$  восстанавливается, и осуществляется переход к следующему шагу.

*Шаг 2 (выполняется в каждом цикле процедуры оптимизации).* На этом шаге осуществляется поиск улучшения общего плана путем замены AGV для пар заданий.

Сначала для задания  $k = 1$  в соответствующей (т. е. первой) строке матрицы  $\mathbf{D}^{**}$  ищется наименьшее ненулевое значение оценки эффективности (меньшее, чем значение  $d_{1,n}$  в опорном плане). Пусть такое значение найдено в  $r$ -м столбце, например, это значение  $d_{1,r}$ . Столбец  $r$  соответствует AGV  $R_r$ , за которым в сформированном в предыдущем цикле (или опорном плане) было закреплено задание с номером  $k = l$ , имеющее для данного AGV оценку эффективности  $d_{l,r}$ . Тогда задание с номером  $k = 1$  закрепляется за AGV  $R_r$ , а задание с номером  $k = l$  закрепляется за AGV  $R_n$ , для которого оно имеет значение оценки  $d_{l,n}$ . Такой обмен заданиями фиксируется при условии, что этот обмен улучшит план, т. е. если будет выполняться условие

$$(d_{1,r} + d_{l,n}) < (d_{1,n} + d_{l,r}). \quad (3)$$

В противном случае замена не фиксируется.

Далее эта же процедура выполняется для заданий  $k = 2, 3, Q$ .

По окончании выполнения данного шага формируется новый план, если обмен AGV был осуществлен хотя бы для одной пары заданий.

Далее — переход к шагу 3.

*Шаг 3 (выполняется в каждом цикле процедуры оптимизации).* Данный шаг полностью идентичен шагу 3 для описанного выше случая  $Q = N$ .

Условием окончания процедуры поиска оптимированного распределения является невыполнение одного из условий (2) или (3) в текущем цикле оптимизации.

*Процедура распределения для случая  $Q > N$ .* Для этого случая решение задачи распределения осуществляется, как и для случая  $Q = N$ , но при этом не все задания будут распределены между AGV. Оставшиеся задания участвуют в распределении при следующей реализации процедуры оптимизации вместе с заданиями, поступившими в следующем периоде  $\Delta t$ .

## Заключение

Основной результат исследования, представленный в настоящей статье, состоит в разработке подхода к решению задачи распределения заданий по обслуживанию транспортно-складского комплекса в распределенной группе мобильных роботов — AGV. Предложенная процедура распределения отличается относительно невысокой вычислительной сложностью, что позволяет реализовать ее централизованно в реальном времени при высокой интенсивности поступления заявок на обслуживание. Теоретические исследования процедуры и результаты экспериментов показали, что число циклов в процедуре не превышает числа AGV в группе.

Предложенный в работе подход может быть использован при создании информационно-управляющих систем распределенных мультиробототехнических транспортно-складских комплексов промышленных и торговых предприятий.

## Список литературы

1. Цинцевич Л., Петрова В. Автоматизация на марше. Новые перспективы для изготовителей транспортных автоматических систем // Склад и Техника. 2008. № 5.
2. Волков В. Автоматический склад. Транс-роботы и автоматические транспортные средства как альтернатива конвейерам // Конъюнктура товарных рынков. Маркетинг и логистика. 2007. № 3. С. 78–81.
3. Волков В. Высотные системы автоматического хранения — тенденция или необходимость? // Конъюнктура товарных рынков. Маркетинг и логистика. 2007. № 1. С. 78–81.
4. Бос И. Автоматика для складов 3PL оператора // Современный склад. № 2. 2008. С. 2–5.
5. Второе рождение финского робокара // Складское оборудование. 2008. № 1–2. С. 11–13.
6. Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Распределенные системы планирования действий коллективов роботов. М.: Янус-К, 2002.
7. Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009.
8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.
9. Дьяченко А. А. Система распределения заданий в группе транспортных роботов // 3-я мультиконф. по проблемам управления. Науч.-техн. семинар "Управление в распределенных сетевоцентрических и мультиагентных системах". С.-Пб., 2010. С. 30–33.

# УПРАВЛЕНИЕ МЕХАТРОННЫМИ СТАНОЧНЫМИ СИСТЕМАМИ

УДК 621.92

**В. Е. Лысов**, д-р техн. наук, проф.,  
67lysov@mail.ru,

**М. В. Хоренко**, аспирант,  
khorenko.mikhail@yandex.ru,  
Самарский государственный  
технический университет

## Система автоматического управления мехатронным модулем прецзионного поворотного стола

Рассматривается процесс автоматического управления прецизионным поворотным столом, выполненным в виде мехатронного модуля. Заявленная точность воспроизведения заданной траектории движения и позиционирования планшайбы обеспечивается исключением термодеформаций путем включения дополнительной системы автоматического охлаждения исполнительного синхронного электродвигателя.

**Ключевые слова:** система автоматического управления, поворотный стол, мехатронный модуль, термодеформация, планшайба

В настоящее время в прецизионных координатно-расточных станках, а также других моделях станков широко распространены поворотные столы с передачей движения от исполнительного двигателя к планшайбе посредством редуктора с червячной передачей. В таких редукторах необходим технологический зазор в зацеплении, предназначенный для компенсации термодеформаций червяка и червячного колеса. Зазор составляет до 15", поэтому система автоматического управления таким поворотным столом требует сложного алгоритма управления, обеспечивающего односторонний подход к заданной координате, а также необходимо устройство зажима планшайбы при ее позиционировании. На зарубежных координатно-расточных станках все чаще встречаются поворотные столы с прямым приводом, что исключает люфт в кинематической цепи двигатель—планшайба. Использование такого типа прецизионного поворотного стола приводит к новой проблеме — снижению точности по причине теплодеформации планшайбы. Повышение статических и динамических показателей систем позиционирования координатно-расточных станков за счет применения новых алгоритмов управления и новых конструкций поворотных столов

на сегодняшний день остается актуальной проблемой.

Научные исследования в этом направлении активно ведутся как в России, так и за рубежом, что подтверждается рядом статей в периодических изданиях [1, 2] и трудами О. П. Михайлова, М. П. Белова, Ю. А. Борцова, А. А. Ловыгина, М. А. Босинзона и других авторов. В них предлагаются новые алгоритмы управления, которые частично увеличивают точность и/или производительность поворотных столов с червячной передачей, реже авторы предлагают системы автоматического управления поворотных столов с прямым приводом, в которых за счет управления координатой пытаются компенсировать деформации непосредственно самой обрабатываемой детали. Оба направления не имеют широкого практического применения, так как полная компенсация люфта с помощью сложных алгоритмов управления невозможна в силу инерционности исполнительного привода, а применение сложного математического аппарата в совокупности с большим числом средств измерений приводит к удорожанию системы управления, что сводит на нет экономический эффект от последних систем.

### Мехатронный модуль поворотного стола как объект управления

Увеличить статическую точность и динамические показатели качества управления поворотным столом позволяет новая конструкция в виде мехатронного модуля, который представляет собой объект автоматического управления процессом движения и позиционирования планшайбы (рис. 1).

На рис. 1 представлена функциональная схема мехатронного модуля с использованием синхронного поворотного двигателя. Система автоматического управления поворотным столом состоит из двух подсистем: управления координатой (исполнительным механизмом которой является привод поворотного стола, а выходным сигналом угол поворота  $\phi$ ) и управления температурой модуля (исполнительным механизмом для этой подсистемы служит система охлаждения привода модуля, соответственно, входным сигналом системы является точность  $Z$  и температура окружающей среды, а возмущающим сигналом ток статора  $I_{ct}$ ).

Использование такой системы управления мехатронного модуля обусловлено тем, что процессе обработки детали ток статора изменяется в соответствии с нагрузочной диаграммой, а в режиме позиционирования — работа модуля на удержание

координаты ("на упор") — изменение тока статора имеет стохастический характер, что приводит к колебаниям температуры статорных обмоток и всего модуля в целом и, как следствие, к теплодеформации планшайбы и детали. Это обстоятельство способствует снижению точности воспроизведения заданного закона управления при высокоточной обработке изделий. Описанная выше система управления позволяет стабилизировать температуру модуля в соответствии с заданной точностью обработки детали и обеспечивать остановку процесса (или снижение производительности) при отклонении от заданной точности. Таким образом, сигналом задания является не только контур обработки, но и необходимая точность, которая определяет производительность станка. Использование такой гибкой системы управления является принципиальным отличием от более ранних работ. Данная система автоматического управления мехатронным модулем позволяет:

- увеличить производительность оборудованных модулем станков по сравнению с аналогичными, в которых используется редукторный стол при обработке с предельной точностью;
- значительно увеличить точность обработки на одном и том же станке;
- обеспечить идентичную по сравнению с высокоточными станками с прямым приводом и независимой системой стабилизации температуры производительность и точность обработки детали.

### **Инициализация звеньев подсистемы управления температурой мехатронного модуля**

Для стабилизации температурного режима синхронного электродвигателя используется система автоматического управления. Наиболее простая, с точки зрения реализации, САУ является релейной и управляет работой насоса, прокачивающего постоянный объем охлаждающей жидкости через рубашку охлаждения (радиатор) двигателя. Насос с асинхронным приводом в САУ стабилизации температуры планшайбы описывается апериодическим звеном:

$$W_{AD(p)} = \frac{Q_{oxl}(p)}{U_c(p)} = \frac{K}{T_{AD}p + 1},$$

где  $K$  — коэффициент передачи насоса с учетом связи объема прокачиваемой жидкости с количеством отводимой теплоты,  $T_{AD}$  — электромеханическая постоянная времени асинхронного двигателя (АД).



Рис. 1. Функциональная схема мехатронного модуля

Процесс охлаждения [3] в САУ стабилизации температуры планшайбы описывается апериодическим звеном

$$W_{oxl}(p) = \frac{\tau_{oxl}(p)}{Q_{oxl}(p)} = \frac{K_{oxl}}{T_{oxl}p + 1},$$

где  $Q_{oxl}$  — количество теплоты, отводимой от статора исполнительного двигателя;  $K$  — коэффициент передачи, характеризующий охлаждение синхронного двигателя;  $T_{oxl}$  — постоянная времени охлаждения синхронного двигателя;  $\tau_{oxl}$  — снижение температуры планшайбы под действием охлаждающей жидкости.

Тепловые процессы мехатронного модуля недостаточно исследованы, ведущие производители поворотных столов, такие как Siemens и Fanuc, частично добились снижения точности за счет охлаждения исполнительного двигателя.

Рассмотрим тепловую модель мехатронного модуля. Для синхронного двигателя с постоянными магнитами в цепи ротора источником теплоты являются обмотки статора. Наибольшее количество теплоты передается конвекцией и путем теплопроводности; в целях упрощения в дальнейшем принимается, что передаваемое количество теплоты пропорционально разности температур нагреваемого тела и окружающей среды. Нагрев статора приводит к нагреванию через воздушный зазор ротора и планшайбы. Благодаря воздушному зазору термическая связь ослабевает. Принято представлять термическую модель в виде, показанном на рис. 2. Обмотка статора представляется тонким стержнем длиной  $L_0$ , равной половине длины витка обмотки, а пакет железа — тонкой, охватывающей

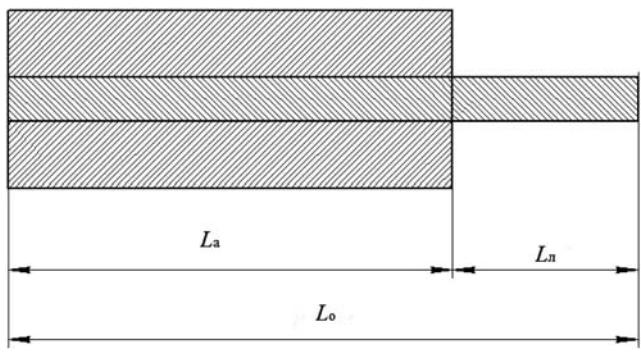


Рис. 2. Термическая модель синхронного электродвигателя

стержень трубкой длиной  $L_a$ , равной половине длины пакета железа,  $L_l$  — длина лобовой части.

Термические процессы описываются для каждой части модели [3]:

- лобовая часть:

$$\frac{\partial \vartheta_l}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 \vartheta_l}{\partial y^2} - \frac{\alpha_l}{c_m} \vartheta_l + \frac{P_m}{c_m}; \quad (1)$$

- пакет железа:

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial t} = -\frac{(\alpha_p + \alpha_k)}{c_k} \frac{\partial^2 \vartheta_k}{\partial y^2} + \frac{\alpha_p}{c_k} \vartheta_a + \frac{P_k}{c_k}; \quad (2)$$

- пазовая часть:

$$\frac{\partial \vartheta_a}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 \vartheta_a}{\partial y^2} - \frac{\alpha_a}{c_m} (\vartheta_a - \vartheta_k) + \frac{P_m}{c_m}. \quad (3)$$

В (1)–(3) обозначено:

$\vartheta_a$ ,  $\vartheta_l$ ,  $\vartheta_k$  — превышения температур соответственно в пазовой, лобовой частях обмотки и пакете железа;  $a_m$  — теплопроводность обмотки

в осевом направлении;  $\alpha_t$  — коэффициент внутренней теплопроводности обмотки;  $P_t$ ,  $P_k$  — мощность потерь в обмотке статора и пакете железа;  $\alpha_l$ ,  $\alpha_k$  — коэффициенты теплоотдачи с поверхности лобовой части и пакета железа;  $\alpha_p$  — коэффициент теплообмена через пазовую изоляцию;  $c_m$ ,  $c_k$  — теплоемкости соответственно обмотки и пакета железа;  $y$  — координата осевого направления;  $t$  — время.

Из (1)–(3) следует, что причиной превышения температуры статора является мощность потерь в обмотке статора и пакете железа. Связь между количеством теплоты и током статора представляет безынерционный процесс вида [2]

$$Qdt = Cdt + A\tau dt, \quad (4)$$

где  $Q$  — количество теплоты, сообщаемой телу в единицу времени;  $C$  — теплоемкость тела;  $A$  — теплоотдача тела (количество теплоты, рассеиваемой поверхностью тела в секунду при разнице температур тела и среды в один градус);  $\tau$  — превышение

температуры тела над температурой окружающей среды.

Отсюда получаем зависимость, характеризующую превышение температуры в функции времени:

$$\tau = \tau_y \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad (5)$$

где  $T = \frac{C}{A}$  — постоянная времени, равная отношению теплоемкости машины к ее теплоотдаче.

В качестве постоянной времени нагрева машины принимается постоянная наиболее существенной ее части, отражающая общий тепловой режим работы. У синхронного двигателя с постоянными магнитами на роторе это статор.

На основании зависимости (5) передаточная функция процесса нагрева представляется апериодическим звеном

$$W_{\text{наг}}(p) = \frac{\tau(p)}{I(p)} = \frac{K_t}{T_{\text{наг}} p + 1},$$

где  $K_t$  — отношение превышения температуры к току статора;  $T_{\text{наг}}$  — постоянная времени нагрева статора.

Процесс нагрева планшайбы за счет передачи теплоты от статора с учетом вентиляции в воздушном зазоре между статором и ротором также описывается апериодическим звеном вида

$$W_{\text{план}}(p) = \frac{\tau(p)}{\tau_{\text{план}}(p)} = \frac{K_{\text{план}}}{T_{\text{план}} p + 1},$$

где  $\tau_{\text{план}}$ ,  $K_{\text{план}}$  — превышение температуры планшайбы относительно окружающей среды и коэффициент передачи, учитывающий снижение температуры планшайбы относительно статора исполнительного двигателя соответственно. Их значения получены экспериментально и составляют

$$K_{\text{план}} = 0,8...0,9, T_{\text{план}} = (1,2...1,3) T_{\text{наг}}.$$

Нагрев планшайбы вызывает нагрев детали, установленной на ее поверхности, что ведет к снижению точности обработки. Процесс передачи теплоты от планшайбы к детали имеет сложный характер и зависит от материала, формы, объема. Экспериментальные исследования показали, что этот процесс также инерционный и описывается апериодическим звеном

$$W_{\text{дет}}(p) = \frac{\tau(p)}{\tau_{\text{план}}(p)} = \frac{K_{\text{дет}}}{T_{\text{дет}} p + 1},$$

где  $z$  — геометрическое изменение размеров детали в зависимости от превышения температуры планшайбы  $\tau_{\text{план}}$ ;  $K_{\text{дет}}$  — коэффициент, учитывающий геометрическое изменение детали от превышения температуры, который определяется в зависимости от формы и материала;  $T_{\text{дет}}$  — постоянная времени изменения размера детали,  $T_{\text{дет}} = (1,1...1,3) T_{\text{план}}$ .

## Система автоматического управления приводом поворотного стола мехатронного модуля

Для управления мехатронным модулем используется сложная система управления, состоящая из двух подсистем:

- подсистемы подчиненного управления, обеспечивающей управление движением и позиционированием поворотного стола;
- подсистемы управления температурой модуля.

Необходимость первой подсистемы объясняется обеспечением высокой точности позиционирования стола, соответствующего классу точности  $C$ , стабилизации угловой скорости вращения планшайбы в целях устранения действия помех (затупления инструмента, изменения жесткости заготовки по глубине и длине) на качество обработки. Для оптимальной загрузки двигателя используется контур тока.

Необходимость второй подсистемы связана с минимизацией потерь точности обработки детали, связанных с теплодеформацией самой детали и планшайбы, на которой она закреплена. В нашем случае это система с релейным регулятором температуры с формированием сигнала задания по току статора исполнительного двигателя.

При синтезе системы управления координатой передаточная функция синхронного двигателя с постоянными магнитами, работающего в режиме бесколлекторного двигателя постоянного тока, представляется в виде [5]

$$W_{\text{ду}}(p) = \frac{\omega(p)}{U_{1q}(p)} = \frac{1}{\psi_{1d0} \left( \frac{2JL_1}{m_1 Z_n \psi_{1d0} \psi_b} p^2 + \frac{2JL_1}{m_1 Z_n \psi_{1d0} \psi_b T_{11}} p + 1 \right)} \quad (6)$$

или

$$W_{\text{ду}}(p) = \frac{\omega(p)}{U_{1q}(p)} = \frac{1}{\psi_{1d0} (T_{\vartheta 1} T_{M1} p^2 + T_{M1} p + 1)},$$

где  $\omega$  — угол вращения двигателя;  $U_{1q}$  — проекция вектора напряжения на ось  $q$ ;  $T_{\vartheta 1} = T_{11}$  — электромагнитная постоянная цепи статора;  $T_{M1} = \frac{2JL_1}{m_1 Z_n \psi_{1d0} \psi_b T_{11}}$  — электромеханическая постоянная синхронного электродвигателя;  $Z_n$  — число пар полюсов двигателя;  $m_1$  — число фаз питающего напряжения;  $\psi_{1d0}$  — проекция вектора потокосцепления на ось  $d$ ;  $\psi_b$  — потокосцепление возбуждения от постоянных магнитов ротора двигателя;  $J$  — момент инерции, приведенный к валу двигателя;  $L_1$  — индуктивность обмотки статора.

Регуляторы тока скорости и положения рассчитаны из условия обеспечения технического оптимума и имеют следующие передаточные функции:

- для контура тока  $W_{pt}(p) = K_{pt} \frac{Tp + 1}{p}$ ;
- для контура скорости  $W_{pc}(p) = K_{pc}$ ;
- для контура положения  $W_{pp}(p) = K_{pp}$ .

## Математическое моделирование системы автоматического управления мехатронного модуля

Исследование САУ проводили на модели в среде MATLAB, структурная схема модели представлена на рис. 3.

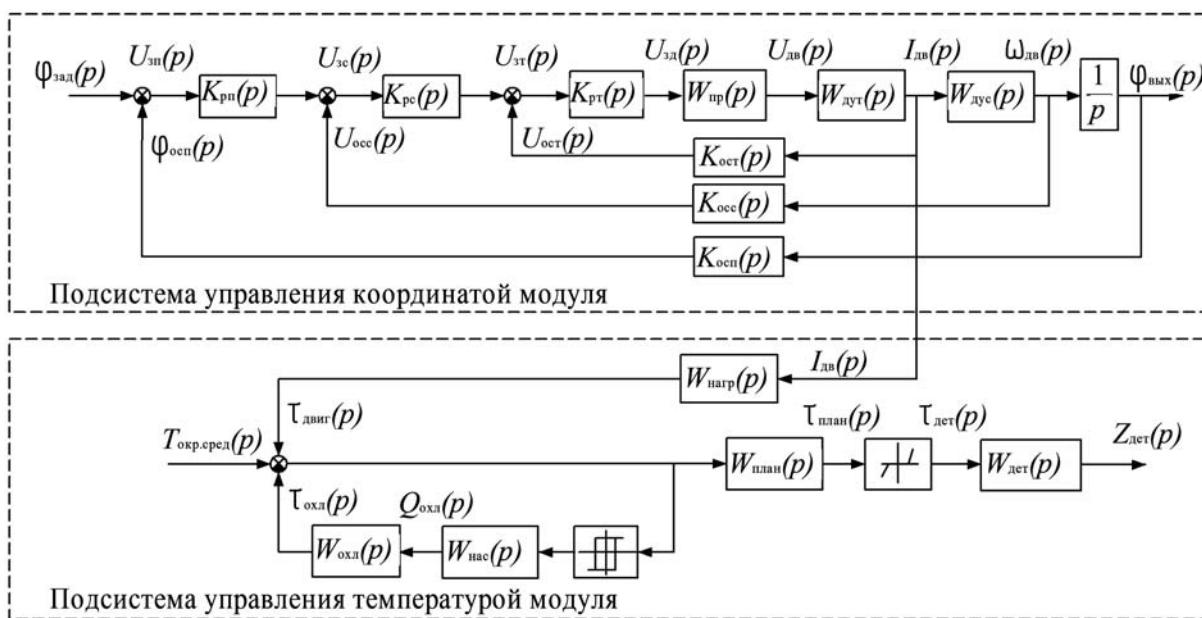


Рис. 3. Структурная схема САУ мехатронного модуля

Передаточные функции звеньев имеют следующие числовые значения:

$$W_{\text{дут}}(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{C_e \Phi}{R(T_3 p + 1)} = \frac{0,02}{0,00871 p + 1},$$

здесь  $T_3$  — электромагнитная постоянная двигателя;  $R$  — эквивалентное сопротивление статора;  $C_e \Phi$  — постоянный коэффициент;

$$W_c(p) = \frac{\omega(p)}{I(p)} = \frac{C_m \Phi}{Jp} = 0,76 \cdot \frac{1}{p},$$

здесь  $C_m \Phi$  — постоянный коэффициент;  $J = 0,12 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  — момент инерции ротора;  $W_{\text{пр}}(p) = \frac{U(p)}{U_{\text{пр}}(p)} = \frac{1000}{0,01p + 1}$  — передаточная функция силового преобразователя.

Передаточная функция процесса нагрева планшайбы

$$W_{\text{нагр}}(p) = \frac{\tau(p)}{I(p)} = \frac{8}{120p + 1}.$$

Передаточная функция процесса охлаждения

$$W_{\text{охл}}(p) = \frac{\tau(p)}{Q(p)} = \frac{16}{100p + 1}.$$

Насос представлен в виде звена с  $W_{\text{нас}}(p) = \frac{0,013}{0,3p + 1}$

при расходе  $V = 5 \text{ л/мин}$  и начальной температуре охлаждающей жидкости  $19^\circ\text{C}$  (разница температур охлаждающей жидкости и термоконстантного помещения не должна превышать  $1^\circ\text{C}$  — из условия, что в рабочей камере станка не должен выпадать конденсат).

Релейный элемент осуществляет подключение асинхронного двигателя к сети при достижении заданного значения  $\tau$  превышения температуры. Нелинейный элемент показывает процесс начала нагрева детали после превышения  $\tau$  значения температуры окружающей среды в термоконстантном помещении. Процесс деформации представлен апериодическим звеном, полученным экспериментально.

На рис. 4 показана диаграмма стабилизации температуры на уровне  $20^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$  при отработке за-

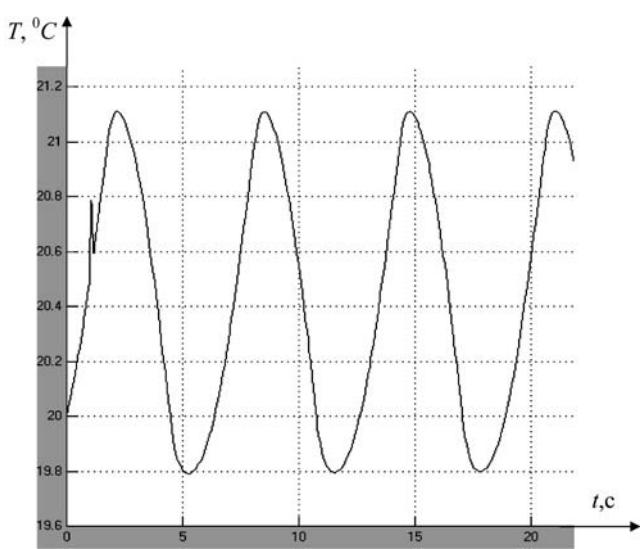


Рис. 4. Диаграмма стабилизации температуры статорных обмоток

данного значения угла поворота стола  $\phi_{\text{зад}} = 1000$  рад и действии статического тока  $I_{\text{ст}}$ , равного номинальному значению тока двигателя, и осцилляций, связанных с частотой вращения фрезы  $n_{\text{фр}} = 600 \text{ мин}^{-1}$ .

Анализ результатов моделирования показывает, что при наличии САУ охлаждения планшайбы можно добиться точности обработки изделий, соответствующих классу точности С.

Результат исследования используется при разработке рабочего проекта на ЗАО "Стан—Самара" (г. Самара).

#### Список литературы

- Подураев Ю. В., Кулешов В. С. Принципы построения и современные тенденции развития мехатронных систем // Мехатроника. 2000. № 1. С. 50–10.
- Лысов М. С., Стариков А. В. Математическая модель поворотного стола как объекта управления // СТИН. 2009. № 4. С. 7–10.
- Ключев В. И. Теория электропривода. М.: Энергоиздат, 2001.
- Козьминых Д. В. Расчет мощности электроприводов с учетом старения изоляции. Куйбышев: Кн.изд-во, 1968. 67 с.
- Лысов М. С., Стариков А. В., Стариков В. А. Линеаризованная математическая модель синхронного электродвигателя при различных способах управления его скоростью // Вестник самарского технического университета. 2008. № 1 (16).

**Г. М. Мартинов**, д-р техн. наук, проф.,  
**Р. А. Нежметдинов**, канд. техн. наук, доц.,  
neramil@gmail.com,  
МГТУ "Станкин",  
**С. В. Соколов**, канд. техн. наук, мл. науч. сотр.,  
Государственный Инжинирингового Центра МГТУ  
"Станкин"

## **Способ построения инструментария систем мониторинга и настройки параметров мехатронного технологического оборудования на основе специализированных программных средств\***

*Предложен способ построения инструментария мониторинга и настройки параметров мехатронного технологического оборудования, базирующийся на внедрении специализированных программных компонентов в структуру системы управления. Проанализированы требования, предъявляемые к современным системам мониторинга и настройки параметров, на основе данного анализа получена матрица формирования характеристик и функциональности компонентов, применяемая на этапе проектирования систем управления. Изложен механизм сетевого взаимодействия между агентом мониторинга и настройки параметров и терминальной частью системы. Приведен пример практической реализации инструментария мониторинга и настройки параметров в системе управления промышленным роботом серии ТУР.*

**Ключевые слова:** мониторинг и настройка параметров, промышленный робот, система ЧПУ, мехатронное оборудование

### **Введение**

Решение задач автоматизации нередко осуществляется на базе использования мехатронного оборудования различных производителей, которое, с одной стороны, решает поставленные задачи, но, с другой стороны, порождает проблему интеграции этих данных разнородных систем в рамках единого информационного окружения предприятия [1].

Построение системы мониторинга и настройки параметров мехатронного оборудования для представления множества числовых параметров системы необходимо для обеспечения качественного выполнения технологического процесса и снижения времени наладки и ввода оборудования в эксплуатацию.

Ведущие производители систем управления мехатронным оборудованием предоставляют собственные инструментальные среды для создания приложений мониторинга и настройки параметров. Эти

среды достаточно сложны, несовместимы между собой и не предусматривают возможность работы с оборудованием сторонних производителей.

### **Формирование требований к системам мониторинга и настройки параметров**

Исторически сложилось, что процессы мониторинга и настройки параметров мехатронного оборудования рассматривали как отдельные виды производственной деятельности, практически не зависимые друг от друга, и для них разрабатывались отдельные программные продукты [2]. В ходе исследования выявлено, что процесс настройки параметров мехатронной системы является итеративным и тесно связан с данными, получаемыми от системы мониторинга. Система мониторинга в процессе настройки выступает в качестве обратной связи, позволяющей оценивать процессы, происходящие в мехатронной системе, и корректировать параметры настройки вплоть до достижения необходимых технических характеристик.

В результате проведенного анализа выявлены две группы проблем, не решенных на настоящий момент: первая относится к ядру системы управления, вторая — к терминальной части, где располагаются прикладные приложения мониторинга и настройки (рис. 1).

Вследствие отсутствия стандарта каждый производитель создает собственные системы мониторинга и настройки параметров для конкретного типа мехатронного оборудования. Эти системы тесно интегрированы с программным комплексом производителя и не обладают автономностью и переносимостью для работы с мехатронным оборудованием других производителей [4].

Независимо от существующих тенденций и способа реализации к системам мониторинга и настройки параметров предъявляют вполне определенный набор требований:

- открытость для использования с системами управления мехатронным оборудованием сторонних производителей;
- возможность работы со стандартными промышленными шинами для передачи данных (Profi-bus, CANopen, ProfiNet, DeviceNet и др.);
- возможность распределенного функционирования в составе комплексного решения автоматизации.

При всем многообразии предлагаемых на рынке решений в области систем мониторинга и настройки параметров они располагают ограниченной открытостью, что вызывает затруднения при их выборе и не позволяет четко обрисовать возможности, которые предлагает то или иное решение. Этим объясняется тот факт, что потребители чаще всего используют только базовые возможности оборудования, а дорогостоящие функциональности остаются незадействованными [3, 8].

\* Работа выполнена по Госконтрактам № П978 и П1368 на проведение НИР в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009—2013 годы.

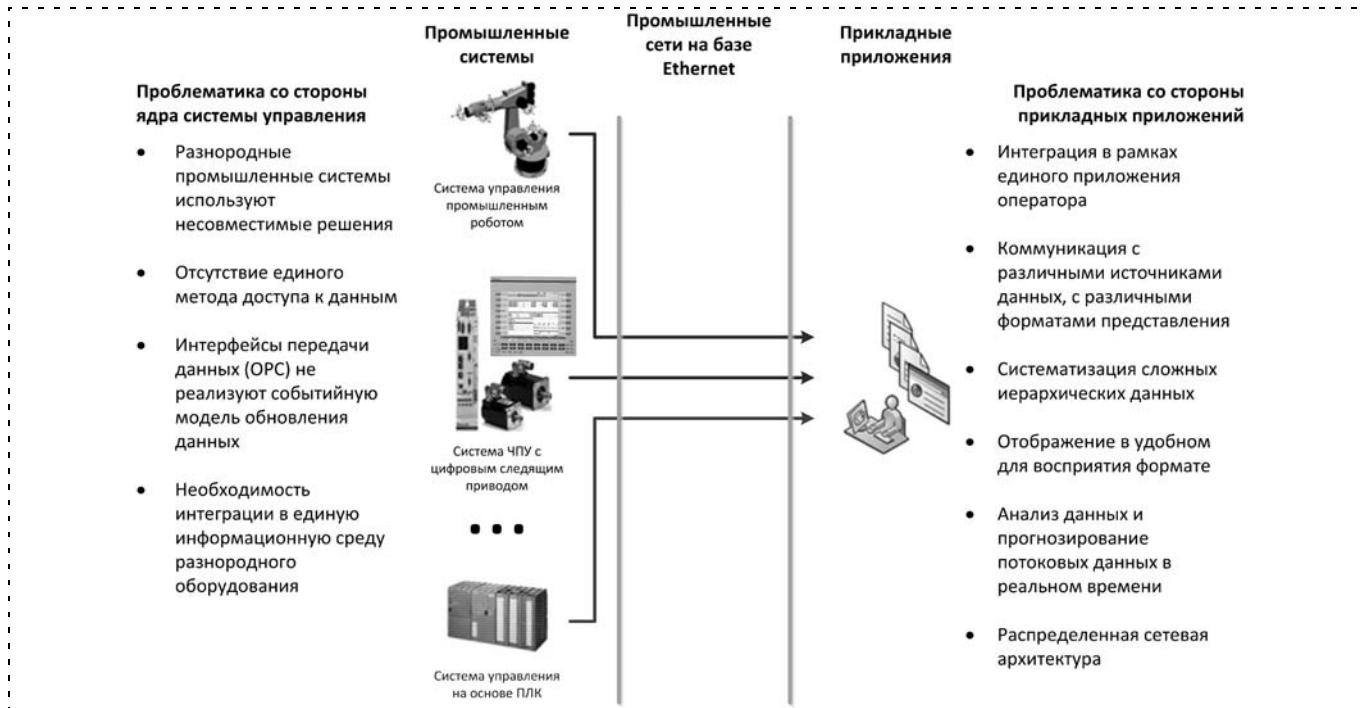


Рис. 1. Проблема реализации задач мониторинга и настройки параметров в промышленных системах

Анализ подсистем мониторинга и настройки параметров в системах управления мехатронным оборудованием ведущих мировых разработчиков (Siemens, Bosch Rexroth, KUKA, 3S и др.) выявил следующие недостатки:

- отсутствует единый подход к систематизации прикладных компонентов систем мониторинга и настройки параметров, что усложняет анализ, проектирование и разработку программных компонентов для расширения ее возможностей;
- не formalизован процесс интеграции функциональных компонентов различных производителей в состав системы мониторинга и настройки параметров;
- современные системы мониторинга и настройки не предоставляют возможность гибкого конфигурирования набора программных компонентов для создания проблемно-ориентированных решений и настройки под задачи конкретного пользователя.

Анализ позволил выделить потребность объединения разработок и создания единого информационного пространства для проектов промышленной автоматизации. В рамках подобных проектов предусматриваются единые механизмы реализации систем мониторинга и визуализации технологических параметров для мехатронного оборудования разных производителей.

В результате исследования было определено, что наиболее перспективным является способ построения системы мониторинга и настройки параметров в виде открытой модульной системы на основе интеграции специализированных программных компонентов как собственной разработки, так и сторонних производителей.

### Выявление компонентов инструментария

В системе мониторинга и настройки условно выделены два основные части — агент системы и ее терминальная часть.

Агент мониторинга и настройки взаимодействует с источниками данных внутри ядра системы управления, подключается к базе данных параметров ядра системы управления, считывает или записывает значения параметров и структуры их хранения. После первичной обработки значения параметров должны быть переданы в терминальную часть мониторинга и настройки через доступный канал связи.

Терминальная часть системы мониторинга и настройки через канал связи предоставляет клиентскому приложению сервисы по считыванию структуры параметров системы управления мехатронным оборудованием, чтению и записи значений этих параметров [5].

В процессе реализации были выделены четыре уровня бизнес-логики:

- уровень доступа к данным — отвечает за взаимодействие с разнородными мехатронными устройствами и маскирует специфику работы с ними;
- уровень передачи данных — отвечает за передачу данных и команд;
- уровень представления и хранения данных — отвечает за хранение данных мониторинга и настройки в терминальной части системы и предоставляет интерфейсы для доступа к данным;
- уровень визуализации — отвечает за формирование компонентов отображения и редактирования данных.

		Отображение структуры параметров объекта	Установка значения параметров	Получение значения параметров	Комплексное отображение данных о системе управления	Анализ данных		Временная развертка значения параметров		
Визуализация данных		Компоненты иерархического отображения параметров	Редакторы параметров различного типа	Компоненты визуального отображения данных	Язык описания отображения, компоненты графической визуализации	Механизм вычислений	Компоненты конфигурирования вычислений	Цифровой осциллограф системы управления		
Представление и хранение данных		Хранение данных о структуре параметров	Формирования команды установки значения	Распаковка пакетов, обновление данных внутреннего представления			Структура данных хранения результата	Структура данных хранения результатов измерения		
Передача данных		Формат представления структуры параметров	Передача данных	Передача данных	Передача данных		Управление, накопление и отправка	Протокол передачи данных осциллографа		
Dоступ к данным	Первичная обработка		Компоновка данных о структуре параметров	Проверка типа, права доступа, способ активации	Управление считыванием данных, формирование пакетов данных для отправки					
Сбор		Считывание структуры параметров	Запись значения	Чтение текущих значений						

Рис. 2. Матрица формирования характеристик и функциональности компонентов

На основе выделения основных задач, решаемых в рамках системы мониторинга и настройки параметров, построена матрица формирования характеристик и функциональности компонентов (рис. 2) [11], которая позволяет:

- на этапе разработки программного обеспечения формировать функциональные требования к компонентам на каждом уровне бизнес-логики системы;
- определять необходимый набор компонентов визуализации данных для решения задачи мониторинга и настройки в конкретном случае;
- определять набор необходимых для реализации протоколов;
- анализировать набор имеющихся компонентов сторонних производителей и вырабатывать стратегию их интеграции.

В строках матрицы представлены уровни бизнес-логики, определяющие компонентную структуру приложения. В столбцах — основные задачи, решаемые инструментарием. На пересечении выделены основные функциональности, форматы, протоколы и элементы пользовательского интерфейса, которые необходимо реализовать для решения каждой из задач на разных уровнях бизнес-логики.

Анализ матрицы показывает, что решение задач мониторинга и настройки требует реализации сходных функциональностей на разных уровнях бизнес-логики, что определяет базис построения и позволяет выделить набор общих компонентов:

- компонент доступа к источнику данных внутри системы управления;

- компонент первичной обработки данных и управления процессом сбора данных внутри системы управления;
- компонент передачи данных по каналу связи внутри системы управления (серверная часть);
- компонент передачи данных по каналу связи внутри терминального клиента мониторинга и настройки (клиентская часть);
- сервер данных мониторинга и настройки клиентского приложения;
- различные компоненты визуального отображения и ввода данных.

#### Организация сетевого взаимодействия между агентом мониторинга и настройки и прикладным приложением

Взаимодействие между агентом и терминальной частью системы организовано по клиент-серверному принципу (рис. 3).

Взаимодействие осуществляется через программные модули сетевого взаимодействия, каждый из которых состоит из нескольких уровней [6]:

- 1) уровень программного интерфейса, предоставляющий интерфейс для работы с модулем;
- 2) уровень запаковки/распаковки данных, реализующий преобразования данных в формат, пригодный для отправки через среду передачи данных и осуществляющий обратное преобразование;
- 3) уровень передачи данных, содержащий логику взаимодействия со средой передачи данных, а именно, обеспечивающий установку и поддержание соединений по каналу связи и формирующий пакеты данных в соответствии с форматом адреса-



Рис. 3. Схема организации сетевого взаимодействия

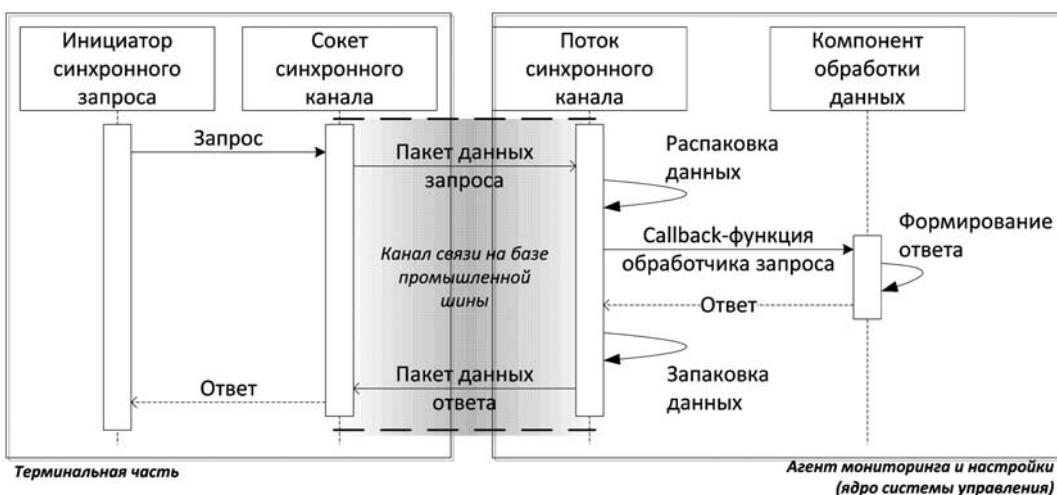


Рис. 4. Диаграмма последовательности общения по синхронному каналу

ции и маршрутизации среды передачи данных. Взаимодействие каждого клиента с сервером осуществляется с использованием двух каналов передачи данных — синхронного и асинхронного. Синхронный канал служит для выполнения запросов клиента к серверу, а асинхронный — для отправки сервером уведомлений клиенту.

Инициатором передачи данных по синхронному каналу является терминальное приложение. Введено максимальное время ответа по синхронному каналу (timeout), в случае превышения которого ожидание ответа прекращается для предотвращения возможных зависаний. Взаимодействие происходит по следующей схеме (рис. 4):

- 1) терминал отправляет запрос, который принимается потоком сервера, обслуживающим синхронный канал и ожидающим поступления новых данных;
- 2) после распаковки данных запроса вызывается функция агента мониторинга и настройки, отвечающая за обработку запросов;
- 3) формируется ответ на поступивший запрос;
- 4) ответ передается в терминальную часть, все это время ожидавшую обработки запроса.

В случае с асинхронным каналом запрос также передается по синхронному каналу. Агент мониторинга и настройки помещает запрос в очередь асинхронных запросов и формирует короткий ответ, информирующий, что запрос принят. Затем поток асинхронного канала на стороне терминальной части постоянно ожидает поступления данных ответа от агента мониторинга и настройки. Когда данные приходят, они передаются на верхний уровень ПО терминальной части [7].

#### Практические аспекты разработки системы мониторинга и настройки параметров промышленного робота серии ТУР

Осуществление мониторинга и настройки параметров в системе управления промышленным роботом серии ТУР потребовало разработки языка описания визуального представления параметров (рис. 5). В качестве формата описания визуализации выбран язык XML, являющийся в настоящее время де-факто технологическим стандартом для структурирования данных. Конфигурационные файлы на языке описания XML могут быть созда-

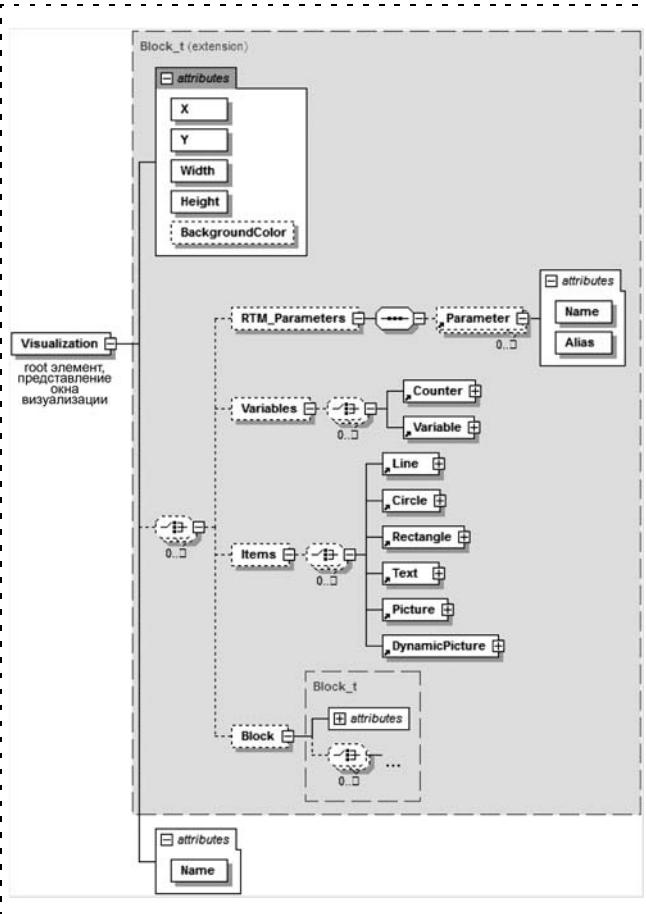


Рис. 5. Схема языка описания отображения

ны и изменены в любом текстовом редакторе или с помощью специализированных редакторов XML [9, 10].

Основной структурной единицей описания визуального интерфейса является блок (тип Block\_t). Главное окно визуализации представляет собой блок верхнего уровня. Блочное деление описания окна визуализации позволяет систематизировать элементы управления и обеспечивает возможность повторного использования блоков.

Блок содержит список визуальных элементов (узел Items), в который помещаются примитивы "Окружность", "Линия", "Картина", "Текст", "Динамический текст" и "Динамическая картинка". Также блок может содержать внутри себя дочерние блоки. Подобная нисходящая схема обеспечивает гибкость при составлении конфигураций окна визуализации. Окно допускает расположение нескольких ранее сконфигурированных блоков, связанных и дополненных статическими и динамическими элементами.

Внутри узла RTM-Parameters (Real Time Machine Parameters) для каждого блока должны быть описаны параметры системы управления, значения которых используются для визуализации. Внутри узла Variables (переменные) задаются вычисляемые выражения и счетчики. Создание экранной анимации обеспечивается заданием параметров графических примитивов, таких как координаты, размер, цвет или изображение для динамических картинок в виде вычисляемых выражений.

Пример соответствия элементов схемы и примитивов экранной формы и структурная схема компонента визуализации данных представлены на рис. 6. Файлы описания визуального интерфейса хранятся на интерфесном компьютере. Выбранный пользователем файл описания загружается с помощью XML-парсера в DOM-документ. Затем интерпретатор анализирует состав DOM-документа, выделяет внутри него графические элементы и определяет набор необходимых для отображения параметров. Выполняется поиск и сопоставление необходимых для отображения параметров в сервере данных мониторинга и настройки и осуществляется подписка на обновление их значений. Получив значения параметров, интерпретатор выводит на экран визуальное представление этих параметров.

На рис. 7 (см. вторую сторону обложки) представлена практическая реализация инструментария мониторинга и настройки в системе управления промышленным роботом серии "ТУР".

В диагностическом режиме на экране системы управления роботом отображается компонент графической визуализации параметров и цифровой осциллограф, представляющий временнуу развертку сигналов. Слева от осциллографа расположены компоненты управления, с помощью которых определяются измеряемые сигналы и настраивается их графическое представление и параметры отображения. Справа расположено окно графической визуализации параметров, на котором представлены: статическое отображение управляемого объек-

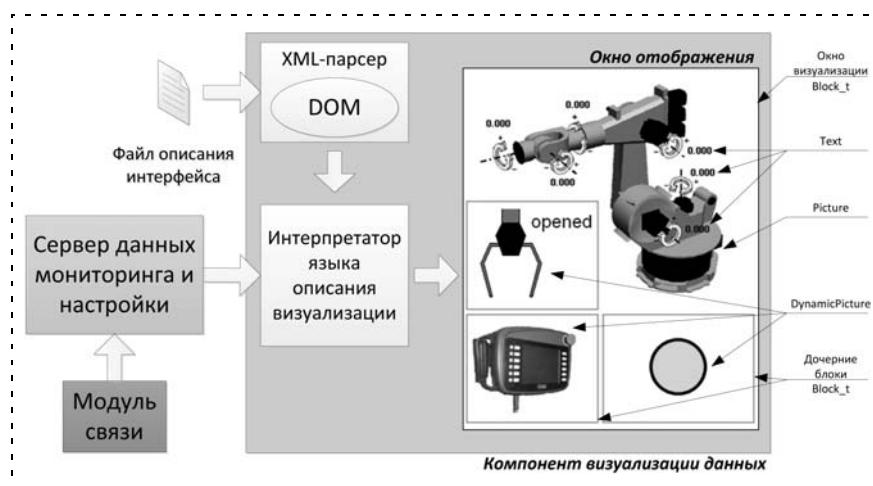


Рис. 6. Структурная схема компонента графической визуализации данных

та (робот), значения координат осей с выделением активной оси, состояние схвата робота и пульта ручного управления, а также направление движения активной оси.

## Заключение

Предложенный способ построения инструментария мониторинга и настройки параметров мехатронных устройств базируется на внедрении специализированных программных компонентов в структуру системы управления. Проведенный анализ требований, предъявляемых к современным системам мониторинга и настройки параметров, позволил получить матрицу формирования характеристик и функциональности компонентов, применяемую на этапе проектирования систем управления. Работоспособность предложенных идей продемонстрирована на примере практической реализации мониторинга и настройки параметров в системе управления промышленным роботом серии ТУР.

## Список литературы

1. Мартинов Г. М., Козак Н. В. Декомпозиция и синтез программных компонентов электроавтоматики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. № 12. С. 4–11.
2. Григорьев С. Н., Мартинов Г. М. Концепция построения базовой системы числового программного управления мехатронными объектами // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2011. № 2. С. 21–27.
3. Мартинов Г. М., Мартинова Л. И., Козак Н. В., Нежметдинов Р. А., Пушкин Р. Л. Принципы построения распределенной системы ЧПУ технологическими машинами с использованием открытой модульной архитектуры // Справочник. Инженерный журнал. 2011. № 12.
4. Григорьев С. Н., Андреев А. Г., Мартинов Г. М. Перспективы развития кроссплатформенных компьютерных систем числового программного управления высокотехнологичного оборудования // Автоматизация в промышленности. 2011. № 5. С. 3–8.
5. Мартинов Г. М., Козак Н. В., Нежметдинов Р. А., Пушкин Р. Л. Принцип построения распределенной системы ЧПУ с открытой модульной архитектурой // Вестник МГТУ "Станкин". 2010. № 4 (12). С. 116–122.
6. Мартинов Г. М., Трофимов Е. С. Модульная компоновка и построение прикладных приложений диагностики систем управления // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2008. № 7. С. 44–50.
7. Соколов С. В. Специфика реализации мониторинга технологических параметров в системе управления мехатронным оборудованием // Вестник МГТУ "Станкин". 2011. № 4 (17). С. 89–92.
8. Григорьев С. Н. Научно-технические проблемы построения современных технологических систем с числовым программным управлением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 4. С. 19–26.
9. Нежметдинов Р. А., Соколов С. В., Обухов А. И., Григорьев А. С. Расширение функциональных возможностей систем ЧПУ для управления механо-лазерной обработкой // Автоматизация в промышленности. 2011. № 5. С. 49–53.
10. Мартинова Л. И., Козак Н. В., Нежметдинов Р. А., Пушкин Р. Л. Реализация открытости управления электроавтоматикой станков в системе ЧПУ класса PCNC // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2011. № 2. С. 11–16.
11. Добровольский А. Интеграция приложений: методы взаимодействия, топология, инструменты. Открытые системы. 2006. № 9.
12. Катцель Д. Виртуальные приборы // Control Engineering Россия. 2006. № 6.

## ИНФОРМАЦИЯ



### Третья межотраслевая конференция "АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА – 2012"

г. Москва, 27 ноября 2012 г., ГК "ИЗМАЙЛОВО"



27 ноября 2012 г. в ГК "ИЗМАЙЛОВО" (г. Москва) состоится Третья Межотраслевая конференция "АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА – 2012",

посвященная демонстрации новейших разработок для автоматизации предприятий энергетики, металлургии, нефтегазовой и цементной промышленности, современных информационных технологий, ИТ, АСУ ТП, ERP, MES-систем, систем мониторинга и контрольно-измерительной техники

#### ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ КОНФЕРЕНЦИИ:

- ◆ Актуальные задачи автоматизации в промышленности
- ◆ ИТ-инфраструктура современного промышленного предприятия
- ◆ Современные информационные технологии для повышения уровня эффективности, экономичности и промышленной безопасности промышленных предприятий
- ◆ Информационно-управляющие системы промышленной автоматизации (АСУ ТП, АСОДУ, ERP, MES-системы и др.)
- ◆ ИТ для повышения безопасности и эффективности технологических процессов
- ◆ Практический опыт внедрения информационных систем на предприятиях нефтегазовой отрасли, энергетики и металлургии
- ◆ Современные подходы к построению автоматизированных систем управления технологическими процессами.
- ◆ Технология и технические средства систем производственного контроля и мониторинга
- ◆ Последние достижения в области контрольно-измерительной техники
- ◆ Новейшие типы газоанализаторов, расходомеров, спектрометров, средств мониторинга, контроля и учета, различные типы датчиков
- ◆ Автоматизация измерений и испытаний
- ◆ Средства поддержки проектирования

Сайт конференции: [www.intecheco.ru](http://www.intecheco.ru)



# ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

## Управление и информатика в авиакосмических и морских системах

№ 7 (136)  
июль  
2012

Главный редактор:  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Ответственный секретарь:  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСЕЕВ В. В.  
БАРАНОВ Л. А.  
БЕЛОКОНОВ И. В.  
БУКОВ В. Н.  
ВАСИЛЬЕВ В. И.  
ГОДУНОВ В. А.  
ГУРЕВИЧ О. С.  
ГУРСКИЙ Б. Г.  
ЕФИМОВ В. В.  
ЗАЙЦЕВ А. В.  
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.  
НЕСТЕРОВ В. А.  
ОХТИЛЕВ М. Ю.  
ПАНКРАТОВ В. М.  
РАСПОПОВ В. Я.  
САБОЮ. И.  
СТЕПАНОВ О. А.  
СОЛДАТКИН В. М.  
ФИЛИМОНОВ Н. Б.  
ХИМЕНКО В. И.  
ЧЕБУРАХИН И. Ф.  
ШИРИЯЕВ В. И.  
ШКОЛИН В. П.

Редакция:  
ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

### Гайдук А. Р.

Управление группой беспилотных летательных аппаратов с ограничением на управление и переменные состояния . . . . . 52

### Раткин Л. С.

Сравнительный анализ беспилотных летательных аппаратов самолетного типа, применяемых для решения задач автоматизированного промышленного и экологического мониторинга состояния объектов . . . . . 58

### Яскевич А. В.

Математическая модель периферийного стыковочного механизма. Ч. 1. Уравнения движения дифференциальных механизмов . . . . 63

**А. Р. Гайдук**, д-р техн. наук, проф.,  
gaiduk\_2003@mail.ru,  
Технологический институт  
федерального государственного  
автономного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
"Южный федеральный университет"  
в г. Таганроге (ТТИ ЮФУ)

## Управление группой беспилотных летательных аппаратов с ограничением на управление\* и переменные состояния

*Рассмотрена задача обеспечения устойчивости систем управления, когда расчетное значение управления превышает допустимое значение, а также синтез децентрализованного управления группой БЛА как распределенной системы с учетом взаимосвязей БЛА.*

**Ключевые слова:** система управления, ограничение, переменные состояния, допустимые значения, БЛА, группа, распределенная система, децентрализованное управление, устойчивость

### Введение

В последнее время для решения различных задач в социальной, производственной и оборонных сферах все более широкое применение находят беспилотные летательные аппараты (БЛА) [1, 2]. Однако одиночный БЛА обладает ограниченными возможностями, поэтому часто возникает необходимость группового применения БЛА, когда для решения некоторой задачи привлекаются одновременно несколько БЛА [2, 3]. Задача управления группой БЛА значительно сложнее, так как помимо управления полетом и действиями собственно БЛА необходимо обеспечить определенную взаимосвязь и согласованность с другими БЛА группы при выполнении поставленной задачи.

Отметим некоторые проблемы управления как одиночным БЛА, так и группой БЛА. Как известно, БЛА имеет ограниченный ресурс по управлению, что приводит к ограничениям на допустимые управления. Однако традиционные методы синтеза, как правило, не учитывают естественные ограничения на интенсивность управлений и переменные состояния [4]. Обычно неявно предполагается, что ни управления, ни переменные состояния не выходят на естественные, объективные ограничения.

Общий подход к учету ограниченных ресурсов управления впервые был предложен в работе [5]. В статье [6] синтез систем с ограничением переменных состояния проводится методом "блочного

управления". В последнее время к решению этой проблемы привлекается теория линейных матричных неравенств (LMI). В работах [7, 8, 9] рассматривается задача одновременного поиска как ограниченной области притяжения, так и управления по состоянию, расчетные значения которого превышают допустимые значения, и в то же время сохраняется устойчивость системы управления неустойчивым объектом.

Задача синтеза ограниченных управлений, обеспечивающих ограниченность переменных состояния нелинейных объектов, уравнения которых представлены в управляемой форме Жордана, рассматривалась в работах [10, 11].

Вторая проблема управления группой БЛА связана с тем, что группа распределена в пространстве, и при этом для достижения поставленной цели БЛА должны взаимодействовать. Другими словами, с точки зрения управления группа БЛА является распределенной, многосвязной динамической системой.

Проблема синтеза распределенных систем восходит к работам F. N. Bailey, E. A. Барбашина, D. D. Sijak [12, 13]. В этих работах рассматривались централизованные системы, в которых при управлении каждой локальной подсистемой используются и выходные величины или переменные состояния других подсистем. Однако при сильной распределенности системы реализация централизованного управления представляет большие технические сложности.

В связи с этим в работах [14, 15] и многих других были предложены децентрализованные системы управления. В этом случае управление каждой подсистемой зависит от переменных состояния только данной подсистемы, что приводит к некоторым ограничениям на межсистемные связи.

В данной статье сначала рассматривается система управления БЛА с найденным по требованиям к ее качеству управлением, которое в действительности ограничивается. Установлено допустимое по условиям устойчивости системы соотношение между начальными условиями на переменные состояния и допустимым управлением. Далее рассматривается децентрализованное управление группой БЛА с учетом взаимосвязей между ними.

Методом функций Ляпунова показано, что если управление в системе ограничено, то как начальные условия, так и интенсивность связей между отдельными БЛА должны быть ограниченными. Получены соответствующие оценки.

### Ограниченнное управление БЛА

**Постановка задачи.** Для более обоснованной формулировки задачи исследования на этом этапе предварительно рассмотрим неустойчивый объект первого порядка, уравнение которого в отклонениях имеет вид

$$\dot{x} = \alpha(x - x^*) + f + u, \quad (1)$$

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-08-01196-а).

где  $x = x(t)$  и  $x^\circ$  — переменная состояния и ее желаемое значение, соответственно  $f = f_0 \cdot 1(t)$  — возмущение;  $u$  — управление;  $\alpha$  — параметр объекта, причем  $\alpha > 0$ , т. е. без управления объект (1) является неустойчивым.

Чтобы переменная  $x(t)$  объекта (1) приняла значение  $x^\circ$  с некоторой установившейся (в асимптотике) ошибкой  $\delta_f$ , достаточно применить простейшее управление по отклонению

$$u = -k_u(x - x^\circ) \quad (2)$$

при  $k_u > \alpha$ . Здесь  $k_u$  — параметр, значение которого выбирается при проектировании системы управления. При этом управлении ошибка системы  $\delta_f \leq |f_0|/(k_u - \alpha)$ .

Согласно (2) с увеличением отклонения  $\varepsilon = x - x^\circ$  растет требуемое значение управления. Однако на практике может быть реализовано только ограниченное управление, т. е. всегда  $|u| \leq U_{\max}$ , где  $U_{\max}$  — максимальное значение управления объекта (1), обусловленное его конструктивными и энергетическими особенностями.

Другими словами, в системе автоматического управления (1), (2) цель управления  $x(t) \rightarrow x^\circ$  при  $t \rightarrow \infty$  будет достигаться, например, при  $\varepsilon_0 > 0$  и  $f_0 > 0$ , если

$$\alpha\varepsilon_0 + f_0 \leq U_{\max} - \Delta, \quad (3)$$

где число  $\Delta > 0$ . Если же  $\varepsilon_0$  не удовлетворяет этому условию, например,  $\alpha\varepsilon_0 + f_0 > U_{\max}$ , а  $u = U_{\max}$ , то объект (1) не будет "подчиняться" управлению. Его переменная  $x$  будет стремиться к  $\pm\infty$  практически независимо от управления. Если же условие (3) выполняется, но  $\Delta$  очень мало, то цель управления будет достигаться неприемлемо долго. Поэтому на практике используется ограничение  $|k_u\varepsilon_0 + f_0| < U_{\max} - \Delta$  или

$$|\varepsilon_0| < (U_{\max} - \Delta - |f_0|_{\max})/k_u, \quad (4)$$

при условии  $U_{\max} - \Delta - |f_0|_{\max} > 0$ , т. е. в системе первого порядка *переменные ограничены только при ограниченных начальных значениях отклонений* переменной состояния.

Другими словами, система первого порядка с ограниченным управлением имеет ограниченную область устойчивости. При этом допустимые начальные значения отклонения определяются не только максимальным значением управления и возмущения, но и параметрами объекта или системы.

В связи с этим рассмотрим сначала задачу оценки устойчивости системы произвольного порядка при ограниченном управлении. С этой целью рассмотрим систему с управлением по состоянию, уравнение которой в отклонениях можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + b(u + f), \quad y = c^T x, \quad (5)$$

где  $x$  —  $n$ -вектор состояния;  $A, b, c$  — матрица и векторы параметров объекта;  $u = -k^T x$  — управление по состоянию;  $k$  — вектор параметров этого управления.

Будем предполагать, что пара  $A, b$  вполне управляема, т. е. ранг матрицы управляемости  $U = [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$  равен  $n$ , а вектор  $k$  такой, что собственные числа  $p_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , матрицы  $D = A - bk^T$  замкнутой системы (5) имеют  $\text{Re}p_i \leq -\varepsilon_1 < 0$ . Нетрудно видеть, что управление  $u = -k^T x$  синтезировано, как и обычно на практике, без учета возможных ограничений его значений [4].

Далее введем матрицу  $P_y = UM$ , где

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_i$  — коэффициенты полинома  $A(p) = \det(pE - A) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0$ .

Если  $\delta_i$  — коэффициенты полинома

$$D(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i) = p^n + \delta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \delta_1p + \delta_0,$$

то вектор  $k$  может быть определен по формуле  $k^T = (d - a)^T P_y^{-1}$ , где векторы  $d$  и  $a$  имеют вид  $d = [\delta_0 \ \delta_1 \ \dots \ \delta_{n-1}]^T$  и  $a = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{n-1}]^T$ .

Заменяя переменную  $x$  по формуле  $x = P_y \tilde{x}$ , где  $\tilde{x}$  — новый вектор переменных состояния, представим уравнение (5) в виде

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{D} \tilde{x} + \tilde{b} \tilde{k}^T \tilde{x} + \tilde{b}(u + f), \quad (7)$$

где  $\tilde{k}^T = k^T P_y$ ,  $u = -k^T x = -\tilde{k}^T \tilde{x}$ , матрица  $\tilde{D} = P_y^{-1} (A - bk^T) P_y$ . Подчеркнем, что матрица  $P_y^{-1} AP_y$  является сопровождающей полинома  $A(p)$ , а  $\tilde{D}$  — полинома  $D(p)$  [16].

Обозначим  $\sigma = k^T x = \tilde{k}^T \tilde{x}$ . Тогда с учетом ограничения управление  $u = u(\sigma)$  в (5) или в (7) определяется выражением:

$$u = u(\sigma) = \begin{cases} -\sigma, & \text{если } |\sigma| \leq U_{\max}, \\ -U_{\max} \text{sign } \sigma, & \text{если } |\sigma| > U_{\max}. \end{cases} \quad (8)$$

Из выражений (7) и (8) следует, что пока  $|\sigma| \leq U_{\max}$ , в уравнении (7) сумма  $\tilde{b} \tilde{k}^T \tilde{x} + \tilde{b} u = 0$ , и система (5), (8) является линейной. Если же  $|\sigma| > U_{\max}$ , то эта система становится нелинейной, причем ее нелинейность определяется выражением

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\sigma| \leq U_{\max}, \\ U_{\max} \text{sign } \sigma - \sigma, & \text{если } |\sigma| > U_{\max}. \end{cases} \quad (9)$$

С учетом (9) уравнение (7) запишется следующим образом:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{D} \tilde{x} - \tilde{b} \varphi(\sigma) + \tilde{b} f. \quad (10)$$

Нелинейность  $\varphi(\sigma)$  (9) является секторной, удовлетворяет условию  $-\bar{\mu} \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq 0$ , т. е. принадлежит к классу  $[-\bar{\mu}, 0]$ , причем, если  $\bar{\mu} = 1$ , то нелинейность  $\varphi(\sigma)$  имеет вид, показанный на рисунке (а). При этом  $\sigma$  как независимая переменная может изменяться в пределах  $(-\infty, \infty)$ . Если же  $0 < \bar{\mu} < 1$ , то нелинейность  $\varphi(\sigma)$  имеет вид, показанный на рисунке (б). При этом выражение (9) справедливо при изменениях переменной  $\sigma$  лишь в пределах  $[-\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]$ , где  $\bar{\sigma} = U_{\max}/(1 - \bar{\mu})$ .

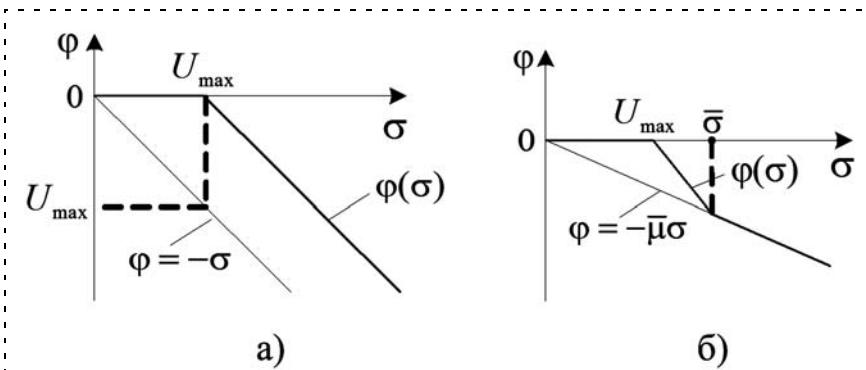
Прежде чем переходить к исследованию устойчивости нелинейной системы (5), (8), проверим возможность наличия у нее новых положений равновесия, кроме основного  $\mathbf{x}^* = 0$ , которое она имеет при  $|\sigma| < U_{\max}$ . Считая, что  $|\sigma| > U_{\max}$ , положим в (10)

$\dot{x} = 0, f = 0$  и учтем соотношения  $\tilde{D} = P_y^{-1} (A - b k^T) P_y$ ,  $\sigma = k^T x = \tilde{k}^T \tilde{x}$ . В результате придем к уравнению  $-\alpha_0 \tilde{x}_1^\circ = U_{\max} \text{sign}(\tilde{k}_1 \tilde{x}_1^\circ)$ ,  $\tilde{x}_i^\circ = 0, i = \overline{2, n}$ , или

$$-\alpha_0 \sigma^\circ = \tilde{k}_1 U_{\max} \text{sign} \sigma^\circ, \quad (11)$$

где  $\sigma^\circ = \tilde{k}_1 \tilde{x}_1^\circ = \tilde{k}^T \tilde{x}^\circ = k^T x^\circ$ . Величина  $\tilde{k}_1 = \delta_0 - \alpha_0$ , поэтому из (11) следует выражение  $-\alpha_0(|\sigma^\circ| - U_{\max}) = \delta_0 U_{\max}$ . Так как  $|\sigma^\circ| > U_{\max}$ , а  $\delta_0 > 0$ , то отсюда следует, что если  $\alpha_0 \geq 0$ , то уравнение (11) решения не имеет. Если же  $\alpha_0 < 0$ , то в системе (10) при  $|\sigma| > U_{\max}$  появятся два новых положения равновесия с координатами  $\sigma^\circ = \pm |\alpha_0|^{-1} \tilde{k}_1 U_{\max}$ , причем  $\tilde{x}_1^\circ = \pm |\alpha_0|^{-1} U_{\max}$ ,  $\tilde{x}_i^\circ = 0, i = \overline{2, n}$ . При этом

$$\sigma_{1,2}^\circ = \pm(1 + \delta_0/|\alpha_0|)U_{\max}, \alpha_0 < 0. \quad (12)$$



Нелинейности класса  $[-\bar{\mu}, 0]$ :

a)  $\bar{\mu} = 1$ ; б)  $0 < \bar{\mu} < 1$

Таким образом, дополнительные положения равновесия появляются в линейной системе (5), (8) с ограничением на управление только при  $\alpha_0 < 0$ . В этом случае величина  $(1 + \alpha_0/|\alpha_0|) > 1$ , поэтому точки  $\sigma_{1,2}^\circ$  (12) будут лежать в областях ненулевых значений нелинейности  $\varphi(\sigma)$  (см. рисунок) и могут влиять на свойства системы.

Если же в системе (5), (8) выполняется условие

$$|\sigma| < (1 + \sigma_0/|\alpha_0|) U_{\max} \text{ при } \alpha_0 < 0, \quad (13)$$

то она имеет единственное положение равновесия  $\mathbf{x}^* = 0$ .

Если  $|\sigma| < U_{\max}$ , то система (5), (8) является устойчивой в силу выбора вектора  $\mathbf{k}$ , однако при  $|\sigma| \geq U_{\max}$  она может потерять устойчивость. Для определения допустимых значений величины  $\sigma = k^T \mathbf{x}$  вернемся к исходным переменным состояния и представим уравнения системы (5), (8) в квазилинейной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} + \gamma(\mathbf{x}) \mathbf{b} \mathbf{k}^T$ ,  $0 \leq \gamma(\mathbf{x}) < 1$ ,

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| < U_{\max}, \\ 1 - U_{\max}/|\mathbf{k}^T \mathbf{x}|, & \text{если } |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \geq U_{\max}. \end{cases} \quad (15)$$

Функцию Ляпунова для системы (14), (15) возьмем в виде  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ , где  $\mathbf{P}$  — матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$\mathbf{D}^T(\gamma_s) \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{D}(\gamma_s) = -\mathbf{E}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{D}(\gamma) = \mathbf{D} + \gamma \mathbf{b} \mathbf{k}^T$ . Величина  $\gamma_s > 0$  выбирается из диапазона  $[0, \bar{\gamma} < 1]$  так, чтобы матрица  $\mathbf{C}(\gamma) = -[\mathbf{D}^T(\gamma) \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{D}(\gamma)]$  была определенно положительной как при  $\gamma = 0$ , так и при  $\gamma = \bar{\gamma} < 1$ . Величина  $\gamma_s$  легко определяется применением процедуры, заключающейся в последовательных вычислениях, например в MATLAB, матриц  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{C}(\gamma)$  при  $\gamma = 0$  и  $\bar{\gamma} < 1$  с постепенным увеличением числа  $\gamma_s$ . В качестве начального приближения матрицы  $\mathbf{P}$  берется решение уравнения (16) при  $\gamma = 0$ .

Далее будем считать, что функция Ляпунова  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ , производная которой в силу системы

(14), (15) является отрицательно определенной и при  $\gamma = 0$ , и при  $\gamma = \bar{\gamma}$ , найдена. Тогда, если система имеет единственное положение равновесия  $\mathbf{x}^* = 0$ , то в силу известных теорем об абсолютной устойчивости [9] нелинейная система (14), (15) является асимптотически устойчивой, пока  $\gamma(\mathbf{x}) \leq \bar{\gamma}$ . Отметим, что если  $\alpha_0 < 0$ , то согласно (13) эта система имеет единственное положение равновесия  $\mathbf{x}^* = 0$  при  $\bar{\gamma} < \delta_0/|\alpha_0|$ .

Обозначим  $\lambda_1^P, \lambda_1^{C(\gamma)}$  и  $\lambda_n^P$  минимальные и максимальное собст-

венные числа матриц  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{C}(\gamma)$ . Тогда имеет место оценка

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| \leq \rho \|\mathbf{x}_0\| \exp(-vt), \quad (17)$$

где  $\rho = \sqrt{\lambda_2^P/\lambda_1^P}$ ,  $v = \lambda_1^{C(\gamma)}/2\lambda_n^P$ . Вместе с тем, необходимое для устойчивости системы неравенство  $\gamma(\mathbf{x}) \leq \bar{\gamma}$  эквивалентно условию  $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq U_{\max}/(1 - \bar{\gamma})$ . Поскольку  $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq \|\mathbf{k}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ , то из (17) имеем  $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq \rho \|\mathbf{k}\| \cdot \|\mathbf{x}_0\|$ . Последние неравенства приводят к заключению, что условие  $\gamma(\mathbf{x}) \leq \bar{\gamma}$  выполняется, если

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq \frac{U_{\max}}{\rho \|\mathbf{k}\| (1 - \bar{\gamma})}. \quad (18)$$

Полученное неравенство связывает "размер" области допустимых по устойчивости начальных значений переменных состояния  $x_{0i}, i = \overline{1, n}$ , системы (5), (8) при заданном ограничении  $U_{\max}$  управления. Кроме того, оно определяет необходимое для обеспечения устойчивости значение  $U_{\max}$  при заданной норме  $\|\mathbf{x}_0\|$ . Подчеркнем, что неравенство (18) определяет необходимое  $U_{\max}$  и допустимую норму  $\|\mathbf{x}_0\|$  с некоторым запасом.

**Пример.** Рассмотрим систему управления объектом, который описывается уравнениями  $\dot{x}_1 = 3x_1 + 7x_2 + u$ ,  $\dot{x}_1 = 2x_1 + 7x_2 + u$ . Предположим, что исходя из требуемого качества замкнутой системы найдено ее характеристическое уравнение  $D(p) = p^2 + 7p + 14$ , т. е.  $\delta_0 = 14$ ,  $\delta_1 = 7$ . Определив характеристический полином объекта  $A(p) = p^2 - 10p + 7$ , коэффициенты  $\alpha_0 = 14$ ,  $\alpha_1 = -10$  и матрицы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}_y$ ,  $\mathbf{P}_y^{-1}$ , найдем управление  $u = -24x_1 + 7x_2$ . В данном случае  $\alpha_0 > 0$ , поэтому при  $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| > U_{\max}$  других положений равновесия, кроме  $\mathbf{x}^\circ = 0$ , не будет.

Применяя описанную выше процедуру, найдем, что в данном случае целесообразно матрицу  $\mathbf{P}$  функции Ляпунова взять в виде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,9851 & -0,409 \\ -0,409 & 0,5213 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица является решением уравнения (16) при  $\gamma_s = 0,225$ . Ее собственные числа  $\lambda_1^P = 0,2833$ ,  $\lambda_2^P = 1,2233$ , число  $\rho = \sqrt{\lambda_2^P/\lambda_1^P} = 2,08$ . При этом матрица  $\mathbf{C}(\gamma) = -[\mathbf{D}^T(\gamma)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}(\gamma)]$  имеет собственные числа:  $\lambda_1^{C(\gamma)} = 0,6324$ ,  $\lambda_2^{C(\gamma)} = 7,2361$  при  $\gamma = 0$  и  $\lambda_1^{C(\bar{\gamma})} = 0,0299$ ,  $\lambda_2^{C(\bar{\gamma})} = 1,0572$  при  $\bar{\gamma} = 0,26$ . Тогда  $v = \lambda_1^{C(\gamma)}/2\lambda_n^P = 0,0122$ , и по (17) находим  $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| \leq$

$\leq 2,08 \|\mathbf{x}_0\| \exp(-0,0122t)$ . Так как в данном случае  $\|\mathbf{k}\| = 25$ , то согласно (18) это неравенство выполняется, если

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq \frac{U_{\max}}{2,08 \cdot 25 \cdot 0,74} = 0,026 U_{\max}.$$

При  $U_{\max} = 74$  из этого соотношения следует, что  $\|\mathbf{x}_0\| \leq 1,92$ . Однако путем моделирования можно найти, что, например, при  $\mathbf{x}_0 = [1,5 \ -2,5]^T$ , т.е. при  $\|\mathbf{x}_0\| = 2,92$ , система сохраняет устойчивость при  $U_{\max} = 74$ , а при  $U_{\max} = 73$  — теряет ее. Нетрудно найти, что при  $U_{\max} = 74$  величина  $\gamma = 0,54$ , что больше значения  $\bar{\gamma} = 0,26$ .

Таким образом, несмотря на ограничение управления, данная система сохраняет устойчивость, если управление и начальные условия удовлетворяют неравенству (18). При этом в силу неравенства (17) соотношение (18) устанавливает ограничения и на значения переменных состояния системы при ограниченных значениях управления.

### Управление группой БЛА

Группа, в составе которой имеется  $N$  БЛА, очевидно, представляет собой распределенную систему. Уравнения отдельных БЛА, составляющих группу с ведущим БЛА, следуя [17], можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{j=2}^N \mathbf{M}_{1j} \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1; \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{M}_{ij} \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i, \quad i = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ii} \\ \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{i1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{i1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_{ij} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{1j} \end{bmatrix}, \quad j > 1, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ii} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{u}_1$  —  $n_1$ -вектор состояния и  $n_1$ -вектор управления ведущего БЛА;  $\mathbf{x}_{ii}$ ,  $\mathbf{u}_i$  —  $n_i$ -вектор состояния и  $n_1$ -вектор управления  $i$ -го БЛА;  $\mathbf{x}_{i1}$  —  $n_i$ -вектор относительного положения  $i$ -го и ведущего БЛА;  $\mathbf{A}_{ii}$  — системная матрица собственной динамики  $i$ -го БЛА;  $\mathbf{A}_{i1}$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_{i1}$  — матрицы, описывающие влияние  $i$ -го БЛА и ведущего БЛА на их относительное положение;  $\mathbf{M}_{ij}$  — матрицы, описывающие влияние  $j$ -го БЛА на состояние  $i$ -го БЛА и их взаимное положение (заметим, что в [17] матрицы  $\bar{\mathbf{M}}_{ij} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M}_{1j} = \mathbf{0}$ );  $N$  — число БЛА в группе.

При отсутствии управлений распределенная система, описываемая уравнениями (19), (20), яв-

ляется неустойчивой. Будем считать, что пары матриц  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$  вполне управляемы при всех  $i = \overline{1, N}$ . Переходя к синтезу стабилизирующих управлений, примем, что на каждом  $i$ -м БЛА,  $i > 1$ , измеряются векторы  $\mathbf{x}_{ii}$  собственного состояния и векторы  $\mathbf{x}_{i1}$  относительного положения  $i$ -го и ведущего (1-го) БЛА. Тогда децентрализованные управление определяются выражениями:

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}_i = -\mathbf{K}_{ii} \mathbf{x}_{ii} - \mathbf{K}_{i1} \mathbf{x}_{i1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (21)$$

а уравнения движения  $i$ -го БЛА имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i = & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_{ii} \mathbf{K}_{ii} & -\mathbf{B}_{ii} \mathbf{K}_{i1} \\ \mathbf{A}_{1i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{ii} \mathbf{K}_{i1} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{i1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \\ & + \sum_{j=2, j \neq i}^N \mathbf{M}_{ij} \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i, \quad i = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для обеспечения требуемого качества процессов управления каждым БЛА формируются функционалы

$$J_i = \int_0^\infty [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i] dt, \quad i = \overline{1, N}, \quad (23)$$

где  $\mathbf{Q}_i \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}_i > \mathbf{0}$  — соответствующих размерностей матрицы весовых коэффициентов. При этом векторы  $\mathbf{K}_i = [\mathbf{K}_{ii} \mathbf{K}_{i1}]$  в (21) определяются по условиям минимумов функционалов (23), т. е. по формулам

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{L}_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (24)$$

Здесь  $\mathbf{L}_i$  — матрицы, являющиеся решениями следующих уравнений Риккати [4]:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{L}_i + \mathbf{L}_i \mathbf{A}_i - \mathbf{L}_i \mathbf{B}_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{L}_i = -\mathbf{Q}_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (25)$$

Однако найденные в соответствии с (24), (25) управления (21) обеспечивают устойчивость движений лишь изолированных, несвязанных БЛА. Чтобы сформулировать условие устойчивости замкнутой распределенной системы, введем в рассмотрение симметричные положительно определенные матрицы  $\mathbf{P}_i$ , являющиеся решением уравнений Ляпунова

$$\mathbf{D}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{D}_i = -\mathbf{C}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{C}_i > \mathbf{0}$  — симметричные, положительно-определенные матрицы, и

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (27)$$

Отметим, что положительная определенность матриц  $\mathbf{P}_i$  вытекает из теоремы Ляпунова [12], поскольку матрицы  $\mathbf{D}_i$  (27) в силу соотношений (21),

(24), (25) устойчивы. С учетом соотношений (21) и (27) уравнения (19) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{M}_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = \overline{1, N}. \quad (28)$$

Введем квадратную блочную матрицу  $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , блоки которой

$$\mathbf{W}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{C}_i, & i = j; \\ -\mathbf{M}_{ji}^T \mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i \mathbf{M}_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \quad (29)$$

Матрица  $\mathbf{W}$  является симметричной, так как

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{ij}^2)^T &= -(\mathbf{M}_{ji}^T \mathbf{P}_j + \mathbf{P}_i \mathbf{M}_{ij})^T = \\ &= -\mathbf{P}_j \mathbf{M}_{ji} - \mathbf{M}_{ij}^T \mathbf{P}_i = \mathbf{W}_{ji}^2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (30)$$

Следовательно, для оценки положительной определенности матрицы  $\mathbf{W}$  можно использовать критерий Сильвестра [16]. В следующей теореме устанавливаются условия устойчивости системы (19) с управлением (21), но без учета ограничений на управления и переменные состояния.

**Теорема 1.** Если выполнены условия (24)–(27),

где  $\mathbf{Q}_i \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}_i > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{C}_i > \mathbf{0}$  при всех  $i = \overline{1, N}$ , и матрица  $\mathbf{W}$  (29) является положительно-определенной, то распределенная система (19), (21) асимптотически устойчива.

Для доказательства теоремы 1 введем функцию

$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i$ , где матрицы  $\mathbf{P}_i$  определены решениями уравнений Ляпунова (26), где  $\mathbf{C}_i > \mathbf{0}$  при всех  $i = \overline{1, N}$ . Здесь  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T \ \dots \ \mathbf{x}_N^T]^T$ . Производная по времени функции  $V(\mathbf{x})$  в силу системы (28) равна

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = & \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{D}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{D}_i) \mathbf{x}_i + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{x}_j^T (\mathbf{M}_{ij}^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j \mathbf{M}_{ji}) \mathbf{x}_i. \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом выражений (26) и (29) выражение (31) можно представить в виде

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}.$$

Итак, если выполнены условия теоремы 1, то существует положительно-определенная функция  $V(\mathbf{x})$ , производная по времени которой вдоль траекторий системы (19) с децентрализованным управлением (21) является отрицательно-определенной. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 1 в силу теоремы Ляпунова [12].

**Следствие 1.** Если выполнены: условие  $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{0}$  при всех  $i > j$  или при всех  $i < j$  и условия (24)–(27), где  $\mathbf{Q}_i \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}_i > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{C}_i > \mathbf{0}$  при всех  $i = \overline{1, N}$ , то рас-

пределенная система (19), (21) асимптотически устойчива.

Справедливость этого следствия следует непосредственно из системы уравнений (28). Действительно, если записать эту систему в виде  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ , то при выполнении условия  $M_{ij} = 0$  при всех  $i > j$  или при всех  $i < j$  следствия 1 матрица  $\mathbf{D}$  будет либо нижней, либо верхней треугольной. При этом ее диагональными блоками будут матрицы  $D_i, i = \overline{1, N}$ , устойчивые по построению матриц  $K_i$ . Отсюда вытекает утверждение следствия 1.

Отметим, что из условия  $\mathbf{W} > \mathbf{0}$  теоремы 1 с помощью критерия Сильвестра вытекают соответствующие ограничения на коэффициенты матриц  $M_{ij}, j \neq i, i = \overline{1, N}$ , при которых замкнутая система (19), (21) асимптотически устойчива.

Для учета ограничений на управления и переменные состояния и в случае распределенных систем с децентрализованным управлением (19), (21) применяется оценка (18). Содержащиеся в ней величины определяются указанными выше методами.

### Заключение

Если при синтезе управления БЛА ограничения на интенсивность управления не учитываются, то для сохранения устойчивости и работоспособности системы необходимо принимать меры по ограничению начальных условий и внешних воздействий. Если начальные значения переменных состояния системы лежат в некоторой ограниченной области, а значения управления ограничены, то система сохраняет свойство устойчивости лишь при достаточно больших допустимых значениях управления. Аналогично, если управление ограничено некоторой величиной, то система сохраняет свойство устойчивости лишь при достаточно малых начальных значениях переменных состояния. При децентрализованном управлении группой БЛА, кроме того, должны быть ограничены взаимодействия между БЛА.

### Список литературы

1. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М. Н. Красильщикова и Г. Г. Себрякова. М.: Физматлит, 2005.
2. Верба В. С., Силкин А. Т., Царев А. Б., Шебакпольский М. Ф. Концепция построения радиосети управления группой ударных БЛА // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. Т. 7. № 7. С. 3–9.
3. Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
5. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
6. Сиротина Т. Г. Стабилизация линейных систем с учетом ограничений на фазовые переменные и управление // Матер. конф. "Управление в технических системах", УТС-2010, СПб.: ОАО "Концерн ЦНИИ "Электроприбор", 2010. С. 91–95.
7. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
8. Морозов Ю. В., Рапопорт Л. Б. Численные методы оценки области притяжения в задаче управления колесным роботом // АиТ. 2008. № 1. С. 16–29.
9. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов. Сб. Стохастическая оптимизация в информатике / Под ред. О. Н. Граничина. Вып. 4. СПб: СПб ГУ, 2008. С. 3–23.
10. Медведев М. Ю. Синтез оптимальных по быстродействию управлений каскадными нелинейными динамическими системами с ограничениями на координаты // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 7. С. 2–6.
11. Гайдук А. Р. Управление с ограничением переменных состояния. Наука и образование на рубеже тысячелетий: сборник научно-исследовательских работ. Вып. 2. М.: Учлитвуз, 2009. С. 43–55.
12. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
13. Siljak D. D. Large-scale dynamic systems: stability and structure. New York: North-Holland, 1978.
14. Lin Shi, Shinh S. K. Decentralized control for interconnected uncertain systems extensions to high-order uncertainties // Int. J. Control. 1993. V. 57. P. 1453–1468.
15. Han M. C., Chen Y. H. Decentralized control design: uncertain systems with strong interconnections // Int. J. Control. 1995. V. 61. P. 1361–1385.
16. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
17. Машков О. А., Самборский И. И. Особенности учета синергетических процессов в атмосфере при управлении полетом групп дистанционно пилотируемых летательных аппаратов. Сб. Системи управління, навігації та зв'язку. Вып. 3. Київ: ЦНДІ НУ, 2007. С. 97–100.

### ИНФОРМАЦИЯ

20–22 ноября 2012 г. в павильоне "Электрификация" ВВЦ (Москва), состоится

## 3-я Международная выставка и конференция по возобновляемым источникам энергии и альтернативным видам топлива "REENERGY 2012"

### Тематические разделы выставки:

- |  |                              |                  |
|--|------------------------------|------------------|
| • малая гидроэнергетика                  | • резервная энергия          | • девелопмент    |
| • ветроэнергетика                        | • энергоэффективность        | • оборудование   |
| • приливная энергетика                   | • водородная энергетика      | • проектирование |
| • распределенное производство энергетики | • сероводородная энергетика  | • строительство  |
| • геотермальная энергетика               | • экологическая безопасность | • электромобили  |
| • солнечная энергетика                   | • биотопливо (биомасса)      | • когенерация    |
|  | • гелиоэнергетика            |                  |

Сайт выставки: [www.reenergy2010.ru](http://www.reenergy2010.ru)

**Л. С. Раткин**, канд. техн. наук,  
директор по научной работе,  
[rathkeen@bk.ru](mailto:rathkeen@bk.ru),  
ООО "АРГМ"

## **Сравнительный анализ беспилотных летательных аппаратов самолетного типа, применяемых для решения задач автоматизированного промышленного и экологического мониторинга состояния объектов**

*По данным открытых информационных источников представлен сравнительный анализ беспилотных летательных аппаратов самолетного типа, используемых для промышленного и экологического мониторинга состояния объектов. Особое внимание уделяется российским разработкам и их сопоставлению с зарубежными аналогами по набору тактико-технических характеристик.*

**Ключевые слова:** беспилотные летательные аппараты самолетного типа, БПЛА СТ, промышленный и экологический мониторинг, диверсификация, тактико-технические характеристики

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) предназначены для решения широкого класса задач, в том числе патрулирования территорий, мониторинга состояния объектов, аналитической обработки данных с оперативной передачей результатов на центр управления. Их применение позволяет, в частности, сократить стоимость обработки информации, снизить риски от возникновения экологической и техногенной катастроф и уменьшить время с момента обнаружения опасности, например, при утечке нефти или газа из трубопровода, до момента направления к конкретному месту бригады специалистов.

По функциональной принадлежности БПЛА подразделяются на военные и гражданские. Как правило, стоимость первых выше, чем вторых при сопоставимых характеристиках, поскольку они обладают большим запасом надежности при выполнении войсковых операций, высокой маневренностью и оперативностью в решении тактических задач. Вместе с тем, освоение широкого спектра двойных технологий на российских и зарубежных оборонных предприятиях удешевляет производство и, соответственно, снижает стоимость разработки аналогичных гражданских изделий.

В беспилотной авиации активно применяются новые разработки в сфере композиционных материалов и наноматериалов,nano- и информационных технологий. Снижение массы конструкции позволяет увеличить массу полезной нагрузки, к числу

которой следует отнести телекоммуникационную аппаратуру и приборы регистрации и контроля значений различных параметров — температуры, высоты, влажности, давления и т. д. Применение наноматериалов, в частности, позволяет увеличить прочность корпуса и уменьшить его массу, продлить срок службы энергоELEMENTов и повысить их КПД. В качестве полезной нагрузки могут быть установлены фото- и видеокамеры, устройства сжатия и обработки потокового сигнала, инструменты экспресс-диагностики состояния и т. д.

Наиболее многочисленным классом являются БПЛА самолетного типа (СТ). В отличие от БПЛА вертолетного типа (их рассмотрение планируется в рамках отдельной публикации), среди основных проблем управления БПЛА СТ, в частности, следует отметить:

- отсутствие 100 %-ного (т. е. полного) реверс-хода по траектории движения;
- несовершенство системы управления взлетом и посадкой при сильном боковом ветре;
- нестыковки программно-аппаратных решений при совершении совместных маневров группой БПЛА СТ.

Кратко охарактеризуем каждую из перечисленных проблем.

Полный реверс-ход БПЛА СТ означает, что БПЛА может пролететь назад в точности по той же траектории, что и вперед (смещениями БПЛА относительно траектории по причине встречного, бокового или попутного ветра пренебрегают). Поясним это на примере: пусть необходимо решить задачу пролета БПЛА через разрушенный дом. Изначально полагаем, что габаритные размеры БПЛА позволяют это. В этом случае необходимо не только присущее вертолетам зависание в точке, но и возврат в предыдущую точку траектории в случае возникновения на пути движения непреодолимого препятствия — так называемого "тупика". БПЛА СТ может совершить маневр с пролетом в обратном направлении, но не может вернуться в ту же точку посредством движения назад, что накладывает определенные ограничения на сферу его применения.

Несовершенство системы управления взлетом и посадкой наиболее полно проявляется при решении данной задачи в условиях сильного бокового ветра. Для моделей легкого класса (например, массой до 10 кг) проблема посадки решается в основном посредством парашюта, выпускаемого при подлете БПЛА, или намеренным попаданием в предварительно подготовленную и натянутую сеть. Поскольку масса полезной нагрузки невелика, приборы обладают необходимым запасом прочности, не допускающим их разрушения при посадке таким способом. Для моделей среднего (условно от 10 до 100 кг) и тяжелого класса (от 100 кг) данный подход далеко не всегда применим. Стоимость данных моделей высока, и в случае неудачной посадки вероятность выхода из строя бортового оборудования значи-

тельно возрастают. Кстати, отметим, что в законодательстве многих стран не до конца урегулирован вопрос страховки и возмещения ущерба имуществу, например, полезной нагрузке (приборам и устройствам), транспортируемому с помощью БПЛА. В законодательстве по данному вопросу присутствуют многочисленные правовые пробелы, в частности, в отношении степени ответственности разработчика, изготовителя и грузоперевозчика, что позволяет трактовать документы в различных судебных инстанциях по-разному. Следствием этого является высокая стоимость перевозок грузов с помощью БПЛА.

Нестыковка программно-аппаратных решений при совершении совместных маневров группой БПЛА СТ — следствие высокой степени конкуренции разработчиков разных стран. На международных конференциях данный вопрос поднимается регулярно, поскольку синергетический эффект при применении группы БПЛА, например, при проведении войсковой операции, наблюдается не всегда. Иногда, напротив, увеличение числа БПЛА снижает эффективность ее проведения. В частности, крайне низкая степень согласованности действий БПЛА СТ была проявлена во время совместных войсковых операций стран НАТО начала XXI века. Отметим экономический аспект: стоимость БПЛА СТ в армиях стран Североатлантического альянса на несколько порядков ниже стоимости страховки одного воина, поэтому даже с учетом потери многих БПЛА СТ затраты на операции оказались несравненно ниже, чем могли бы быть в случае масовой гибели военнослужащих.

Для решения задачи автоматизированного мониторинга состояния объектов российскими предприятиями производится широкий спектр БПЛА. Например, казанским Опытно-конструкторским бюро "Сокол" разработаны БПЛА СТ "ДАНЭМ" (рис. 1, см. третью сторону обложки), предназна-

ченные для мониторинга и дистанционной технической диагностики и охраны объектов, обнаружения и идентификации угроз. Среди целевого оборудования БПЛА СТ можно отметить радар, сканер подстилающего рельефа, лазерный газоанализатор и тепловизионно-телеизационную систему. Максимальная масса целевого оборудования БПЛА составляет 100 кг при общей взлетной массе 500 кг, длина крыла — 4,6 м, размах — 6 м. Диапазон крейсерских воздушных скоростей полета на участках мониторинга от 120 до 140 км/ч с максимальной высотой 6 км позволяет осуществлять полет при эксплуатационных перегрузках от +5 до -3 единиц общей продолжительностью до 20 ч.

В табл. 1 представлены данные о БПЛА, производимых ижевской фирмой "Беспилотные системы" (рис. 2, см. третью сторону обложки) и Санкт-Петербургским Центром технологий беспилотной авиации.

Как видно из табл. 1, Центр технологий беспилотной авиации совершенствует традиционные взлетно-посадочные комплексы, а ижевская фирма развивает и комбинирует различные способы запуска и посадки БПЛА. Одним из объяснений данного факта, помимо традиционно различных подходов в решении совокупности задач разными научными школами, является сфера распространения научекомпактной продукции: поскольку на внутреннем рынке России отсутствует монополия производства БПЛА, соседние регионы — традиционные рынки сбыта работающих в разных федеральных округах фирм-разработчиков. По сравнению с Северо-Западным федеральным округом в Сибири и Зауралье климатические условия эксплуатации БПЛА значительно более суровые, что и определяет необходимость разработки ижевской фирмой более компактных по размерам и массе моделей, удобных при транспортировке и техническом обслуживании. Отметим, что сниженные массогабаритные характеристики

**Данные о БПЛА серии "ZALA" (Ижевск) и "Орлан" (Санкт-Петербург)**

Характеристики	Беспилотные системы (Ижевск)			Центр технологий беспилотной авиации (Санкт-Петербург)		
Модель	ZALA 421-04 (рис. 2, а)	ZALA 421-08 (рис. 2, б)	ZALA 421-12 (рис. 2, в)	Орлан-3	Орлан-10	Орлан-30
Масса, кг	6,95 или 7,9*	2,1	3,9	До 4,7	До 11,5	До 27
Высота полета, км	До 3	До 3,6	До 3,6		Нет данных	
Длина, см	105	42,5	62	145	200	204
Запуск	Катапульта	Ручной	Катапульта	Ручной	Самолетный	
Метод посадки	Самолетный	Парашютный		Самолетный		
Продолжительность полета, мин	60 или 180*	100	120	120	240	240
Радиус действия, км	До 40	До 15	До 40	До 30	До 50	До 50
Размах крыльев, см	223	81	160	210	240	280
Скорость, км/ч	65...130	65...130	65...120	60...130	80...150	80...150

\* зависит от типа двигателя.

модели ZALA 421-08 не препятствуют достижению необходимых значений других параметров: при со-поставимом диапазоне скоростей, снижении радиуса действия в три раза и продолжительности полета — в два с половиной раза, модель ZALA 421-08 весит на порядок меньше, чем модель "Орлан-30". Очевидно, что малогабаритный БПЛА при соответствующей конъюнктуре рынка более предпочтителен, поскольку ценовой фактор имеет немаловажное влияние при выборе модели. Также следует констатировать факт отраслевого распределения фирм по производству БПЛА в среде заказчиков и потенциальных покупателей. Более тяжелые и устойчивые в полете БПЛА серии "Орлан", несущие на борту аппаратуру до 8,5 кг, оказываются предпочтительнее для проведения масштабного исследования с панорамированием большой территории. На оперативное развертывание, быстрый запуск и немедленную обработку небольших информационных массивов более ориентированы недорогие и малогабаритные модели ZALA AERO. Испытания модели ZALA 421-09 с радиусом действия 250 км и продолжительностью полета 9 ч, проводимые в ижевской фирме "Беспилотные системы", позволяют позиционировать на рынке БПЛА новое изделие, способное конкурировать с моделью "Орлан-30". Система связи спутниковых каналов обеспечивает управление видеокамерой и тепловизионной камерой, размещенными в отсеке целевой нагрузки на гиростабилизированной платформе.

Таким образом, на примере сравнения разработок двух научных школ, представленных крупными региональными предприятиями (см. табл. 1), проиллюстрированы две принципиально различные

концепции БПЛА. Ориентация на стандартные технические решения (СТР) в конструкции по принципу "*от планера — к полезной нагрузке*" (ППН) предполагает проектирование технологических процессов по выпуску нескольких моделей БПЛА с гарантированным спросом. К ним подбираются комплекты взаимозаменяемого оборудования с учетом массогабаритных ограничений, предназначенных для экологического мониторинга состояния энергетических объектов.

Из СТР в области оборудования и потребностей рынка услуг по обеспечению заказчиков высококачественной информацией, получаемой и обрабатываемой с помощью современной наземной и бортовой аппаратуры БПЛА, исходят авторы концепции "*от полезной нагрузки — к планеру*" (ПНП). В этом случае число моделей существенно возрастает, так как шаг изменения значений параметров БПЛА, по которым проводится их сравнение потенциальными потребителями, более узкий, что предполагает выбор необходимого числа БПЛА нужных типов исходя из решаемых классов задач.

Как правило, оборонные предприятия, развивающиеся и диверсифицируя свою продукцию, переходят к концепции ПНП через концепцию ППН. Рассмотрим в качестве примера тактико-технические характеристики (ТТХ) БПЛА казанского ЗАО "Эникс" (рис. 3, см. третью сторону обложки), ЗАО "Аэрокон" (г. Жуковский, Московская область) и "Инспектор-В" производства московской корпорации "Иркут", приведенные в табл. 2. Как видно из табл. 2, с ростом ценности и массы полезной нагрузки влияние времени развертывания БПЛА и массогабаритных характеристик становится боле

Таблица 2  
Тактико-технические характеристики БПЛА

Производитель	ЗАО "Аэрокон"	Корпорация "Иркут"	ЗАО "Эникс"	Корпорация "Иркут"	ЗАО "Эникс"	Корпорация "Иркут"
Название БПЛА	Инспектор-В	Иркут-2М	Элерон-3	Иркут-10	Элерон-10 (рис. 3)	Иркут-850
Время полета, мин	30–60	90	90–120	150	120	720
Масса БПЛА, кг	0,25	3	3,5	8,5	10,5	860
Масса полезной нагрузки, кг	0,05	0,3	0,5	1,5	2	200
Обслуживающий персонал, чел.	Нет данных	2	Нет данных	2	Нет данных	6
Полезная нагрузка	ТВ-камера	ТВ/Фото	ТВ/ИК/Фото	Тепловизор /ТВ/Фото	ТВ/ИК/Фото	Тепловизор /ТВ/Фото
Посадка	Самолетная	Парашют	Парашют	Парашют	Парашют	Самолетная
Практический потолок, км	0,5	3	3	3	5	9
Радиус действия, км	1,5	20	10 (ТВ, ИК) 25 (фото)	70	50	200
Размах крыла, м	0,3	1,47	Нет данных	2	Нет данных	23
Размер посадочной площадки	Нет данных	50 × 50 м	Нет данных	50 × 50 м	Нет данных	Длина ВПП — 300 м
Скорость полета, км/ч	29–72	65–105	70–110	80–120	75–120	До 270
Среднеквадратичная ошибка полета по заданному маршруту, м	Нет данных	Не более 50	Нет данных	Не более 15	Нет данных	Нет данных
Старт	Ручной или катапульти	Катапульта	Катапульта/резиновый жгут	Катапульта	Катапульта	Взлетно-посадочная полоса (ВПП)

слабым. Значительно возрастает роль среднеквадратичной ошибки полета по заданному маршруту, числа членов экипажа (обслуживающего персонала) и точности посадки (размер посадочной площадки). Массогабаритные характеристики БПЛА становятся несущественными, так как выявляются определенные закономерности для тяжеловесных моделей (в частности, в диапазоне от 4 : 1 до 10 : 1 варьируется среднее соотношение максимальной взлетной массы БПЛА и полезной нагрузки). Стоимость установленного оборудования, например, для сбора и обработки информации на БПЛА "Элерон-10", обуславливает рост затрат на эксплуатацию и сервисные работы по обслуживанию БПЛА, поэтому при переходе к концепции ПНП от концепции ППН наблюдается оптимизация затрат, что позволяет диверсифицировать производство.

Для систематической оперативной дистанционной диагностики протяженных объектов и объектов с большой площадью, паспортизации и картирования местности предназначен многофункциональный комплекс на базе БПЛА "ПТЕРО-Е", разработанный на московском ООО "АФМ-СЕРВЕРС". При взлетной массе 16 кг с массой модуля целевого оборудования от 2,5 до 4,2 кг (максимальная мощность полезной нагрузки 60 Вт) при предельной ветровой нагрузке 15 м/с обеспечивается крейсерская скорость 60...120 км/ч. Комплекс снабжен автопилотом MicroPilot и аппаратурой GPS-навигации. Интеграция MicroPilot массой 28 г в миниатюрный бортовой комплекс оптического наблюдения STAMP Payloads фирмой "CONTROP Precision Technologies" позволяет получать высококачественные снимки объектов. Также в течение 10 ч при потолке полета 4 км на расстоянии до 1000...1200 км с помощью тепловизионных комплексов, систем распознавания образов и фотодиодокамер возможно проведение непрерывного мониторинга и контроля состояния объектов с БПЛА "ДОЗОР", производимого Санкт-Петербургским ЗАО "ТРАНЗАС".

За рубежом интенсивно развиваются БПЛА двойного назначения, но для изучения российским специалистам доступна далеко не вся продукция иностранных фирм. Среди основных причин можно отметить специфику рынка военно-воздушной техники, отсутствие в открытой печати данных о ТТХ новых моделей и привлечение БПЛА к участию в военных операциях. Среди зарубежной продукции можно отметить гражданскую версию боевого БПЛА "ScanEagle", применяемого для автоматизированного мониторинга состояния объектов: оперативная фотовидеосъемка в плохих погодных условиях с передачей информации на наземную станцию выполняется видеокамерой с внутренней стабилизацией и радаром синтезированной апертурой NanoSAR массой 800 г.

Последние годы на российском рынке отмечены увеличением сбыта БПЛА ведущих зарубежных компаний, специализирующихся на разработке, производстве и сервисном обслуживании БПЛА. БПЛА "Aerostar Oil Defender" производства компании "Aeronautics Defense Systems Ltd" и "Aerinautique et Technologies Enbarquees (ATE)" предназначены для мониторинга состояния объектов, патрулирования территорий и анализа ИК данных с постоянной корректировкой курса с помощью GPS. БПЛА "Selex" производства "Selex Sensors and Airborne Systems" ("Finmeccanica Company") на высоте 5 км с запасом топлива 40 кг при массе 420 кг и полезной нагрузке 70 кг способен совершить при максимальной нагрузке восьмичасовой полет (при базовой — четырнадцатичасовой). Для мониторинга состояния объектов предназначена продукция фирмы "Israel Aerospace Industries Ltd" (рис. 4, см. третью сторону обложки), сравнительные характеристики БПЛА приведены в табл. 3.

В заключение отметим, что *по причине отсутствия четкой системы классификации БПЛА* ряд изделий может быть в равной степени отнесен к БПЛА как вертолетного типа, так и СТ. В частности, применяемый для мониторинга состояния объектов с высокоразрешающей видеосъемкой, практи-

Таблица 3

Сравнительные ТТХ БПЛА фирмы "Israel Aerospace Industries Ltd"

Модель	Bird Eye 400	I-View Family			Ranger	Hunter	Searcher MK II	Heron	HeronTP (рис. 4)
		MK-50	MK-150	MK-250					
Высота, фут	500...1000	15 000	17 000	20 000	18 000	20 000	23 000	30 000	45 000
Длительность полета, ч	1	6	7	8	6	21	20	20...45	36
Крейсерская скорость, узл.	40	50...70	60...70	60...70	65	60...80	60...80	60...80	
Максимальная взлетная масса, кг	5.6	65	160	250	275	885	436	1150	4650
Максимальная нагрузка, кг	1.2	10	20	60	45	100	120	250	1000
Максимальная скорость, узл.	50	95	100	100	130	120	110	120	
Радиус полета, км	10	50	100	150	180	250	300	300	
Размах крыльев, м	2,2	4	5,7	7,1	5,71	10,5	8,55	16,6	26

чески вертикальным взлетом или низким стартом с земли, воды, палубы и из рук комплекс Ruma AE, выпускаемый "AeroVironment", производится благодаря Программе внедрения небольших тактических беспилотных устройств в США [1]. Новая методология конструирования роботизированных систем и БПЛА для мониторинга состояния объектов и патрулирования территорий основана на характерных принципах поведения живых существ (например, насекомых). Для охраны объектов также применимы миниатюрные роботы амфибийного типа с микроэлектромеханической аппаратурой и микродвигателями.

Проблемы и методы решения аналогичных задач для мониторинга состояния объектов БПЛА вертолетного типа будут рассмотрены отдельно.

### Выводы

1. Из сравнения (табл. 1—3) характеристик российских и иностранных БПЛА СТ видно одно из принципиальных различий отечественных и зарубежных производителей. Российские предприятия-разработчики последовательно анонсируют на рынке беспилотной техники (РБПТ) одну или (в крайнем случае) несколько моделей БПЛА, в то время как американские, европейские и ближневосточные фирмы даже на внутреннем рынке, как правило, представляют *непрерывно обновляемую* широкую продуктовую линейку. По причине недостаточного развития РБПТ в РФ добиться постоянного обновления модельного ряда отечественным производителям крайне проблематично. В результате наблюдается недостаточная скорость обновления основных производственных фондов в авиационной промышленности России (прямым следствием которой является наблюдаемая в РФ в последние годы серия авиационных катастроф), стабильное отставание от лидеров высокотехнологичного рынка в сегменте БПЛА и низкая активность среди потенциальных покупателей.

2. Для зарубежных фирм характерно так называемое "мелкоступенчатое" изменение в заданном диапазоне технических характеристик БПЛА и экономических параметров соответствующих инвестиционных проектов на их изготовление (объем заемных и собственных средств, стоимость, срок

окупаемости и т. д.). К сожалению, для российских БПЛА характерна *непропорциональная разреженность модельного ряда*, значительно большая, чем у иностранных аналогов. Это свидетельствует о *системной проблеме диверсификации* производства российских образцов беспилотной техники, в частности, гражданского назначения. Предпринятые Правительством РФ меры, хотя и помогли своевременно защитить российские предприятия от недобросовестной конкуренции и сохранить интеллектуальный потенциал отрасли, но не являются исчерпывающими [2]. В частности, необходима специальная программа по развитию отечественных научных школ, специализирующихся в сфере БПЛА.

3. При сравнении данных табл. 1—3 отмечается финансовая стабильность крупных компаний — не только российских, но и зарубежных, поэтому одним из возможных путей решения диверсификационной проблемы является дальнейшая *интеграция* производителей БПЛА. Успех деятельности фирм на РБПТ может быть обусловлен аутсорсингом с передачей части второстепенных функций обслуживающим предприятиям, рынок которых пока еще недостаточно сформирован. Необходима их законодательная поддержка с жестким государственным контролем базовых функций, ориентированных на повышение обороноспособности государства. Целесообразно внесение изменений в нормативно-правовые документы, устраняющие правовые пробелы в описании процедур проведения конкурсов на обслуживание научно-производственных предприятий. Формирование на РБПТ множества сервисных фирм, специализирующихся в сфере выполнения работ по договорам, защитит от стагнации рынок российских производителей БПЛА и поможет укреплению ОПК РФ [3].

### Список литературы

1. Военные известия // PC WEEK/RE. 2011. № 10—15. С. 6.
2. Емельянов С. В., Коровин С. К. Общие положения теории новых типов обратной связи // Нефтегазопромысловый инжиниринг. 2009. № 4. С. 2—6.
3. Раткин Л. С. Банк данных инвестиционных проектов предприятий оборонно-промышленного комплекса: его участие в процессе реформирования отрасли и место на рынке информационных продуктов // Вопросы оборонной техники. 2002. № 5 (312). С. 32—37.

**А. В. Яскеевич**, канд. техн. наук, нач. отдела,  
andrey.yaskevich@rsce.ru,  
ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия"  
им. С. П. Королева

## **Математическая модель периферийного стыковочного механизма. Часть 1. Уравнения движения дифференциальных механизмов**

*Рассматриваются уравнения динамики дифференциальных механизмов, обеспечивающих ряд специальных свойств управляемой механической системы — периферийного механизма для стыковки космических аппаратов.*

**Ключевые слова:** стыковка космических аппаратов, параллельные манипуляторы, дифференциальные связи, уравнения движения

**Введение.** Стыковкой называется механический процесс соединения космических аппаратов (КА), который начинается с момента их первого контакта и реализуется активным и пассивным стыковочными агрегатами, ранние конструктивные варианты которых описаны в работе [1]. Постепенное уменьшение диапазона относительных линейных и угловых рассогласований в этом процессе обеспечивают направляющие элементы конструкции и три вида управляемых механизмов активного агрегата — сцепки, стыковочный и жесткого соединения. В перифе-

рийном стыковочном агрегате все они расположены на периферии переходного тоннеля (рис. 1). Наиболее сложную кинематику и управление имеет стыковочный механизм, последовательно выполняющий несколько различных функций. С момента первого контакта при случайных начальных условиях его неуправляемое движение под действием контактных сил обеспечивает выравнивание направляющих элементов обоих агрегатов для срабатывания защелок механизмов сцепки и образования первичной механической связи. После сцепки он реализует частично управляемое поглощение кинетической энергии относительного движения КА, а затем управляемое выравнивание и стягивание агрегатов для последующего их жесткого соединения.

Математическая модель процесса стыковки предназначена для проверки проектных решений, сопровождения наземных и летных испытаний. Она включает в себя уравнения движения космических аппаратов как твердых или деформируемых тел [2], уравнения движения стыковочного механизма и защелок сцепки, модель контактного взаимодействия направляющих элементов активного и пассивного агрегатов, а также модели систем управления КА. Алгоритмы моделирования должны обладать высокой вычислительной эффективностью для того, чтобы обеспечить приемлемое время расчета большого числа вариантов, например, при статистическом анализе процесса стыковки.

Периферийный стыковочный механизм представляет собой параллельный манипулятор [3] с дифференциальными связями, придающими ему свойства, необходимые для выполнения стыковки объектов различной конфигурации с заданными кинематическими ограничениями. Помимо этих связей его движение обусловлено не только приводом, пружинами и демпферами, но и силами контактных реакций направляющих поверхностей. Универсальные программные комплексы моделирования механических систем [4—7] не позволяют реализовать вычислительно эффективную модель такого механизма.

Динамические расчеты планетарных механизмов [8—11] обычно направлены на оценку динамических напряжений, возникающих в их элементах. Возможно, это объясняется тем, что конечными звенями, приводимыми в движение, как правило, являются простые тела вращения. В данной статье впервые рассматриваются вычислительно эффективные уравнения динамики дифференциальных механизмов, перераспределяющих движение между направляющими кинематическими цепями управляемого пространственного параллельного манипулятора.

### **Кинематическая схема стыковочного механизма.**

Ее упрощенный вид приведен на рис. 2. Управляемым телом параллельного манипулятора является стыковочное кольцо с направляющими выступами и расположенными на них механизмами сцепки.

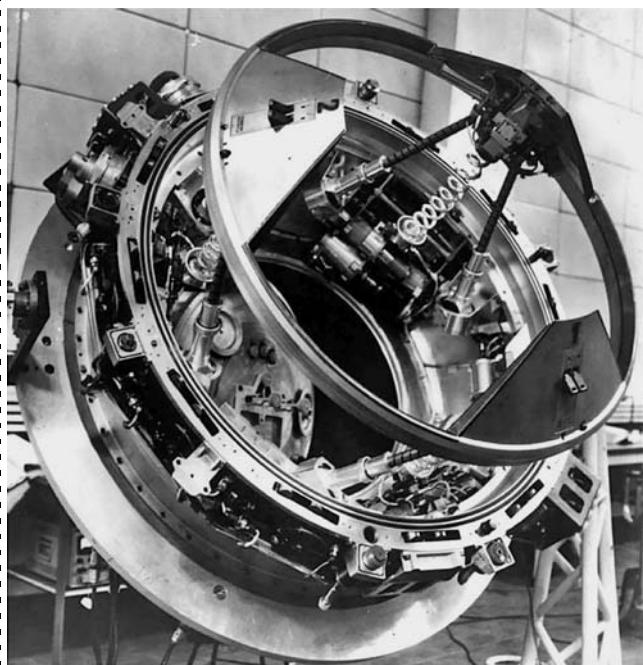


Рис. 1. Периферийный стыковочный агрегат АПАС

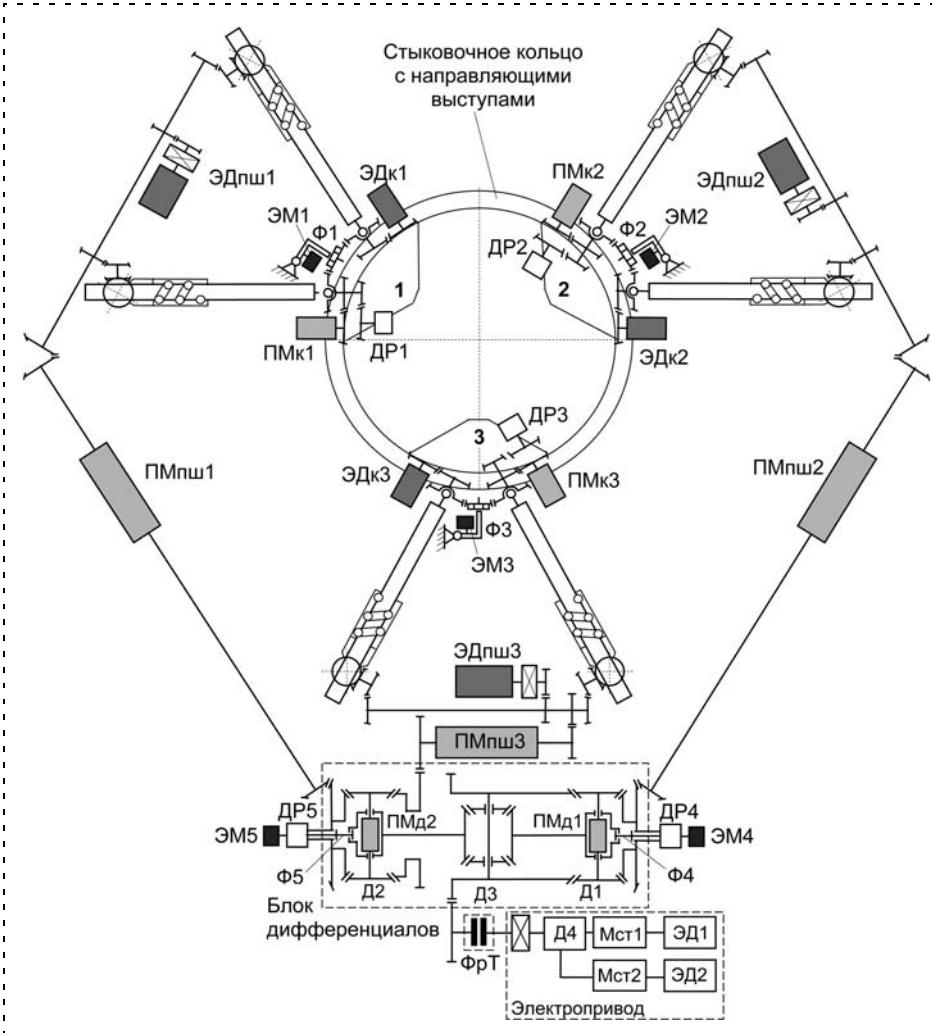


Рис. 2. Упрощенная кинематическая схема периферийного стыковочного механизма с дифференциальными связями

Конструктивная реализация отдельной направляющей кинематической цепи далее называется штангой. Этот термин далее часто используется для краткости.

Дифференциальные связи реализуются механизмами вращения. В параллельном манипуляторе они образованы звеньями каждой направляющей кинематической цепи. Однаковые тела этих дифференциальных механизмов отдельных пар направляющих цепей связываются передачами вращения, расположенными на стыковочном кольце, а также общими валами в основании параллельного манипулятора.

Кроме того, дифференциальные связи реализуются в планетарных механизмах Д1, Д2, Д3 блока дифференциалов, который перераспределяет движение, передаваемое от валов пар штанг параллельного манипулятора, в направлении наименьшего сопротивления.

Основные колеса планетарного механизма Д4 связаны через стопорные муфты Мст1 и Мст2 с выходными валами электродвигателей ЭД1 и ЭД2, а водило через передачу — с выходным валом

фрикционной муфты ФрТ. Он суммирует моменты электродвигателей на этапе управляемого движения и моменты стопорных муфт при неуправляемом движении стыковочного механизма.

Преобразование и поглощение кинетической энергии относительного движения стыкуемых КА обеспечивают пружинные механизмы (ПМк1, ПМк2, ПМк3) и электромагнитные демпферы (ЭДк1, ЭДк2, ЭДк3), расположенные на стыковочном кольце под направляющими выступами, электромагнитные демпферы (ЭДпш1, ЭДпш2, ЭДпш3), связанные с валами пар штанг, пружинные механизмы ПМд1, ПМд2 блока дифференциалов и фрикционная муфта ФрТ. Пружинные механизмы ПМпш1, ПМпш2, ПМпш3 передают моменты между валами пар штанг и входными осями блока дифференциалов. Все пружинные механизмы имеют внутренние механические упоры. Фрикционная муфта ФрТ является асимметричной двухсторонней. При поглощении энергии сближения КА ее выходная ось заторможена суммарным моментом стопорных муфт, а входная оказывает

постоянный момент сопротивления вращению водила дифференциального механизма Д3 блока дифференциалов. При управляемом движении выравнивания и стягивания стыковочного механизма муфта вращается в противоположном направлении и передает на блок дифференциалов суммарный момент от электродвигателей привода.

Ненулевые сигналы контактных датчиков рас согласования ДР1, ..., ДР5 на кольце и в блоке дифференциалов указывают на отклонение стыковочного механизма от своего исходного положения. Система управления активного КА реагирует на первое появление одного из таких сигналов как на первый контакт стыковочных агрегатов и инициирует включение реактивных двигателей, создающих силу, действующую вдоль продольной оси КА для его разгона и ускорения сцепки. После завершения управляемого выравнивания стыковочного механизма нулевые значения сигналов этих датчиков разрешают включение электромагнитами ЭМ1, ..., ЭМ5 фиксаторов Ф1, ..., Ф5, которые предотвращают большие перемещения в стыковочном механизме при управляемом втягивании. Это обеспечи-

вает совмещение механических интерфейсов перед началом жесткого соединения агрегатов и стыкуемых космических аппаратов.

Каждый дифференциальный механизм в отличие от простой передачи вращения имеет собственные степени свободы, и поэтому его движение должно быть описано дифференциальными уравнениями динамики. При этом учитывается тот факт, что оси блока дифференциалов связаны с валами пар штанг только через моменты, развиваемые ПМпш1, ПМпш2, ПМпш3, а с выходной осью привода стыковочного механизма — только через моменты, передаваемые фрикционной муфтой ФрТ. Поэтому динамика дифференциальных механизмов параллельного манипулятора, привода и блока дифференциалов может быть описана отдельными системами дифференциальных уравнений.

**Уравнения динамики дифференциальных механизмов в паре штанг.** Дифференциальный механизм обычно состоит минимум из трех звеньев вращения, которые имеют по одной степени свободы и связаны между собой таким образом, что движение любого из них определяется разностью движений двух других. В каждой направляющей цепи параллельного манипулятора стыковочного механизма

дифференциальные механизмы образованы только двумя звеньями — винтами и гайками, имеющими в сумме три степени свободы: винт может выполнять поступательное и вращательное движения, а гайка — только вращательное. Винты и гайки различных штанг попарно связаны между собой передачами вращения. Винты в каждой связанной паре имеют противоположные направления — левое и правое. Соответственно и штанги называются по направлению своих винтов — левой и правой. Структура связей и параметры соответствующих звеньев в каждой связанной паре штанг являются одинаковыми, поэтому учет дифференциальных связей в уравнениях динамики платформы далее рассматривается только для первой из них.

На рис. 3 показана упрощенная кинематическая схема первой пары штанг без учета их наклона. Суммарная инерция отдельных передач представлена телами вращения, а пружинные механизмы и электромагнитные демпферы — условными обозначениями. В каждой  $l$ -й штанге тело  $B_{l,1}$  обозначает кардан, соединяющий ее с основанием платформы,  $B_{l,2}$  — винт,  $B_{l,3}$  — гайку. Тела вращения, обеспечивающие дифференциальные связи в паре штанг, имеют индекс этой пары. Так, суммарная

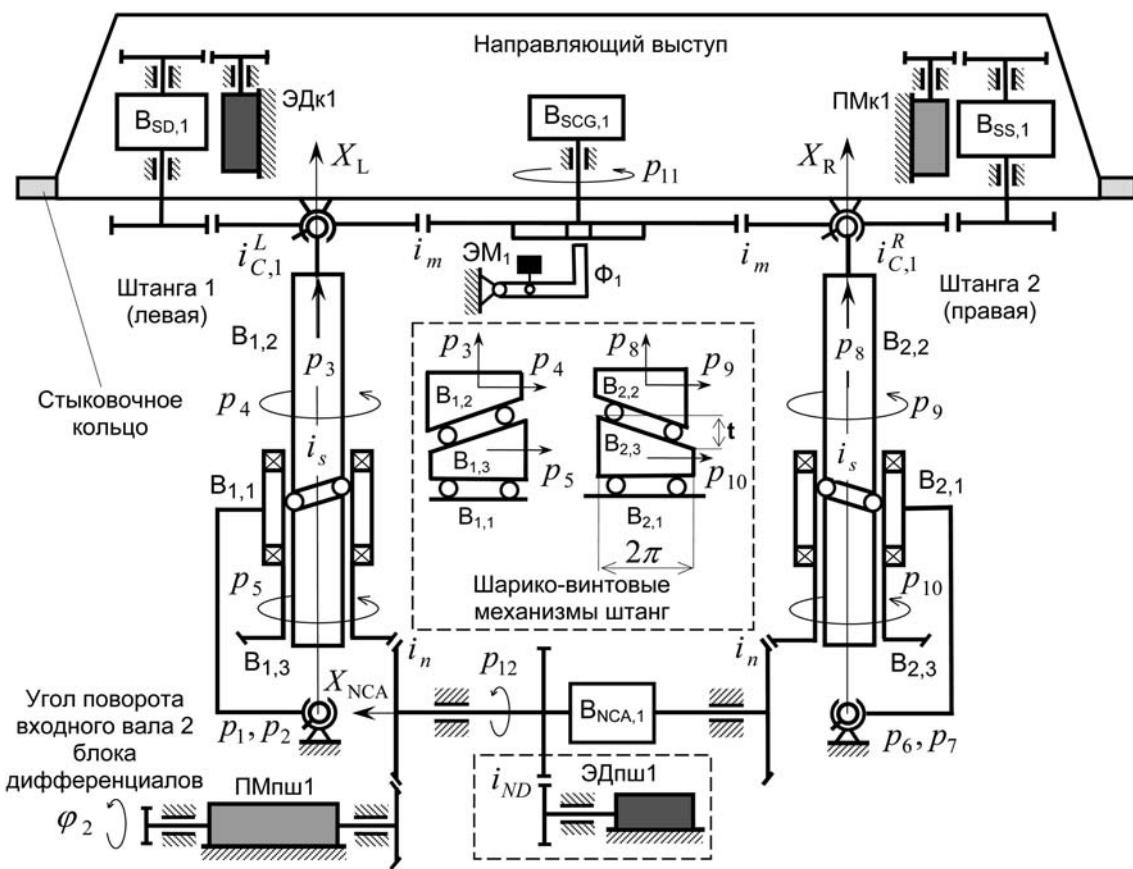


Рис. 3. Упрощенная кинематическая схема пары штанг

инерция вала, соединяющего гайки в первой паре штанг, связанного с ним электромагнитного демпфера и передач вращения представлена телом  $B_{NCA,1}$ . Суммарная инерция связанных с винтами пружинного механизма и электромагнитного демпфера вместе с передачами вращения и датчиками представлена, соответственно, телами  $B_{SD,1}$  и  $B_{SS,1}$ , а инерция паразитной шестерни в механизме связи штанг — телом  $B_{SCG,1}$ . Для коэффициентов передачи между звеньями вращения вводятся следующие обозначения:  $i_{C,1}^L$  и  $i_{C,1}^R$  — для карданов, соединяющих левую и правую штанги с кольцом;  $i_m$  — для передачи между винтами и шестерней механизма связи штанг;  $i_S = 2\pi/t$  — для связи между поступательным и вращательным движением винта ( $t$  — шаг винта);  $i_n$  — для передачи между гайками и связывающим их валом пары штанг. Характеристики пружинных механизмов и электромагнитных демпферов приведены к винтам и валу пары штанг, поэтому соответствующие коэффициенты передачи не показаны.

Индексы переменных относительного движения в шарнирах штанги могут быть произвольными (в пределах ограниченного фиксированного множества). Для удобства изложения они выбираются таким образом, чтобы обеспечить непрерывность их значений после исключения зависимых переменных. Относительные перемещения звеньев левой и правой штанг и связывающих их передач обозначаются следующим образом:  $p_1, p_2$  и  $p_6, p_7$  — углы поворота в карданах, связывающих штанги с основанием;  $p_3, p_8$  — линейные перемещения винтов;  $p_4, p_9$  — повороты винтов относительно их продольных осей  $X_L$  и  $X_R$ ;  $p_5, p_{10}$  — углы поворота гаек относительно этих же осей;  $p_{11}, p_{12}$  — углы поворота шестерни, связывающей винты, и вала, связывающего гайки.

Уравнения связей для перемещений винтов и гаек  $B_{1,2}$  и  $B_{1,3}$ ,  $B_{2,2}$  и  $B_{2,3}$  в дифференциальных механизмах левой и правой штанг первой пары имеют вид

$$(2\pi/t)p_3 = p_4 - p_5, (2\pi/t)p_8 = p_{10} - p_9. \quad (1)$$

В уравнениях связи винтов  $B_{1,2}$  и  $B_{2,2}$  через шестерню  $B_{SCG,1}$  механизма связи штанг предполагается примерное равенство углов поворота левого и правого карданов

$$p_{11} = -i_m p_4, p_{11} = -i_m p_9. \quad (2)$$

Углы поворота гаек  $B_{1,3}$ ,  $B_{2,3}$  и соединяющего их вала  $B_{NCA,1}$  связаны соотношениями

$$p_{12} = i_n p_5, p_{12} = -i_n p_{10}. \quad (3)$$

Таким образом, механизм, реализующий дифференциальные связи пары штанг, состоит из левого и правого винтов и звеньев вращения. Винты участвуют в линейных и угловых относительных

перемещениях в дифференциальных механизмах своих штанг. Линейный ход каждого винта связан с изменением конфигурации платформы, т. е. с изменением угловой ориентации оси винта относительно основания механизма. Такая взаимосвязь относительного линейного и переносного углового движений винтов отражается в уравнениях контурных связей через геометрические параметры звеньев платформы. Вследствие большого значения коэффициента передачи  $i_S = 2\pi/t$  при рассмотрении динамики вращательного движения в механизме дифференциальной связи пары штанг угловым переносным движением винтов можно пренебречь. При таком допущении до начала учета дифференциальных связей динамика звеньев вращения может быть описана следующими автономными уравнениями:

- для левого и правого винтов

$$\begin{aligned} (I_{Screw,x} + I_{SD})\ddot{p}_4 &= m_{SL,1} + m_{SD,1}, \\ (I_{Screw,x} + I_{SS})\ddot{p}_8 &= m_{SR,1} + m_{SS,1}; \end{aligned} \quad (4)$$

- для левой и правой гаек

$$I_{Nut}\ddot{p}_9 = m_{NL,1}, I_{Nut}\ddot{p}_{10} = m_{NR,1}; \quad (5)$$

- для шестерни, связывающей левый и правый винты

$$I_{SCG,1}\ddot{p}_{11} = m_{FX,1}; \quad (6)$$

- для вала, связывающего гайки пары штанг

$$I_{NCA,1}\ddot{p}_{12} = m_{NCA,1}. \quad (7)$$

В этих уравнениях  $I_{Screw,x}$  — осевой момент инерции винта;  $I_{SD}$  — приведенный к левому винту момент инерции связанного с ним электромагнитного демпфера и его передачи (это значение изменяется при включении и выключении демпфера);  $I_{RS}$  — приведенный к правому винту момент инерции связанного с ним пружинного механизма и его передачи;  $I_{Nut}$  — момент инерции гайки и связанных с ней шестерен;  $I_{SCG}$  — момент паразитной инерции шестерни, связывающей левый и правый винты;  $I_{NCA}$  — суммарный момент инерции вала, связывающего гайки, электромагнитного демпфера, датчиков и связывающих их передач (это значение изменяется при включении и выключении демпфера);  $m_{SL,1}$  и  $m_{SR,1}$  — моменты, действующие на левый и правый винты;  $m_{SD,1}$  — приведенный к левому винту суммарный момент связанного с ним электромагнитного демпфера и трения в его передаче;  $m_{SS,1}$  — приведенный к правому винту момент связанного с ним пружинного механизма и трения в его передаче;  $m_{NL,1}$ ,  $m_{NR,1}$  — моменты трения, действующие на левую и правую гайки;  $m_{FX,1}$  — момент, создаваемый фиксатором в паразитной шестерне связи винтов;  $m_{NCA,1}$  — суммарный момент, развиваемый демпфером и торсионным пружинным механизмом, связанными с валом пары штанг.

Уравнения (4)–(7) объединяются в матричную форму

$$\mathbf{A}_{g,1}^{(0)} \ddot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{b}_{g,1}^{(0)}, \quad (8)$$

в которой матрица  $\mathbf{A}_{g,1}^{(0)}$  обобщенной инерции дифференциального механизма является диагональной и с учетом общего числа степеней подвижности звеньев в паре штанг имеет размерность  $(12 \times 12)$ . В этой форме записи поступательным перемещениям винтов и поворотам в карданах основания штанг соответствуют нулевые значения коэффициентов.

Уравнения связей (1)–(3) справедливы не только для углов поворота звеньев вращения, но и для угловых ускорений. Для их учета ускорение  $j$ -го звена может быть представлено в виде

$$\dot{\omega}_j = \mathbf{R}_{g,j}^{(0)} \ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,0)}, \quad (9)$$

где  $\ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,0)} = \ddot{\mathbf{p}}_1 = d^2 \mathbf{p}_1 / dt^2$  — исходный  $(12 \times 1)$ -вектор относительных угловых ускорений звеньев связанной пары штанг;  $\mathbf{R}_{g,j}^{(i,0)}$  —  $(1 \times 12)$ -матрица парциальных скоростей  $j$ -го звена, содержащая только один единичный элемент, индекс которого равен номеру переменной относительного движения этого звена (остальные элементы данной матрицы равны нулю).

Учет связей для ускорений в уравнениях динамики пары штанг осуществляется поэтапно. На  $k$ -м шаге очередное уравнение связи для ускорений  $j$ -го и  $m$ -го звеньев, аналогичное (1)–(3), записывается с учетом (9) в виде

$$\mathbf{C}_{g,1}^{(k)} \ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,k-1)} = \mathbf{0},$$

в котором постоянные элементы матрицы  $\mathbf{C}_{g,1}^{(k)}$  определяются коэффициентами передачи. После этого вектор  $\ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,k-1)}$  разделяется на независимые  $\ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,k)}$  и зависимые  $\ddot{\mathbf{p}}_1^{(d,k)}$  составляющие, связь между которыми может быть представлена как

$$\ddot{\mathbf{p}}_1^{(d,k)} = -[(\mathbf{C}_{g,1}^{(k,d)})^{-1} \mathbf{C}_{g,1}^{(k,i)}] \ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,k)} = \mathbf{H}_1^{(k)} \ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,k)}, \quad k = \overline{1,5}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{C}_{g,1}^{(k,d)}, \mathbf{C}_{g,1}^{(k,i)}$  — подматрицы матрицы, которые составлены из столбцов матрицы  $\mathbf{C}_g^{(k)}$ , соответствующих зависимым и независимым ускорениям; подматрица  $\mathbf{C}_{g,1}^{(k,d)}$  всегда обратима.

Зависимые ускорения  $\ddot{\mathbf{p}}_1^{(d,k)}$  исключаются, а связанные с ними динамические параметры звеньев — обобщенные массы и силы — приводятся к соот-

ветствующим величинам оставшихся независимых ускорений  $\ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,k)}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{g,1}^{(i,k)} &= \mathbf{A}_{g,1}^{(i,k-1)} + \mathbf{H}_1^{(k)\top} \mathbf{A}_{g,1}^{(d,k-1)} \mathbf{H}_1^{(k)}; \\ \mathbf{b}_{g,1}^{(i,k)} &= \mathbf{b}_{g,1}^{(i,k-1)} + \mathbf{H}_1^{(k)\top} \mathbf{b}_{g,1}^{(d,k-1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Матрицы парциальных скоростей для звеньев, относительное движение которых описывается оставшимися независимыми переменными, преобразуются в соответствии с (10) следующим образом:

$$\mathbf{R}_{g,j}^{(k)} = \mathbf{R}_{g,j}^{(k-1,i)} + \mathbf{H}_1^{(k)} \mathbf{R}_{g,j}^{(k-1,d)},$$

где подматрицы  $\mathbf{R}_{g,j}^{(k-1,i)}$  и  $\mathbf{R}_{g,j}^{(k-1,d)}$  составляются из столбцов матрицы  $\mathbf{R}_{g,j}^{(k-1)}$ , соответствующих независимым и зависимым ускорениям, выбранным на  $k$ -м шаге исключения из вектора  $\ddot{\mathbf{p}}_1^{(i,k-1)}$ .

На первом и втором шагах в соответствии с (2) исключаются зависимые угловые ускорения  $\ddot{\rho}_4$  и  $\ddot{\rho}_9$  винтов, а на третьем и четвертом в соответствии с (3) — зависимые угловые ускорения  $\ddot{\rho}_5$  и  $\ddot{\rho}_{10}$  гаек.

При этом матрицы  $\mathbf{C}_{g,1}^{(1)}, \dots, \mathbf{C}_{g,1}^{(4)}$  и соответственно  $\mathbf{H}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{H}_1^{(4)}$  имеют по одной строке. На пятом шаге исключения зависимых переменных уравнения связей (1) дифференциальных механизмов левой и правой штанг, содержащие общие переменные  $p_{11}$  и  $p_{12}$ , решаются совместно

$$\begin{cases} -p_{11}/i_m - p_{12}/i_n = (2\pi/t)p_3; \\ p_{11}/i_m - p_{12}/i_n = (2\pi/t)p_8. \end{cases}$$

Решение этой системы

$$\begin{aligned} p_{11} &= -(\pi i_m/t)(p_3 - p_8); \\ p_{12} &= -(\pi i_n/t)(p_3 + p_8) \end{aligned} \quad (12)$$

показывает, что вращение винтов пропорционально разности, а вращение вала пары штанг — пропорционально сумме линейных перемещений левого и правого винтов. Такая же структура связей имеет место между линейными  $\ddot{\rho}_3, \ddot{\rho}_8$  и угловыми  $\ddot{\rho}_{11}, \ddot{\rho}_{12}$  ускорениями. В соответствии с (12) матрицы  $\mathbf{C}_{g,1}^{(5)}$  и  $\mathbf{H}_1^{(5)}$  содержат по две строки.

Так как за каждой зависимой или независимой переменной закреплен определенный индекс, то размерности матриц  $\mathbf{A}_{g,1}^{(k)}$  и векторов  $\mathbf{b}_{g,1}^{(k)}$  остаются неизменными. Элементы матриц  $\mathbf{A}_{g,1}^{(d,k-1)}$  и векторов  $\mathbf{b}_{g,1}^{(d,k-1)}$  не обнуляются, они просто не участвуют в дальнейших преобразованиях. После завершения пятого шага исключения в матрице  $\mathbf{A}_{g,1}^{(5)}$

и векторе  $\mathbf{b}_{g,1}^{(5)}$  остаются только элементы, соответствующие независимым ускорениям:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{g,1}^{(5)}(3,3) &= \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 [I_{Screw,x} + I_{SS} + i_m^2 I_{SCG} + \\ &+ 2I_{Nut} + (I_{SD,1} + i_n^2 I_{NCA,1})^*];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{g,1}^{(5)}(3,8) &= \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 [-I_{Screw,x} - I_{SS} - i_m^2 I_{SCG} + \\ &+ 2I_{Nut} + (-I_{SD,1} + i_n^2 I_{NCA,1})^*];\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{g,1}^{(5)}(8,8) = \mathbf{A}_{g,1}^{(5)}(3,3), \quad \mathbf{A}_{g,1}^{(5)}(8,3) = \mathbf{A}_{g,1}^{(5)}(3,8);$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{g,1}^{(5)}(3) &= \frac{\pi}{t} (m_{SCM,1} + m_{SL,1} + m_{SR,1} - \\ &- m_{NL,1} + m_{NR,1} - i_n m_{NCA,1});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{g,1}^{(5)}(8) &= \frac{\pi}{t} (-m_{SCM,1} - m_{SL,1} - m_{SR,1} - \\ &- m_{NL,1} + m_{NR,1} - i_n m_{NCA,1}),\end{aligned}$$

где  $m_{SCM,1} = -i_m m_{FX,1} + m_{SD,1} + m_{SS,1}$  — суммарный момент, создаваемый устройствами, установленными на стыковочном кольце; суммы моментов инерции, отмеченные звездочкой, изменяются при включении и выключении электромагнитных демпферов.

В дальнейшем матрицы  $\mathbf{A}_{g,1}^{(k)}$  и векторы  $\mathbf{b}_{g,1}^{(k)}$  используются для получения уравнений динамики параллельного манипулятора стыковочного механизма.

**Уравнения движения планетарного механизма привода.** Уравнения динамики отдельных звеньев планетарного механизма Д4 — основных колес  $a$  и  $b$ , водила  $H$  и сателлита  $g$  имеют вид

$$I_a \ddot{\varphi}_a = m_a, \quad I_b \ddot{\varphi}_b = m_b, \quad I_H \ddot{\varphi}_H = m_H, \quad I_g \ddot{\varphi}_g = m_g,$$

где  $I_a, I_b, I_H, I_g$  — приведенные моменты инерции с учетом передач, стопорных муфт и якорей ЭД1 и ЭД2;  $m_a, m_b, m_H, m_g$  — действующие активные моменты;  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_H, \varphi_g$  — углы поворота звеньев относительно своих осей.

Уравнения дифференциальных связей относительно ускорений имеют вид

$$\ddot{\varphi}_H z_H = \frac{z_a \ddot{\varphi}_a + z_b \ddot{\varphi}_b}{2}, \quad \ddot{\varphi}_g z_g = \frac{z_b \ddot{\varphi}_b - z_a \ddot{\varphi}_a}{2},$$

где  $z_a, z_b, z_H, z_g$  — число зубьев на колесах. Они оставляют механизму две степени свободы. В качестве независимых выбираются ускорения  $\ddot{q}_1 = \ddot{\varphi}_a$  и  $\ddot{q}_2 = \ddot{\varphi}_b$  основных колес.

Представление ускорений звеньев через  $(1 \times 2)$ -матрицы  $\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_b, \mathbf{R}_H, \mathbf{R}_g$  парциальных скоростей

$$\ddot{\varphi}_a = [1 \ 0] \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}_a \ddot{\mathbf{q}}, \quad \ddot{\varphi}_b = [0 \ 1] \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}_b \ddot{\mathbf{q}},$$

$$\ddot{\varphi}_H = \frac{1}{2z_H} [z_a, -z_b] \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}_H \ddot{\mathbf{q}},$$

$$\ddot{\varphi}_g = \frac{1}{2z_g} [z_a, -z_b] \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}_g \ddot{\mathbf{q}}$$

и использование уравнений Кейна [12] позволяют записать уравнения движения дифференциального механизма в виде

$$\left( \sum_j \mathbf{R}_j^T \mathbf{I}_j \mathbf{R}_j \right) \ddot{\mathbf{q}} = \sum_j \mathbf{R}_j^T \mathbf{M}_j, \quad j \in \{a, b, H, g\}, \quad (13)$$

или

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (14)$$

где элементы постоянной симметричной  $(2 \times 2)$ -матрицы обобщенной инерции и  $(2 \times 1)$ -вектора обобщенных сил равны

$$\mathbf{A}_{1,1} = I_a + \frac{z_a^2}{4z_H^2} I_H + n_g \frac{z_a^2}{4z_g^2} I_g;$$

$$\mathbf{A}_{12} = \frac{z_a z_b}{4} \left( \frac{I_H}{z_H^2} - n_g \frac{I_g}{z_g^2} \right);$$

$$\mathbf{A}_{2,2} = I_b + \frac{z_b^2}{4z_H^2} I_H + n_g \frac{z_b^2}{4z_g^2} I_g.$$

Так как активные моменты, действующие на водило и сателлиты, равны нулю ( $m_H = 0, m_g = 0$ ), то  $\mathbf{Q}_1 = m_a, \mathbf{Q}_2 = m_b$  ( $m_a, m_b$  — моменты, действующие на основные колеса со стороны электродвигателей,  $n_g$  — число сателлитов).

**Уравнения движения блока дифференциалов.** Дифференциалы Д1, Д2, Д3 связаны таким образом (рис. 4), что оси основных колес  $a_3$  и  $b_3$  Д3 являются осями водил  $H_2$  и  $H_1$  соответственно Д2 и Д1. Ось водила  $H_3$ , связанного передачей с фрикционной муфтой, является осью основного колеса  $b_1$  Д1. Углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  поворота колес  $a_1, a_2$  и  $b_2$ , связанные с ПМпш2, ПМпш1, ПМпш3 соответственно, являются независимыми переменными.

С учетом этого имеют место следующие уравнения связи, разрешенные относительно зависимых ускорений  $\ddot{\varphi}_H, \ddot{\varphi}_H, \ddot{\varphi}_H$  и  $\ddot{\varphi}_g, \ddot{\varphi}_g, \ddot{\varphi}_g$  водил и сателлитов блока дифференциалов

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_{H1} &= \frac{2\ddot{\varphi}_1}{3} + \frac{\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3}{6}, \quad \ddot{\varphi}_{g1} = \frac{z_1}{2z_{g1}} \left( \frac{2\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_3}{3} \right), \\ \ddot{\varphi}_{H2} &= \frac{\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3}{6}; \quad \ddot{\varphi}_{g2} = \frac{z_2}{2z_{g2}} (\ddot{\varphi}_3 - \ddot{\varphi}_2); \\ \ddot{\varphi}_{H3} &= \frac{1}{3} (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3); \\ \ddot{\varphi}_{g3} &= \frac{z_3}{2z_{g3}} \left( \frac{2\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_3}{3} \right).\end{aligned} \quad (15)$$

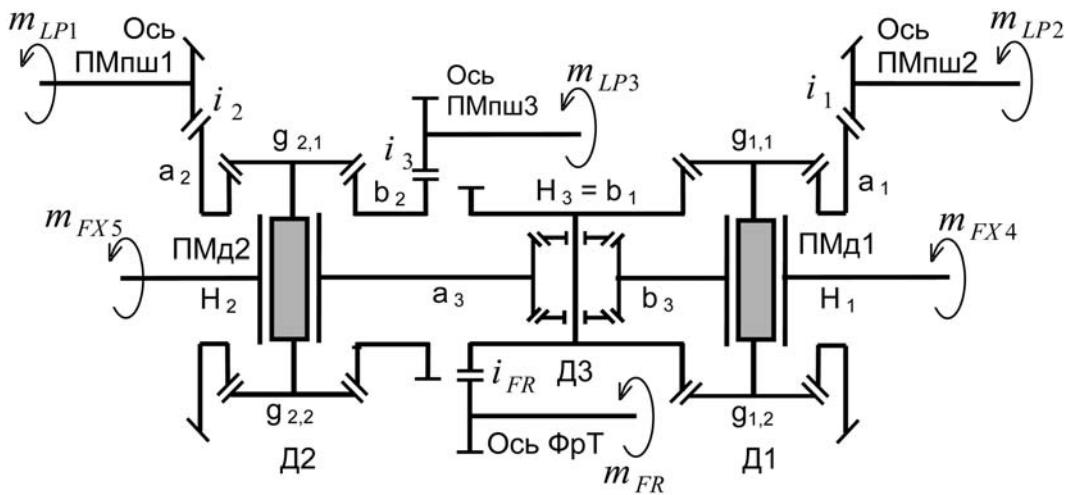


Рис. 4. Упрощенная кинематическая схема блока дифференциалов

Соответственно, матрицы парциальных скоростей звеньев имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = [1 \ 0 \ 0], \mathbf{R}_2 = [0 \ 1 \ 0], \mathbf{R}_3 = [0 \ 0 \ 1],$$

$$\mathbf{R}_{H1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{g1} = \frac{z_1}{2z_{g1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{H2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{g2} = \frac{z_2}{2z_{g2}} [0 \ -1 \ 1],$$

$$\mathbf{R}_{H3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{g3} = \frac{z_3}{2z_{g3}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

при независимых переменных движения  $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$  — углах поворота валов 1, ..., 3 блока дифференциалов. Уравнения движения (13) со значениями индексов  $j \in \{1, 2, 3, 4, H1, g1, H2, g2, H3, g3\}$  могут быть представлены в виде (14). При этом элементы постоянной симметричной  $(3 \times 3)$ -матрицы обобщенной инерции и  $(3 \times 1)$ -вектора обобщенных сил определяются соотношениями

$$\mathbf{A}_{11} = I_1 + \frac{1}{9} I_{H3} + \frac{4}{9} \left[ I_{H1} + 2 \left( \frac{z_1}{2z_{g1}} \right)^2 I_{g1} + 2 \left( \frac{z_3}{2z_{g3}} \right)^2 I_{g3} \right];$$

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{13} = \frac{1}{9} \left[ I_{H3} + I_{H1} - 4 \left( \frac{z_1}{2z_{g1}} \right)^2 I_{g1} - 4 \left( \frac{z_3}{2z_{g3}} \right)^2 I_{g3} \right];$$

$$\mathbf{A}_{22} = I_2 + \frac{1}{9} I_{H3} + \frac{1}{36} I_{H1} + \frac{2}{9} \left( \frac{z_1}{2z_{g1}} \right)^2 I_{g1} + \frac{1}{4} I_{H2} + 2 \left( \frac{z_2}{2z_{g2}} \right)^2 I_{g2} + \frac{2}{9} \left( \frac{z_3}{2z_{g3}} \right)^2 I_{g3};$$

$$\mathbf{A}_{23} = \frac{1}{9} I_{H3} + \frac{1}{36} I_{H1} + \frac{2}{9} \left( \frac{z_1}{2z_{g1}} \right)^2 I_{g1} + \frac{1}{4} I_{H2} - 2 \left( \frac{z_2}{2z_{g2}} \right)^2 I_{g2} + \frac{2}{9} \left( \frac{z_3}{2z_{g3}} \right)^2 I_{g3};$$

$$\mathbf{A}_{33} = I_3 + \frac{1}{9} I_{H3} + \frac{1}{36} I_{H1} + \frac{2}{9} \left( \frac{z_1}{2z_{g1}} \right)^2 I_{g1} + \frac{1}{4} I_{H2} + 2 \left( \frac{z_2}{2z_{g2}} \right)^2 I_{g2} + \frac{2}{9} \left( \frac{z_3}{2z_{g3}} \right)^2 I_{g3};$$

$$\mathbf{Q}_1 = i_1 m_{LP2} + \frac{1}{3} i_{FR} m_{FR} + \frac{1}{3} \frac{z_1}{z_{g1}} m_{g1} + \frac{2}{3} m_{FX4};$$

$$\mathbf{Q}_2 = i_2 m_{LP1} + \frac{1}{3} i_{FR} m_{FR} - \frac{1}{6} \frac{z_1}{z_{g1}} m_{g1} - \frac{z_2}{2z_{g2}} m_{g2} + \frac{1}{6} m_{FX4} + \frac{1}{2} m_{FX5};$$

$$\mathbf{Q}_3 = i_3 m_{LP3} + \frac{1}{3} i_{FR} m_{FR} - \frac{1}{6} \frac{z_1}{z_{g1}} m_{g1} + \frac{z_2}{2z_{g2}} m_{g2} + \frac{1}{6} m_{FX4} + \frac{1}{2} m_{FX5},$$

где  $I_1, I_2, I_3, I_{H1}, I_{H2}, I_{H3}, I_{g1}, I_{g2}, I_{g3}$  — приведенные моменты инерции звеньев блока дифференциалов;  $m_{LP1}, m_{LP2}, m_{LP3}, m_{FR}$  — моменты ПМпш1, ПМпш2, ПМпш3 и ФрТ;  $i_1, i_2, i_3, i_{FR}$  — коэффициенты передачи;  $m_{g1}, m_{g2}$  — моменты, создаваемые ПМд1, ПМд2;  $m_{FR}$  — момент, передаваемый фрикционной муфтой;  $m_{FX4}, m_{FX5}$  — моменты, создаваемые включенными фиксаторами Ф4 и Ф5 (см. рис. 1).

Различные значения коэффициентов в уравнениях (15) связей, разрешенных относительно зависимых переменных, обусловливают асимметрич-

ное перераспределение вращения, т. е. под действием контактной силы, создающей относительно стыковочного кольца момент вращения только в одной плоскости, платформа стыковочного механизма разворачивается одновременно по двум углам — в плоскости приложения момента и вне ее. Значения этих углов зависят от точки приложения контактной силы на стыковочном кольце. Данная особенность подтверждается экспериментально.

**Свойства стыковочного механизма, обеспечиваемые дифференциальными связями.** Дифференциальные связи позволяют выделить в нелинейном конфигурационном пространстве параллельного манипулятора вращательные движения, соответствующие линейным и угловым перемещениям стыковочного кольца в декартовой системе координат. Данные вращательные движения ограничены внутренними механическими упорами в пружинных механизмах, что обеспечивает ограничение рабочего пространства параллельного манипулятора и отсутствие у него сингулярных конфигураций. В частности, упоры в ПМк1, ПМк2, ПМк3 ограничивают боковые движения кольца и его вращение по крену, а упоры в ПМд1, ПМд2 блока дифференциалов — вращение стыковочного кольца по тангажу и рысканию. Ось линейное перемещение кольца ограничивается только при управляемом движении выравнивания и втягивания стыковочного механизма.

Кроме того, выделенные компоненты движения стыковочного кольца характеризуются различными значениями кинетической энергии относительного движения КА. Это позволяет демпфировать их устройствами с различной энергоемкостью. При этом наибольшая энергия осевого сближения КА поглощается фрикционной муфтой.

Благодаря связям пар штанг через блок дифференциалов неравномерная нагрузка на стыковочное кольцо вызывает его разворот, который способствует сцепке. При равномерной нагрузке блок дифференциалов передает суммарный момент от трех пар штанг на входную ось фрикционной муфты.

**Заключение.** Полученные выше уравнения движения динамики дифференциальных механизмов, описывающие перераспределение движения в зависимости от моментов нагрузки на их оси, могут быть использованы при разработке математических моделей различных управляемых механических систем. Уравнения блока дифференциалов и планетарного механизма привода в составе математической модели периферийного стыковочного механизма интегрируются независимо. Алгоритмы учета уравнений динамики дифференциальных механизмов направляющих кинематических цепей в уравнениях движения параллельного манипулятора, а также влияние дифференциальных связей на динамику стыковочного механизма в процессестыковки будут рассмотрены в следующей части статьи.

#### Список литературы

1. Сыромятников В. С. Стыковочные устройства космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1984.
2. Яскевич А. В. Комбинированные уравнения движения для описания динамики стыковки космических аппаратов с помощью системы "штырь—конус" // Изв. РАН. Космические исследования. 2007. Т. 45. № 4. С. 325–336.
3. ParalleMIC — the Parallel Mechanisms Information Center. Terminology. General. URL: <http://www.paralemic.org/terminology/general.html>.
4. URL: <http://www.mscsoftware.com/Products/CAE-Tools/Adams.aspx>.
5. URL: <http://www.lmsintl.com/DADS>
6. URL: [http://www.umlabc/products\\_rus.htm](http://www.umlabc/products_rus.htm)
7. Бойков В. Г., Юдаков А. А. Моделирование динамики систем твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Информационные технологии и вычислительные системы. № 1. 2011. С. 42–52.
8. Руденко Н. Ф. Планетарные передачи. М.: Машгиз, 1956. 756 с.
9. Планетарные передачи: Справочник / Под ред. В. Н. Кудрявцева и Ю. Н. Кирдяшева. Л.: Машиностроение, 1977. 535 с.
10. Айрапетов Э. Л., Генкин М. Д. Динамика планетарных механизмов. М.: Наука, 1980. 256 с.
11. Курлов Б. А. Пространственные зубчатые передачи. М.: Издательство Спутник+, 2008. 465 с.
12. Kane T. R., Wang C. F. On the Derivation of equations of motion // SIAM Journal. V. 13. N. 2. June 1965. P. 487–492.

#### ИНФОРМАЦИЯ

13–15 ноября 2012 года в Москве  
В Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) состоится

#### 11-я Международная конференция "АВИАЦИЯ И КОСМОНАВТИКА"

Тематика конференции охватывает наиболее важные основы авиакосмической индустрии, дающие представление о состоянии отрасли. Затрагиваются как вопросы достижений, так и важнейшие проблемы направлений авиакосмической отрасли, которая является отраслью, определяющей уровень развития техники и науки в стране.

Электронная почта: [aviacosmos@mail.ru](mailto:aviacosmos@mail.ru) [aviacosmos@gm'ail.com](mailto:aviacosmos@gm'ail.com)  
Сайт конференции [www.mai.ru/conf/aerospace/](http://www.mai.ru/conf/aerospace/)

# CONTENTS

<b>Filimonov A. B., Filimonov N. B.</b> Analytical Synthesis of Two-Contour Coordinated Systems of Automatic Control.....	2
<i>The method of analytical synthesis of coordinated automatic systems is stated. The processes of control are formed by means of two many-dimensional loops: the loop of assembly control by dynamics of object on the whole and the loop of regulation of intercoordinate relations. The autonomization of the second loop plays the key part in the suggested decisions.</i>	
<b>Keywords:</b> systems of coordinated control, principle of movement separation, separate channels of regulation, loop of regulation of relations, compensation of disturbances, autonomization	
<b>Myshlyev Yu. I., Mishakov V. V.</b> Nonlinear Cascade Objects Control Based on High-Degree Ajustable Sliding Modes .....	8
<i>The methodology of synthesis of nonlinear cascade objects control under parametric uncertainties is considered. The methodology is based on the high-degree adjustable sliding mode with passivating of outer cascade.</i>	
<b>Keywords:</b> parametric uncertainty, nonlinear systems, the adaptive control, sliding mode, cascade systems	
<b>Grigoryev A. M., Ivanko E. E., Knyazev S. T., Chentsov A. G.</b> Dynamic Programming in Generalized Courier Problem with Inner Works .....	14
<i>An extreme routing problem connected with observing the areas where some potentially dangerous occurrences may appear is considered; this circumstance imposes the requirement for the fastest revealing of the considered occurrences with the aim to liquidate the consequences (forest fire, radiation, chemical contamination). All these circumstances require the qualitative routing of the "observer". This article is devoted to the development of dynamic programming ideas for the considered applied problem. The theory of the article takes shape in optimal (accurate to the correspondent discretization) algorithm for a parallel computer and the respective experiment is conducted.</i>	
<b>Keywords:</b> route, preceding conditions, megalopolis, innerworks	
<b>Briskin E. S., Maloletov A. V., Kolesov A. M., Serov V. A.</b> Statically Stable Gait of the Walking Machine with Three Double-Orthogonal Movers .....	22
<i>A modular walking machine "Ortonog" with ability of kinematic scheme reconfiguration are discussed. The acceptable gait and movement styles are described. The static stability margin criteria are introduced: the stability area and the shortest distance from the geometric center of the body to the limits of the supporting polygon. The problem of the full supported gait parameters determining for regular vehicle with three twin movers are solved, providing straight forward movement of the body with the greatest possible margin of static stability.</i>	
<b>Keywords:</b> walking machine, modular structure, reconfiguration, gait, walking mover, motion control	
<b>Tachkov A. A.</b> Using the Proportional Guidance Method for Mobile Reconnaissance Robot Control in the Fire ..	27
<i>The method of proportional guidance in the navigation of the fire-fighting reconnaissance caterpillar robot in the indoor fire conditions is considered in the paper. The motion path of the robot is analyzed taking into consideration its dynamic characteristics, the scheme of the tactic and executive control system levels combination is considered. The experimental verification results of the robot control system obtained using the computer simulation method are given.</i>	
<b>Keywords:</b> proportional guidance method, mobile fire-fighting robot, scalar temperature field	
<b>Kapustyan S. G., Diachenko A. A.</b> Distributed Information-Control System Automated Multirobotic Transportation-Storage Complexes .....	34
<i>The issues of constructing information-control systems robotic transportation storage complexes of industrial enterprises are considered. The basis of such complexes are a group of mobile robots carrying out cargo transportation and cargo handling operations. The procedure of distribution jobs in mobile storage robots group, implementing group control methods, is proposed.</i>	
<b>Keywords:</b> multirobotic complex, mobile storage robot, information-control system, distributed control, centralized control, group control, distribution jobs	
<b>Lysov V. E., Khorenko M. V.</b> System of Automatic Control the Mechatronic Modules of the Precision Rotary Table .....	40
<i>The process of automatic control of precision rotary table made as a mechatronic module is investigated in this paper. The claimed accuracy of motion trajectory and positioning of a faceplate is provided by thermal movement exclusion and with the help of additional automatic cooling system of operating synchronous motor.</i>	
<b>Keywords:</b> automatic control system, rotary table, mechatronic module, thermal movement, faceplate	

<b>Martinov G. M., Nezhmetdinov R. A., Sokolov S. V.</b> The Principles of Constructing a Toolchain for Monitoring and Setup Mechatronic Equipment Parameters Based on Integration of Specialized Software Components into Control System Structure .....	45
---	----

*The principles of constructing a toolchain for monitoring and setup mechatronic equipment parameters based on integration of specialized software components into control system structure are proposed. The set of requirements to parameter monitoring and setup systems are being analyzed in the form of the matrix for evaluation the functionality of program components, intended to be used at control systems design stage. The procedure of network interaction between the parameter monitoring and setup agent task and control system terminal application is described. The example of solving the task of parameter monitoring and setup in industrial robot "TUR" control system is shown.*

**Keywords:** monitoring and setup mechatronic equipment parameters, industrial robot, numerical control system, mechatronic equipment

<b>Gaiduk A. R.</b> Control by Group of Unmanned Aerial Vehicles with Restriction on Control Actions and State Variables .....	52
--	----

*The problem of control systems stability when settlement value of control actions exceeds allowable value, and also synthesis of decentralized control of group UAV as distributed system is considered in view of interrelations UAV.*

**Keywords:** control system, restriction, state variables, allowable value, UAV, group, distributed system, decentralized control, stability

<b>Rathkeen L. S.</b> The Comparable Analyses of Aircraft Unmanned Flying Systems for Automatic Industrial and Ecological Monitoring of Object State .....	58
--	----

*According with the opened information sources are shown the comparable analyses of aircraft unmanned flying systems (UFS) for industrial and ecological monitoring of object state. Also are discussed the problems of development of Russian aircraft UFS and their comparison with the foreign analogies by the set of tactical and technical characteristics (TTC).*

**Keywords:** aircraft unmanned flying systems, aircraft UFS, industrial and ecological monitoring, diversification, tactical and technical characteristics, TTC

<b>Yaskevich A. V.</b> A Mathematical Model of Peripheral Docking Mechanism. Part 1. Motion Equations of Differential Mechanisms .....	63
--	----

*Differential constrains provide special properties of 6 degrees of freedom platform mechanism for spacecraft docking. A motion equations of mechanisms realized these constrains are considered as a significant part of mathematical model of docking dynamics.*

**Keywords:** spacecraft docking, parallel manipulators, differential constrains, equations of motion

## Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Строгинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Дизайнер *Т. Н. Погорелова.*

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Т. В. Пчелкина.*

Сдано в набор 27.04.2012. Подписано в печать 20.06.2012. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН712. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".  
105120, г. Москва, ул. Нижняя Сыромятническая, д. 5/7, стр. 2, офис 2.