ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 9 (138)
сентябрь
2012

СОДЕРЖАНИЕ

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу: http://novtex.ru/mech, e-mail: mech@novtex.ru

ИССЛЕДОВАНИЯ И РАЗРАБОТКИ КАФЕДРЫ "ПРИБОРЫ УПРАВЛЕНИЯ" ТУЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА В ОБЛАСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И НАВИГАЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Научно-образовательная и научно-техническая деятельность кафедры "Приборы управления" Тульского государственного университета

Научный руководитель НОЦ "Микросистемная техника" В. Я. Распопов

Историческая справка. Кафедра "Приборы управления" (ПУ) Тульского государственного университета (ТулГУ) прошла 50-летний рубеж своего развития. Организатор и первый заведующий кафедрой (первое название "Гироскопические приборы и устройства") профессор А. Я. Шайденко (1919—1992 гг.) наряду с труднейшей работой по формированию научно-педагогического коллектива кафедры и ее материально-технического обеспечения сразу после ее организации (1961 г.) сумел обеспечить разработку и выпуск малых серий гиростабилизированных платформ для стабилизации различных приборов на борту морских судов.

За 15 лет руководства кафедрой (1961—1976 гг.) А. Я. Шайденко заложил основу научной школы по направлению "Гиросистемы для стабилизации исследовательской и навигационной аппаратуры и компенсаторы влияния качки судна на показания эхолотов".

В. К. Карпов, профессор, доктор технических наук (1940—1993 гг.), заведовавший кафедрой с 1977 по 1987 гг., основал новое научное направление "Гиросистемы слежения за объектами с различных носителей и гравиинерциальная гиростабилизация". Работы в этом направлении завершились созданием образцов техники, которые успешно эксплуатировались на научно-исследовательских судах, включая флот АН СССР. В этот период была существенно обновлена материально-техническая база кафедры, к обучению студентов привлечены ведущие специалисты предприятий Тулы, на которых были организованы филиалы кафедры.

С 1987 г. кафедрой заведует доктор технических наук, профессор В. Я. Распопов. С 1988 г. на кафедре увеличивается объем исследований по оборонной тематике в рамках научного направления "Гироприборы и базовые приборы системы ориентации, стабилизации и навигации" (научный руководитель В. Я. Распопов). В условиях государственной и экономической перестройки кафедра сохранила научно-технический потенциал, освоила новые направления и специальности подготовки, расширила творческие контакты, активизировала издательскую деятельность.

В настоящее время на кафедре ведется многоуровневая подготовка (бакалавр, магистр) по трем профилям: "Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации", "Электрооборудование летательных аппаратов", "Оптико-электронные приборы и системы" направлений "Системы автоматического управления движением и навигация", "Электроэнергетика и электротехника", "Оптотехника". Работает аспирантура.

Среди выпускников кафедры — генеральные директора предприятий, сотрудники государственной службы, главные конструкторы и инженеры, руководители отделов и многочисленные специалисты, работающие в промышленных и конструкторских организациях.

Подробная информация о научно-технических работах, выполненных на кафедре в период 1980—2000 гг. содержится в работе [1], а история развития кафедры с 1961 по 2000 г. изложена в книге [2]. Основные результаты образовательной и научно-технической деятельности кафедры отражены в работах [3...6].

Научно-образовательная деятельность. Эта деятельность регламентирована федеральными государственными образовательными стандартами (ФГОС), которые, однако, предоставляют достаточную свободу при формировании перечня дисциплин специализации, входящих в так называемую региональную составляющую ФГОС.

Многоуровневая система подготовки дает возможность студентам, обучающимся в бакалавриате и изучающим дисциплины специализации в филиалах кафедры на базе учебных центров ОАО "НПО "Стрела"" и ОАО "КБП", совмещать учебу с работой по специальности с последующим выполнением выпускных квалификационных работ по темам предприятий.

Важнейшим направлением научно-образовательной деятельности является разработка учебных пособий и учебников по основным и перспективным направлениям науки и техники. Многолетний опыт работы кафедры по управляемым гиростабилизаторам нашел отражение в учебном пособии [7]. Опыт работы и преподавания по направлению "Оптотехника" обобщен в учебных пособиях [8, 9]. Большой производственный опыт в области специального гироприборостроения и преподавательская деятельность в этом направлении представлены в учебном пособии [10]. Основные результаты многолетней научно-практической работы в области одного из перспективных направлений — микросистемной техники изложены в учебном пособии [11].

Важным направлением образовательной деятельности кафедры является повышение квалификации инженеров, работающих на предприятиях научно-производственного профиля. Актуальность этого направления, требующего ускоренного обновления, а нередко и приобретения новых знаний в соответствии с запросами предприятий, объясняется следующими причинами:

- на большинстве предприятий в связи с реформами последних лет оказался нарушенным процесс передачи знаний в связи с сокращением численности работников средней возрастной группы;
- предприятия в поисках новых сфер приложения своей деятельности вынуждены расширять их перечень; часто новые объекты не соответствуют профилю традиционной деятельности предприятий;
- инженерно-технический состав предприятий в силу социально-экономических условий в значительной степени формируется из выпускников учебных заведений, не отвечающих в полной мере профилю работы предприятий и его подразделений.

Данный вид образовательной деятельности был возобновлен кафедрой в 2005 г. по предложению ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ им. акад. Е. И. Забабахина. Работа в этом направлении продолжается, и в настоящее время разработаны новые программы [12] курсов повышения квалификации инженеров и соответствующее учебно-методическое обеспечение.

Научно-техническая деятельность. Научно-исследовательская работа и, как ее результат, технические разработки являются важнейшими составляющими деятельности кафедры, которые оказывают стимулирующее воздействие на учебный процесс. Технические разработки являются наукоемкими, базирующимися на многолетних исследованиях, некоторые обобщены в монографиях [13—16]. В работах [3—6] содержится подробная характеристика научно-технических разработок кафедры.

В качестве примера наукоемкой разработки можно указать высокоточный индикаторный гиростабилизатор нового поколения гравиметрического комплекса "ГРИН". Комплекс прошел успешные испытания при проведении научных исследований и производственных работ в акватории Мирового океана, в районе Штокмановского месторождения в Баренцевом море и показал хорошую сходимость с результатами измерений, полученными гравиметрическими комплексами, разработанными НПО "Азимут" совместно с институтом физики Земли Академии наук и гиростабилизированным гравиметром "La Coste Romberg" (США). В период с 2000 по 2005 гг. комплексом ГРИН-2000 выполнено более 10 000 км съемки на акваториях Азовского, Черного и Каспийского морей, причем более 2000 км съемки выполнено в условиях предельного мелководья на глубинах от 1 до 2,5 м с использованием плоскодонных судов, имеющих осадку 0,7...1 м [12].

Перспективным направлением является разработка микросистем различного назначения, в частности, измерительных модулей систем ориентации и информационно-измерительной системы для вращающегося по крену ЛА на микрогироскопах и микроакселерометрах.

Микросистемная авионика [19, 20, 21] позволяет создавать малоразмерные, массой около 10 кг, БПЛА, способные решать задачи разведки и целеуказания в ближней тактической зоне, выполнять функцию экологического мониторинга и многие другие задачи.

Материалы по авионике в различных комбинациях были представлены на XV, XVI, XVII, XVIII (2008—2011 гг.) Санкт-Петербургских международных конференциях по интегрированным навигационным системам, проводимых под руководством академика РАН В. Г. Пешехонова, который счел возможным некоторые из них заслушать на пленарных заседаниях.

Разработка микросистемной авионики проводится на базе инновационного и научно-образовательного центра (НОЦ) "Микросистемная техника", который обладает интеллектуальными и техническими ресурсами, необходимыми для разработки микросистемной авионики МБПЛА по техническим требованиям заказчика.

В настоящем выпуске журнала представлены три работы, выполненные в рамках научного направления "Микросистемная авионика БПЛА". В работах рассмотрены процедуры определения аэродинамических и тяговых характеристик МБПЛА как объекта управления. Приведены алгоритмы системы автоматического управления, функционирующей в режиме терминальной навигации. Рассматривается метод компенсации влияния линейных ускорений, действующих на систему ориентации. Приводятся результаты математического моделирования и экспериментальных исследований скорректированной системы. Также предлагается новый алгоритм ориентации для вращающихся по крену ЛА, имеющий более высокую точность выработки параметров ориентации и позволяющий реализовать "синусно-косинусный механизм" перекладки рулей.

* * *

Кафедра "Приборы управления" ТулГУ имеет богатый опыт разработки сложных, точных гиросистем морского применения, который может быть перенесен на разработку гиросистем, предназначенных для других носителей. На кафедре разработаны теория и методы расчета, а на их основе — образцы приборов и устройств различного назначения, в которых в качестве базовых чувствительных элементов используются гироскопы, акселерометры, магнитометры. Исследования в области микросистемной техники создали необходимый фундамент для разработки перспективных изделий с микрочувствительными элементами.

Большой педагогический опыт в сочетании с опытом разработки наукоемкой продукции различного назначения является гарантией качества переподготовки инженеров в форме курсов повышения квалификации по традиционным, базовым и новым учебным дисциплинам, отвечающим перспективным направлениям развития техники.

В. Я. Распопов, д-р техн. наук, проф.,
Тульский государственный университет,
науч. руководитель НОЦ "Микросистемная техника"

Список литературы

1. **Гироприборы** и базовые приборы систем ориентации, стабилизации и навигации / Под ред. В. Я. Распопова // Тульский государственный университет. Научные школы. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. С. 216—224.
2. **Плавание** сквозь годы. 40 лет кафедре "Приборы управления" / В. Я. Распопов, В. И. Родионов. Тула: Гриф и К, 2001. 216 с.
3. **Распопов В. Я.** Научно-технические разработки кафедры "Приборы управления" ТулГУ // Датчики и системы. 2001. № 5. С. 2 // Приборостроение. Изв. вузов. 2001. № 7. С. 5—10.
4. **Распопов В. Я., Алалуев Р. В., Горин А. А., Горин В. И., Иванов Ю. В.** Конверсионные разработки кафедры "Приборы управления" ТулГУ // Датчики и системы. 2001. № 5. С. 15—18.
5. **Распопов В. Я., Малютин Д. М.** Научно-технические разработки кафедры "Приборы управления" ТулГУ // Приборостроение. Изв. высш. учеб. заведений. 2003. № 9. С. 5—9.
6. **Распопов В. Я.** Научно-образовательная работа кафедры "Приборы управления" ТулГУ // Датчики и системы. 2006. № 7. С. 40—44.
7. **Родионов В. И.** Системы гироскопической стабилизации оптического изображения: учеб. пособие. Тула: Изд. ТулГУ, 2003. 153 с.
8. **Погорельский С. Л**. Прикладная оптика: учеб. пособие. Ч. 1. Тула: Гриф и К, 2005. 186 с.
9. **Малютин Д. М**. Оптические измерения: учеб. пособие. Тула: Изд. ТулГУ, 2004. 159 с.
10. **Горин В. И., Горин А. А.** Технология приборостроения: учеб. пособ. Тула: Изд. ТулГУ, 2006. 196 с.
11. **Распопов В. Я.** Микромеханические приборы: учеб. пособие. М.: Машиностроение, 2007. 399 с.
12. **Рекламные** материалы кафедры "Приборы управления" ТулГУ // Датчики и системы. 2007. № 5.
13. **Горин В. И., Распопов В. Я.** Гирокоординаторы вращающихся по крену ракет. М.: НТЦ Информтехника, 1996. 149 с.
14. **Распопов В. Я., Иванов Ю. В.** Датчики уровня систем управления железнодорожных машин. Тула: Гриф и К, 2000. 173 с.
15. **Родионов В. И.** Гироскопические системы стабилизации и управления. Тула: Изд. ТулГУ, 2000. 190 с.
16. **Иванов Ю. В.** Гироскопические системы измерения вертикальной качки. Тула: Изд. ТулГУ, 2004. 183 с.
17. **Малютин Д. М.** Гиростабилизатор морского гравиметра с самонастройкой параметров // Приборостроение. Изв. вузов. 2003. № 9. С. 18—24.
18. **Распопов В. Я., Матвеев В. В., Малютин Д. М., Алалуев Р. В., Горин А. А., Иванов Ю. В.** Информационно-управляющие системы на микрогироскопах вращающихся по крену летательных аппаратов // Датчики и системы. 2007. № 4. С. 8—11.
19. **Распопов В. Я.** Микросистемная авионика: учеб. пособие. Тула: Гриф и К, 2010. 248 с.
20. **Расчетный** и лабораторный практикум по микросистемной авионике: учеб. пособие для вузов / Под ред. В. Я. Распопова. Тула: Изд. ТулГУ, 2011. 211 с.
21. **Микросистемы** ориентации беспилотных летательных аппаратов / Под ред. В. Я. Распопова. М.: Машиностроение, 2011. 184 с.

УДК 531.383

В. В. Матвеев, канд. техн. наук, доц.,
А. П. Шведов, канд. техн. наук, доц.,
С. И. Серегин, аспирант,
tgupu@yandex.ru,
Тульский государственный университет

Алгоритм ориентации для вращающегося по крену летательного аппарата[1]

Рассмотрены вращающиеся по крену летательные аппараты ЛА, которые оснащаются системами ориентации, содержащими карданов подвес и механические гироскопы.

Показано, что существующие алгоритмы ориентации в условиях быстрого вращения по крену дают значительные фазовые и амплитудные искажения, что ограничивает их применение. Разработан новый алгоритм ориентации для вращающегося по крену ЛА, который имеет более высокую точность выработки параметров ориентации и позволяет реализовать "синусно-косинусный механизм" перекладки рулей.

***Ключевые слова**: гироскоп, система ориентации, беспилотный летательный аппарат*

Введение

В настоящее время перспективным является вопрос внедрения бескарданных систем ориентации и навигации в контур управления различных классов беспилотных летательных аппаратов (ЛА), включая и ракетно-артиллерийское вооружение. Динамические условия работы последних определяются классом ЛА и характеризуются, как правило, небольшим временем полета (до 2 мин), наличием стартового ускорения и управляющей перегрузкой, воздействием вибраций и значительной частотой вращения по крену, которая может достигать 20 Гц и более. Гироскопы и акселерометры оказываются под действием центробежных сил инерции и многочисленных возмущений, обусловленных сложной кинематикой движения ЛА, поэтому к чувствительным элементам систем ориентации и навигации предъявляются высокие требования по времени готовности, массе, габаритным размерам, надежности при сохранении требуемой точности. Кроме того, высокая маневренность и вращение ЛА по крену накладывает более жесткие требования к алгоритмическому обеспечению систем ориентации и навигации. В данной статье предлагается новый алгоритм ориентации для вращающегося по крену ЛА, имеющий более высокую точность по сравнению с классическими алгоритмами ориентации.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-08-00230а "Научные основы построения малогабаритных систем ориентации и навигации для беспилотных вращающихся по крену летательных аппаратов".

Особенности системы управления вращающегося по крену ЛА

Вращение ЛА по крену накладывает ряд особенностей при построении контура управления, в состав которого входит бесплатформенная система ориентации и навигации. Дело в том, что на рули, занимающие положение, близкое к горизонтальному, подается команда по тангажу (рис. 1).

После того как эти рули займут положение, близкое к вертикальному, на них поступит команда по курсу. Таким образом, рули за один оборот ЛА перекладываются четыре раза. Для обеспечения плавного отклонения рулей применяют "синусно-косинусный механизм", в состав которого в настоящее время входит трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе, вырабатывающий синус и косинус угла крена. Система управления ЛА может быть построена по двухканальной схеме (с двумя парами рулей), либо по одноканальной — с одной парой рулей.

В двухканальной системе управления к первой паре рулей прикладывается команда управления

$$K_I = \delta_\vartheta \cos\gamma + \delta_\psi \sin\gamma, \tag{1}$$

ко второй паре — команда управления

$$K_{II} = -\delta_\vartheta \sin\gamma + \delta_\psi \cos\gamma, \tag{2}$$

где δ_ψ, δ_ϑ — команды управления по рысканию и тангажу соответственно; γ — угол крена.

В одноканальной схеме на единственную пару рулей подается команда вида

$$K_I = \delta_\vartheta \cos\gamma + \delta_\psi \sin\gamma. \tag{3}$$

Преимуществом одноканальной схемы является уменьшение числа органов управления по сравнению с двухканальной схемой. К недостаткам одноканальной системы следует отнести появление в управляющих моментах составляющих, меняющихся на удвоенной частоте вращения ЛА по крену. Действительно, если пересчитать команду управления (3) на горизонтальную ось, то управляющий момент вокруг этой оси примет вид

$$\begin{aligned} M_\vartheta &= \delta_\vartheta \cos^2\gamma + \delta_\psi \sin\gamma\cos\gamma = \\ &= 0{,}5\delta_\vartheta + 0{,}5\cos2\gamma + 0{,}5\delta_\psi \sin2\gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

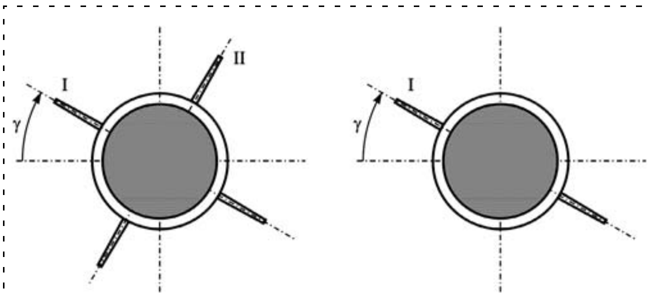


Рис. 1. Двухканальная и одноканальная системы управления вращающимся по крену ЛА

Аналогично определяется управляющий момент вокруг вертикальной оси:

$$M_\psi = 0{,}5\delta_\psi - 0{,}5\delta_\psi \sin 2\gamma + 0{,}5\delta_\vartheta \sin 2\gamma. \qquad (5)$$

На тяжелых ЛА гармоники на удвоенной частоте вращения ослабляются инерционностью самого ЛА [1].

В результате изложенного можно заключить, что независимо от числа каналов управления вращающимся ЛА необходимо на борту иметь информацию о синусе и косинусе угла крена. Именно по этой причине система ориентации вращающегося по крену ЛА должна вырабатывать четыре параметра ориентации: традиционные углы рыскания ψ и тангажа ϑ, а также тригонометрические функции синуса и косинуса угла крена.

Системы координат, векторы угловой скорости

Обозначим символом i инерциальную систему координат $O^iX^iY^iZ^i$, центр O^i которой поместим в центр Земли, оси O^iX^i и O^iY^i расположим в плоскости экватора, а ось O^iZ^i направим к северному полюсу. Пусть g — географическая система координат $OX^gY^gZ^g$, центр которой поместим в центре масс ЛА, ось OX^g направим к северному полюсу, ось OY^g по вертикали вверх, а OZ^g — на восток. С ЛА свяжем систему координат $OX^bY^bZ^b$, которую обозначим символом b (от английского "*body*") (рис. 2). Положение связанной с ЛА системы координат по отношению к географической системе координат зададим последовательностью разворотов на углы рыскания ψ, тангажа ϑ и крена γ. На рис. 2 введена также система осей Резаля (*Resal*) $OX^rY^rZ^r$ (r), которая вращается с угловыми скоростями $\dot\psi$ и $\dot\vartheta$, но не участвует во вращении с угловой скоростью крена $\dot\gamma$.

Здесь и далее для обозначения векторов используется многоиндексная форма записи, получившая широкое распространение в англоязычной литературе [2], которая имеет высокую объективность при записи формул и не дает повода для двусмысленной трактовки. Так, например, вектор угловой

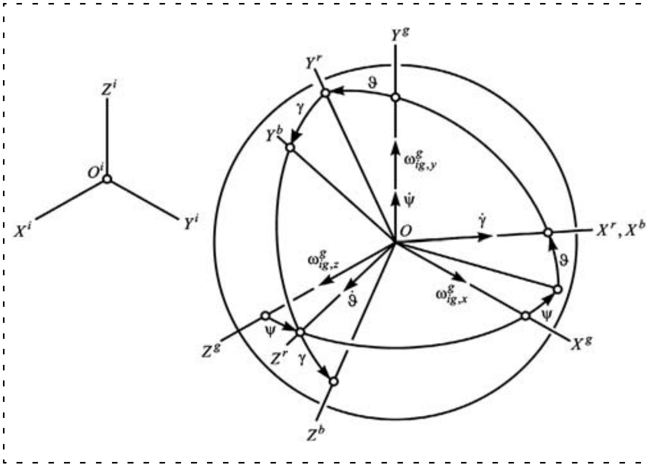


Рис. 2. Системы координат

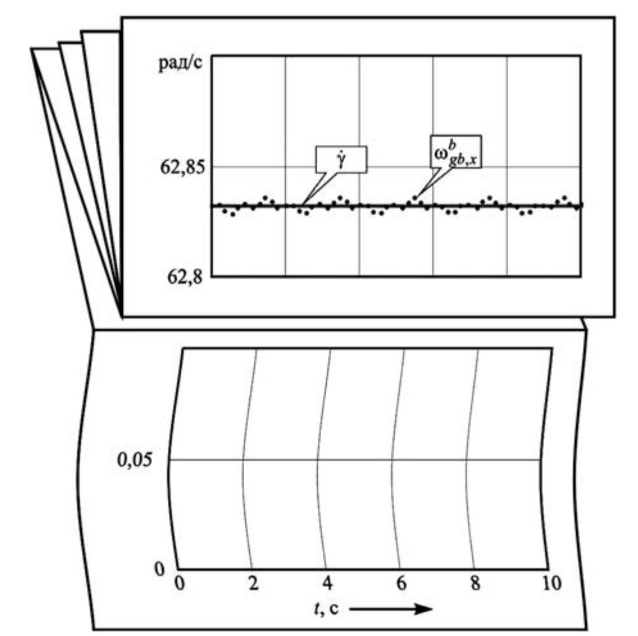


Рис. 3. Сравнение величин $\dot\gamma$ и $\omega^b_{gb,x}$

скорости ЛА относительно географической системы координат может быть представлен следующим образом:

$$\omega^b_{gb} = \omega^b_{gr} + \omega^b_{rb}, \qquad (6)$$

где $\omega^b_{gr} = \begin{Vmatrix} \dot\psi \sin\vartheta \\ \dot\psi \cos\vartheta \cos\gamma + \dot\vartheta \sin\gamma \\ -\dot\psi \cos\vartheta \sin\gamma + \dot\vartheta \cos\gamma \end{Vmatrix}$, $\omega^b_{rb} = \begin{Vmatrix} \dot\gamma \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ — векторы угловой скорости вращения системы координат Резаля r относительно географической системы координат g и связанной системы координат b относительно осей Резаля соответственно. Оба введенных вектора выражены в проекциях на оси связанной системы координат (верхний индекс b).

Для быстровращающихся по крену ЛА обычно величина $\dot\psi \sin\vartheta$ гораздо меньше угловой скорости $\dot\gamma$, поэтому с достаточно высокой степенью точности можно считать, что

$$\omega^b_{gb,x} \approx \omega^b_{rb,x} = \dot\gamma. \qquad (7)$$

Например, если $\dot\gamma = 2\pi \cdot 10$ рад/с, а по углам рыскания и тангажа ЛА совершает колебания с амплитудами 1 и 2°, частотами 1 и 0,5 Гц соответственно, то величина $\dot\psi \sin\vartheta$ составляет не более $7 \cdot 10^{-3}$ % от угловой скорости $\dot\gamma$ (рис. 3).

Реализация алгоритмов ориентации вращающегося по крену ЛА

Решение задачи ориентации вращающегося по крену ЛА связано с численным интегрированием кинематического уравнения относительно искомых параметров ориентации. От точности вычисления параметров ориентации зависит точность управления и стабилизации ЛА на траектории. В работе [2] широко развиваются алгоритмы ориентации, основанные на векторе конечного поворота, однако соответствующие дифференциальные уравнения существенно нелинейны и полученные в результате их решения компоненты вектора конечного поворота используются как промежуточные параметры для вычисления параметров Родрига—Гамильтона. В связи с этим для описания углового положения ЛА в работе отдается предпочтение параметрам Родрига—Гамильтона и кватернионам [3, 4].

Пусть $\mathbf{Q}_i^b$ — кватернион ориентации, характеризующий переход от инерциальной системы координат i к связанной системе координат b, а $\mathbf{Q}_g^b$ — соответственно кватернион, характеризующий переход от географической системы координат g к системе b. Информация об углах рыскания, тангажа и крена содержится в кватернионе $\mathbf{Q}_g^b$. С помощью инерциального измерительного модуля (ИИМ), расположенного на борту ЛА, обновляется информация о проекциях вектора абсолютной угловой скорости системы координат b по отношению к системе i:

$$\omega_{ib}^b = \|\omega_{ib,x}^b \ \ \omega_{ib,y}^b \ \ \omega_{ib,z}^b\|.$$

Так как рассматриваемый класс ЛА имеет небольшое время полета, то можно пренебречь вектором переносной угловой скорости ω_{ig}^b и определять параметры ориентации по отношению к инерциальной системе координат i, т. е. полагать, что

$$\omega_{ib}^b \approx \omega_{gb}^b. \tag{8}$$

В матричной форме записи кинематическое уравнение для кватерниона $\mathbf{Q}_i^b$ имеет вид

$$2\dot{\mathbf{Q}}_i^b = \mathbf{M}(\omega_{ib}^b)\mathbf{Q}_i^b, \tag{9}$$

где $\mathbf{Q}_i^b = \|Q_{i0}^b \ \ Q_{i1}^b \ \ Q_{i2}^b \ \ Q_{i3}^b\|^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{M}(\omega_{ib}^b) = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{ib,x}^b & -\omega_{ib,y}^b & -\omega_{ib,z}^b \\ \omega_{ib,x}^b & 0 & \omega_{ib,z}^b & -\omega_{ib,y}^b \\ \omega_{ib,y}^b & -\omega_{ib,z}^b & 0 & \omega_{ib,x}^b \\ \omega_{ib,z}^b & \omega_{ib,y}^b & -\omega_{ib,x}^b & 0 \end{Vmatrix}$ — кватернионная матрица, составленная из проекций вектора угловой скорости ω_{ib}^b.

Рассмотрим способ интегрирования матричного уравнения (9). Подобно тому, как решается скалярное дифференциальное уравнение первого порядка, решение матричного уравнения (9) на периоде дискретизации T_0 можно представить в виде

$$\mathbf{Q}_i^b(k+1) = \mathbf{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}(k)}\mathbf{Q}_i^b(k), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\theta}(k) = \int\limits_{kT_0}^{(k+1)T_0} \mathbf{M}(\omega_{ib}^b(t))dt = \begin{Vmatrix} 0 & -\theta_x(k) & -\theta_y(k) & -\theta_z(k) \\ \theta_x(k) & 0 & \theta_z(k) & -\theta_y(k) \\ \theta_y(k) & -\theta_z(k) & 0 & \theta_x(k) \\ \theta_z(k) & \theta_y(k) & -\theta_x(k) & 0 \end{Vmatrix}$, $k = 0, 1, ...,$ $\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}(k)}$ — матричный экспоненциал, представляемый в виде ряда:

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}(k)} = \mathbf{E}_{4\times4} + \frac{\boldsymbol{\theta}(k)}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\boldsymbol{\theta}^2(k)}{4} + ... + \frac{1}{n!}\frac{\boldsymbol{\theta}^n(k)}{2^n} + ... \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{E}_{4\times4}$ — единичная матрица размерности 4×4.

Если принять, что за время, равное периоду дискретизации T_0, угловая скорость $\omega_{ib}^b(k)$ изменяется незначительно, то имеет место приближенное равенство

$$\boldsymbol{\theta}(k) \approx T_0\mathbf{M}(\omega_{ib}^b(k)), \tag{12}$$

и ряд (11) принимает вид

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}(k)} = \mathbf{E}_{4\times4} + \frac{T_0\mathbf{M}(\omega_{ib}^b(k))}{2} + \frac{1}{2!}\frac{T_0^2\mathbf{M}^2(\omega_{ib}^b(k))}{4} + ... \tag{13}$$

Тогда алгоритм (10) можно представить в виде

$$\mathbf{Q}_i^b(k+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{T_0\mathbf{M}(\omega_{ib}^b(k))}{2}\right]^n\mathbf{Q}_i^b(k). \tag{14}$$

Понятно, что при реализации алгоритма (14) невозможно привлекать бесчисленное множество членов суммы. В связи с этим следует "усекать" ряд (14) и соответственно уменьшать период дискретизации T_0, либо увеличивать период дискретизации, но при этом удерживать значительное число членов. Для ответа на вопрос о рациональном выборе числа членов в степенном ряде (14) воспользуемся формулой для остаточного члена разложения в ряд Тейлора показательной функции [5]

$$\mathbf{R}_n = \frac{(0,5\,T_0\mathbf{M}(\omega_{ib}^b))^{n+1}}{(n+1)!}\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\chi T_0\mathbf{M}(\omega_{ib}^b)}, \tag{15}$$

где n — номер последнего члена в разложении (14); χ — действительное число, лежащее в интервале $0 < \chi < 1$. Следует отметить, что остаточный член $\mathbf{R}_n$ в (15) представляет собой также матрицу раз-

Оценка остаточных членов алгоритма ориентации

r_n	$\omega^b_{ib,\,m}$, рад/с			
	1	30	60	125
r_1	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	0,01	$5{,}2 \cdot 10^{-2}$	0,267
r_2	$2{,}1 \cdot 10^{-8}$	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$	$5{,}2 \cdot 10^{-3}$	0,056
r_3	$2{,}6 \cdot 10^{-11}$	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$	$3{,}9 \cdot 10^{-4}$	$8{,}7 \cdot 10^{-3}$
r_4	$2{,}6 \cdot 10^{-14}$	$6{,}8 \cdot 10^{-7}$	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$

мерности 4 × 4. Не конкретизируя, о какой компоненте матрицы $\mathbf{R}_n$ идет речь, оценим величину остаточного члена для различной угловой скорости ЛА и шага дискретизации на основе скалярной зависимости

$$r_n = \frac{(0{,}5\,T_0\omega^b_{ib,\,m})^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathbf{e}^{\frac{1}{4}\chi T_0 \omega^b_{ib,\,m}}, \qquad (16)$$

где $m = x, y, z$ и положено $\chi = 1/2$.

Результаты расчетов остаточных членов для различного порядка алгоритма и угловой скорости ЛА приведены в таблице.

Из результатов расчета следует, что для относительно небольшой угловой скорости ЛА (единицы рад/с) в алгоритме ориентации достаточно удержать только 2...3 члена. При значительных угловых скоростях необходимо привлекать 4...5 членов и более. Как известно, угловое движение рассматриваемого класса ЛА характеризуется высокой скоростью вращения по крену и достаточно медленными колебаниями по углам рыскания и тангажа (до 1...2 Гц). В связи с этим целесообразным является расщепление вычислительного процесса, в котором тригонометрические функции синуса и косинуса вычисляются на основе алгоритма высокого порядка, а углы рыскания и тангажа — на основе упрощенного алгоритма.

Расщепленная схема алгоритма ориентации

Расщепленная схема системы ориентации вращающегося по крену ЛА предполагает независимое обновление информации о синусе и косинусе угла крена на основе алгоритма высокого порядка ввиду значительной угловой скорости ЛА вокруг продольной оси (рис. 4).

В этом случае привлекается угловая скорость крена $\omega^b_{ib,\,x}$ (с учетом допущений (7), (8)) независимо от других проекций, и обновляется кватернион перехода от системы осей Резаля к связанной системе координат в соответствии со следующим соотношением:

$$\mathbf{Q}^b_r(k+1) = \sum_{n=0}^{N_1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathbf{M}(\omega^b_{ib,\,x}(k))\,T_0}{2}\right)^n \mathbf{Q}^b_r(k), \qquad (17)$$

где N_1 — номер последнего члена, удержанного в сумме (17). На основании кватерниона $\mathbf{Q}^b_r$ обновляется информация о синусе и косинусе угла крена

$$\begin{aligned} &\sin(\gamma(k+1)) = 2\mathbf{Q}^b_{r0}(k+1)\,\mathbf{Q}^b_{r1}(k+1); \\ &\cos(\gamma(k+1)) = [\mathbf{Q}^b_{r0}(k+1)]^2 - [\mathbf{Q}^b_{r1}(k+1)]^2. \end{aligned} \qquad (18)$$

Далее пересчитываются составляющие вектора угловой скорости осей Резаля $\omega^b_{ib,\,y}$ и $\omega^b_{ib,\,z}$ из связанной системы координат b в систему r:

$$\begin{aligned} \omega^r_{ib,\,y} &= \omega^b_{ib,\,y}\cos\gamma - \omega^b_{ib,\,z}\sin\gamma; \\ \omega^r_{ib,\,z} &= \omega^b_{ib,\,z}\cos\gamma + \omega^b_{ib,\,y}\sin\gamma. \end{aligned} \qquad (19)$$

После пересчета данных из связанной системы координат в систему координат Резаля составляющие $\omega^r_{ib,\,y}$ и $\omega^r_{ib,\,z}$ имеют медленный характер изменения, а следовательно, для обновления информации об углах рыскания и тангажа можно упростить вычислительный алгоритм. Обновление углов рыскания и тангажа осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{Q}^r_i(k+1) = \sum_{n=0}^{N_2} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathbf{M}(\omega^r_{ib}(k))\,T_0}{2}\right)^n \mathbf{Q}^r_i(k), \qquad (20)$$

где $\mathbf{M}(\omega^r_{ib}(k)) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\omega^r_{ib,\,y}(k) & -\omega^r_{ib,\,z}(k) \\ 0 & 0 & -\omega^r_{ib,\,z}(k) & \omega^r_{ib,\,y}(k) \\ \omega^r_{ib,\,y}(k) & \omega^r_{ib,\,z}(k) & 0 & -\omega^r_{ib,\,x}(k) \\ \omega^r_{ib,\,z}(k) & -\omega^r_{ib,\,y}(k) & \omega^r_{ib,\,x}(k) & 0 \end{Vmatrix}$

— кватернионная матрица, составленная из проекций вектора угловой скорости системы координат r; N_2 — порядок вычислительного алгоритма.

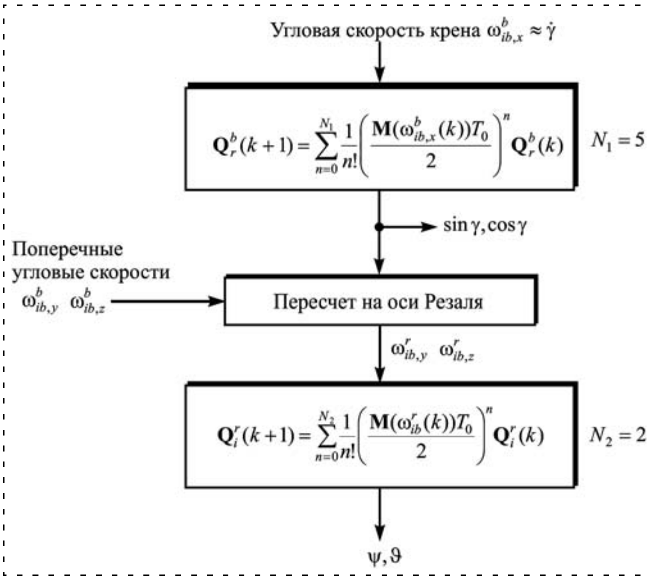


Рис. 4. Блок-схема алгоритма

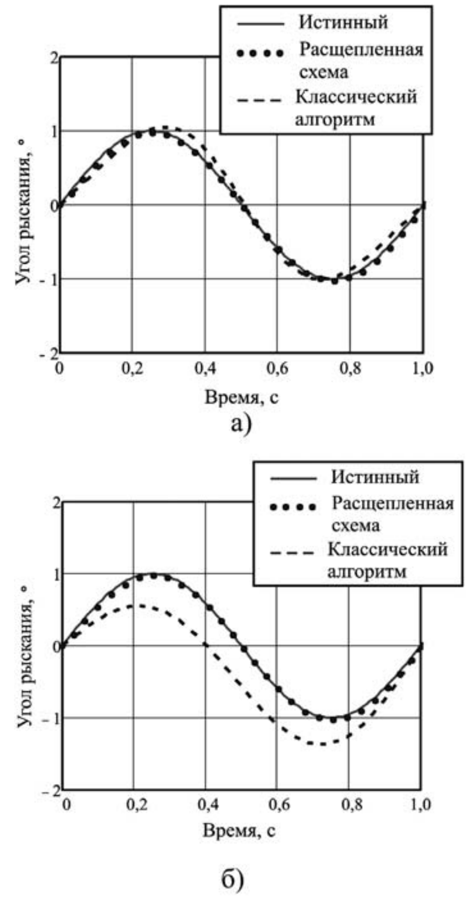


Рис. 5. Результаты моделирования алгоритмов ориентации:
а — $\omega^b_{ib,x} = 2\pi \cdot 3$ рад/с; *б* — $\omega^b_{ib,x} = 2\pi \cdot 10$ рад/с

Обновление углов рыскания и тангажа осуществляется на основании следующих зависимостей:

$$\psi(k+1) = \mathrm{arctg}\left[\frac{2Q^r_{i1}(k+1)Q^r_{i3}(k+1) - 2Q^r_{i0}(k+1)Q^r_{i2}(k+1)}{2[Q^r_{i1}(k+1)]^2 + 2[Q^r_{i0}(k+1)]^2 - 1}\right]; \quad (21)$$

$$\vartheta(k+1) = \arcsin[2Q^r_{i1}(k+1)Q^r_{i2}(k+1) + 2Q^r_{i0}(k+1)Q^r_{i3}(k+1)]. \quad (22)$$

Для анализа алгоритмов ориентации вращающегося по крену ЛА проводили моделирование, при котором реализовывался классический алгоритм ориентации и расщепленная схема, описанная выше. Период дискретизации T_0 принимали равным 0,01 с, углы рыскания и тангажа задавали как гармонические функции времени с амплитудами 1 и 2°, соответственно, и частотами 1 и 0,5 Гц. На рис. 5 приведены графики зависимости угла рыскания от времени для различной угловой скорости крена. В классическом алгоритме ориентации удерживались до семи членов разложения, а в расщепленной схеме принимали $N_1 = 5$ и $N_2 = 2$.

Как следует из рис. 5, классический алгоритм обладает низкой точностью, причем дальнейшее увеличение привлекаемых членов не приводит к увеличению точности обновления параметров ориентации. Повышение точности классического алгоритма наблюдается только в результате уменьшения периода дискретизации до 0,001 с. В расщепленной схеме алгоритма точность обновления параметров ориентации имеет меньшие амплитудные и фазовые искажения при периоде дискретизации 0,01 с, что делает данный алгоритм ориентации более перспективным для использования в системах управления вращающихся по крену ЛА.

Список литературы

1. **Физические** основы устройства и функционирования стрелково-пушечного артиллерийского оружия. Ч. II. Физические основы устройства и функционирования ракетного оружия: учебник для вузов / Под ред. В. В. Ветрова и В. П. Строгалева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 784 с.
2. **Savage P. G.** Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design P. 1. Attitude Algorithms // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1998. V. 21. N 1, Jan.—Feb. P. 19—28.
3. **Матвеев В. В., Распопов В. Я.** Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем: учеб. пособие. СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2009. 280 с.
4. **Матвеев В. В.** Гироскопы в системах ориентации // Справочник. Приложение к журналу. 2009. № 8. С. 20—24.
5. **Лебедев Р. К.** Стабилизация летательного аппарата бесплатформенной инерциальной системой. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.

ИНФОРМАЦИЯ

14—15 февраля 2013 г. в ОАО «НПЦ «Полюс» состоится

научно-техническая конференция молодых специалистов
«ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И УСТРОЙСТВА»

Основные научные направления работы конференции:

- Электронные системы и устройства
- Электромеханика
- Технология производства приборов и устройств
- Автоматизация и информационные технологии

Подробная информация на сайте: **http://polus.tomsknet.ru/?id=71**

УДК 629.7.05

В. Я. Распопов, д-р техн. наук, проф., зав. каф.,
tgupu@yandex.ru,
М. Н. Машнин, инженер 2 кат.,
mmashnin@yandex.ru,
А. В. Ладонкин, аспирант,
tlsandos@rambler.ru,
А. П. Шведов, канд. техн. наук, доц.,
Тульский государственный университет

Метод коррекции бесплатформенной системы ориентации малоразмерного беспилотного летательного аппарата

Рассмотрен метод компенсации влияния линейных ускорений, действующих на бесплатформенную гировертикаль, путем введения блока коррекции. Приведены результаты математического моделирования и экспериментальных исследований функционирования скорректированной бесплатформенной гировертикали.

Ключевые слова: *бесплатформенная система ориентации, математическая модель, линеаризация, блок коррекции*

Введение

В бесплатформенных системах ориентации (БСО) чувствительными элементами являются гироскопические датчики. В качестве гироскопических датчиков в БСО беспилотного летательного аппарата (БПЛА) применяются микромеханические гироскопы (ММГ), которые являются датчиками абсолютных угловых скоростей вращения и измеряют проекции вектора абсолютной угловой скорости БПЛА ω_x, ω_y, ω_z на оси связанной системы координат.

Классическим алгоритмом вычисления углов ориентации является пересчет показаний датчиков угловой скорости (ДУС) (проекций ω_x, ω_y, ω_z абсолютной угловой скорости Ω) в угловые скорости $\dot\psi$, $\dot\vartheta$, $\dot\gamma$ с последующим их интегрированием. Недостатком такой системы является накапливаемая во времени погрешность и, как следствие, ограниченное время работы.

Для устранения указанного недостатка в систему необходимо вводить дополнительную информацию, характеризующую угловую ориентацию БПЛА. Источником такой информации могут служить датчики линейного ускорения — микромеханические акселерометры (ММА).

Акселерометры измеряют так называемое кажущееся ускорение, включающее проекции на оси связанной системы координат ускорения свободного падения g и вектора ускорений, обусловленных движением БПЛА. Выделение первой составляющей кажущегося ускорения, изменение проекций которой вычисляется в соответствии с выражением

$$\frac{dg}{dt} = g \times \Omega,$$

может быть реализовано с помощью фильтра Калмана (ФК).

В свою очередь, составляющая кажущегося ускорения, обусловленная собственным движением БПЛА, будет подавляться ввиду малого значения коэффициента передачи ФК. Таким образом, можно устранить накапливающуюся ошибку в углах тангажа и крена.

Структурная схема бесплатформенной гировертикали (БГ), реализующая данный принцип, представлена на рис. 1 [1].

БГ можно условно описать физическим маятником с постоянной времени T. Для обеспечения более качественной работы системы при наличии ускорений БПЛА необходимо обеспечивать как можно большую постоянную времени.

Максимальное значение постоянной времени в данной системе определяется погрешностями ДУС, а также минимальным значением шага дискретизации системы, значение которого ограничивается характеристиками вычислительного устройства и аналогово-цифровых преобразователей измерительной цепи БГ. При современном развитии микро-

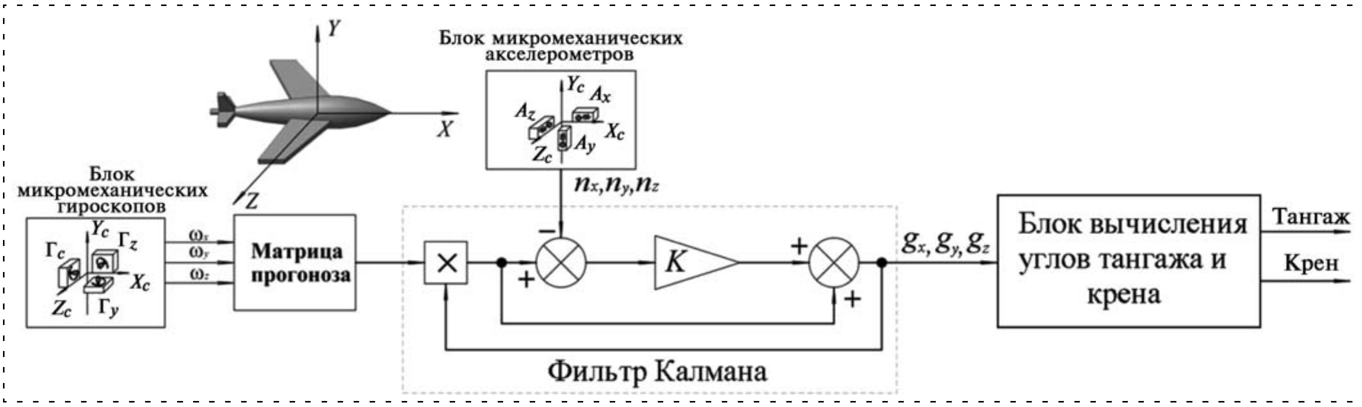


Рис. 1. Структурная схема БГ

Рис. 2. Общий вид бесплатформенной гировертикали (со снятой крышкой) на инерциальных чувствительных элементах

системной и микропроцессорной техники удается достичь значения $T \sim 10$ с.

Чтобы устранить влияние ускорений БПЛА на БГ при разгонах, торможениях и на виражах контур коррекции по акселерометрам может быть разомкнут. Алгоритмически это может быть реализовано путем установки коэффициента передачи K равным нулю. При этом моменты виража и разгона легко идентифицировать по сигналам ММГ и ММА.

Данные алгоритмы реализованы в БГ, разработанной на кафедре "Приборы управления" ТулГУ, общий вид которой показан на рис. 2. Указанная БГ обладает следующими техническими характеристиками:

точность измерения углов крена и тангажа, °	0,5
разрешающая способность, °	до 0,1
диапазон линейных ускорений, g	до 6
диапазон угловых скоростей, °/с	до 300
частота обработки данных, Гц	100
рабочий диапазон температур, °С	−5 ...+60
диапазон напряжения питания, В	7...10
габаритные размеры, мм	50 × 50 × 20
масса, г	50

Математическая модель БГ. Контур коррекции

Основные погрешности данной системы возникают в результате действия постоянных или медленноменяющихся ускорений. В настоящий момент данная проблема решается путем отключения акселерометрической коррекции на высокоманевренных участках полета или путем комплексирования БГ с другими системами ориентации (магнитометрической, видеосистемой и др.).

Отрицательной чертой первого подхода является накопление большой погрешности под влиянием различных ошибок ДУС (шум, нестабильность нуля). Недостаток второго подхода заключается в значительном удорожании и усложнении системы, а также в увеличении массогабаритных параметров системы.

Таким образом, актуальной задачей является разработка способа компенсации влияния постоянных или медленно меняющихся ускорений на точность определения параметров ориентации.

Как видно из структурной схемы БГ (см. рис. 1), основные операции, связанные с обработкой поступающих с датчиков данных и вычислением углов ориентации, осуществляются микроконтроллером. Таким образом, задача сводится к получению зависимостей, описывающих влияние сигналов блока акселерометров (наблюдаемых ускорений n_x, n_y, n_z) на спрогнозированные дискретным фильтром Винера проекции вектора свободного падения земли (g_x, g_y, g_z).

При решении поставленной задачи в структуре контура САУ МБПЛА наиболее удобно использовать аналоговую, линеаризованную модель БГ. Единственным цифровым элементом указанной системы является блок, реализующий фильтр Винера, так как он основан на рекуррентной зависимости:

$$X_{i+1} = \tau X_i \times \Omega_i + X_i + K(A_{i+1} - \tau X_i \times \Omega_i - X_i), \quad (1)$$

где $i \in N$ — шаг работы фильтра Винера; $\times$ — здесь и далее векторное умножение векторов;

$X_i = [\hat{g}_{x,i}\ \hat{g}_{y,i}\ \hat{g}_{z,i}]^{\mathrm{T}}$ — вектор оцененных значений вектора ускорения свободного падения Земли $g = [g_x, g_y, g_z]^{\mathrm{T}}$;

g_x, g_y, g_z — проекции вектора g на оси связанной системы координат по ГОСТ 20058—80;

τ — шаг дискретизации курсовертикали;

$\Omega_i = [\omega_{x,i}, \omega_{y,i}, \omega_{z,i}]^{\mathrm{T}}$ — показания ДУС на i-м шаге работы фильтра Винера;

ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора угловой скорости вращения МБПЛА на оси связанной системы координат по ГОСТ 20058—80;

$K = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ — коэффициент передачи фильтра Винера; $k = \mathrm{const}$;

$A_i = [n_{x,i}, n_{y,i}, n_{z,i}]^{\mathrm{T}}$ — показания акселерометров на i-м шаге работы фильтра Винера;

n_x, n_y, n_z — проекции вектора кажущегося ускорения МБПЛА на оси связанной системы координат по ГОСТ 20058—80.

Для того чтобы получить аналоговую модель системы, перепишем выражение (1) в виде

$$\frac{X_{i+1} - X_i}{\tau} + \frac{K}{\tau} X_i = (X_i \times \Omega_i)(1 - K) + \frac{K}{\tau} A_{i+1}.$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$, получим дифференциальное уравнение аналоговой модели БГ

$$\frac{dX}{d\tau} + \frac{K}{\tau} X_i = (X_i \times \Omega_i)(1 - K) + \frac{K}{\tau} A. \quad (2)$$

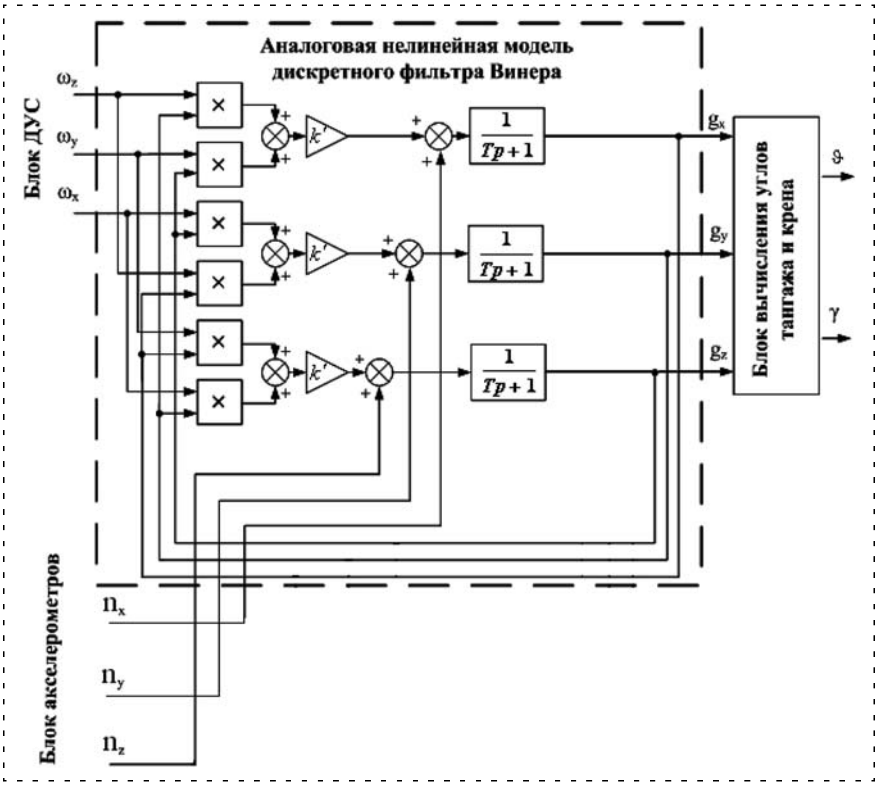


Рис. 3. Структурная схема аналоговой нелинейной модели БГ: $T = \frac{\tau}{K}$; $k' = \frac{\tau}{K}(1 - K)$

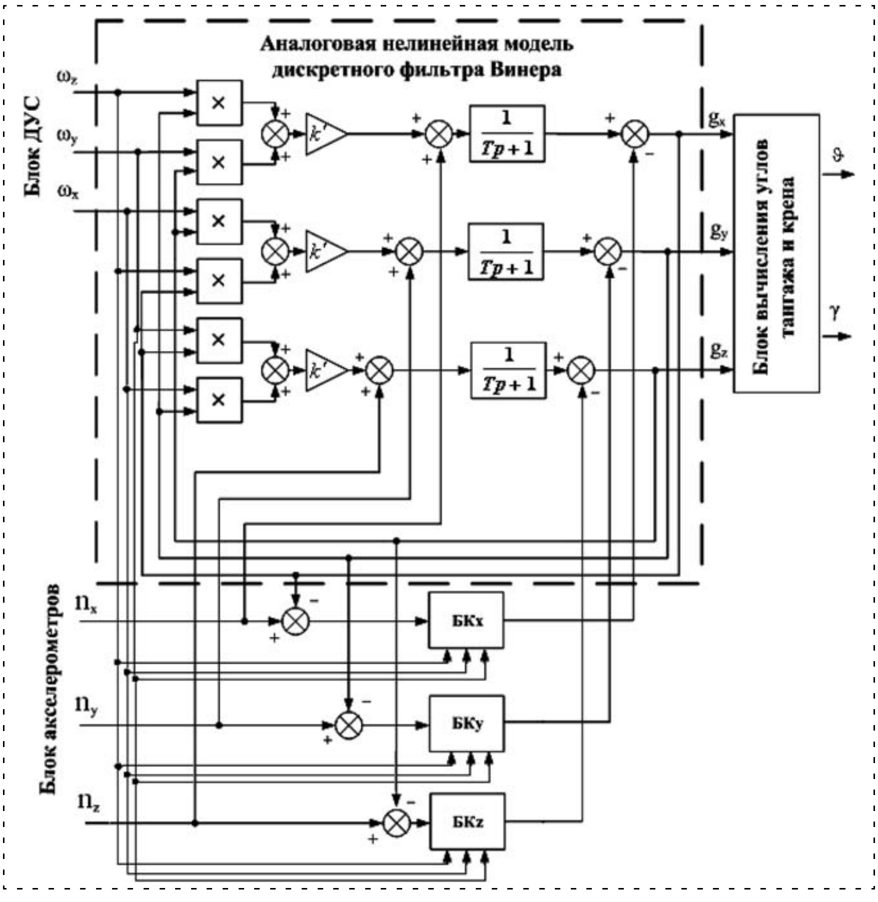


Рис. 4. Структурная схема БГ с БК, учитывающим сигналы ДУС

Используя уравнение (2), легко получить структурную схему аналоговой модели БГ (рис. 3).

Блок вычисления углов вычисляет углы тангажа и крена по известным зависимостям:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{g_x}{\sqrt{g_y^2 + g_z^2}}\right);$$

$$\gamma = -\operatorname{arctg}\left(\frac{g_z}{g_y}\right),$$

где θ, γ — углы тангажа и крена; g_x, g_y, g_z — проекции вектора g на оси связанной системы координат.

Линеаризацию данной модели проведем, выделив ряд эталонных режимов полета. Для каждого режима полета существуют максимальные значения углов тангажа и крена, которые МБПЛА не должен превышать. Данные ограничения зависят как от аэродинамических свойств планера, так и от требований технического задания. Для МБПЛА TwinStarII значения углов приведены в таблице.

Для данных режимов полета некоторые угловые скорости и угловые ускорения в связанной системе координат меняются несущественно, поэтому их влияние на g_x, g_y, g_z может быть учтено в контуре управления как постоянные множители для каждого режима полета.

Таким образом, представляется возможным заменить нелинейную модель БГ ее эквивалентной линейной моделью для каждого режима полета, а влияние сигналов ММА на проекции вектора g опи-

Режимы полета МБПЛА TwinStarII

Режим полета	Значение изменения входного сигнала, °	
	Тангаж ϑ	Крен γ
Набор высоты	[0...20]	[±5]
Прямолинейный полет	[−2...10]	[±5]
Плоский разворот	[−2...10]	[±5]
Координированный разворот	[−5...10]	[±25]
Посадка	[−15...2]	[±5]

сать следующими передаточными функциями $W_x(p)$, $W_y(p)$, $W_z(p)$ по каждому каналу ММА:

$$W_x(p) = $$
$$= \frac{A_0p^2 + B_0(\omega_x)p + C_0(\omega_x)}{A_1p^3 + B_1(\omega_x)p^2 + C_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z)p + D_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z)}; \quad (3)$$

$$W_y(p) = $$
$$= \frac{A_2p^2 + B_2(\omega_y)p + C_2(\omega_y)}{A_3p^3 + B_3(\omega_y)p^2 + C_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z)p + D_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z)}; \quad (4)$$

$$W_z(p) = $$
$$= \frac{A_4p^2 + B_4(\omega_z)p + C_4(\omega_z)}{A_5p^3 + B_5(\omega_z)p^2 + C_5(\omega_x, \omega_y, \omega_z)p + D_5(\omega_x, \omega_y, \omega_z)}, \quad (5)$$

где $W_x(p)$, $W_y(p)$, $W_z(p)$ — передаточные функции по каналам проекций g_x, g_y, g_z соответственно.

Коэффициенты передаточных функций (3), (4), (5) описаны в патенте на полезную модель [2].

Таким образом, подставляя в зависимости (3)—(5) проекции угловых скоростей ω_x, ω_y, ω_z, соответствующие необходимому режиму полета, можно получить линейную корректирующую функцию для этого режима.

Рассмотренные режимы полета МБПЛА являются частными случаями движения МБПЛА. В общем виде, используя передаточные функции $W_x(p)$, $W_y(p)$, $W_z(p)$ и учитывая значения угловых скоростей ω_x, ω_y, ω_z в виде соответствующих сигналов с блока ДУС (рис. 4), можно использовать БГ на всех режимах полета (не выделяя типовые режимы), а также для полета при возникновении сильных воздушных возмущений.

Сам же БК представляется тремя передаточными функциями $W_x(p)$, $W_y(p)$, $W_z(p)$ с коэффициентами, пересчитываемыми в каждую единицу времени на основании сигналов ДУС.

Таким образом, вычислительная нагрузка на систему возрастет незначительно, а диапазон использования расширяется в разы.

Моделирование и экспериментальное исследование

Для проверки предложенного способа коррекции было проведено математическое моделирование системы "автопилот — МБПЛА" для полета по траектории "коробочка". Результаты моделирования системы без коррекции и с коррекцией приведены на рис. 5—8.

Из рис. 5—6 видно, что система с коррекцией постоянных или медленно меняющихся ускорений отрабатывает требуемое значение с достаточной точностью: по каналу крена — 1,2° (до коррекции ≈ 27,8°); по каналу тангажа — 2° (до коррекции ≈ 79,7°).

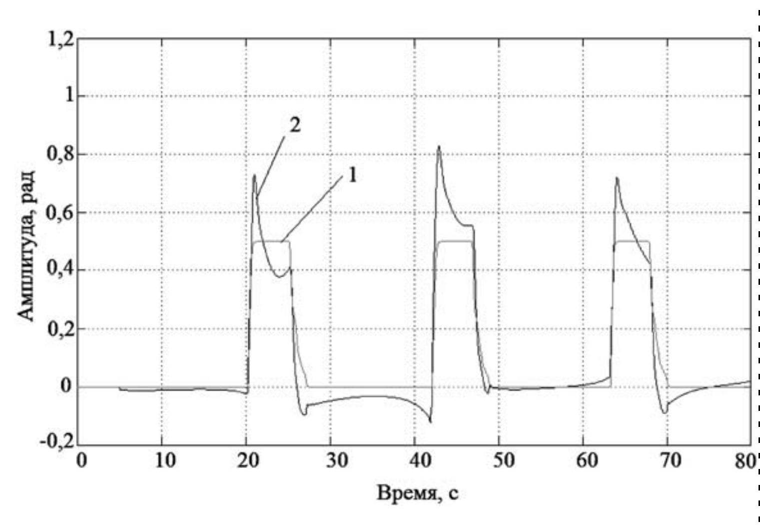


Рис. 5. График угла крена для системы без коррекции:
1 — угол МБПЛА; *2* — показания модели БГ

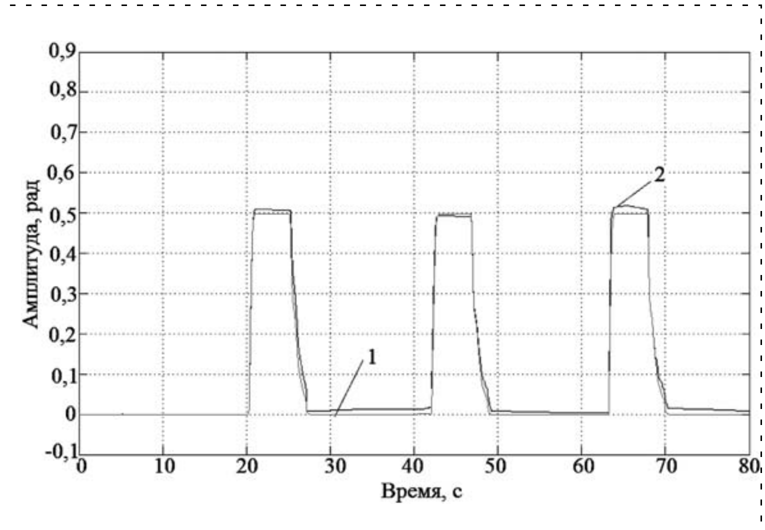


Рис. 6. График угла крена для системы с коррекцией:
1 — угол МБПЛА; *2* — показания модели БГ

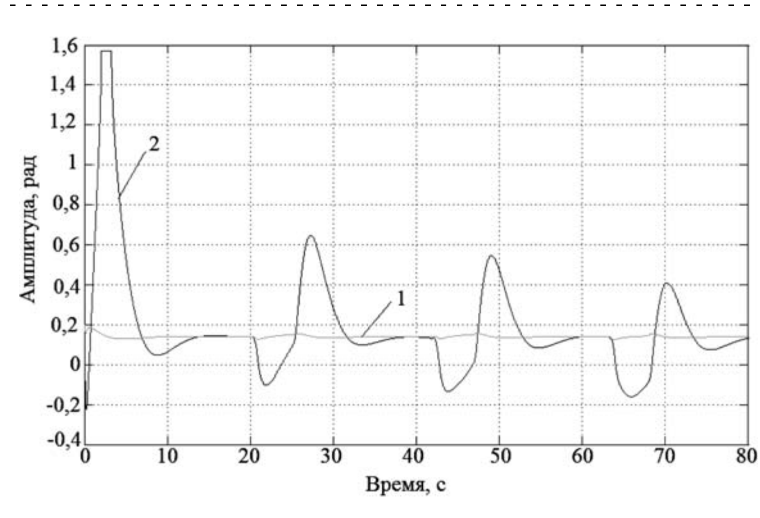


Рис. 7. График угла тангажа для системы без коррекции:
1 — угол МБПЛА; *2* — показания модели БГ

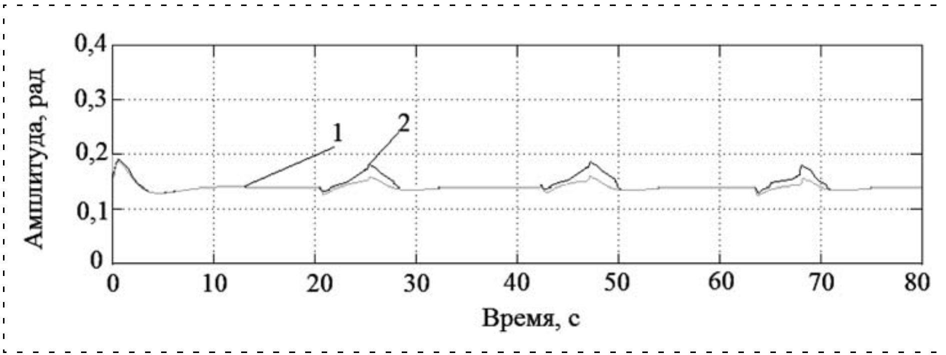


Рис. 8. График угла тангажа для системы с коррекцией:
1 — угол МБПЛА; *2* — показания модели БГ

Экспериментальную проверку способа коррекции осуществляли следующим образом: на багажник автомобиля строго горизонтально закрепляли БГ. Автомобиль разгоняли до скорости 20 м/с (72 км/ч, по показаниям GPS) по ровной дороге, после чего резко тормозили до полной остановки. Одновременно с этим на жесткий диск ноутбука записывали показания БГ.

Проводили серию из четырех опытов:

1. Установка БГ без коррекции. Ось *OX* БГ направлена по ходу движения автомобиля (влияние ускорения на угол тангажа).
2. Установка БГ без коррекции. Ось *OZ* БГ направлена по ходу движения автомобиля (влияние ускорения на угол крена).
3. Установка БГ с коррекцией. Ось *OX* БГ направлена по ходу движения автомобиля (влияние ускорения на угол тангажа).
4. Установка БГ с коррекцией. Ось *OZ* БГ направлена по ходу движения автомобиля (влияние ускорения на угол крена).

Результаты испытаний приведены на рис. 9—10.

При этом время торможения составляло около 5 с, таким образом, ускорение составило 4 м/с^2.

Исходя из рис. 9—10 можно сделать вывод, что предложенный метод работоспособен. Ошибка до коррекции составила по тангажу 30°, после коррекции — 3°. Ошибка до коррекции составила по крену 20°, после коррекции — около 3°.

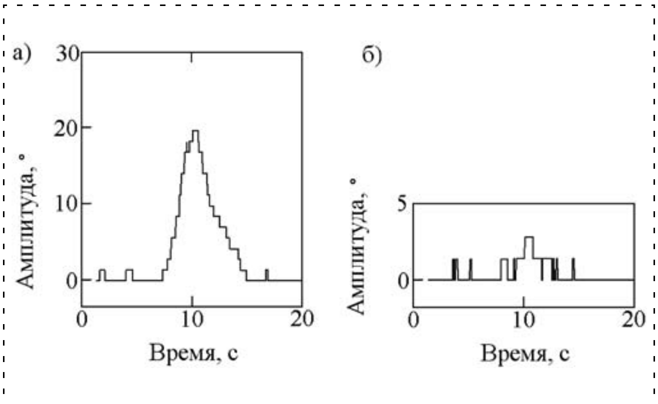


Рис. 9. Выходной сигнал скорректированной (*б*) и нескорректированной (*а*) БГ по каналу крена под действием ускорения 4 м/с^2

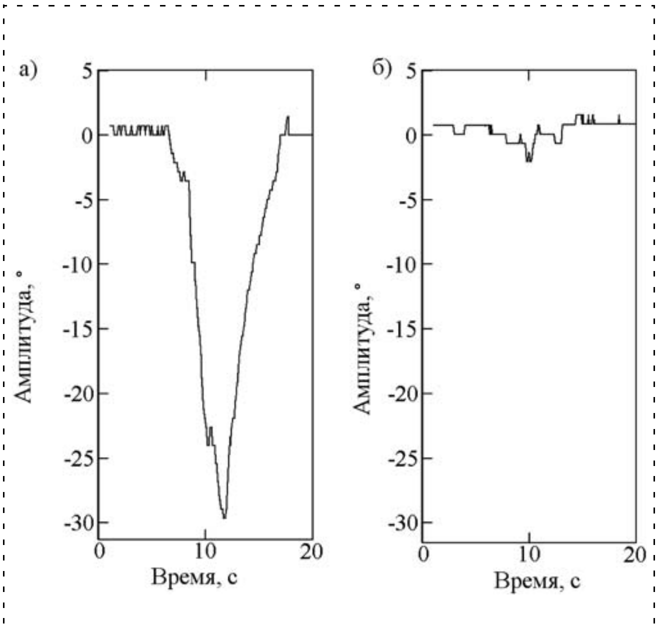


Рис. 10. Выходной сигнал скорректированной (*б*) и нескорректированной (*а*) БГ по каналу тангажа под действием ускорения 4 м/с^2

Заключение

Предложена компенсация влияния постоянных или медленноменяющихся линейных ускорений на БГ путем введения блока коррекции. Проведенное математическое моделирование показало целесообразность и работоспособность предложенного способа. Также при использовании сигналов с ДУС при расчете коэффициентов корректирующих передаточных функций можно использовать БГ, не выделяя типовые (эталонные) режимы полета.

Список литературы

1. **Патент** на полезную модель 96235 РФ. Бесплатформенная инерциальная гировертикаль / А. П. Шведов, Ю. В. Иванов, В. Я. Распопов; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО "Тульский государственный университет", заявл. 04.03.2010, опубл. 20.07.2010.
2. **Заявка** на полезную модель № 2012108716/28(013140) / М. Н. Машнин, А. П. Шведов, Ю. В. Иванов, В. Я. Распопов, заявл. 07.03.2012, принято пол. реш. 02.04.2012.

УДК 629.7.05

В. Я. Распопов, д-р техн. наук., проф., зав. каф.,
tgupu@yandex.ru,
М. Н. Машнин, инженер 2 кат.,
mmashnin@yandex.ru,
А. В. Ладонкин, аспирант,
tlsandos@rambler.ru,
Тульский государственный университет

Управление малоразмерными беспилотными летательными аппаратами в режиме терминальной навигации

Рассмотрены процедуры определения аэродинамических и тяговых характеристик малоразмерных беспилотных летательных аппаратов (МБПЛА) как объекта управления. Рассмотрены алгоритмы системы автоматического управления МБПЛА, функционирующей в режиме терминальной навигации.

Ключевые слова: *системы координат, математическая модель, аэродинамические коэффициенты, тяговые характеристики, алгоритмы терминальной навигации*

Малоразмерные беспилотные летательные аппараты — объект управления

Для решения задач мониторинга широко используются малоразмерные беспилотные летательные аппараты (МБПЛА), в состав полезной нагрузки которых входят только средства мониторинга. Масса полезной нагрузки обычно составляет порядка 15...30 % общей массы МБПЛА и включает целевую нагрузку (видео- и фотоаппаратуру и др.) и функциональную, обеспечивающую управление МБПЛА. Функциональная нагрузка включает двигатель (с запасом топлива или источником электропитания), рулевые приводы (сервоприводы аэродинамических органов управления) и авионику [1, 2].

При исследовании динамики БПЛА применяют следующие системы координат (СК) (рис. 1) по ГОСТ 20058—80: $OX_gY_gZ_g$ — нормальная СК, $OXYZ$ — связанная СК, $OX_aY_aZ_a$ — скоростная СК.

Общее движение летательного аппарата как твердого тела может быть описано дифференциальными уравнениями в векторной форме:

$$m\left\{\frac{d\mathbf{V}_{\text{ц.м}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{\text{ц.м}}\right\} = \mathbf{R};$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M},$$

где m — масса летательного аппарата, $\mathbf{V}_{\text{ц.м}}$ — вектор скорости центра масс; $\mathbf{R}$ — вектор внешних сил; $\mathbf{M}$ — главный момент внешних сил; $\mathbf{K}$ — момент количества движения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

Создание системы автоматического управления (САУ) и навигации требует прежде всего решения следующих задач:

- получение и исследование аэродинамических характеристик БПЛА;
- получение тяговой характеристики P двигателя как функции скорости набегающего воздушного потока V (скорость БПЛА относительно воздушных масс, воздушная скорость), частоты вращения вала n и геометрии винта.

Получение указанных характеристик в аэродинамической трубе сопряжено с большими финансовыми, временными и административными затратами.

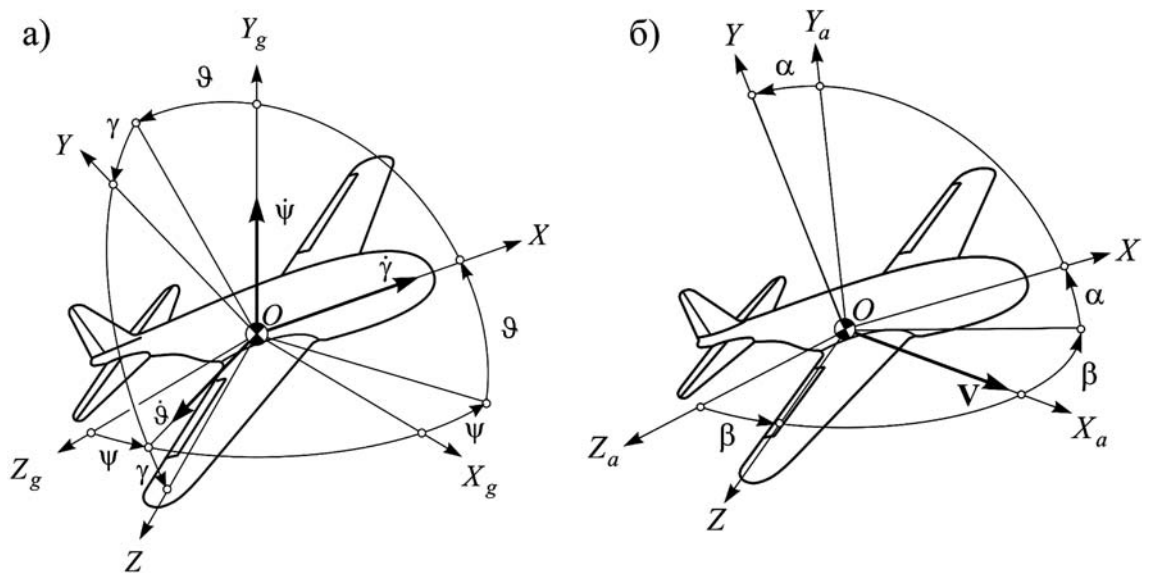


Рис. 1. Системы координат:
а — нормальная и связанная; *б* — связанная и скоростная; ψ, ϑ, γ, α, β — углы курса, тангажа, крена, атаки и скольжения соответственно

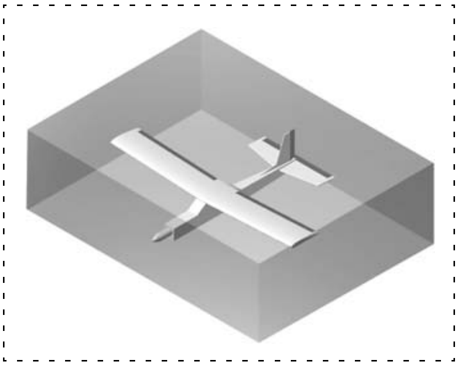


Рис. 2. 3D-модель с областью вычислений

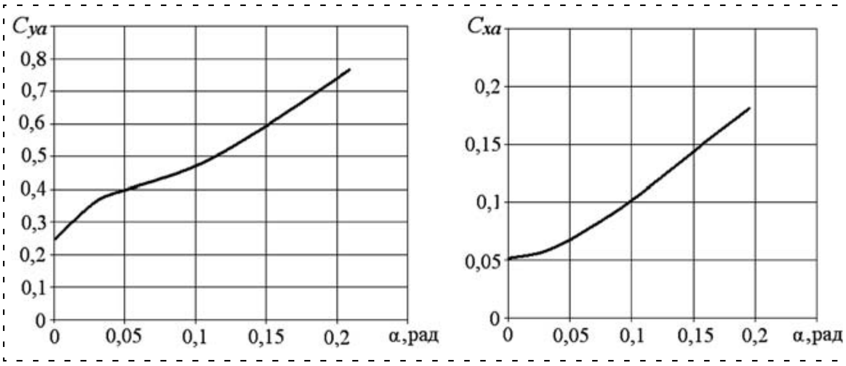


Рис. 3. Зависимости коэффициентов C_{xa} и C_{ya} от угла атаки α

Для избежания указанных затрат могут применяться:

- метод виртуальной продувки для определения аэродинамических характеристик БПЛА с использованием модуля *Floworks* пакета *SolidWorks*;
- программа *PropCalc* 3.0 для определения тяговых характеристик двигателя.

Строительные оси 3D-моделей БПЛА связываются с осями СК области вычислений (рис. 2), для ячеек которой рассчитываются параметры потока, обтекающего модель. Для изменения угла атаки изменяются проекции скорости потока на координатные оси области вычислений.

В качестве примера результатов использования метода виртуальной продувки на рис. 3 приведены зависимости коэффициентов C_{xa} лобового сопротивления $X_a = C_{xa}S\frac{\rho V^2}{2}$ и C_{ya} — подъемной силы $Y_a = C_{ya}S\frac{\rho V^2}{2}$ (ρ —плотность воздуха, V — воздушная скорость, S — площадь крыльев) для БПЛА самолетной схемы с размахом крыла 1,56 м и профилем крыла NACA-0016 [3].

На рис. 4 приведены тяговые характеристики винта с фиксированным шагом APC 7 × 5 для различных скоростей полета, полученные с помощью программы PropCalc 3.0.

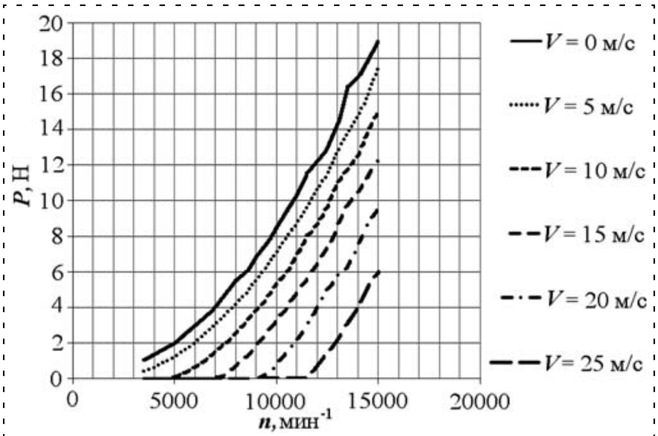


Рис. 4. Тяговые характеристики трехлопастного винта APC 7x5 для различных скоростей набегающего потока:
P — создаваемая сила тяги, n — обороты винта

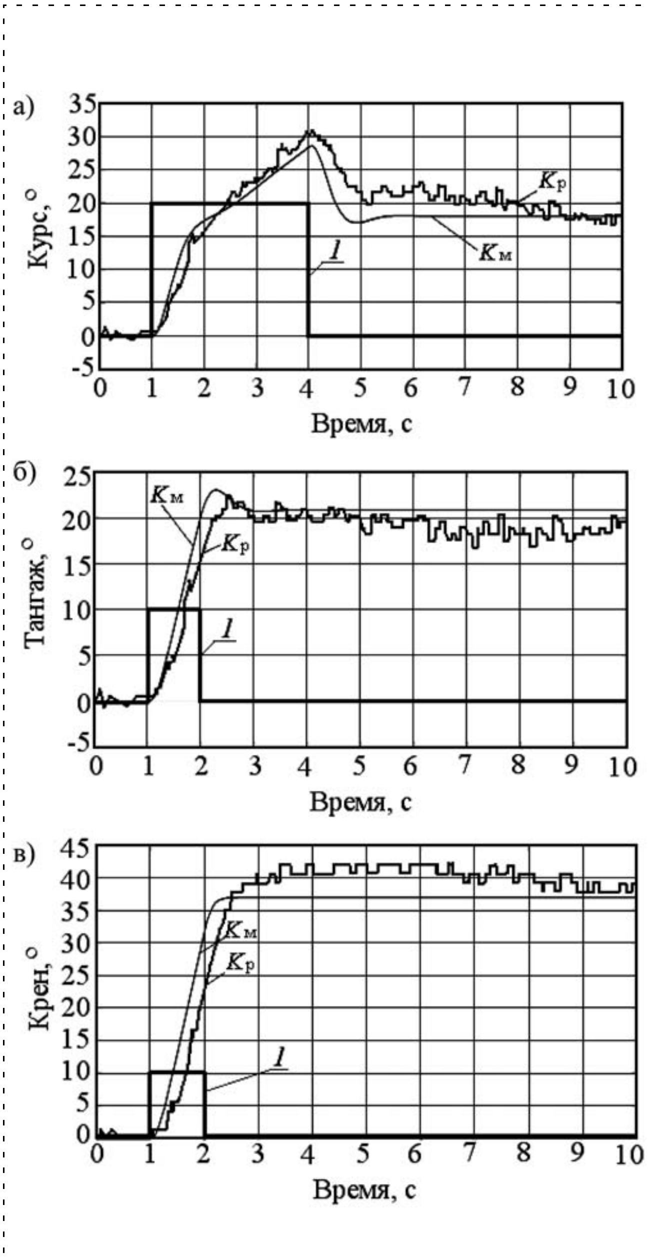


Рис. 5. Переходные процессы математической модели и реальной авиамодели *TwinStarII* по углам курса (*а*), тангажа (*б*) и крена при скорости 18 м/с:
$K_м$ — переходный процесс математической модели; $K_р$ — переходный процесс реальной авиамодели; *1* — входное воздействие в виде отклонения соответствующих рулевых органов

Адекватность математической модели (ММ) движения МБПЛА проверяется проведением летных испытаний, в результате которых выполняется:

- сравнение реакции "свободного" (без использования автопилота) МБПЛА по координатам $K_р$ (ψ, ϑ, γ, H, V), зарегистрированным в полете, и реакций $K_м$ ММ МБПЛА по тем же координатам на отклонение $\delta_к$ рулевых поверхностей;
- сравнение реакции системы "БПЛА—АП" по координатам $K_р$, зарегистрированным в полете, с реакциями ММ системы "БПЛА—АП" по тем же координатам, для заданных значений $K_з$ ($\psi_з$, $H_з$, $V_з$ и др.).

Оценку соответствия параметров ММ и реального МБПЛА можно выполнять по относительным погрешностям $\varepsilon_к$ измерений и по осредненным погрешностям $\bar{\varepsilon}_к$, вычисленным для $n_к$ контрольных временных отчетов в установившемся режиме:

$$\varepsilon_к = \frac{K_р - K_м}{K_р} \cdot 100\ \%,\ \bar{\varepsilon}_к = \frac{1}{n_к}\sum_{i=1}^{n_к} \varepsilon_к.$$

На рис. 5 показаны переходные процессы для авиамодели *TwinStarII* по угловым координатам, а в таблице — погрешности их определения.

Из таблицы следует, что средняя относительная погрешность параметров движения при математическом моделировании не превышает 10 %, что свидетельствует об адекватности ММ движения МБПЛА реальному движению МБПЛА и об эффективности использованных методик исследования. Аналогичные результаты получены и для других авиамоделей (*EasyCub*, *Coota*).

Погрешности определения параметров полета по математическим моделям ($n_к$ = 9)

Параметр полета ("координата" K)	Погрешности	
	max $\varepsilon_к$, %	$\bar{\varepsilon}_к$, %
Угол курса, ψ	22	9,5
Угол тангажа, ϑ	19	10
Угол крена, γ	14	10

Алгоритмы терминальной навигации

Система терминальной навигации обеспечивает полет МБПЛА из точки с координатами (x_0, y_0) к цели (Ц), имеющей координаты ($x_ц$, $y_ц$) с заданной путевой скоростью (горизонтальная проекция скорости БПЛА относительно Земли) $V_{п.з}$ за определенное время $t_з = t_к - t_0$. В общем случае полет происходит при действии крупномасштабных ветровых возмущений, под которыми понимают глобальные и струйные течения, средние значения скорости которых постоянны на значительном протяжении (единицы и десятки километров) [4].

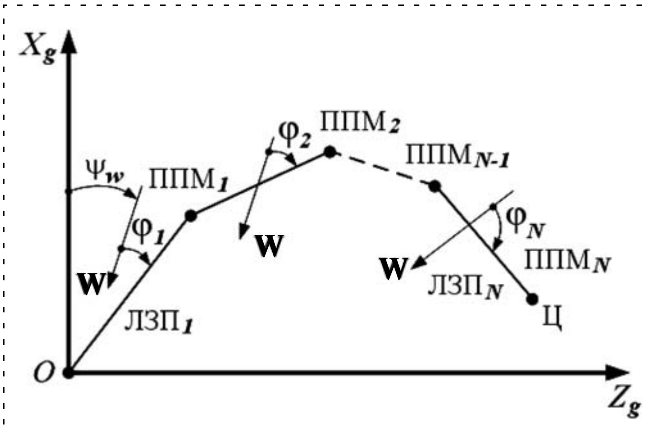


Рис. 6. Кусочно-линейная аппроксимация траектории полета БПЛА:
φ — угол между вектором скорости ветра **W** и ЛЗП; ψ — угол между вектором скорости **W** и осью OX_g; Ц — цель, последняя точка полета

Таким образом, траекторию полета МБПЛА можно представить в виде кусочно-линейной аппроксимации (линии заданного пути, ЛЗП) земной СК между поворотными пунктами маршрута (ППМ) с учетом вектора скорости **W** воздушных возмущений (рис. 6).

Алгоритмы навигации включают: алгоритм астатического автомата тяги (АТ) для стабилизации заданной скорости полета, алгоритм идентификации крупномасштабных ветровых возмущений, алгоритм выхода БПЛА к цели в заданное время с заданной путевой скоростью, алгоритм аварийного режима "возврат".

Алгоритм автомата тяги

Изменение путевой скорости $V_п$ БПЛА с автоматом тяги описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V}_п(t) = \dfrac{1}{m}\left(P - C_x S\dfrac{\rho V^2}{2} - G\sin\vartheta\right); \\ \dot{P}(t) = \dfrac{1}{T}[K(V_з, n_з)n_з - P], \end{cases} \quad (1)$$

где m — масса летательного аппарата; T — постоянная времени двигателя; C_x — коэффициент лобового сопротивления; n, $n_з$ — текущая и заданная частоты вращения двигателя; K — функционал связи параметров $V_з$, $n_з$ с тягой P; G — сила тяжести.

Требуется найти уравнение $n_з(t)$, которое обеспечит полет БПЛА с заданной скоростью $V_{п.з}(t)$ с ограничением $V_п(t) - V_{п.з}(t) = 0$ при минимизации функционала

$$I = \int_0^{t_к} [V_п(t) - V_{п.з}(t)]^2 dt. \quad (2)$$

В соответствии с (1), (2) заданные значения тяги $P_з$ и частоты вращения вала $n_з(t)$ определяются выражениями

$$\begin{cases} P_з(t) = \dfrac{m}{T_V}\Delta V + C_x S q + G\sin\vartheta; \\ n_з(t) = \dfrac{1}{T_V T_n}\dfrac{T}{K(V_з, n_з)} m\Delta V + \\ + \dfrac{T}{T_n K(V_з, n_з)} C_x q S + \left(1 - \dfrac{T}{T_n}\right) n(t), \end{cases}$$

где $\Delta V = V_{п.з} - V_п$; T_V, T_n — постоянные времени переходного процесса по скорости БПЛА и частоты вращения вала двигателя; $q = \dfrac{\rho V^2}{2}$ — скоростной напор.

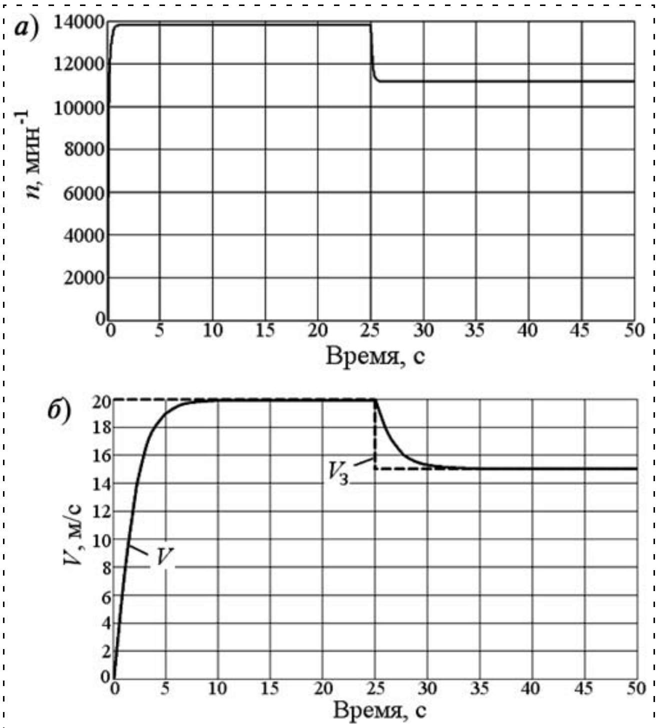


Рис. 7. Переходные процессы БПЛА при стабилизации воздушной скорости по оборотам двигателя (*а*) и скорости (*б*):
$V_з$ — заданная воздушная скорость; V — текущая воздушная скорость БПЛА

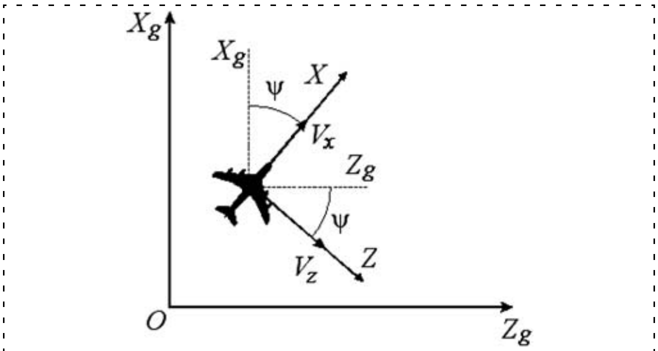


Рис. 8. К выводу уравнений идентификации ветра

Для БПЛА, в том числе и малоразмерных, $T_n \ll T_V$, а значения максимального перерегулирования по скорости и частоте вращения вала двигателя не должны превышать 10 %.

На рис. 7 приведены графики переходных процессов для БПЛА с АТ при стабилизации скорости полета $V = 20$ м/с (при $t = 0$ с) и $V = 15$ м/с (при $t = 25$ с).

Идентификация крупномасштабных ветровых воздействий

Движение ЛА в основном происходит в возмущенной воздушной среде. Физическая сущность влияния ветровых возмущений заключается во внезапном изменении параметров движения МБПЛА. При горизонтальном полете скорость и направление движения относительно этого слоя не изменяется.

Алгоритм идентификации ветра, в предположении $W_{gy} = 0$, подразумевает определение двух составляющих ветра W_{gx}, W_{gz}, направленных соответственно по меридиану на север и по широте на восток.

Путевая скорость складывается из воздушной скорости МБПЛА и скорости ветра. Исходя из этого можно записать следующие зависимости:

$$W_x = V_{gx} - V_x,\ W_z = V_{gz} - V_z,$$

где V_{gx}, V_{gz} — проекции скорости БПЛА относительно Земли на оси OX и OZ; V_x, V_y — проекции воздушной скорости БПЛА на оси OX и OZ.

Путевая скорость МБПЛА вычисляется с помощью системы навигации. При малых значениях углов тангажа и крена, с учетом угла курса выражения для определения ветрового воздействия примут следующий вид (рис. 8):

$$\begin{aligned} W_x &= V_{gx} - V_x\cos\psi + V_z\sin\psi; \\ W_z &= V_{gz} - V_x\sin\psi - V_z\cos\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Воздушные скорости V_x и V_z в уравнениях (3) могут быть определены с помощью датчиков воздушной скорости, установленных на ЛА по осям OX и OZ связанной системы координат.

Алгоритм выхода к цели

Алгоритм выхода к цели включает в себя четыре основные задачи:
- пролет ППМ на необходимой высоте $h_з$;
- пролет от ППМ$_{i-1}$ до ППМ$_i$ по заданной траектории (обычно прямая линия);
- возврат в точку старта в случае обнаружения ошибки систем навигации;
- выход МБПЛА к цели за заданное время.

Стабилизация высоты

Траектория перемещения центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости по отношению к земной поверхности определяет угол на-

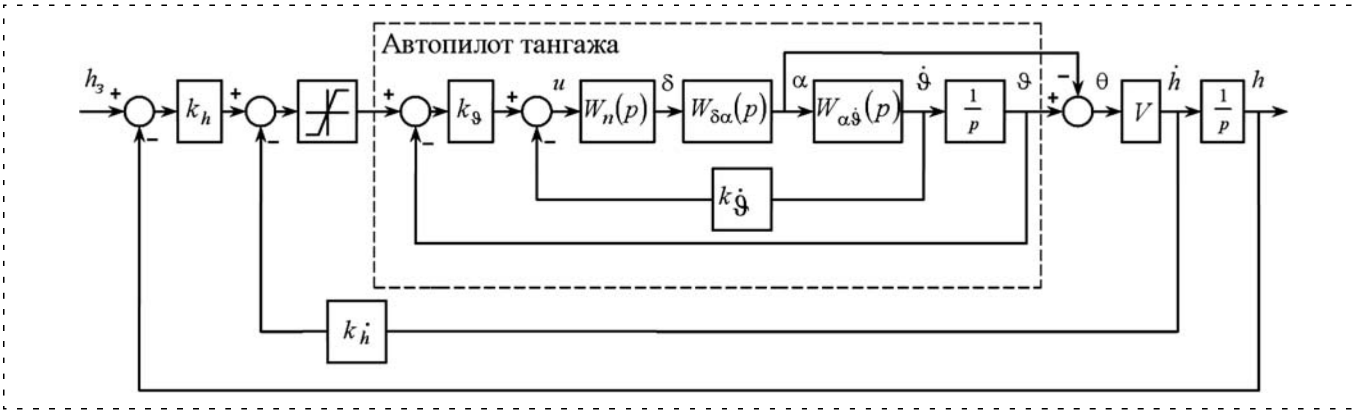


Рис. 9. Структурная схема автопилота высоты:

$h_з$ — заданная высота; $\dot h$, h — производная высоты БПЛА и высота соответственно; u — управляющее воздействие на рулевую машинку; δ — отклонение руля высоты; α — угол атаки; $\dot\vartheta$, ϑ — угловая скорость тангажа и тангаж соответственно; θ — угол траектории; k_h, $k_{\dot h}$, k_ϑ, $k_{\dot\vartheta}$ — коэффициенты автопилота по высоте, вертикальной скорости, тангажу и угловой скорости тангажа соответственно; $W_n(p)$, $W_{\delta\alpha}(p)$, $W_{\alpha\dot\vartheta}(p)$ — передаточные функции рулевой машинки, угла атаки и угловой скорости тангажа соответственно

клона траектории. Тогда вертикальную скорость можно представить как $\dot h = V_g\sin\theta$, где $W_{gy}V_g$ — абсолютная скорость ЛА относительно Земли, θ — угол наклона траектории.

Таким образом, для регулирования высоты полета БПЛА можно использовать статический автопилот высоты, структурная схема которого приведена на рис. 9, где

$$W_{\delta\alpha}(p) = \frac{K_\delta}{T_\alpha^2 p^2 + 2\xi_\alpha T_\alpha p + 1};$$

$$W_{\alpha\dot\vartheta}(p) = K_\vartheta(T_\vartheta p + 1).$$

Передаточная функция системы $W_{hз}^h$ имеет вид

$$W_{hз}^h = \frac{W_2}{W_2 + 1} = \frac{W_1^* k_{\dot h} V k_h}{W_1^* k_{\dot h}(V k_h + p^2) + p},$$

где $W_2 = \dfrac{W_1^* k_{\dot h} p V k_h}{1 + W_1^* k_{\dot h} p}\cdot\dfrac{1}{p}$;

$$W_1^* = \frac{W_1}{1 + W_1}\left(1 - \frac{1}{W_{\alpha\dot\vartheta}\cdot\frac{1}{p}}\right) = \frac{W_1(W_\alpha\dot\vartheta - p)}{(1 + W_1)W_\alpha\dot\vartheta};$$

$$W_1 = \frac{k_\vartheta W_п W_{\delta\alpha} W_{\alpha\dot\vartheta} k_{\dot\vartheta} p}{1 + k_{\dot\vartheta} p W_п W_{\delta\alpha} W_{\alpha\dot\vartheta}}\cdot\frac{1}{p}.$$

Основой автопилота высоты является автопилот тангажа. Сигнал, сформированный из разности заданного и текущего значений высот, а также скорости изменения высоты, является управляющим сигналом автопилота по каналу тангажа. В структуру автопилота высоты введено также ограничение по максимальному значению наклона траектории, равное ±0,5 рад. Закон управления статического автопилота высоты, как видно из схемы, имеет вид

$$u = k_\vartheta(k_h(h_з - h) - k_{\dot h}\dot h - \vartheta) - k_{\dot\vartheta}\dot\vartheta.$$

Коэффициенты k_h и $k_{\dot h}$ выбираются из условия обеспечения необходимого качества переходного процесса.

Пролет по заданной траектории

Задачу пролета БПЛА по заданной траектории (в обычном случае — прямая линия, соединяющая две соседние ППМ) можно разделить на две подзадачи:

1) вычисление необходимого угла курса БПЛА;
2) стабилизация заданного угла курса.

На рис. 10 показаны два летательных аппарата (ЛА № 1 и ЛА № 2). ЛА № 1 осуществляет автоматический полет с отклонением ΔL от заданной траектории.

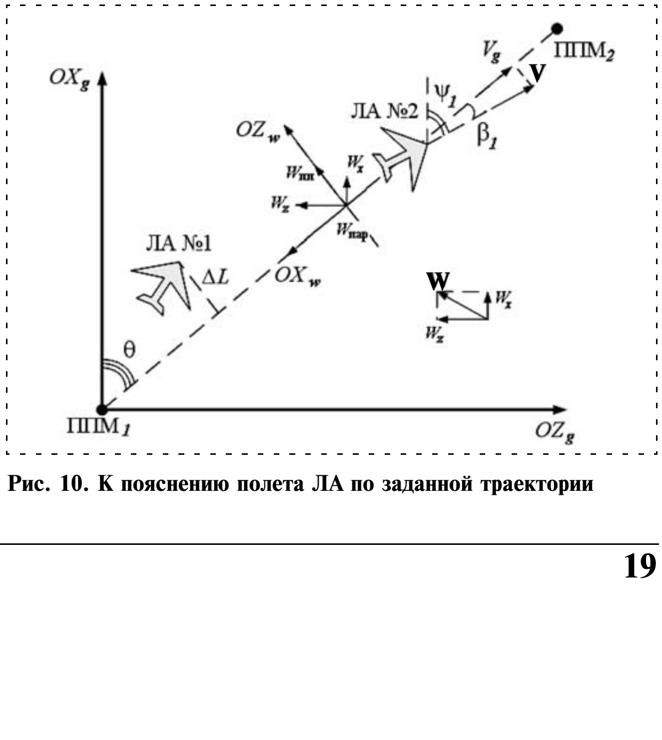


Рис. 10. К пояснению полета ЛА по заданной траектории

Предположим, что ЛА № 2 управляется неким "идеальным автопилотом" и его отклонение от заданной траектории пренебрежимо мало. Тогда, под действием ветровых возмущений, ЛА № 2 будет двигаться с углом скольжения $\beta_1 = \arccos\left(\frac{V_g}{V}\right)$, где V_g — скорость ЛА № 2 относительно Земли (предполагается, что вертикальная составляющая скорости равна нулю), V — воздушная скорость. Угол курса ЛА № 2 $\psi_1 = \theta + \beta_1$, где θ — угол наклона траектории.

Необходимый угол курса $\psi_з$ ЛА № 1 рассчитывается по формуле

$$\psi_з = \theta + \beta + K\Delta L,$$

где K — коэффициент, зависящий от динамических свойств ЛА,

$$\Delta L = \sin\left(\theta - \arctan\left(\frac{Z_{ЛА} - Z_{ППМ_1}}{X_{ЛА} - X_{ППМ_1}}\right)\right) \times$$

$$\times \sqrt{(X_{ЛА} - X_{ППМ_1})^2 + (Z_{ЛА} - Z_{ППМ_1})^2}.$$

Угол скольжения β (аналогичный углу β_1 ЛА № 2) может быть рассчитан на основании данных о проекциях ветрового воздействия (W_z, W_x) и скорости относительно Земли (V_g), которые можно получить исходя из показаний датчиков воздушной скорости, системы ориентации и модуля GPS/ГЛОНАСС.

Введем дополнительную систему координат $OX_wY_wZ_w$, повернутую относительно $OX_gY_gZ_g$ на угол $90° + \theta$ против часовой стрелки.

Проекции ветрового возмущения W на оси введенной СК вычисляются по следующим зависимостям:

$$W_{пар} = W_z\sin\theta - W_z\cos\theta,\ W_{пп} = W_z\cos\theta + W_z\sin\theta.$$

Так как угол скольжения β компенсирует ветровую составляющую $W_{пп}$, то имеет место равенство $V\sin\beta = -W_{пп}$.

Таким образом, $\beta = \arcsin\left(\frac{-W_{пп}}{V_g}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{-W_{пп}}{V_g}\right)$.

Для эффективного разворота МБПЛА используется координированное управление по каналу крена и каналу рыскания. Структурная схема автопилота представлена на рис. 11.

Возврат в точку старта

Во время полета ЛА возможно возникновение ряда неполадок в САУ, при которых продолжение выполнения поставленной перед МБПЛА задачи становится невозможным. Ключевым моментом в такой ситуации является спасение бортовой аппаратуры и самого ЛА. Для этого целесообразно использовать алгоритм "аварийного" возврата в точку старта.

Основным отказом САУ МБПЛА является ошибка модуля GPS/ГЛОНАСС. Таким образом, исключается возможность вычисления координат, и доступной является только информация от системы ориентации и датчиков воздушных скоростей.

В данных условиях алгоритм возврата примет вид закона выхода в ППМ (в точку старта), за исключением составляющей $K\Delta L$, так как отсутствует информация о текущих координатах:

$$\psi_з = \theta + \beta.$$

При выполнении возврата МБПЛА необходимо поддерживать постоянную воздушную скорость V. На рис. 12 показана траектория полета МБПЛА при аварийном возвращении в точку ППМ$_1$. Ошибка $\Delta \approx 40$ м.

Использование подобного алгоритма позволит ЛА вернуться в область запуска, где, используя посадочную сеть или переведя МБПЛА в режим ручного управления, можно осуществить его посадку.

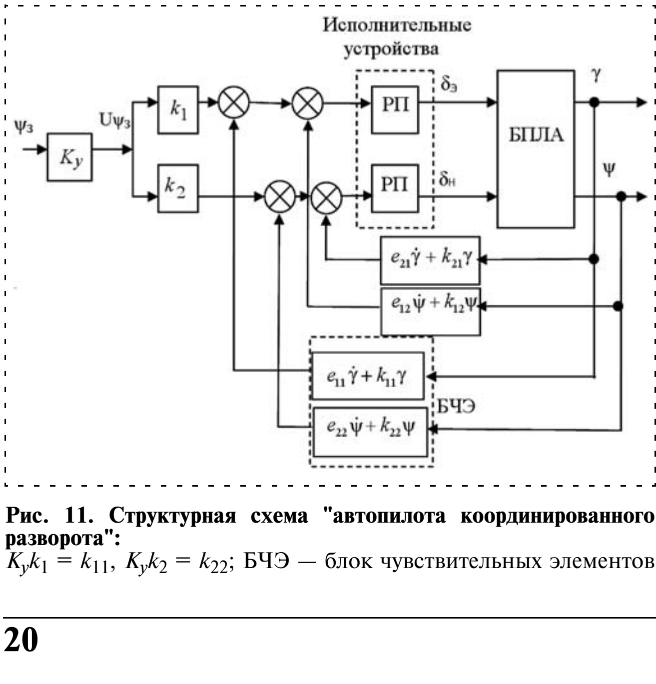


Рис. 11. Структурная схема "автопилота координированного разворота":
$K_yk_1 = k_{11}$, $K_yk_2 = k_{22}$; БЧЭ — блок чувствительных элементов

Рис. 12. Траектория полета МБПЛА в режиме аварийного возвращения

Выход к цели за заданное время

При заданном расстоянии $L_з$ от точки старта до конечной точки "Ц" ($ППМ_N$) при прохождении всех $ППМ_i$ за заданное время $t_з$ требуемая средняя скорость БПЛА без учета времени разворотов равна

$$V_{п.т}(t) = \frac{L_з}{t_з}.$$

Минимально возможное t_{min} и максимально возможное t_{max} времена прибытия в заданную точку с заданной скоростью при допущении, что МБПЛА способен совершать равноускоренный разгон и торможение с предельными ускорениями a^p_{max}, a^m_{min}, определяются равенствами

$$t_{min} = \frac{L_з}{V_{п\ max}} + \frac{V_{п\ max}}{a^p_{max}};$$

$$t_{max} = \frac{L_з}{V_{п\ min}} + \frac{V_{п\ min}}{a^m_{min}},$$

где $V_{п.н}$, $V_{п\ max}$, $V_{п\ min}$ — начальная, максимальная и минимальная путевые скорости.

После идентификации параметров ветра W_i, ψ_{W_i} для каждого $ППМ_i$, известно направление φ_i ветра на каждом i-м участке полета. Воздушная скорость на каждом участке полета $\mathbf{V}_{ц.м} = \mathbf{W} + \mathbf{V}_п$ и, следовательно, для каждого участка полета требуемая воздушная скорость определяется выражением

$$\mathbf{V}_т = \mathbf{W}_i + \mathbf{V}_{п.т},$$

где $W_i = |\mathbf{W}|\cos\varphi_i$ — проекция вектора скорости ветра на $ЛЗП_i$ i-го участка полета; $\mathbf{V}_{п.т}$ — вектор требуемой путевой скорости.

Функционал качества, который представляет текущую разность требуемого пути $L_з$ и пути, который БПЛА пролетел бы, двигаясь со скоростью $V_{п.з}$ в течение времени, оставшегося до выхода в заданную точку, имеет вид

$$I = L_з - L - V_{п.з}(t_з - t),$$

где L, t — текущий пройденный путь и время.

На рис. 13, 14 приведены результаты математического моделирования системы "БПЛА—АП" на примере модели *TwinStarII*, при полете через четыре контрольные точки ($ППМ_1$ ... $ППМ_4$) с возвратом в точку старта ($ППМ_1$). Суммарная длина маршрута $L_з = 3200$ м, заданное время полета $t_з = 140$ с, заданная путевая скорость $V_{п.з} \approx 23$ м/с (82 км/ч). Скорость ветра в западном направлении $W_{запад} = 2$ м/с, в северном — $W_{север} = 2$ м/с.

Таким образом, применение алгоритмов терминальной навигации позволяет осуществлять высокоточные автоматические полеты МБПЛА.

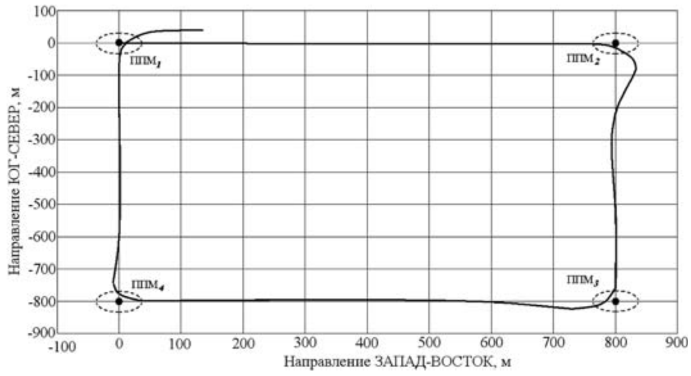


Рис. 13. Траектория полета БПЛА в режиме терминальной навигации с учетом влияния ветровых возмущений

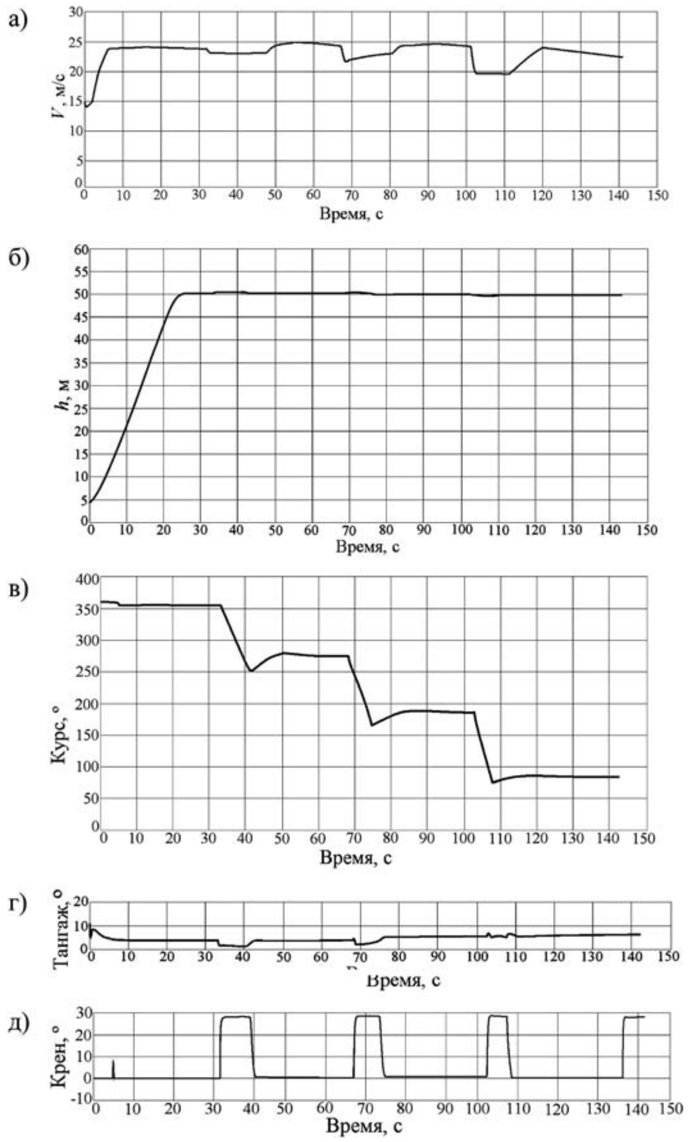


Рис. 14. Графики переходных процессов системы "БПЛА—АТ" в режиме терминальной навигации:
а — путевая скорость; *б* — высота; *в*, *г*, *д* — углы курса, тангажа и крена

Заключение

На сегодняшний день комплексы мониторинга на базе МБПЛА являются одними из самых перспективных. Разработка планера и системы управления в соответствии с необходимыми условиями технического задания является весьма сложным процессом. Однако описанный в работе метод виртуальной продувки для определения аэродинамических параметров планера и применение специализированного ПО для расчета тяговых характеристик двигателя позволяют в значительной мере сократить сроки разработки.

Приведенные алгоритмы управления терминальной навигации являются универсальными и обеспечивают высокоэффективное управление МБПЛА в процессе автоматического полета.

Список литературы

1. **Основы** устройства, проектирования, конструирования и производства летательных аппаратов: учебник / П. П. Афанасьев и др. Под ред. И. С. Голубева, Ю. И. Янкевича. М.: Изд. МАИ, 2006. 524 с.
2. **Распопов В. Я., Малютин Д. М., Телухин С. В., Алалуев Р. В., Кузнецов Я. С., Ладонкин А. В.** Автопилот мини-беспилотного летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение № 10 (91). 2008. № 10. С. 19—24.
3. **Телухин С. В.**, **Распопов В. Я.**, **Машнин М. Н.** Определение аэродинамических коэффициентов планера беспилотного летательного аппарата методом виртуальной продувки // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2010. № 2. С. 17—22.
4. **Управление** и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М. Н. Красильщикова и Г. Г. Серебрякова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 280 с.

ИНФОРМАЦИЯ

23—24 марта 2013 г. в Ханчжоу (Китай) состоится

Международная конференция по мехатронике и системам автоматического управления — 2013

2013 International Conference on Mechatronics and Automatic Control Systems (ICMS 2013)

Конференция представляет собой форум для исследователей, преподавателей, инженеров и официальных лиц, имеющих отношение к мехатронике и системам автоматического управления, а также способствует распространению последних результатов научных исследований и обмену мнениями о будущих направлениях исследований в этих областях.

Тематика конференции:

Системы механизации и автоматизации производства:

- Моделирование производственных процессов
- Компьютеризированные производственные системы
- CAD/CAM/CIM моделирование механической динамики
- Измерение вибрации и анализ надежности
- Диагностика неисправностей и теория технического обслуживания
- Интеллектуальная мехатроника и робототехника
- Элементы, конструкции, механизмы и применение микро- и наносистем
- PDM/ERP системы, логистика и управление поставками
- Разработка подвижных устройств и безопасность

Обработка сигналов:

- Теория обработки сигналов, методы адаптивной и слепой обработки сигналов
- Обработка изображений, видео и речевых сигналов
- Многоканальная обработка сигналов
- Обработка сигналов для анализа временных рядов
- Теория и анализ ошибок

Теория управления:

- Искусственный интеллект, интеллектуальная оптимизация и управление
- Моделирование систем управления
- Автоматизация взаимодействия системы "человек—машина"
- Промышленная автоматизация, управление технологическими процессами
- Управление компьютерными сетями
- Автомобильные системы управления и автономные транспортные средства

***Подробная информация на сайте*: www.myicms.org**

УДК 62.50, 517.9, 512

В. И. Краснощеченко, канд. техн. наук, доц.,
kviip@yandex.ru,
Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

Синтез регулятора с ограниченным управлением для неустойчивого объекта с определением границы области стабилизации на основе гомотопии векторных полей

Рассмотрен синтез алгоритма управления неустойчивым линейным объектом с ограниченным управлением на основе метода модельного прогнозируемого управления, в котором применяется теоретико-групповая декомпозиция нелинейных дифференциальных уравнений расширенного объекта управления и взвешенное проектирование с грамианом управляемости. Для определения границы локальной области стабилизации используется гомотопия (непрерывная деформация) векторных полей; рассматриваются такие характеристики векторных полей, как вращение, индекс векторного поля. Представлены алгоритм синтеза управления, методика нахождения границы области стабилизации и результаты моделирования.

Ключевые слова: *декомпозиция дифференциальных уравнений, группы Ли, нелинейные аффинные системы, метод модельного прогнозируемого управления, синтез регуляторов, грамиан управляемости, гомотопия векторных полей, вращение векторного поля, интегрирование дифференциальной l-формы.*

Введение

Наличие ограничений на управление для неустойчивого линейного объекта, даже при условии его полной управляемости по Р. Калману, не обеспечивает глобальной нуль-управляемости [1]. Поэтому при синтезе регулятора для таких объектов важнейшей задачей является определение границы локальной области стабилизации. Если синтезируется обычный линейный регулятор, то область его работоспособности (стабилизации) можно оценить на основе, например, линейных матричных неравенств [2], эллипсоида притяжения [3, 4] или с использованием его полиэдральной аппроксимации [5]. При этом полученная область стабилизации, подчас, весьма далека от реальной области нуль-управляемости. Напрашивается вопрос: можно ли синтезировать регулятор для неустойчивого объекта управления, где область стабилизации будет практически совпадать с областью нуль-управляемости? В данной статье будет получен положительный ответ на этот вопрос и продемонстрирована методика решения данной задачи для одного объекта управления.

Отметим, что наличие ограничений на управление даже линейным объектом управления переводит задачу синтеза в нелинейную область. И здесь мы процитируем Марстона Морса, известного американского математика в области алгебраической топологии, "рецепт" которого использован для построения конструктивного решения рассматриваемой задачи: "Если проблема *нелинейна* (выделено автором — К. В.) по своему характеру, если в ней участвует более чем одна система координат или более чем одна переменная или она касается нелокальным образом определяемой структуры, то решение этой проблемы обычно требует привлечения топологии и теории групп. Классический анализ, как правило, применяется при решении подобных проблем как средство предварительного локального изучения, последующая же глобализация проводится с помощью топологии и теории групп". Очевидно, что предлагается использовать теоретико-групповую методологию и топологический подход к решению поставленной задачи. Нельзя не отметить, что как теория непрерывных групп, так и топология, в основном ориентированы на общие свойства алгебраических и топологических структур, и конструктивных (практических) методов их применения еще очень мало. Тем не менее, определенные положительные результаты уже имеются. Так, теория матричных групп с успехом используется в робототехнике, управлении ориентацией спутников [6—8]. Результаты прямого, практического использования алгебраической топологии пока еще весьма скромны: в работе [9] рассматривается применение теории гомологий для определения управляемости линейных систем, но этот результат позволяет только по-новому взглянуть на проблему, решение которой хорошо известно. Автором в статье [10] предлагается использовать топологическую характеристику — вращение векторных полей — для нахождения отдельных граничных точек локально устойчивого предельного цикла уравнения Ван дер Поля. Этот подход сродни применению принципа аргумента в формулировке критерия устойчивости Найквиста.

В данной статье показывается, что исследование вращения исходного и двух дополнительных векторных полей позволяет найти границу области нуль-управляемости для неустойчивого объекта. При синтезе регулятора используется теоретико-групповая методология, развиваемая автором в течение ряда лет и представленная, в частности, в работах [4, 11].

Постановка задачи и подходы к ее решению

Рассматривается неустойчивый линейный объект второго порядка

$$\Sigma_0 : \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} u, \qquad (1)$$

(спектр матрицы $\mathbf{A}$: $\sigma(\mathbf{A}) = \{0{,}5;\ 1\}$ полностью расположен в правой полуплоскости) со скалярным ограниченным управлением

$$|u| \leqslant 1. \qquad (2)$$

Необходимо определить область локальной управляемости Ω_C и синтезировать регулятор, обеспечивающий перевод системы (1) в начало координат при наличии ограничения на управление (2) из любой точки области стабилизации Ω_S, максимально приближенной к области локальной управляемости Ω_C.

Для синтеза регулятора, учитывающего ограничение на управление (2), преобразуем систему (1) в расширенную нелинейную аффинную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= 0{,}5x_2 + a\arctan(a_u x_3), \qquad (3) \\ \dot{x}_3 &= \nu, \end{aligned}$$

где введено новое управление $\nu \in R^1$, а исходное управление u представлено через аналитическую функцию arctan от новой координаты x_3. Именно,

$$u = a\arctan(a_u x_3), \qquad (4)$$

где $a = 2/\pi$, а коэффициент $a_u > 0$ определяет необходимый наклон арктангенса в окрестности начала координат. При такой замене автоматически учитывается ограничение на управление (2). Отметим, что данная замена существенной нелинейности типа насыщения (2) аналитической зависимостью (3) никак не искажает исходную систему, так как управление (4) — это *внешнее произвольно выбираемое воздействие*, основное назначение которого — эффективно решить задачу стабилизации с учетом ограничения на это воздействие, а то, как оно (воздействие) определяется, в принципе, неважно.

Для решения второй подзадачи — определения области управляемости для системы (1) с ограничением (2) — используем топологический подход, основанный на сравнении топологических характеристик (вращений) определенных векторных полей и их гомотопической эквивалентности [10].

Теоретико-групповая декомпозиция нелинейной динамической системы. Алгоритм синтеза управления

Метод модельного прогнозируемого управления (МПУ) [4, 11] на основе теоретико-групповой декомпозиции дифференциальных уравнений и взвешенного (с грамианом управляемости) проектирования на направление движения системы к желаемому состоянию $\mathbf{x}_0(t_{k+s})$ позволяет синтезировать регулятор для многомерной аффинной системы вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x} \in M,\ \mathbf{u} \in R^m, \qquad (5)$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\xi_1(\mathbf{x})\ ...\ \xi_n(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}};\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = (\eta_{i1}(\mathbf{x})\ ...\ \eta_{in}(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}},\quad i = 1, ..., m \qquad (6)$$

— векторные поля в *координатной* форме. Эти же векторные поля, рассматриваемые *как дифференциальные операторы для гладких функций*, определенных на многообразии M (пространстве состояний системы (5)), имеют вид

$$L_{\mathbf{f}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i};\ L_{\mathbf{g}_i} = \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j},\ i = 1, ..., m. \qquad (7)$$

Нетрудно найти связь между представлениями (6) и (7). Именно,

$$\xi_j(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}x_j;\ \eta_{ij}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}_i}x_j,\ j = 1, ..., n;\ i = 1, ..., m.$$

С групповой точки зрения операторы (7) называются инфинитезимальными (бесконечно малыми) преобразованиями (действиями) соответствующих однопараметрических групп F_t, $G_{i,\,t}$, $i = 1, ..., m$:

$$F_t\mathbf{x} = \mathbf{e}^{tL_{\mathbf{f}}}\mathbf{x},\ G_{i,\,t}\mathbf{x} = \mathbf{e}^{tL_{\mathbf{g}_i}}\mathbf{x},$$

где $L_{\mathbf{q}}\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\left(p_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\mathbf{x})\right)$ дифференцирование (производная) Ли для гладкой функции $\varphi(\mathbf{x})$ вдоль некоторого векторного поля $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x})\ ...\ p_n(\mathbf{x})]^{\mathrm{T}}$, рассматриваемого как дифференциальный оператор

$$L_{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В основе представленного ниже алгоритма синтеза управления лежит конструктивная теорема о декомпозиции дифференциального уравнения (5) и композиции решений.

Теорема 1 [12]. Пусть F_t, G_s — однопараметрические группы преобразований для векторных полей $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ соответственно. Тогда решение уравнения (5) с кусочно-постоянным управлением можно получить в виде композиции (но не суперпозиции) управляемого и свободного движений:

$$\text{I. } \dot{\mathbf{z}}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i L_{\mathbf{e}^{tL_{\mathbf{f}}}\mathbf{g}_i(\mathbf{z})}\mathbf{z},\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{x}; \qquad (8.\text{а})$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \mathbf{x}(t) &= F_t\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{tL_{\mathbf{f}}}\mathbf{x}\big|_{\mathbf{x} = \mathbf{z}(t,\,\mathbf{x},\,\mathbf{u})} = \\ &= F_t\mathbf{x}\big|_{\mathbf{x} = \mathbf{z}(t,\,\mathbf{x},\,\mathbf{u})}, \qquad (8.\text{б}) \end{aligned}$$

где $L_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = [L_{\mathbf{f}}, L_{\mathbf{g}}]$, $L_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g} = [L_{\mathbf{f}}, [L_{\mathbf{f}}, L_{\mathbf{g}}]]$ и т. д. — производные Ли векторного поля $\mathbf{g}$ вдоль векторного поля $\mathbf{f}$, которые *в координатной форме* можно выразить через скобки Ли $L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{z}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{f}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{g}(\mathbf{z})$.

Для линейных объектов уравнения (8.а), (8.б) представляют применение хорошо известной формулы Коши при выводе условий управляемости линейных нестационарных систем через грамиан управляемости [13].

Алгоритм синтеза управления состоит из четырех шагов (подробное описание каждого шага можно найти в публикациях [4, 11]):

1 шаг. *Составление и приближенное аналитическое решение системы уравнений для управляемой траектории на интервале прогноза движения:*

$$\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t) = \mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^{m} (\bar{\mathbf{u}}_k)_j \sum_{i=0}^{k_1} \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} L_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_k},$$
$$t \in [0, t_s],\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k), \qquad (9)$$

где $h = \Delta t$ — шаг постоянства фактически применяемого управления, в дискретных системах — шаг дискретизации; k_1 — число членов разложения функционального ряда управляемой орбиты (8.а); $t_s = N_s h$ — интервал прогноза движения системы; $t_u = N_u h$ — интервал *постоянства* прогнозируемого управления, т. е. $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}_k$, $\forall t \in [t_k, t_k + t_u]$. Примем $t_u = t_s$.

2 шаг. *Составление и приближенное аналитическое решение исходной системы уравнений на интервале прогноза движения объекта.* Общее решение дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$F_t \hat{z}_i(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t) = F_i x_i \big|_{x_i = \hat{z}_i(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t)},\ i = 1, ..., n, \quad (10)$$

где F_t — однопараметрическая группа (фазовый поток) неуправляемого векторного поля $\mathbf{f}$. Если векторное поле $\mathbf{f}$ нелинейное, то, проводя аппроксимацию ряда Ли (10) конечным рядом (число членов разложения k_2), получим

$$\hat{x}_i(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t_s) = \sum_{p=0}^{k_2} \frac{t_s^p}{p!} L_{\mathbf{f}}^p x_i \bigg|_{x_i = \hat{z}_i(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t_s)} =$$
$$= a_i(\mathbf{x}_k; t_s) + \sum_{j=1}^{m} (\bar{\mathbf{u}}_k)_j b_{ij}(\mathbf{x}_k; t_s),\ i = 1, ..., n,$$
$$i = 1, ..., n,\ t \in [0, t_s],$$

где $a_i(\mathbf{x}_k; t)$, $b_{ij}(\mathbf{x}_k; t)$ — некоторые гладкие функции, полученные из ряда $\sum_{p=0}^{k_2} \frac{t^p}{p!} L_{\mathbf{f}}^p x_i \bigg|_{x_i = \hat{z}_i(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t)}$ и $L_{\mathbf{f}}^p x_i = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{p-1} x_i)$.

3 шаг. *Выбор траектории прицеливания.* Используем процедуру постоянного "прицеливания" в желаемую терминальную точку равновесия: $\mathbf{x}_0(t_{k+s}) = \mathbf{0}$, $k = 0, 1, ..., N - 1$.

4 шаг. *Определение синтезируемого управления на интервале прогноза движения системы.* Переход из состояния $\mathbf{x}_k$ в состояние $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t_s)$ осуществляется минимизацией взвешенной ошибки $\mathbf{e}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t_s) = \mathbf{x}_0(t_{k+s}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t_s)$ (вес $\mathbf{Q}$). Имеем:

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t_s) = \mathbf{x}_0(t_{k+s}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, t_s) =$$
$$= \mathbf{x}_0(t_{k+s}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_k; t_s) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k; t_s)\bar{\mathbf{u}}_k =$$
$$= \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_k; t_s) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k; t_s)\bar{\mathbf{u}}_k, \qquad (11)$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{x}_k; t_s) = (\mathbf{b}_1(\mathbf{x}_k; t_s) ... \mathbf{b}_m(\mathbf{x}_k; t_s))$. Управление на k-м шаге определится как

$$\bar{\mathbf{u}}_k = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{a}},\ k = 0, 1, 2, ..., N - 1, \quad (12)$$

где N — общее число шагов дискретизации.

В качестве матрицы $\mathbf{Q}$ — матрицы неортогонального проектирования — используется двухвалентный ковариантный тензор (*обратная матрица грамиана управляемости*), т. е. $\mathbf{Q} = \mathbf{W}_c^{-1}(T)$. Данная матрица обеспечивает наилучшее (с точки зрения минимизации затрат управления (энергии)) проектирование на направление движения системы к желаемому состоянию $\mathbf{x}_0(t_{k+s})$. Аппроксимация локального грамиана управляемости для нелинейной системы управления (5) имеет вид [14]

$$\widehat{\mathbf{W}}_c(T, \mathbf{x}) = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{k_0} \frac{t^i}{i!} L_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \ ... \ \sum_{i=0}^{k_0} \frac{t^i}{i!} L_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=0}^{k_0} \frac{t^i}{i!} L_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \ ... \ \sum_{i=0}^{k_0} \frac{t^i}{i!} L_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \right)^{\mathrm{T}} dt, \qquad (13)$$

где k_0 — число удерживаемых членов ряда; $T = N_w h$ — интервал прогноза для локального грамиана управляемости, $T \gg t_u = t_s$.

Условие устойчивости определяется следующей теоремой.

Теорема 2 [4]. Для того чтобы прогнозируемое движение осуществлялось в начало координат ($\hat{\mathbf{x}}_{k+s} \to \mathbf{0}$, $k = 0, 1, ..., N - 1$) достаточно, чтобы спектральный радиус $\rho(\mathbf{T}_k)$ общей матрицы преобразования $\mathbf{T}_k$ (T_k: $\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_k\mathbf{x}(0)$)

$$\rho(\mathbf{T}_k) = \rho(\mathbf{T}(k)\mathbf{T}(k-1) ... \mathbf{T}(1)) < 1,$$
$$k = 1, 2, ..., N - 1, \qquad (14)$$

был меньше 1, где $\mathbf{T}(k) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_k, t_s, h, t_w)$ и

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_k, t_s, h, t_w) =$$
$$= \mathbf{A}(\mathbf{x}_k; h) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k; h)(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_k; t_s)\mathbf{Q}(\mathbf{x}_k; t_w)\mathbf{B}(\mathbf{x}_k; t_s))^{-1} \times$$
$$\times \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_k; t_s)\mathbf{Q}(\mathbf{x}_k; t_w)\mathbf{A}(\mathbf{x}_k; t_s)).$$

Синтез управления для расширенной системы

Проведем синтез управления для системы (3) на основе представленного выше алгоритма. Итак, имеем нелинейную аффинную систему управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nu\mathbf{g}(\mathbf{x}), \qquad (15)$$

где векторные поля в координатном представлении имеют вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 \;\; 0{,}5x_2 + a\arctan(a_u x_3) \;\; 0)^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0\;0\;1)^{\mathrm{T}},\; a = 2/\pi,\; a_u > 0. \qquad (16)$$

Для получения управляемой траектории $\mathbf{z}(t)$ находим производные Ли управляемого векторного поля $L_{\mathbf{g}}(\mathbf{z}) = \partial/\partial z_3$ вдоль неуправляемого поля $L_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = (z_1 + z_2)\dfrac{\partial}{\partial z_1} + (0{,}5z_2 + a\arctan(a_u z_4))z_3\dfrac{\partial}{\partial z_2}$. Если найдена траектория $\mathbf{z}(t;\bar{\nu}, \mathbf{x}(t_k))$, $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(0)$, $t \in [0, t_u]$ и управление $\bar{\nu}$, тогда движение самой системы (3) на интервале прогноза имеет вид: $\mathbf{x}(t;\bar{\nu}, \mathbf{x}(t_k)) = F_t\mathbf{x}|_{\mathbf{x} = \mathbf{z}(t;\,\bar{\nu},\,\mathbf{x}(t_k))}$, $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, $t \in [0, t_u]$. Согласно алгоритму для нахождения управления необходимо определить локальный грамиан управляемости $\mathbf{W}_c(T, \mathbf{x})$, $T = N_w h$. Используем его аппроксимацию $\widehat{\mathbf{W}}_c(T, \mathbf{x})$ (формула (13)). Конечный ряд ($k_0 = 5$) подынтегрального выражения для грамиана управляемости (13) имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{5}\frac{t^i}{i!}L_{\mathbf{f}}^i\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}, t)\; r_2(\mathbf{x}, t)\; r_3(\mathbf{x}, t))^{\mathrm{T}},$$

где

$$r_1(\mathbf{x}, t) = \frac{0{,}5t^2 - 0{,}25t^3 + 0{,}0729t^4 - 0{,}01563t^5 a a_u}{1 + a_u^2 x_3^2},$$

$$r_2(\mathbf{x}, t) = \frac{(-t + 0{,}25t^2 - 0{,}0417t^3 + 0{,}00521t^4 - 0{,}00052t^5)a a_u}{1 + a_u^2 x_3^2},$$

$$r_3(\mathbf{x}, t) = 1.$$

Первый элемент (остальные не приводим в силу громоздкости выражений) матрицы грамиана управляемости имеет следующий вид:

$$\widehat{w}_{11}(\mathbf{x}, T) = \frac{(0{,}0000221946\,T^{11} - 0{,}00022786\,T^{10} + 0{,}001458816\,T^9 - 0{,}006510417\,T^8)a^2 a_u^2}{(1 + a_u^2 x_3^2)^2} + \frac{(0{,}01934523\,T^7 - 0{,}04166667\,T^6 + 0{,}05\,T^5)a^2 a_u^2}{(1 + a_u^2 x_3^2)^2}.$$

Далее алгоритм управления формируется по приведенным выше шагам. Все аналитические вычисления проведены в пакете символьных вычислений Maple10.

Топологический подход к определению области управляемости исходной системы

Уравнение Пфаффа. Интегрирование дифференциальных l-форм. Дополнительные системы для синтезированной системы. Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\dot{x}_1 = a(\mathbf{x});$$
$$\dot{x}_2 = b(\mathbf{x}),\; \mathbf{x} \in M \subseteq R^2, \qquad (17)$$

где $a(\mathbf{x})$, $b(\mathbf{x})$ — гладкие функции координат $\mathbf{x}$. Системе (17) соответствует свободное (неуправляемое) векторное поле в координатной форме $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [a(\mathbf{x})\; b(\mathbf{x})]^{\mathrm{T}}$ или, как дифференциальный оператор, $L_{\mathbf{f}} = a(\mathbf{x})\partial/\partial x_1 + b(\mathbf{x})\partial/\partial x_2$. Как и в методе фазовой плоскости в системе (17) исключим время и получим соотношение $dx_1/dx_2 = a(\mathbf{x})/b(\mathbf{x})$, которому соответствует следующее уравнение Пфаффа:

$$\omega = b(\mathbf{x})dx_1 - a(\mathbf{x})dx_2 = 0. \qquad (18)$$

Пусть начальная точка $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, а конечная точка $\mathbf{x}$. Проинтегрируем l-форму (18) вдоль отдельных осей координат (назовем этот путь "путь I"), получим функцию $V_1(\mathbf{x})$:

$$V_1(\mathbf{x}) = \int_I \omega = \int_0^{x_1} b(\tau_1, 0)d\tau_1 - \int_0^{x_2} a(x_1, \tau_2)d\tau_2. \qquad (19)$$

Рассмотрим другой путь интегрирования (назовем его "путь II") для нахождения функции $V_2(\mathbf{x})$:

$$V_2(\mathbf{x}) = \int_{II} \omega = -\int_0^{x_2} a(0, \tau_2)d\tau_2 + \int_0^{x_1} b(\tau_1, x_2)d\tau_1. \qquad (20)$$

Если дифференциальная l-форма ω является точной, т. е. полным дифференциалом, то криволинейный интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, и $V_1(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x})$. Если интегрировать неточную l-форму, то эти функции будут различными. Однако можно найти условия, при которых линии уровня функций $V_1(\mathbf{x})$ и $V_2(\mathbf{x})$ и фазовая траектория исходной системы (1) будут *топологически эквивалентны*, т. е. качественно подобны. Эти условия определяются совпадением топологических характеристик — вращений их векторных полей.

Гомотопия и степень гладких отображений. *Гомотопией* или деформацией любого отображения $s : M \to N$, $\mathbf{y} = s(\mathbf{x})$ называется непрерывное отображение $\mathbf{y} = S(\mathbf{x}, \lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, где $S(\mathbf{x}, 0) = s$; все отображения $s_\lambda(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \lambda)$ называются *гомотопными* начальному отображению s, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $f_0 = f$.

Определим для каждого непрерывного отображения $s : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ (где M — ориентированное гладкое многообразие, N — связное ориентированное гладкое компактное многообразие, ∂M, ∂N — их границы) **целое** число, не меняющееся при гомотопии отображения s. Это число называется *степенью отображения* s в точке $\mathbf{y}$, обозначается $\deg_y s$ и определяется как разность между числом точек $\mathbf{y}$ прообраза $s^{-1}(\mathbf{y})$, для которых ориентация сохраняется, и числом точек, для которых она обращается, или более кратко: $\deg_y s$ есть алгебраическое число прообразов точки $\mathbf{y}$.

Чрезвычайно важно, что степень отображения является глобальной характеристикой отображения, и, тем самым, она связывает топологические характеристики многообразий M и N.

Выше полученное гладкое векторное поле $\mathbf{f}$ на многообразии можно также рассматривать как отображение точек многообразия $\mathbf{x} \in M$ в касательное пространство TM_x. Степень отображения в этом случае называется *вращением* векторного поля, так как на плоскости R^2 она показывает, сколько оборотов сделает векторное поле при обходе замкнутого контура. Последнее определение хорошо известно в классической теории управления как принцип аргумента, используемый при выводе критерия устойчивости Найквиста. Так как рассматривается система второго порядка (на плоскости), то ниже будет использован именно графический способ определения вращения векторного поля как наиболее простой и наглядный.

Определение 1. *Вращением векторного поля* $\mathbf{f}$ на границе $\partial\Omega$ области Ω (или просто вращением векторного поля $\mathbf{f}$) называется степень отображения $\deg\tilde{\mathbf{f}}$, где $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}/\|\mathbf{f}\|$, границы $\partial\Omega$ области Ω в единичную сферу $\|\mathbf{x}\| = 1$; обозначается $\gamma(\partial\Omega, \mathbf{f})$ [15].

В этом случае также можно говорить о гомотопии, но теперь уже векторных полей. Любые два невырожденных непрерывных на M векторных поля $\mathbf{f}_0$ и $\mathbf{f}_1$ могут быть соединены невырожденной деформацией; ее можно определить, например, формулой линейной деформации

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{f}_0 + \lambda\mathbf{f}_1;\ (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ \mathbf{x} \in M).$$

Важнейшее свойство степени отображения для векторных полей определяется следующей теоремой Хопфа [15].

Теорема 3. Если невырожденные на некоторой границе жордановой области (к таким областям относятся, в частности, выпуклые и звездные области) пространства $R^n (n > 1)$ непрерывные векторные поля имеют одинаковое вращение, то они гомотопны, т. е. могут быть соединены невырожденной деформацией. И, наоборот, гомотопные векторные поля на границе такой области имеют одинаковое вращение.

Топологический характер этой теоремы проявляется в следующем. Пусть $\partial\Omega_R$ — граница шара $B_R^n(\mathbf{x}_0)$ радиуса R с началом в точке $\mathbf{x}_0$, т. е. $\partial\Omega_R = S_R^{n-1}(\mathbf{x}_0)$. Пусть $\partial\Omega_r$ — граница шара $B_r^n(\mathbf{x}_0)$, $\partial\Omega_r = S_r^{n-1}(\mathbf{x}_0)$. Пусть на слое $r \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant R$ векторное поле не вырождено (нет особых точек), т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Тогда

$$\gamma(\partial\Omega_R, \mathbf{f}) = \gamma(\partial\Omega_r, \mathbf{f}).$$

Иначе говоря, при непрерывной деформации границы $\partial\Omega$ с $\partial\Omega_R$ до $\partial\Omega_r$ вращение векторного поля $\mathbf{f}$ *не меняется*, если в слое $r \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant R$ нет особых точек.

Вычисление вращения векторного поля — очень трудная задача, однако как глобальная характеристика векторного поля она может быть определена через свои локальные характеристики — индексы особых точек поля $\mathbf{f}$, связанные с невырожденными (изолированными) особыми точками, т. е. точками, где $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, а якобиан $\det(\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \neq 0$.

Определение 2. *Индексом особой точки* $\mathbf{x}_0$ (обозначается $\mathrm{ind}(\mathbf{x}_0, \mathbf{f})$) называется вращение векторного поля $\mathbf{f}$ на границе $\partial U_{\mathbf{x}_0}$ области $U_{\mathbf{x}_0}$, внутри которой имеется только **одна** изолированная особая точка, т. е. $\mathrm{ind}(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}) = \gamma(\partial U_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{f})$.

Конструктивный алгоритм вычисления вращения векторного поля дает следующая теорема Кронекера [15].

Теорема 4. Пусть непрерывное векторное поле $\mathbf{f}$ имеет в области Ω *конечное* число особых точек $\mathbf{x}_0(1), ..., \mathbf{x}_0(k)$ (аргумент обозначает номер особой точки) и не вырождено на границе $\partial\Omega$ этой области. Тогда

$$\gamma(\partial\Omega, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}(\mathbf{x}_0(i), \mathbf{f}).$$

Построение гомотопных векторных полей для линейной системы (1). С использованием топологического подхода мы будем искать границу управляемости для неустойчивого объекта управления (1) с ограниченным управлением (2). Найдем предельно допустимые точки, границу данной области, в точках которых множество скоростей (являющееся выпуклым) будет почти полностью располагаться в нуль-неуправляемой области, и только для одного из предельных управлений формируется *касатель-*

ное к границе векторное поле. Ясно, что при таком построении *сама граница* $\partial\Omega_c$ *не входит в область нуль-управляемости* и в идеальном случае моделирования формирует неустойчивый предельный цикл. Обозначим векторное поле исходной системы

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0{,}5x_2 + \bar{u} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

где $\bar{u} \in \{-1, 1\}$ — одно из предельных управлений. В соответствии с выражениями (17), (18) имеем дифференциальную *l*-форму и уравнение Пфаффа

$$\omega = (0{,}5x_2 + \bar{u})dx_1 - (x_1 + x_2)dx_2 = 0. \qquad (22)$$

Продифференцировав *l*-форму (22) внешним образом, получим

$$d\omega = -1{,}5dx_1 \wedge dx_2. \qquad (23)$$

Из выражения (23) следует, что *l*-форма ω не является замкнутой. Проинтегрируем *l*-форму (23):

1) как полный дифференциал по пути *I*. Получим

$$V_1(\mathbf{x}) = \int_I \omega = \bar{u}x_1 - x_1x_2 - \frac{x_2^2}{2}; \qquad (24)$$

2) как полный дифференциал по пути *II*. Получим

$$V_2(\mathbf{x}) = \int_{II} \omega = \bar{u}x_1 + 0{,}5x_1x_2 - \frac{x_2^2}{2}. \qquad (25)$$

Рассмотрим дифференциалы функций $V_1(\mathbf{x})$ и $V_2(\mathbf{x})$. Имеем

$$dV_1 = (\bar{u} - x_2)dx_1 - (x_1 + x_2)dx_2, \qquad (26)$$

$$dV_2 = (\bar{u} + 0{,}5x_2)dx_1 + (0{,}5x_1 - x_2)dx_2. \qquad (27)$$

Для уравнения Пфаффа справедливо равенство

$$\omega(L_{\mathbf{f}_0}) = 0. \qquad (28)$$

Формула (28) определяет свертку (скалярное произведение) координат *l*-формы ω и векторного поля $\mathbf{f}_0$. Эта формула также показывает, что векторное поле $\mathbf{f}_0$ принадлежит аннулятору (ортогональному пространству) множества span{ω}. Видно, что функции $V_1(\mathbf{x})$ и $V_2(\mathbf{x})$ не являются инвариантами однопараметрической группы преобразований с инфинитезимальным генератором $\mathbf{f}_0$, т. е. $dV_1(L_{\mathbf{f}_0}) \neq 0$, $dV_2(L_{\mathbf{f}_0}) \neq 0$.

Особые точки векторных полей для предельных управлений

Векторное поле	Предельное управление	Особые точки	
		Обозначения	Координаты
$\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$	+1 −1	$\mathbf{x}_{cr}(2)$ $\mathbf{x}_{cr}(1)$	$(2\ -2)^{\mathrm{T}}$ $(-2\ 2)^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$	+1 −1	$\mathbf{x}_0(1)$ $\mathbf{x}_0(2)$	$(-1\ 1)^{\mathrm{T}}$ $(1\ -1)^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$	+1 −1	$\mathbf{x}_0(3)$ $\mathbf{x}_0(4)$	$(-4\ -2)^{\mathrm{T}}$ $(4\ 2)^{\mathrm{T}}$

Найдем векторные поля $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, на траекториях которых, соответственно, функции $V_1(\mathbf{x})$ и $V_2(\mathbf{x})$ являются инвариантами. Это легко сделать по дифференциалам (26) и (27). Имеем две новые динамические системы:

$$\Sigma_1: \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \bar{u} - x_2;$$

$$\Sigma_2: \quad \dot{x}_1 = -0{,}5x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = 0{,}5x_2 + \bar{u}$$

с векторными полями соответственно:

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \bar{u} - x_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}5x_1 + x_2 \\ 0{,}5x_2 + \bar{u} \end{pmatrix}, \qquad (29)$$

причем $dV_1(L_{\mathbf{f}_1}) = 0$, $dV_2(L_{\mathbf{f}_2}) = 0$. Последние равенства говорят о том, что интегральные кривые полей $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ совпадают с линиями уровня соответственно функций $V_1(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}(0))$ и $V_2(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x}(0))$.

Интегральные кривые на фазовой плоскости исходного векторного поля (21) (*при постоянном управлении*) имеют следующий вид:

$$V_0(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + 2x_2 + 2\bar{u}}{(x_2 + 2\bar{u})^2} = \mathrm{const}. \qquad (30)$$

Найдем особые (критические, равновесные) точки каждого из векторных полей $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$. В таблице указаны обозначения и координаты особых точек для каждого векторного поля. Как видно из таблицы, ближайшие к началу координат особые точки $\mathbf{x}_0(1)$, $\mathbf{x}_0(2)$ — у векторного поля $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$. Это значит, что внутри круга радиуса $R < R_{cr} = \sqrt{2}$ все три векторных поля должны иметь одинаковое вращение.

На рис. 1 представлено графическое построение для нахождения вращения каждого векторного поля, которое показывает, что

$$\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_0) = \gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_1) = \gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_2) = 0; \ R < R_{cr},$$

т. е. нет ни одного полного оборота вокруг начала координат у любого из трех векторных полей, имеем гомотопные (топологически эквивалентные) векторные поля. При радиусе окружности $R < R_{cr} = \sqrt{2}$

$$\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_0) = \gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_2) = 0; \ \gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_1) = -1; \ R > R_{cr}$$

поле $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in C_R$, $R > R_{cr}$ делает один полный оборот в отрицательном (по часовой стрелке) направлении, получаем негомотопные векторные поля, т. е. имеем новое качество системы Σ_0.

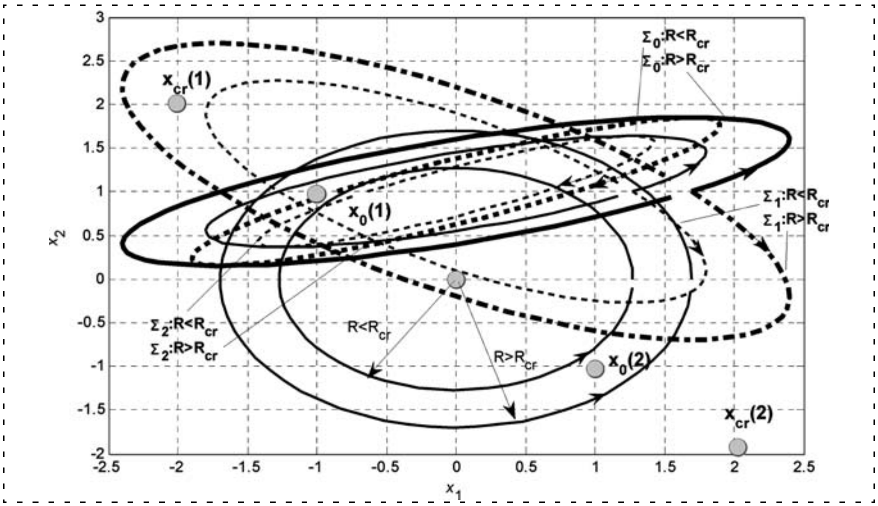


Рис. 1. Отображение окружности, определяющее вращение векторных полей $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ относительно начала координат для трех систем Σ_0, Σ_1, Σ_2:
$\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_0) = \gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_1) = \gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_2) = 0$; $R < R_{cr}$ — гомотопные векторные поля;
$\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_0) = \gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_2) = 0$; $\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{f}_1) = -1$; $R > R_{cr}$ — негомотопные векторные поля

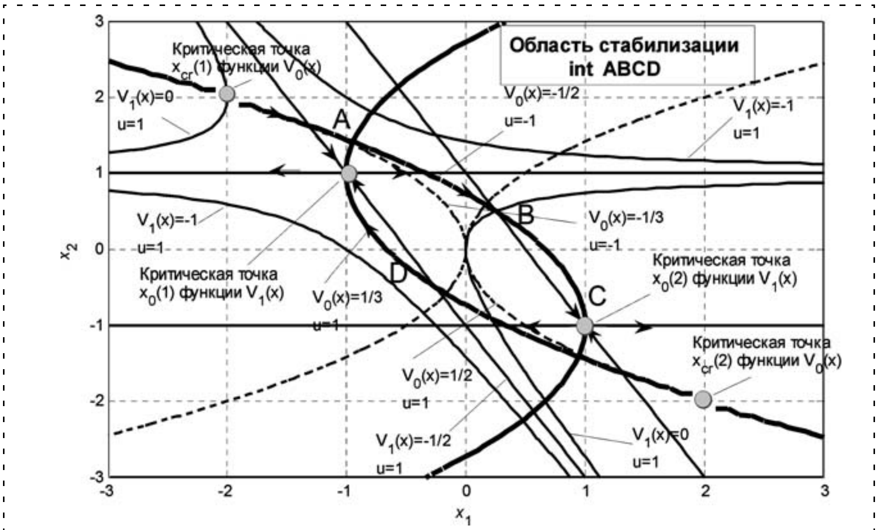


Рис. 2. Построение области стабилизации Ω_s = int*ABCD*. Особые точки и линии уровня функций $V_0(\mathrm{x})$, $V_1(\mathrm{x})$, совпадающие с траекториями векторных полей $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$

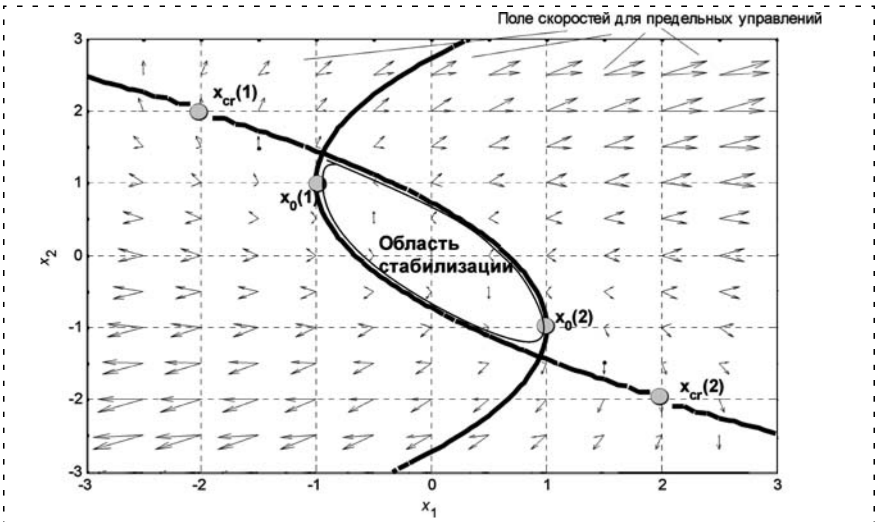


Рис. 3. Область стабилизации и поле скоростей для предельных управлений. Отмечены особые точки функций $V_0(\mathrm{x})$, $V_1(\mathrm{x})$ и линии уровня функции $V_0(\mathrm{x})$

На рис. 2 построены линии уровня функций $V_0(\mathbf{x})$, $V_1(\mathbf{x})$, проходящие через особые точки $\mathbf{x}_0(1)$, $\mathbf{x}_0(2)$, т. е. $V_0(\mathbf{x}) = V_0(\mathbf{x}_0(1))$, $V_0(\mathbf{x}) = V_0(\mathbf{x}_0(2))$ и $V_1(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_0(1))$, $V_1(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_0(2))$. Из этих построений видно, что именно замкнутая область *ABCD*, формируемая линиями уровня $V_0(\mathbf{x}) = V_0(\mathbf{x}_0(1))$, $V_0(\mathbf{x}) = V_0(\mathbf{x}_0(2))$, определяет область управляемости и предельную область стабилизации для исходной системы Σ_0.

Отметим, что сама граница $\partial(ABCD)$ не входит в область управляемости, так как представляет неустойчивый предельный цикл с периодическими предельными управлениями. Вне области *ABCD* все траектории являются нуль-неуправляемыми. В подтверждении данного утверждения на рис. 3 представлено поле скоростей для векторного поля $\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ с предельными управлениями.

Моделирование

Основными критериями при выборе параметров моделирования алгоритма управления были следующие:

- обеспечить максимальную область стабилизации, близкую к локальной области управляемости;
- максимально использовать предельные управления, позволяющие в отдельных случаях получить траектории, близкие к траекториям, оптимальным по быстродействию;
- обеспечить минимизацию вычислительных затрат при реализации алгоритма на аппаратных средствах.

Исходя из вышеназванных требований были получены следующие параметры моделирования:

- шаг дискретизации $h = 0{,}001$ с;
- интервал прогноза управления $t_u = 7h = 0{,}007$ с;
- интервал прогноза локального грамиана управляемости (всего два): 1) начальный грамиан: $T = 220h = 0{,}22$ с; 2) терминальный (для улучшения качества терминального управления переключение на новый грамиан управляемости происходит

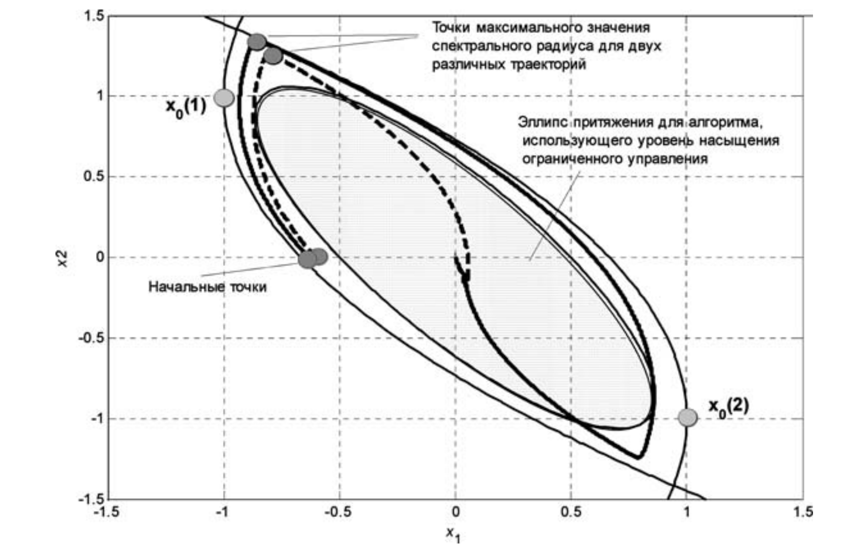


Рис. 4. Фазовые траектории в области стабилизации: x(0) = (−0,635 0)ᵀ, x(0) = = (−0,605 1)ᵀ. Указаны точки на траекториях, где имеют место максимальные значения спектрального радиуса матрицы перехода $\mathbf{T}_k$. Выделен эллипсоид притяжения для алгоритма управления с использованием уровня насыщения ограниченного управления

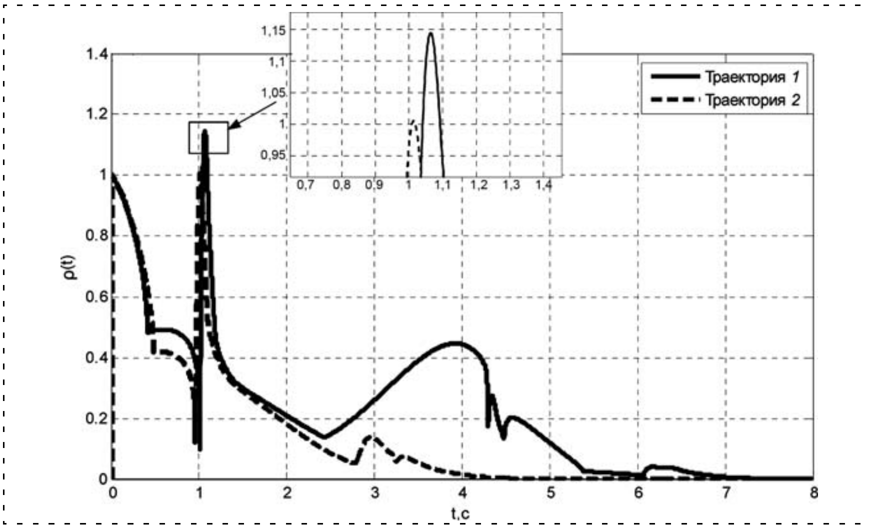


Рис. 5. Графики изменения спектрального радиуса матрицы перехода $\mathbf{T}_k$ в области стабилизации: x(0) = (−0,635 0)ᵀ — траектория *1*, x(0) = (−0,605 1)ᵀ — траектория *2*. Максимум достигается вблизи границы области стабилизации

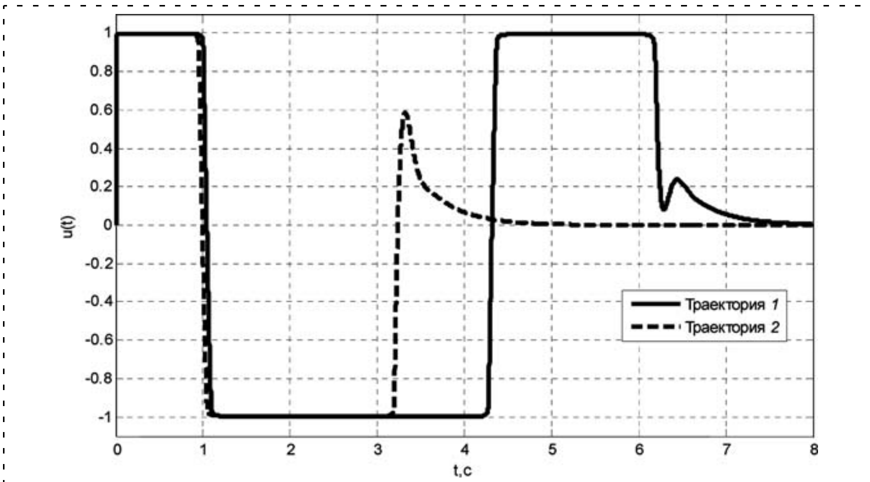


Рис. 6. Графики изменения управления в области стабилизации: x(0) = (−0,635 0)ᵀ — траектория *1*, x(0) = (−0,605 1)ᵀ — траектория *2*

при $|x_i(t_{sw})| \leqslant 0,25$; $i = 1, 2$): $T = 60h = 0,06$ с;

- коэффициент наклона арктангенса $a_u = 0,4$;
- точка разложения $\mathbf{x_W}$ грамиана управляемости $\widehat{\mathbf{W}}_c(T, \mathbf{x_W})$ выбрана постоянной, $\mathbf{x_W} = (0\ 0\ 30)^{\mathrm{T}}$, и при этом была обеспечена хорошая динамика переключений между предельными управлениями.

Результаты моделирования для двух траекторий представлены на рис. 4—6.

На рис. 5 представлены графики изменения спектрального радиуса для матрицы перехода $\mathbf{T}_k$, показывающие, что спектральный радиус для траектории *2* не превышает единицы, а у траектории *1* в точке, максимально близко подходящей к границе $\partial(ABCD)$ (см. рис. 4), кратковременно имеет место превышение единицы, но при этом достаточное условие стабилизации (14) выполнено. Факт превышения допустимого уровня говорит только о том, что траектория *1* очень близко подходит к границе, и для повышения надежности стабилизации предельные точки области стабилизации можно ограничить, например, траекториями вида *2*. Кроме того, для сравнения областей стабилизации на рис. 4 показана эллипсоидальная область стабилизации по уровням насыщения ограниченного управления [4]. Синтезируемые для траекторий *1* и *2* управления представлены на рис. 6. Многочисленное моделирование показало, что при выбранных параметрах все траектории с начальными условиями из области стабилизации эффективно переводятся в начало координат.

Заключение

В статье рассмотрены вопросы синтеза управления с использованием теоретико-группового подхода для неустойчивого линейного объекта с ограниченным управлением. Для применения разработанного на основе данного подхода метода модельного прогнозируемого управления с грамиановзвешиванием функция насыщения управления была заменена аналитической функцией "арктангенс", исходная система была расширена и введено новое виртуальное неограниченное управление. Для нахождения области локальной управляемости использовался топологический подход, который на основе изучения топологических характеристик, вращений, исходного и двух дополнительных векторных полей позволил достаточно просто определить две точки, принадлежащие границе области управляемости, по которым определена вся область управляемости. При этом полученная область стабилизации для синтезируемого регулятора практически полностью совпадает с областью управляемости.

Список литературы

1. **Ли Э. Б., Маркус Л**. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
2. **Boyd S., Ghaoui L. El., Feron E. and Balakrishnan V.** Linear matrix inequalities in system and control theory // Studies in Applied Mathematics, SIAM. 1994. V. 15.
3. **Peaucelle D.**, **Arzelier D.**, **Bertrand R.** Ellisoidal Sets for Static Output feedback// Proc. of 15th IFAC Congress, 2002. Barcelona, Spain. File 1760.pdf
4. **Краснощеченко В. И.** Синтез управления в задаче быстродействия с использованием метода модельного прогнозируемого управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 10. С. 2—10.
5. **Gomes da Silva J. M. Jr., Tarbouriech S.** Polyhedral Regions of Local Stability for Linear Discrete-Time Systems with Saturating Controls // Proc. of 36rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC97),December 1997. San Diego, USA.
6. **Morin P.**, **Samson C.** Stabilization of Trajectories for Systems on Lie Groups. Application to the Rolling Sphere // Proc. of 17th IFAC Congress. 2008. Seoul, Korea. P. 508—513.
7. **Bullo F., Murray R. M.** Proportional Derivative (PD) Control on the Euclidean Group // CDS Technical Report 95-010, California Institute of Technology, Pasadena, 1995. 47 p.
8. **Han Y., Park F. C.** Least Squaring Tracking on the Euclidean Group // IEEE Trans. Automatic Control. 2001. V. 46. № 7. P. 1127—1132.
9. **Casti J.** Polyhedral Dynamics and the Controllability of Dynamical Systems // J. Math. Anal. & Appl. 1979. N 68. P. 334—346.
10. **Краснощеченко В. И.** Топологический подход к исследованию предельного цикла уравнения Ван дер Поля // Тр. IV Междунар. науч.-техн. конф. "Кибернетика и технологии XXI века", Воронеж, 13—14 мая 2003 г. С. 1—9.
11. **Краснощеченко В. И.** Синтез регулятора с ограничением на управление и фазовым ограничением для тройного интегратора // Известия ТулГУ. Сер. "Технические науки". Вып. 5. Ч. 1. Тула: Изд-во ТулГу, 2011. С. 203—212.
12. **Краснощеченко В. И.** Декомпозиция дифференциальных уравнений. Присоединенное представление действия группы Ли в нелинейных системах // Матер. Всеросс. науч.-техн. конф. "Наукоемкие технологии в приборо- и машиностроении и развитие инновационной деятельности в вузе", 17—18 декабря, Калуга, 2009. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. С. 146—151.
13. **Kalman R., Ho Y. C., Narendra K. S.** Controllability of Linear Dynamical Systems // Contributions to Differential Equations, V. 1. N 2. 1962. P. 189—213.
14. **Краснощеченко В. И.** Об одном подходе к нахождению грамиана управляемости нелинейных аффинных систем управления // Известия ТулГУ. Сер. "Вычислительная техника, Информационные технологии. Системы управления". Вып. 3. Системы управления. Т. 1. Тула: Изд-во ТулГу, 2006. С. 239—243.
15. **Красносельский М. А., Забрейко П. П.** Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.

ИНФОРМАЦИЯ

21—25 января 2013 г. в Москве в НИЯУ МИФИ состоится

XV Всероссийская научно-техническая конференция

«НЕЙРОИНФОРМАТИКА — 2013»

Сопредседатели конференции

д-р техн. наук, проф. **Б. Н. Оныкий** (НИЯУ МИФИ),
акад. РАН **В. Б. Бетелин** (НИИСИ РАН),
акад. РАН **Ю. Г. Евтушенко** (ВЦ РАН).

Тематические направления:

- Нейробиология и нейробионика
- Системная биофизика
- Нейронные сети и когнитивные науки
- Нейросетевые парадигмы и архитектуры: представление данных, обучение и оптимизация
- Нейронные сети и самоорганизация систем
- Нейросетевые системы обработки данных, распознавания образов и управления
- Приложения нейроинформатики в медицине, технике, экономике, естественных и гуманитарных науках
- Аппаратная реализация нейронных сетей
- Модели адаптивного поведения
- Модели эволюции нейронных сетей

Подробную информацию о конференции см. на сайте:
http://neuroinfo.mephi.ru

УДК 62.50

С. В. Быстров[1], канд. техн. наук, доц.,
В. В. Григорьев[1], д-р техн. наук, проф.,
grigvv@yandex.ru,
Е. Ю. Рабыш[1], аспирант,
Rabysh@yandex.ru,
О. К. Мансурова[2], канд. техн. наук, доц.,
[1] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (НИУ ИТМО),
[2] Санкт-Петербургский Северо-Западный заочный технический университет

Анализ качества переходных процессов в непрерывных и дискретных системах на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости*

На основе достаточных условий качественной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости получены выражения оценок динамических показателей качества переходных процессов, позволяющие строить алгоритмы аналитического анализа и синтеза как непрерывных, так и дискретных динамических систем по желаемым прямым показателям качества, а также аналитического анализа динамических свойств неустойчивых непрерывных и дискретных динамических систем управления.

Ключевые слова: *непрерывные и дискретные системы, качественная экспоненциальная устойчивость и неустойчивость, анализ и синтез систем управления, оценки показателей качества*

Введение. Для оценки качества переходных процессов в системах с одним входом и одним выходом широкое распространение в инженерной практике получили показатели качества, основанные на переходной функции, т. е. определяемые по реакции на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Однако вводимые таким образом показатели качества не применимы непосредственно к многомерным системам. Множество траекторий в пространстве выходов многомерной системы, порожденных воздействиями, приложенными к различным входам, может состоять из существенно различающихся визуально кривых. На множестве таких кривых утрачивается очевидность их сравнения, а следовательно, и возможность сопоставить динамические свойства различных систем. Дальнейшее развитие подобного подхода нашло отражение во введении понятия совокупной переходной функции. Для этого вводится нормированная совокупная переходная функция многомерной системы [1], по которой, как и для систем с одним входом и одним выходом, определяются типовые показатели качества в виде времени переходного процесса и перерегулирования. Заметим, что эти показатели качества определяются по множеству траекторий, исходящих из области допустимых начальных значений внешних воздействий. Очевидно, что есть смысл в поиске методов нахождения значений показателей качества, позволяющих снизить объем вычислений и графических построений.

Одной из актуальных проблем теории управления является анализ поведения неустойчивых систем управления (систем с параметрическими нарушениями), ведь результаты этого анализа являются ценными для принятия решений при выходе из строя автоматической системы управления, когда неустойчивая система управления может представлять собой существенную угрозу, опасность и для человека, и для окружающей среды. При проектировании такой опасной системы управления необходимо позаботиться, чтобы при потере управления срабатывала система защиты и сигнализации, основанная на динамических свойствах самой системы управления и обеспечивающая минимизацию потерь, связанных с таким инцидентом. Для этого используется понятие качественной экспоненциальной неустойчивости, тесно связанной с качественными показателями процессов неустойчивых систем управления благодаря введению условий, ограничивающих фактически значения скорости изменения нормы вектора состояния системы, что непосредственно связано со степенью расходимости переходных процессов.

Постановка задачи. Наиболее сильные аттрактивные свойства положения равновесия системы обеспечиваются при условии экспоненциального затухания переходных процессов. Однако экспоненциальная устойчивость гарантирует нам только сходимость процессов к состоянию равновесия, но никак не связано с качеством их поведения. Поэтому появилась необходимость получения более локальных условий и понятий устойчивости, связанных с усилением ограничений на свойства системы. Для этого вводится понятие качественной экспоненциальной устойчивости, тесно связанной с качественными показателями процессов, такими как оценки быстродействия и перерегулирование, и являющейся сужением понятия экспоненциальной устойчивости благодаря введению дополнительных условий, ограничивающих фактически значения скорости изменения нормы вектора состояния системы [1].

Поведение непрерывной динамической системы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ — вектор начальных состояний; $t \geqslant 0$ —

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-08-00857-а.

время; f — n-мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x \in \mathbb{R}^n$ уравнения (1) существует и единственно.

Определение 1. Непрерывная система (1) в положении равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально (β, r) устойчивой, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такие параметры ρ $(\rho \geqslant 1)$, r $(r > 0)$ и β $(\beta + r < 0)$, при которых в любой момент времени $t \geqslant 0$ выполняется условие

$$\|x(t) - \mathbf{e}^{\beta t}x_0\| \leqslant \rho(\mathbf{e}^{(\beta + r)t} - \mathbf{e}^{\beta t})\|x_0\|. \tag{2}$$

Определение 2. Непрерывная система (1) в положении равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такие параметры ρ $(\rho \geqslant 1)$, r $(r > 0)$ и β $(\beta - r > 0)$, при которых в любой момент времени $t \geqslant 0$ выполняется условие (2). Здесь норма вектора задается соотношением

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где x_i — i-я компонента вектора состояния.

Поведение дискретной динамической системы описывается разностным уравнением вида

$$x(m + 1) = f(x(m)), \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ — вектор начальных состояний; $m = 0, 1, 2, ...$ — номер интервала дискретности; f — n-мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента такая, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x \in \mathbb{R}^n$ уравнения (4) существует и единственно.

Определение 3. Дискретная система (4) в положении равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально (β, r) устойчивой, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такие параметры ρ $(\rho \geqslant 1)$, r $(r > 0)$ и β $(\beta + r < 1, \beta - r > -1)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geqslant 0$ выполняется условие

$$\|x(m) - \beta^m x_0\| \leqslant \rho((\beta + r)^m - \beta^m)\|x_0\|. \tag{5}$$

Определение 4. Дискретная система (4) в положении равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такие параметры ρ $(\rho \geqslant 1)$, r $(r > 0)$ и β $(\beta - r > 1)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geqslant 0$ выполняется условие (5).

Параметры r и β имеют следующий смысл: параметр β подобен коэффициенту сноса и для устойчивых систем определяет среднюю скорость сходимости траекторий движения к положению равновесия, а для неустойчивых систем определяет среднюю скорость расходимости траекторий движения от начального состояния.

Под временем переходного процесса в непрерывных и дискретных динамических системах соответственно будем понимать значение $t = t_s$, такое что

$$\|x(t)\| = \delta_s\|x_0\|; \tag{6}$$

$$\|x(m)\| = \delta_s\|x_0\|, \tag{7}$$

т. е. момент времени, в который переходной процесс входит в заданную δ_s-окрестность положения равновесия. Выбор относительной величины окрестности δ_s определяется требованиями конкретной задачи. Обычно окрестность выбирается в пределах $\delta_s = 0{,}01...0{,}05$ (т. е. выбирается пятипроцентная окрестность положения равновесия).

Под перерегулированием в непрерывных и дискретных динамических системах соответственно будем понимать величины σ, определяемые уравнениями:

$$\sigma = \frac{-\min_{t \in (0,\infty)} x_m(t)}{\|x_0\|}; \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{-\min_{m \in (0,\infty)} x_m(m)}{\|x_0\|}, \tag{9}$$

где x_m — миноранта $\|x\|$, т. е. функция, ограничивающая снизу текущие значения нормы вектора состояния, так что $x_m \leqslant \|x\|$ для любого момента времени. Перерегулирование характеризует колебательность в устойчивой динамической системе.

Под критическим временем переходного процесса в непрерывных и дискретных динамических системах соответственно будем понимать значение $t = t_c$, такое что

$$\|x(t)\| = \delta_c\|x_0\|; \tag{10}$$

$$\|x(m)\| = \delta_c\|x_0\|, \tag{11}$$

т. е. момент времени, в который переходной процесс выходит за заданную критическую δ_c-окрестность начального положения $(\delta_c > 1)$. Выбор относительной величины окрестности δ_c определяется требованиями конкретной задачи и зависит от технологических параметров объекта управления. При этом критическое время переходного процесса для неустойчивых систем характеризует среднюю степень расходимости переходных процессов.

Под выбросом в непрерывных и дискретных динамических системах будем понимать величину σ_0 ($\sigma_0 > 2$), определяемую уравнением:

$$\sigma_0 = \frac{\max_{t \in [0, \infty)} x_m(t)}{\|x_0\|}; \quad (12)$$

$$\sigma_0 = \frac{\max_{m \in [0, \infty)} x_m(m)}{\|x_0\|}, \quad (13)$$

где $x_m(m)$ — миноранта $\|x(m)\|$, т. е. функция, ограничивающая снизу текущие значения нормы вектора состояния, так что $x_m(m) \leqslant \|x(m)\|$ для любого $m \geqslant 0$. Выброс косвенно характеризует колебательность в неустойчивой динамической системе. При значении σ_0, стремящемся к бесконечности, процесс носит монотонный характер.

Ставится задача отыскания на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости (2) и (5) для непрерывных и дискретных динамических систем, задаваемых уравнениями (1) и (4) соответственно, аналитических выражений оценок динамических показателей качества в виде времени переходного процесса, перерегулирования, критического времени переходного процесса и выброса, которые бы совместно с достаточными условиями качественной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости позволили бы создать эффективные процедуры аналитического анализа и синтеза систем управления.

Оценки показателей качества переходных процессов. Для оценки процессов используется квадратичная функция Ляпунова вида

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P x, \quad (14)$$

где P — симметричная положительно определенная матрица. Для этой функции справедливо соотношение Релея

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant c_2\|x\|^2, \quad (15)$$

где значения c_1 и c_2 являются минимальным и максимальным собственными числами матрицы P соответственно.

Теорема 1. Непрерывная система (1) качественно экспоненциально (β, r) устойчива в положении равновесия $x = 0$, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r ($r > 0$) и β ($\beta + r < 0$), при которых в любой момент времени $t \geqslant 0$ выполняется условие

$$V(\dot{x}(t) - \beta x(t)) \leqslant r^2 V(x(t)). \quad (16)$$

Теорема 2. Непрерывная система (1) качественно экспоненциально (β, r) неустойчива в положении равновесия $x = 0$, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r ($r > 0$) и β ($\beta - r > 0$), при которых в любой момент времени $t \geqslant 0$ выполняется условие (16).

Теорема 3. Дискретная система (4) качественно экспоненциально (β, r) устойчива в положении равновесия $x = 0$, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r ($r > 0$) и β ($\beta + r < 1$, $\beta - r > -1$), при которых для любого номера интервала дискретности $m \geqslant 0$ выполняется условие

$$V(x(m+1) - \beta x(m)) \leqslant r^2 V(x(m)). \quad (17)$$

Теорема 4. Дискретная система (4) качественно экспоненциально (β, r) неустойчива в положении равновесия $x = 0$, если для любых траекторий движения системы, исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r ($r > 0$) и β ($\beta - r > 1$), при которых для любого номера интервала дискретности $m \geqslant 0$ выполняется условие (17).

Из выполнения теорем 1 и 2 следует оценка (2), а из выполнения теорем 3 и 4 — оценка (5) [1, 2], при этом

$$\rho = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}. \quad (18)$$

Оценки динамических показателей качества в виде времени переходного процесса и перерегулирования для непрерывных систем имеют вид [3]

$$t_s = \frac{1}{\beta}\ln(\delta_s); \quad (19)$$

$$\sigma = \rho \mathbf{e}^{\frac{(\beta + r)}{r}\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta + r)}\right)} - (\rho + 1)\mathbf{e}^{\frac{\beta}{r}\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta + r)}\right)}. \quad (20)$$

Оценки динамических показателей качества в виде времени переходного процесса и перерегулирования для дискретных систем имеют вид [3]

$$t_s = T\log_{\beta}\delta_s; \quad (21)$$

$$\sigma = \rho(\beta + r)^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta + r)}\right)} - $$

$$- (\rho + 1)\beta^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta + r)}\right)}, \quad (22)$$

где T — интервал квантования. С помощью параметров t_s и σ определяется область допустимых процессов системы с заданными динамическими показателями.

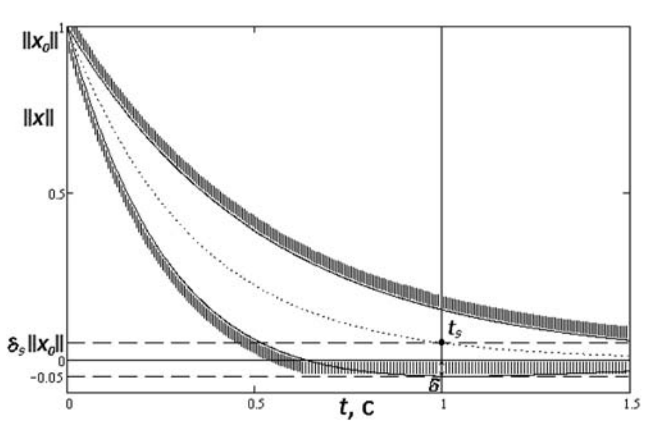


Рис. 1. Оценочные трубки из условий качественной экспоненциальной устойчивости

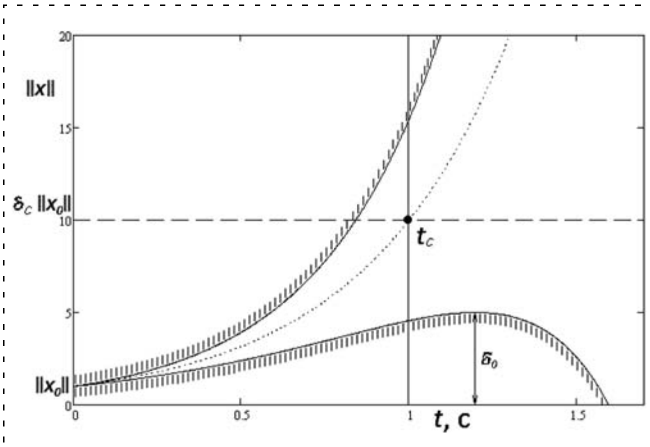


Рис. 2. Оценочная трубка из условия качественной экспоненциальной неустойчивости

Пример. При заданных параметрах качества

$$t_s = 1 \text{ с}, \ \delta_s = 0{,}05, \ \delta = 0{,}05, \ \rho = 1, \tag{23}$$

используя полученные оценки показателей качества и условия качественной экспоненциальной устойчивости, как для непрерывных, так и для дискретных систем получаем оценочную трубку, вид которой изображен на рис. 1. Все траектории системы, исходящие из области начальных значений вектора состояния и удовлетворяющие заданным показателям качества, лежат внутри этой оценочной трубки.

Оценки динамических показателей качества в виде критического времени переходного процесса и выброса для непрерывных систем имеют вид [4]

$$t_c = \frac{1}{\beta}\ln\delta_c; \tag{24}$$

$$\sigma_0 = (\rho + 1)\mathbf{e}^{\frac{\beta}{r}\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)} - \rho\mathbf{e}^{\frac{(\beta+r)}{r}\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)}. \tag{25}$$

Оценки динамических показателей качества в виде критического времени переходного процесса и выброса для дискретных систем имеют вид [4]

$$t_c = T\log_\beta\delta_c; \tag{26}$$

$$\sigma_0 = (\rho + 1)\beta^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)} - \rho(\beta + r)^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)}. \tag{27}$$

С помощью параметров t_c и σ_0 определяется область допустимых процессов системы с заданными динамическими показателями.

Пример. При заданных параметрах качества

$$t_c = 1 \text{ с}, \ \delta_c = 10, \ \rho = 1, \ \sigma_0 = 5, \tag{28}$$

используя полученные оценки показателей качества и условия качественной экспоненциальной неустойчивости, как для непрерывных, так и для дискретных систем получаем оценочную трубку, вид которой изображен на рис. 2. Все траектории системы, исходящие из области начальных значений вектора состояния и удовлетворяющие заданным показателям качества, лежат внутри этой оценочной трубки.

Аналитический анализ и синтез систем. Рассмотрим непрерывный объект управления, описание движения которого задается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{29}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ — вектор начальных состояний; $u \in \mathbb{R}^k$ — вектор управления; A — $(n \times n)$-матрица описания объекта; B — $(n \times k)$-матрица входов.

Рассмотрим дискретный объект управления, описание движения которого задается разностным уравнением вида

$$x(m + 1) = Ax(m) + Bu(m), \tag{30}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ — вектор начальных состояний; $u \in \mathbb{R}^k$ — вектор управления; A — $(n \times n)$-матрица описания объекта; B — $(n \times k)$-матрица входов.

В общем случае предполагая, что все переменные вектора состояния объекта управления доступны для измерения, управление ищем как функцию состояний объекта управления в виде

$$u = -Kx, \tag{31}$$

где K — $(k \times n)$-матрица линейных стационарных обратных связей по состояниям объекта управления.

Полагая, что объекты управления (30) и (31) являются полностью управляемыми, рассмотрим задачу нахождения такого закона управления, который обеспечивает для замкнутых систем качественную экспоненциальную устойчивость с заданными значениями параметров, определяемыми по требуемым значениям времени переходных процессов и перерегулирования.

Воспользовавшись локальными достаточными условиями качественной экспоненциальной устойчивости [1], приходим к матричному алгебраическому уравнению типа Риккати

$$(A - BK - \beta I)^{\mathrm{T}} P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q; \quad (32)$$

$$K = (B^{\mathrm{T}} P B)^{-1} B^{\mathrm{T}} P (A - \beta I), \quad (33)$$

которое может быть использовано для синтеза как непрерывных, так и дискретных систем с заданием соответствующих значений r и β. Здесь I — единичная $(n \times n)$-матрица. Для вычисления закона управления необходимо разрешить матричное алгебраическое уравнение типа Риккати (32), (33) относительно положительно определенной матрицы P, затем подставить в уравнение (33).

Алгоритм аналитического анализа динамических свойств многомерных непрерывных и дискретных устойчивых систем управления с исходными данными — матрицами A, B, K — следующий:

1. По заданным показателям качества, т. е. по времени переходного процесса (t_s) и перерегулированию (σ) определить значения параметров β и r по выражениям (19), (20) для непрерывных систем управления и (21), (22) — для дискретных систем управления.

2. Проверить выполнение условия

$$\max_i \lambda_i \leqslant 0, \ i = 1, 2, ..., n, \quad (34)$$

где λ_i определяются из характеристического уравнения

$$\det[[(A - BK - \beta I)^{\mathrm{T}}(A - BK - \beta I) - r^2 I] - \lambda I] = 0. \quad (35)$$

Если условие (34) выполняется, то выполняются и заданные показатели качества переходного процесса.

Поведение непрерывной неустойчивой системы управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = F_u x(t), \quad (36)$$

где F_u — $(n \times n)$-матрица описания системы.

Поведение дискретной неустойчивой системы управления описывается разностным уравнением вида

$$x(m + 1) = F_u x(m), \quad (37)$$

где F_u — $(n \times n)$-матрица описания системы.

Алгоритм аналитического анализа динамических свойств многомерных непрерывных и дискретных неустойчивых систем управления [4] с исходными данными — матрицей описания F_u — следующий:

1. По заданным показателям качества, т. е. по критическому времени переходного процесса (t_c) и выбросу (σ_0) определить значения параметров β и r по выражениям (24), (25) для непрерывной системы и (26), (27) — для дискретной системы.

2. Проверить выполнение условия

$$\max_i \lambda_i \leqslant 0, \ i = 1, 2, ..., n, \quad (38)$$

где λ_i определяются из характеристического уравнения

$$\det[[(F_u - \beta I)^{\mathrm{T}}(F_u - \beta I) - r^2 I] - \lambda I] = 0. \quad (39)$$

Если условие (38) выполняется, то выполняются и заданные показатели качества переходного процесса.

Заключение. На основе достаточных условий качественной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости, метода локальной оптимизации и полученных выражений оценок динамических показателей качества переходных процессов получены алгоритмы, позволяющие с единых позиций как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем аналитически синтезировать регуляторы по желаемым значениям прямых показателей качества и анализировать динамические свойства полученных систем управления, а также позволяющие аналитически исследовать динамические свойства неустойчивых систем управления.

Список литературы

1. **Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.** Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1983. 245 с.

2. **Григорьев В. В.** Качественная экспоненциальная устойчивость непрерывных и дискретных динамических систем // Известия вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2. С. 18—23.

3. **Григорьев В. В., Быстров С. В., Наумова А. К., Рабыш Е. Ю., Черевко Н. А.** Использование условий качественной экспоненциальной устойчивости для оценки динамических процессов // Известия вузов. Приборостроение. 2011. № 6. С. 24—30.

4. **Рабыш Е. Ю., Григорьев В. В., Быстров С. В., Спорягин А. В.** Использование условий качественной экспоненциальной неустойчивости для оценки динамических процессов // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2012. Т. 77. № 1. С. 36—40.

УДК 681.5.03

А. А. Воевода, д-р техн. наук,
voevoda@ucit.ru,
В. А. Жмудь, д-р техн. наук,
oao_nips@bk.ru,
А. Н. Заворин, аспирант,
zavorin@ngs.ru,
О. Д. Ядрышников, аспирант,
oleg_yadr@mail.ru,
Новосибирский государственный
технический университет

Сравнительный анализ методов оптимизации регуляторов с использованием программных средств VisSim и MATLAB

Рассматриваются методы численной оптимизации регуляторов с использованием разных программных средств (MATLAB-6.5 и VisSim 6.0). Предлагаются эффективные способы расчета регуляторов, обеспечивающие лучшее качество управления при более простой структуре регулятора (в сравнении с предлагаемыми в других статьях структурами).

Ключевые слова: *многопараметрические регуляторы, автоматическое управление, синтез регуляторов, оптимизация*

Введение

Задача синтеза систем управления динамическими объектами крайне актуальна. Нередко математическая модель объекта известна недостаточно точно или меняется во времени. В этом случае предпочтительно применение адаптивных регуляторов [1, 2] или применение методов робастного управления [3]. Последнее качество может быть охарактеризовано как большой запас устойчивости. Один из методов проверки запаса устойчивости — моделирование поведения системы с регулятором, рассчитанным по номинальному значению параметров модели объекта, с объектом, в параметры модели которого внесены изменения. Это позволяет оценить устойчивость, точность и качество системы не только при работе с объектом, полностью соответствующим его расчетной модели, но и с объектом, параметры которого определены недостаточно точно или изменились в ходе его функционирования. Сложность проектирования регулятора для таких систем возрастает с ростом порядка модели объекта, поэтому целесообразно рассматривать модели порядка выше третьего. Близкая задача рассмотрена и решена в статье [1], где за основу положено соотношение, представляющее выходной сигнал в форме суммы его номинальной величины и ее девиации [4].

В статье [1] предложена достаточно сложная методика проектирования регулятора для объекта четвертого порядка. Предлагаемая структура регулятора существенно сложнее, чем структура традиционного ПИД-регулятора, а именно: передаточная функция регулятора имеет вид рациональной дроби, содержащей в числителе и знаменателе полиномы четвертого порядка. Для объекта из работы [1] можно предложить более простой и более эффективный способ расчета регуляторов, а при этом получаемый регулятор имеет более простую структуру и обеспечивает лучшее качество управления. Это позволяет рекомендовать обсуждаемые методики синтеза регуляторов к широкому применению. Оптимизацию регуляторов для надежности результатов осуществляли в различных программных пакетах и по различным алгоритмам оптимизации: использовали пакет *MATLAB* 6.5 (*Simulink*), далее по тексту *MATLAB* 6.5, со встроенными функциями оптимизации (при внешнем задании модели объекта и структуры регулятора), а также пакет *VisSim* 6.0 с использованием предложенных ранее критериев оптимальности.

Постановка задачи

На примере линейного объекта с передаточной функцией в виде рациональной дроби, содержащей в знаменателе полином не ниже третьего порядка, требуется сравнить несколько методов синтеза регуляторов, а именно: метод, предложенный в статье [1], и методы, предложенные в цикле статей [5—8], а также метод, встроенный в пакет *MATLAB* 6.5 [9], с учетом специфики задачи.

Рассмотрим объект, описывающийся уравнением

$$Y(s) = W_O(s)U(s) + H(s) \tag{1}$$

с передаточной функцией

$$W_O(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)}. \tag{2}$$

Здесь $Y(s)$, $U(s)$, $H(s)$ — изображение по Лапласу от выходной величины $y(t)$, управляющего воздействия $u(t)$ и неизвестной, не поддающейся измерению помехи $h(t)$; $B_m(s)$ и $A_n(s)$ — полиномы порядка m и n; s — аргумент преобразования Лапласа; $W_O(s)$ — передаточная функция объекта по управлению.

Традиционно для таких объектов предлагается регулятор в соответствии с уравнением

$$U(s) = W_R(s)[V(s) - Y(s)]. \tag{3}$$

Здесь $V(s)$ — изображение по Лапласу от предписанного значения $v(t)$ для выходной величины $y(t)$; $W_R(s)$ — передаточная функция регулятора, отыскание которой составляет задачу проектирования. Структурная схема получаемой системы показана на рис. 1.

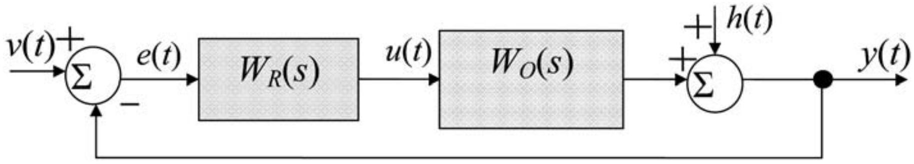


Рис. 1. Система с объектом и регулятором

Известный метод решения этой задачи, согласно работе [1], для объекта (2) при $m = 0$, $n = 4$ состоит в использовании регулятора вида

$$W_R(s) = \frac{C_q(s)}{D_p(s)}. \qquad (4)$$

Здесь $p = q = 4$, $C_q(s)$, $D_p(s)$ — полиномы порядка p и q (в данном случае — четвертого порядка), правила расчета коэффициентов указанных полиномов даны в работе [1].

Регуляторы такого класса по структуре существенно сложней традиционных ПИД-регуляторов. Действительно, ПИД-регуляторы соответствуют структуре (4) со значениями $p = q = 2$, а при цифровой реализации этих регуляторов можно обеспечить даже порядок числителя выше порядка знаменателя, например, $p = 1$, $q = 2$. Большее число параметров регулятора при современных методах их реализации не представляет никакой проблемы, однако излишнее усложнение структуры регулятора все же усложняет его численный расчет. На такое усложнение можно согласиться лишь при условии достижения лучших параметров системы, если же при более простой структуре можно обеспечить сопоставимое или лучшее качество системы, тогда указанное усложнение регулятора следует признать неэффективным (необоснованным).

Поэтому целесообразно рассмотреть другие методы, позволяющие получить регулятор, занимающий по сложности промежуточное положение между ПИД-регулятором и регулятором (4) со значениями $p = q = 4$, а именно: ПИД^2-регулятор (или ПИ^{2}Д^2-регулятор), т. е. регулятор, содержащий двойное полное или частичное дифференцирование (и при необходимости двойное полное или частичное интегрирование), т. е. регулятор вида (4) со значениями $p = 1$, $q = 3$ (или $p = 2$, $q = 4$). Для наглядности метод применяется к тому же самому объекту, а результаты в форме расчетных переходных процессов системы совмещены в одних осях для большего удобства их сопоставления.

Методы численного решения поставленной задачи

Оптимизация в программе *VisSim*. Целью управления в системе, показанной на рис. 1, является снижение ошибки регулирования. Для линейных систем достижение минимума ошибки по возмущению соответствует также минимуму ошибки по управлению, поэтому можно осуществлять численную оптимизацию системы по ее отклику на единичный ступенчатый скачок управляющего воздействия $v(t)$. В случае применения программы *VisSim* для численной оптимизации необходимо задать структуру и стартовые значения параметров регулятора, задать целевую функцию и выбрать метод оптимизации регулятора.

Основная цель управления, как правило, состоит в достижении минимума ошибки, которую целесообразно оценивать как интеграл от ее модуля. Для более успешной процедуры оптимизации под интеграл целесообразно внести дополнительное слагаемое e_0, которое резко растет в случае, если перерегулирование превысит максимальную предписанную величину. Таким образом, при оптимизации в программе *VisSim* будем использовать нижеследующий критерий оптимизации, который носит название "стоимостная функция" (*Cost Function*), поскольку при оптимизации осуществляется поиск таких коэффициентов регулятора, которые обеспечивают ее минимальное значение:

$$\Psi = \int_0^T [|e(t)|t + e_0(t)]dt. \qquad (5)$$

Здесь $e(t) = v(t) - y(t)$ — рассогласование между входом и выходом системы на рис. 1; $v(t)$ — задание для объекта; t — время от начала переходного процесса; T — время моделирования (которое изначально берется заведомо большим, чем ожидаемая длительность переходного процесса до достижения требуемой точности подавления ступенчатой помехи); $e_0(t)$ — определяется соотношением

$$e_0(t) = 100\max\{y(t) - (1 + \delta)v(t), 0\}. \qquad (6)$$

Соотношение (6) позволяет считать нулевой всякую ошибку, которая меньше δ. В некоторых лазерных и иных специальных системах требуется обеспечение погрешности $\delta < 0{,}00001$ [12] и даже менее [13—14], в большинстве инженерных систем достаточно принять $\delta < 0{,}001$ (погрешность 0,1 %).

Данная целевая функция выбрана для того, чтобы исключить большое перерегулирование. Детальная обоснованность стоимостной функции (5) приведена в работе [5]. Поскольку в программе *VisSim* 6.0 заложены три метода оптимизации [6] — алгоритмы оптимизации Пауэлла (*Powell*), Полака—Рибьера (*Polak—Rebier*) и Флетчера—Ривса (*Fletcher-Reeves*), — целесообразна апробация для каждой задачи каждого из указанных методов с последующим сравнением результатов. При их совпадении метод оптимизации несущественен. Если же результаты не совпадут, следует выбрать тот из них, который обеспечивает наименьшее значение функции (6), а результаты оптимизации другими методами считать недостаточно надежными.

Для убедительного сравнения предлагаемых методов с методом, описанным в статье [1], передаточная функция объекта и числовые значения его параметров взяты из примера этой статьи.

Обобщенное уравнение ПИ^{2}Д^2-регулятора имеет вид

$$W_R(s) = k_p + k_i/s + k_d s + k_2 s^2 + k_3/s^2. \qquad (7)$$

Задав структуру объекта (1) с параметрами, приведенными в работе [1], структуру регулятора (7), критерий оптимизации (стоимостную функцию) в форме (5) и выбрав метод оптимизации (один из трех, предлагаемых программой *VisSim*), мы практически полностью определили всю методику синтеза, результаты которого обсуждаются ниже.

Оптимизация в программе *MATLAB* 6.5. Программное обеспечение *MATLAB* 6.5 имеет встроенные алгоритмы оптимизации [9], которые позволяют оптимизировать параметры регулятора. Алгоритм динамической оптимизации (DO) по выставленным пределам желаемого переходного процесса осуществляет подбор коэффициентов регулятора, которые позволяют добиться желаемого переходного процесса, если эти пределы достижимы.

Оптимизация в программе *MATLAB* 6.5 требует задания таких параметров переходного процесса, которые принципиально могут быть достигнуты с выбранной структурой регулятора. Поскольку заранее это не может быть известно, можно рекомендовать несколько вариантов такой настройки, как показано в табл. 1. Оптимизация осуществляется для номинального объекта, взятого из статьи [1].

Таблица 1

Параметры настройки блока *NCD*

Метод оптимизации	Время переходного процесса, с	Перерегулирование, %
DO-I	200	0
DO-II	500	0
DO-III	800	0

Алгоритмы нахождения коэффициентов регулятора

Оптимизация ПИ(Д)-регулятора в ПО *VisSim*. Для оптимизации ПИ-регулятора используется следующий алгоритм (аналогичная процедура применяется и для ПИД-регулятора):

1. Задаем начальные условия параметров регулятора (k_p, k_i).
2. Задаем целевую функцию (5) в соответствии с заданными требованиями.
3. Проводим оптимизацию параметров регулятора.
4. Полученные параметры принимаем в качестве начальных условий и снова выполняем оптимизацию.

Данный алгоритм выполняется, пока изменения параметров регулятора в результате оптимизации станут незначительны.

Оптимизация ПИ(Д)-регулятора в ПО *MATLAB*. Для оптимизации ПИ-регулятора используется следующий алгоритм (аналогичная процедура применяется и для ПИД-регулятора):

1. Задаем начальные условия параметров регулятора (k_p, k_i).
2. Задаем пределы для желаемого переходного процесса (табл. 1).
3. Проводим оптимизацию параметров регулятора.

Расчет регулятора [1]. Данный алгоритм отражает общую процедуру расчета параметров регулятора из статьи [1] на примере объекта четвертого порядка:

1. Объект регулирования имеет вид

$$W_O(s) = \frac{k}{\alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}.$$

2. Задается структура регулятора следующего вида:

$$W_R(s) = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s}. \qquad (8)$$

3. Затем получают характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\Lambda(s) = s^8 + \lambda_7 s^7 + ... + \lambda_1 s + \lambda_0 = 0. \qquad (9)$$

4. Записывают характеристическое уравнение желаемой системы:

$$\Lambda_z(s) = s^8 + \lambda_7^0 s^7 + ... + \lambda_1^0 s + \lambda_0^0 = 0. \qquad (10)$$

5. Приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях (9) и (10), получая при этом систему линейных уравнений:

$$Mv = N,$$

$$M = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; N = \begin{bmatrix} g_0^0 \\ g_1^0 \\ g_2^0 \\ g_3^0 \\ g_4^0 - \alpha_0 \\ g_5^0 - \alpha_1 \\ g_6^0 - \alpha_2 \\ g_7^0 - \alpha_3 \end{bmatrix}; \; v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix},$$

где $v_1 = b_0$, $v_2 = b_1$, $v_3 = b_2$, $v_4 = b_3$, $v_5 = b_4$, $v_6 = a_1$, $v_7 = a_2$, $v_8 = a_3$.

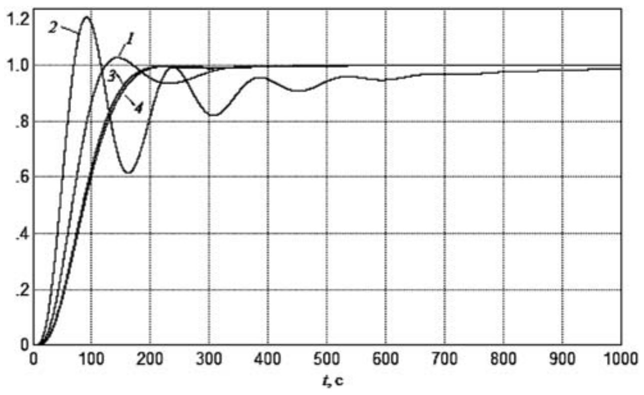


Рис. 2. Переходные процессы системы (α_1 = 80) с различными ПИ-регуляторами:
1 — **VSP**; *2* — **DO-I**; *3* — **DO-II**; *4* — **DO-III**

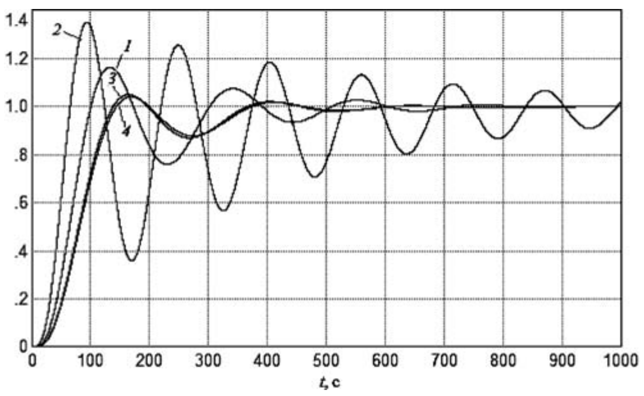


Рис. 3. Переходные процессы системы (α_1 = 60) с различными ПИ-регуляторами:
1 — **VSP**; *2* — **DO-I**; *3* — **DO-II**; *4* — **DO-III**

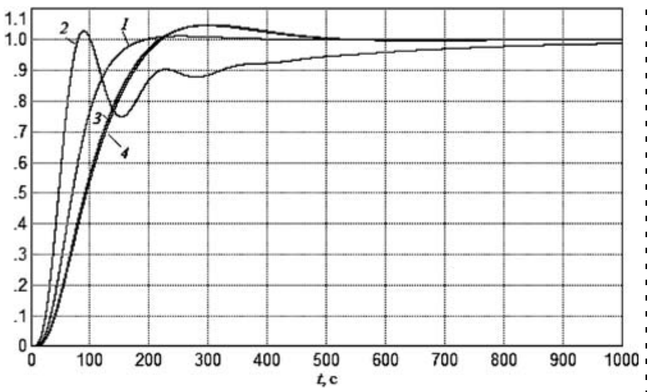


Рис. 4. Переходные процессы системы (α_1 = 100) с различными ПИ-регуляторами:
1 — **VSP**; *2* — **DO-I**; *3* — **DO-II**; *4* — **DO-III**

6. Записывают передаточную функцию регулятора (8) в следующем виде:

$$W_R(s) = \frac{v_5 s^4 + v_4 s^3 + v_3 s^2 + v_2 s + v_1}{s^4 + v_8 s^3 + v_7 s^2 + v_6 s}.$$

Результаты экспериментов

Объект с регуляторами различного вида. Для проведения исследований возьмем объект управления (ОУ), предложенный в статье [1], а именно:

$$W_O(s) = \frac{k}{\alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0},$$

где $k = 2{,}5$; $\alpha_0 = 1$; $60 \leqslant \alpha_1 \leqslant 100$; $\alpha_2 = 2300$; $\alpha_3 = 28\ 000$; $\alpha_4 = 120\ 000$. Номинальное значение коэффициента $\alpha_1 = 80$.

Вычислительные эксперименты проводили в среде *VisSim* 6.0 и *MATLAB* 6.5 с помощью стандартных функций [6]. В статье [1] к данному объекту рассчитан следующий регулятор:

$$W_R(s) =$$
$$= \frac{0{,}375 s^4 + 0{,}05 s^3 + 0{,}004 s^2 + 1{,}57 \cdot 10^{-4} s + 2{,}32 \cdot 10^{-6}}{s^4 + 0{,}21 s^3 + 0{,}195 s^2 + 0{,}0009 s}.$$

В результате оптимизации получаем регуляторы, параметры которых представлены в табл. 2 и табл. 3.

В качестве начальных коэффициентов для оптимизации в программе *VisSim* по методу оптимизации *Powell* (метод **VSP**) были выбраны $k_p = 0{,}5$; $k_i = 0$; $k_d = 0$ и целевая функция (ЦФ) (5). Переходные процессы получившейся системы представлены на рис. 2—7. Как видно из рис. 2—4, система с ПИ-регулятором (**DO-II**) имеет лучшие показатели качества для номинального параметра α_1 ($t_{pp} \approx 180$ с, t_{pp} — время переходного процесса, σ — перерегулирование). При уменьшении параметра α_1 система с этим регулятором также демонстрирует лучшее качество

Таблица 2

Параметры регулятора (*VisSim* + *Powell*) VSP

Значение ЦФ	ПИ-регулятор		Значение ЦФ	ПИД-регулятор		
	k_p	k_i		k_p	k_i	k_d
4807,658	0,3587	0,0054	5930,254	0,409	0,0045	14,826

Таблица 3

Параметры регулятора (*Matlab*)

Метод	ПИ-регулятор		Метод	ПИД-регулятор		
	k_p	k_i		k_p	k_i	k_d
DO-I	0,9039	0,0037	**DO-I**	0,7694	0,0074	16,8805
DO-II	0,2101	0,0044	**DO-II**	0,2103	0,0044	0,054
DO-III	0,1974	0,0043	**DO-III**	0,1895	0,0042	0,0211

переходных процессов (при $\alpha_1 = 60$: $t_{pp} \approx 350$, $\sigma \approx 4$ %). При увеличении этого параметра качество управления с этим регулятором также остается удовлетворительным (при $\alpha_1 = 100$: $t_{pp} \approx 350$, $\sigma \approx 5$ %), но регулятор по методу **VSP** в этом случае более эффективен. ПИ-регулятор по методу (**DO-I**) во всех случаях дает наименее привлекательные результаты.

Как видно из рис. 5—7, при номинальном значении параметров объекта наилучшее качество управления обеспечивает ПИД-регулятор по методу **DO-I**. В случае $\alpha_1 = 60$ (рис. 6) однозначно предпочесть какой-либо из этих регуляторов затруднительно. Регулятор **VSP** обеспечивает управление без перерегулирования, регулятор **DO-I** обеспечивает наискорейшее уменьшение ошибки управления, но перерегулирование с ним наибольшее и достигает $\sigma \approx 10$ %. Регуляторы по методу **DO-II** и **DO-III** дают близкие по виду результаты, которые для этого случая можно признать наихудшими, поскольку обеспечивают наиболее длительный переходный процесс.

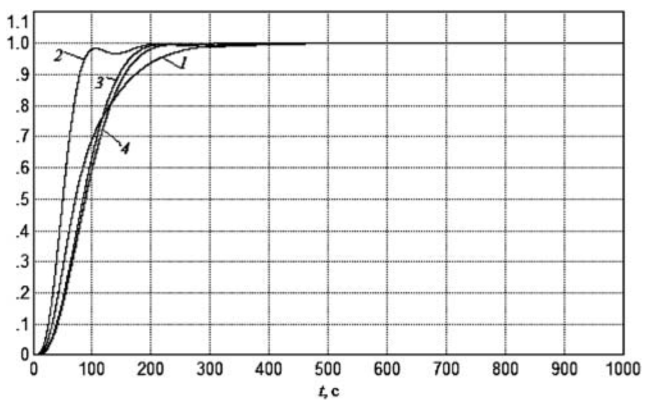


Рис. 5. Переходные процессы системы ($\alpha_1 = 80$) с различными ПИД-регуляторами:
1 — **VSP**; *2* — **DO-I**; *3* — **DO-II**; *4* — **DO-III**

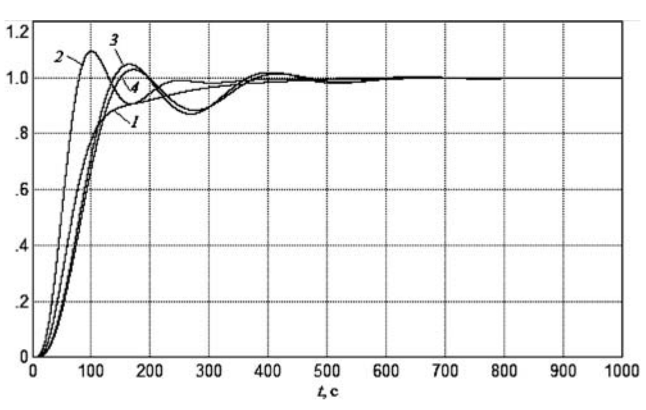


Рис. 6. Переходные процессы системы ($\alpha_1 = 60$) с различными ПИД-регуляторами:
1 — **VSP**; *2* — **DO-I**; *3* — **DO-II**; *4* — **DO-III**

В случае $\alpha_1 = 100$ (рис. 7) переходные процессы с регулятором **DO-I** наилучшие, остальные регуляторы дают близкие результаты, но регулятор **VSP** слегка лучше среди оставшихся. Для дальнейшей оптимизации ПИ^{2}Д^2-регуляторов возьмем за основу параметры ПИД-регулятора (**VSP**) и ПИД-регулятора (**DO-I**).

Оптимизация показала нецелесообразность введения второго интегратора. Введение дополнительного дифференцирования позволяет снизить значение целевой функции, поэтому целесообразно обсудить результаты оптимизации ПИД^2-регулятора, аналитическое выражение которого имеет вид

$$W_R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s(1 + k_1 s).$$

Начальные значения коэффициентов для оптимизации ПИД^2-регулятора были взяты следующими: $k_p = 0{,}409$; $k_i = 0{,}0045$; $k_d = 14{,}8$ и $k_p = 0{,}77$; $k_i = 0{,}0074$; $k_d = 16{,}9$. Далее проводили оптимиза-

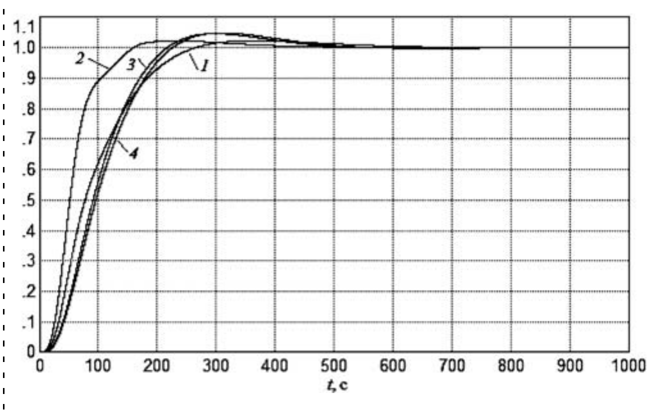


Рис. 7. Переходные процессы системы ($\alpha_1 = 100$) с различными ПИД-регуляторами:
1 — **VSP**; *2* — **DO-I**; *3* — **DO-II**; *4* — **DO-III**

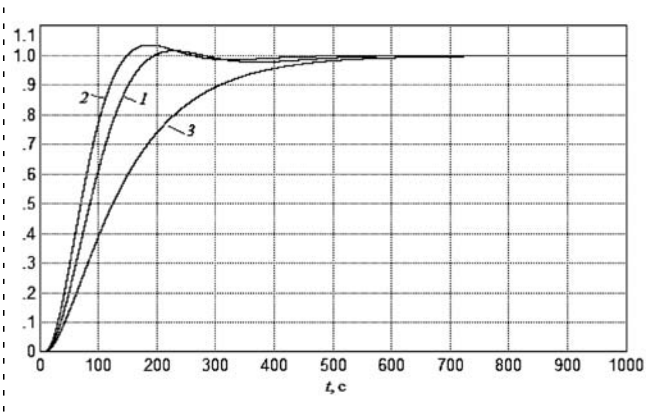


Рис. 8. Переходные процессы системы ($\alpha_1 = 80$) с различными регуляторами:
1 — ПИД^2-регулятор (**VSP**); *2* — ПИД^2-регулятор (**DO-II**); *3* — регулятор из работы [1]

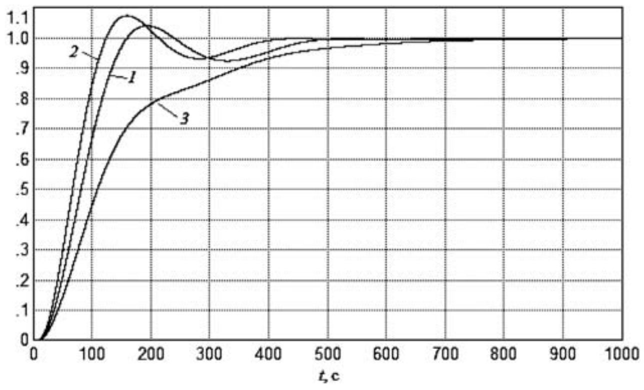


Рис. 9. Переходные процессы системы (α_1 = 60) с различными регуляторами:
1 — ПИД^2-регулятор (**VSP**); *2* — ПИД^2-регулятор (**DO-II**); *3* — регулятор из работы [1]

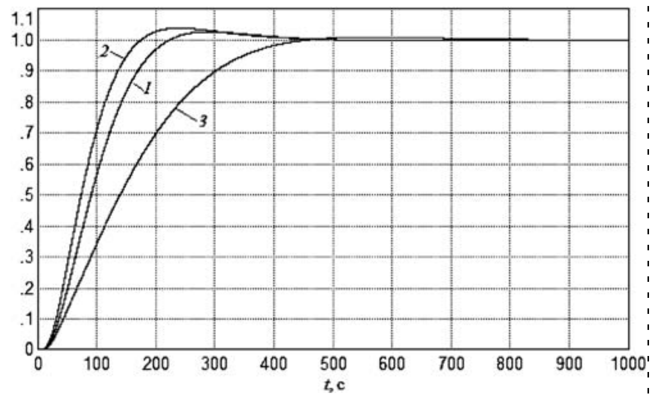


Рис. 10. Переходные процессы системы (α_1 = 100) с различными регуляторами:
1 — ПИД^2-регулятор (**VSP**); *2* — ПИД^2-регулятор (**DO-II**); *3* — регулятор из работы [1]

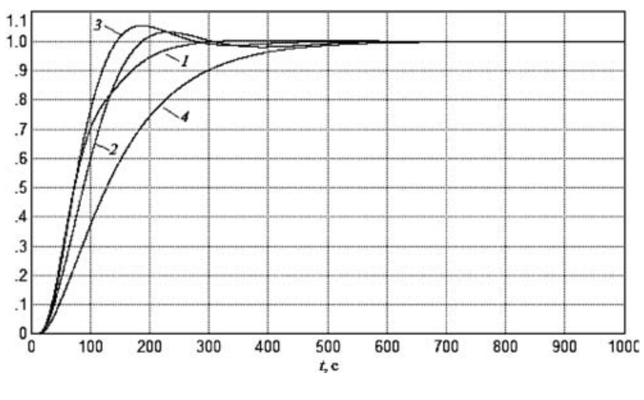


Рис. 11. Переходные процессы системы с запаздыванием:
1 — ПИД-регулятор (**VSP**); *2* — ПИД^2-регулятор (**VSP**); *3* — ПИД^2-регулятор (**DO**); *4* — регулятор из работы [1]

Таблица 4

Параметры ПИД^2-регулятора

Название метода	ПИД^2-регулятор				Значение ЦФ
	k_p	k_i	k_d	k_1	
VSP	0,404	0,0043	15,153	47,878	6914,779
DO-II	0,537	0,0055	16,961	31,056	4693,397

цию коэффициентов ПИД^2-регулятора. Результаты оптимизации приведены в табл. 4. Начальное значение $k_1 = 1$. Переходные процессы получившейся системы представлены на рис. 8—10.

Как видно из рис. 8, наилучший результат во всех случаях дает система с ПИД^2-регулятором по методу **VSP**. Регулятор из статьи [1] обеспечивает заметно более плохое быстродействие.

Различные виды регулятора и объект с добавлением запаздывания

Введем в исходную модель объекта управления транспортное запаздывание, поскольку управление объектами с запаздыванием представляет особую сложность [11]. Получим следующую передаточную функцию:

$$W_O(s) = \frac{2{,}5\mathbf{e}^{-5s}}{120\,000s^4 + 28\,000s^3 + 2300s^2 + 1}.$$

Моделирование данного объекта проводили с регуляторами, которые обеспечивают оптимальные переходные процессы в системе, рассчитанными выше. Получили переходные процессы, представленные на рис. 11. Наилучший результат получается с ПИ-регулятором и ПИД-регулятором по методу **VSP**, причем с ПИД-регулятором отсутствует перерегулирование, а с ПИД^2-регулятором обеспечивается быстрейшее затухание переходного процесса. Наихудшая система получается с регулятором, рассмотренным в статье [1]. Результаты для полученных результатов приведены в табл. 5.

Таблица 5

Сводная таблица исследований

Регулятор	Значения коэффициентов регулятора				Значение ЦФ
	k_p	k_i	k_d	k_1	
ПИ (**VSP**)	0,3587	0,0054	—	—	4807,658
ПИ (**DO-I**)	0,9039	0,0037	—	—	25236,94
ПИ (**DO-II**)	0,2101	0,0044	—	—	5331,238
ПИ (**DO-III**)	0,1974	0,0043	—	—	5480,462
ПИД (**VSP**)	0,409	0,0045	14,826	—	5930,254
ПИД (**DO-I**)	0,7694	0,0074	16,8805	—	1935,539
ПИД (**DO-II**)	0,2103	0,0044	0,054	—	5323,1
ПИД (**DO-III**)	0,1895	0,0042	0,0211	—	5741,825
ПИД^2 (**VSP**)	0,404	0,0043	15,153	47,878	6914,779
ПИД^2 (**DO-II**)	0,537	0,0055	16,961	31,056	4693,397
Статья [**1**]	—	—	—	—	18778,42

Заключение

В результате исследований и модельных экспериментов получены следующие результаты:

1. Выполнена оптимизация ПИД-регулятора различными методами:

- в программе *VisSim* по методу оптимизации *Powell* с применением целевой функции (5), (6) — (метод **VSP**);
- методом динамической оптимизации в программе *MATLAB* (метод **DO**). При разных настройках этого метода получали разные регуляторы: **DO-I**, **DO-II**, **DO-III**.

2. Исследован запас устойчивости при изменении одного из параметров объекта, характеризующего его склонность к колебательным движениям. При уменьшении этого параметра на 20 % наиболее эффективен регулятор по методу **DO-I**, при увеличении на 20 % наиболее эффективен регулятор **VSP**.

3. Оптимизирован ПИД^2-регулятор указанными методами.

4. Исследован запас устойчивости при изменении того же параметра. Наилучшие результаты получены с регуляторами по методам **DO-I** и **VSP**.

5. Исследовано изменение поведения системы при введении в объект запаздывания. Наилучшие результаты достигаются с регулятором по методу **VSP**.

Таким образом, удалось получить регуляторы, дающие лучшие показатели качества по сравнению с регулятором, рассмотренным в статье [1], и при номинальных значениях параметров объекта, и при существенном изменении этих параметров, включая введение запаздывания. Важной особенностью полученных регуляторов является их простая реализация, более простая, чем в случае регулятора по статье [1].

Работа поддержана грантом по проекту "Исследование предельных точностей оптических методов измерения параметров движения и мехатронных методов управления движением и разработка новых робототехнических и электромеханических систем", ТП-7.559.2011 и при поддержке Министерства образования и науки в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009—2013 гг., мероприятие 1.2.2, конкурс 630П, ГК № П761 от 20.05.2010.

Список литературы

1. **Бороздин П. А., Сыроквашин В. В., Фокин А. Л.** Робастное управление линейным инерционным объектом // АиТ. 2008. № 4. С. 41—49.
2. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
3. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Сверхустойчивые линейные системы управления. // АиТ. 2002. № 11. С. 56—75.
4. **Фокин А. Л.** Метод разделения движений и синтез робастной системы регулирования // Изв. вузов. Приборостроение. 2002. № 4. С. 11—16.
5. **Voevoda A. A., Ishimtsev R. Yu., Zhmud V. A.** The convergence of the algorithms for the optimization of regulator for an object with restriction and delay // Proc. of the 17th IASTED Internat. conf. "Applied Simulation and Modeling" (ASM 2008). June 23—25, Corfu, Greece. 2008. P. 182—186.
6. **Voevoda A. A., Zhmud V. A., Ishimtsev R. Yu., Semibalamut V. M.** The modeling tests of the new PIDregulators structures // Proc. of the 18th IASTED Internat. conf. "Applied Simulation and Modeling" (ASM 2009). Sept. 7—9, 2009. Palma de Mallorka, Spain. 2009. P. 165—168.
7. **Zhmud V. A., Liapidevskiy A. V.** The Design of the Feedback Systems by Means of the Modeling and Optimization in the Program VisSim 5.6/6.0 // Proc. of The 30th IASTED Conf. on Modelling, Identification, and Control. AsiaMIC 2010. November 24—26. Phuket, Thailand. 2010. P. 27—32.
8. **Бугров С. В., Ишимцев Р. Ю., Жмудь В. А.** Ускоренные алгоритмы оптимизации ПИД-регуляторов // Сб. науч. тр. НГТУ. 2008. № 3 (53). С. 3—12.
9. **Дьяконов В. П.** VisSim + Mathcad + MATLAB. Визуальное математическое моделирование. М.: СОЛОН-Пресс, 2004. 384 с.
10. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
11. **Громов Ю. Ю., Земской Н. А., Лагутин А. В.** Системы автоматического управления с запаздыванием. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. 76 с.
12. **Жмудь В. А., Бармасов С. В., Гительсон В. Д.** Электронная система стабилизации частоты He—Ne лазера по линиям поглощения метана // ПТЭ, 1999. № 4. С. 127—133.
13. **Frequency** standard at 732 nm based in iodine hyperfine transition used for high precision laser spectroscopy of Muonium / S. N. Bagaev, A. M. Belkin, A. S. Dychkov et al. // MPLP'97 Proc. of the Second Int. Symposium on Modern Problem of Laser Physics. Novosibirsk, 1997. V. 1. P. 377—386.
14. **Bagayev S. N., Chepurov S. V., Dychkov A. S.** et al. Femtosecond optical clock for precise measurements // Technical Digest. V International Symposium "Modern Problem of Laser Physics" MPLP'2008. Novosibirsk. P. 61.

УДК 681.5

Т. А. Царегородцева, аспирант,
solnce-t@bk.ru,
Ю. Н. Челноков,
д-р физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр.,
ChelnokovYuN@info.sgu.ru,
Институт проблем точной механики
и управления РАН

Применение бикватернионов для решения прямой задачи кинематики роботов-манипуляторов

Развивается метод решения прямых задач роботов-манипуляторов, основанный на бикватернионных моделях. Рассматривается геометрия и кинематика движения робота-манипулятора Пума с использованием бикватернионов конечных перемещений, бикватернионных матриц, матриц дуальных направляющих косинусов углов.

Ключевые слова: *прямая задача кинематики, бикватернион, бикватернионная матрица, матрица дуальных направляющих косинусов углов*

Одной из главных задач современной робототехники является создание более совершенных систем управления роботами, что требует, прежде всего, развития исследований в области кинематики и динамики. Актуальным остается решение прямой задачи кинематики роботов-манипуляторов.

Условно все методы решения прямой задачи можно разбить на три группы:

1. Методы, позволяющие записать нужные соотношения непосредственно из кинематической схемы манипулятора, т. е. из геометрических соображений без использования специальных приемов.

2. Методы, основанные на использовании матричного аппарата, например, матриц преобразования однородных координат размерностью 4×4 [1—3].

В этом методе вводятся системы координат, связанные с каждым из подвижных звеньев, а также базовые системы, связанные с основанием. Составляются так называемые матрицы перехода от одной системы координат к ближайшей (соседней). Затем перемножают все полученные матрицы перехода, строят результирующую матрицу, связывающую систему координат основания с системой координат любого звена, например захватного устройства.

3. Методы, основанные на использовании понятия вектора конечного поворота или винта конечного перемещения [4].

Для описания движения твердого тела около неподвижной точки существует ряд кинематических параметров: углы Эйлера—Крылова, направляющие косинусы, параметры Родрига—Гамильтона, параметры Кейли—Клейна.

Широкое применение получили углы Эйлера, а также матричный аппарат для случая, когда положение тела задается направляющими косинусами. Однако алгебра кватернионов позволяет более рационально описывать пространственное движение твердого тела. Среди всех кинематических параметров параметры Родрига—Гамильтона и Кейли—Клейна занимают особое место. Эти параметры не вырождаются при любом положении твердого тела, в отличие от углов Эйлера. Число этих параметров равно четырем, поэтому они имеют одно уравнение связи, в отличие от шести для направляющих косинусов. Применение кватернионов позволяет создать весьма удобный и наглядный формализм, использующий параметры Родрига—Гамильтона [5].

Для описания произвольного пространственного положения тела традиционно используются матрицы преобразования однородных координат 4×4. В статье используется аппарат бикватернионов, основанный на дуальных параметрах Эйлера (Родрига—Гамильтона).

Для описания вращательного движения твердого тела можно использовать четыре параметра Эйлера, которые обладают следующими достоинствами:

1) в отличие от углов Эйлера—Крылова они во многих случаях позволяют избавиться от операций с тригонометрическими функциями, что повышает эффективность использования ЭВМ при решении задач;

2) кинематические уравнения в параметрах Эйлера (Родрига—Гамильтона) являются линейными уравнениями, которые не вырождаются при любом угловом положении твердого тела (для сравнения: аналогичные уравнения в углах Эйлера нелинейны и имеют особые точки).

Прямая задача кинематики роботов-манипуляторов состоит в том, чтобы по известному вектору обобщенных координат и заданным геометрическим параметрам звеньев определить положение и ориентацию схвата манипулятора относительно абсолютной системы координат, связанной с основанием.

В данной статье развивается метод решения прямых задач роботов-манипуляторов, основанный на бикватернионных моделях. Рассматривается геометрия движения робота-манипулятора Пума с использованием бикватернионов конечных перемещений, бикватернионных матриц, матриц дуальных направляющих косинусов углов. Бикватернионы, предложенные Клиффордом, позволяют описывать пространственное движение в более удобной и компактной форме [6].

Построение матричных и бикватернионных уравнений прямых задач кинематики роботов-манипуляторов

Механический манипулятор можно рассматривать как разомкнутую цепь, которая состоит из нескольких твердых тел (звеньев), последовательно соединенных вращательными или поступательными сочленениями, приводимыми в движение силовыми приводами. Один конец этой цепи соединен с основанием, а другой конец свободен и снабжен рабочим инструментом, позволяющим воздействовать на объекты манипулирования или выполнять различные технологические операции. Относительное движение сочленений передается звеньям, в результате чего схват манипулятора занимает в пространстве заданное положение. Введем параметры, определяющие относительное положение соседних звеньев ($i-1$, i, $i+1$) и конструктивные особенности i-го звена [7].

Каждая пара, состоящая из звена и сочленения, обеспечивает одну степень свободы. В месте соединения двух звеньев определяется ось i-го сочленения. Эта ось имеет две пересекающие ее нормали, каждая из которых соответствует одному из звеньев. Относительное положение двух соединенных звеньев (звена ($i-1$) и звена i) определяется величиной φ_i^0 — расстоянием между этими нормалями, отсчитываемым вдоль оси сочленения. Присоединенный угол φ_i между нормалями измеряется в плоскости, перпендикулярной оси сочленения. Таким образом, φ_i^0 и φ_i можно назвать расстоянием и углом между смежными звеньями. Они определяют относительное положение соседних звеньев и являются конструктивными параметрами.

Звено i соединено не более чем с двумя звеньями (($i-1$)-м и ($i+1$)-м звеньями). Таким образом, в точках соединения i-го звена с двумя соседними определены две оси сочленений. Важное свойство звеньев с точки зрения кинематики состоит в том, что они сохраняют неизменной конфигурацию относительного расположения соседних сочленений, характеризуемую параметрами $\varphi_{i-1,i}^0$ и $\varphi_{i-1,i}$. В качестве параметра $\varphi_{i-1,i}^0$ выбрано кратчайшее расстояние между осями z_{i-1} и z_i i-го и ($i+1$)-го сочленений соответственно, измеряемое вдоль их общей нормали; $\varphi_{i-1,i}$ — угол между осями сочленений, измеряемый в плоскости, перпендикулярной их общей нормали. Таким образом, $\varphi_{i-1,i}^0$ и $\varphi_{i-1,i}$ можно рассматривать, соответственно, как длину и угол скрутки i-го звена.

Для описания вращательных и поступательных связей между соседними звеньями введем системы координат $X_iY_iZ_i$ следующим образом:

1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i-го сочленения;

2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и направлена от нее;

3) ось y_i дополняет оси x_i, z_i до правой декартовой системы координат.

На рисунке показаны перемещения i-го звена относительно ($i-1$)-го звена. Оси Z_{i-1}, Z_i', Z_i'', Z_i''', а также X_{i-1}, X_i', X_i'', X_i''' — параллельны.

Чтобы совместить систему координат $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ с $X_iY_iZ_i$, необходимо осуществить преобразования, эквивалентные двум дуальным поворотам [4]:

а) дуальному повороту относительно оси звена ($i-1$) на дуальный угол $\Phi_{i-1} = \varphi_{i-1} + s\varphi_{i-1}^0$, образуемый звеном ($i-1$, i) с предыдущим звеном, где s — символ Клиффорда (скалярная дуальная единица) [6]: $s^2 = -1$;

б) дуальному повороту относительно оси звена ($i-1$, i) на дуальный угол $\Phi_{i-1,i} = \varphi_{i-1,i} + s\varphi_{i-1,i}^0$, равный дуальному углу между осями ($i-1$)-го и i-го шарниров.

Схема дуальных поворотов, совмещающих систему координат $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ с $X_iY_iZ_i$, имеет вид

$$X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}\xrightarrow[Z_{i-1}]{\Phi_{i-1}} X''_{i-1}Y''_{i-1}Z''_{i-1} \xrightarrow[X_i]{\Phi_{i-1,i}} X_iY_iZ_i. \quad (1)$$

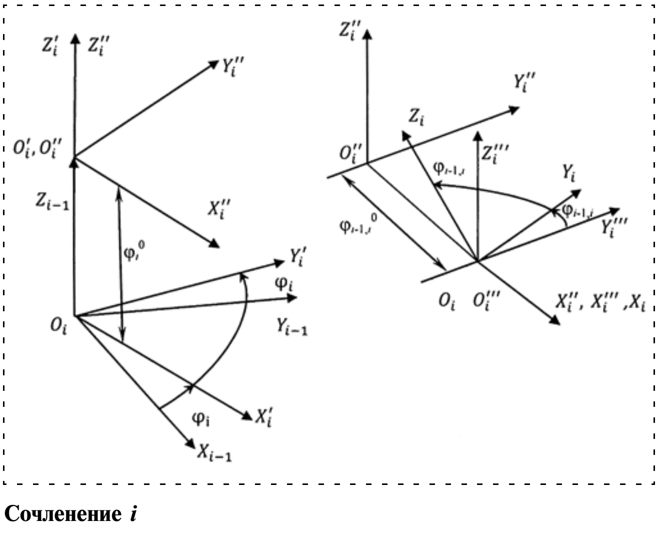
На схеме над стрелками и под стрелками указаны дуальные углы и оси, относительно которых выполняются дуальные повороты.

Введенные дуальные повороты описываются дуальными векторами конечных перемещений $\mathbf{\Theta}_{i-1}$ и $\mathbf{\Theta}_{i-1,i}$:

$$\mathbf{\Theta}_{i-1} = 2\mathrm{tg}\frac{\Phi_{i-1}}{2}\mathbf{E}_{i-1}; \; \mathbf{\Theta}_{i-1,i} = 2\mathrm{tg}\frac{\Phi_{i-1,i}}{2}\mathbf{E}_{i-1,i};$$

$$\Phi_{i-1} = \varphi_{i-1} + s\varphi_{i-1}^0; \; \Phi_{i-1,i} = \varphi_{i-1,i} + s\varphi_{i-1,i}^0,$$

где $\mathbf{E}_{i-1}$, $\mathbf{E}_{i-1,i}$ — единичные винты (векторы) осей Z_{i-1}, X_{i-1}.



Сочленение i

Величины $\varphi_{i-1,\,i}$ и $\varphi^0_{i-1,\,i}$, образующие дуальный угол $\Phi_{i-1,\,i}$ являются конструктивными (геометрическими) параметрами кинематического модуля и должны быть заданы (это постоянные величины). Величины φ_{i-1} и φ^0_{i-1}, образующие дуальный угол Φ_{i-1}, являются обобщенными координатами модуля и характеризуют относительные перемещения i-го шарнира относительно $(i-1)$-го.

Матричное и бикватернионное описание геометрии движения кинематического модуля

Описание на основе матриц дуальных направляющих косинусов углов. Запишем матрицы направляющих косинусов дуальных углов между осями систем координат $X''_{i-1}Y''_{i-1}Z''_{i-1}$ и $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$, $X_iY_iZ_i$ и $X''_{i-1}Y''_{i-1}Z''_{i-1}$, обозначив их $\mathbf{C}(\Phi_{i-1})$ и $\mathbf{C}(\Phi_{i-1,\,i})$:

$$\mathbf{C}(\Phi_{i-1,\,i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi_{i-1,\,i} & \sin\Phi_{i-1,\,i} \\ 0 & -\sin\Phi_{i-1,\,i} & \cos\Phi_{i-1,\,i} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\Phi_{i-1}) = \begin{pmatrix} \cos\Phi_{i-1} & \sin\Phi_{i-1} & 0 \\ -\sin\Phi_{i-1} & \cos\Phi_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переход от системы координат Y_{i-1} к Y_i определяется матрицей направляющих косинусов дуальных углов $\mathbf{C}^i_{i-1}$, имеющей вид [4]

$$\mathbf{C}^i_{i-1} = \mathbf{C}(\Phi_{i-1,\,i})\mathbf{C}(\Phi_{i-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Phi_{i-1} & \sin\Phi_{i-1} & 0 \\ -\cos\Phi_{i-1,\,i}\sin\Phi_{i-1} & \cos\Phi_{i-1,\,i}\cos\Phi_{i-1} & \sin\Phi_{i-1,\,i} \\ \sin\Phi_{i-1,\,i}\sin\Phi_{i-1} & -\sin\Phi_{i-1,\,i}\cos\Phi_{i-1} & \cos\Phi_{i-1,\,i} \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{C}(\Phi_{i-1})$, $\mathbf{C}(\Phi_{i-1,\,i})$ запишем в виде

$$\mathbf{C}(\Phi_{i-1}) = \mathbf{c}(\varphi_{i-1})(\mathbf{E} + s\varphi^{\circ}_{i-1}\mathbf{E}_3),$$

где $\mathbf{c}(\varphi_{i-1}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{i-1} & \sin\varphi_{i-1} & 0 \\ -\sin\varphi_{i-1} & \cos\varphi_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — вещественная матрица, $\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\mathbf{C}(\Phi_{i-1,\,i}) = \mathbf{c}(\varphi_{i-1,\,i})(\mathbf{E} + s\varphi^{\circ}_{i-1,\,i}\mathbf{E}_1),$$

где $\mathbf{c}(\varphi_{i-1,\,i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{i-1,\,i} & \sin\varphi_{i-1,\,i} \\ 0 & -\sin\varphi_{i-1,\,i} & \cos\varphi_{i-1,\,i} \end{pmatrix}$ — вещественная матрица, $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Описание на основе бикватернионов. Переход от системы координат Y_{i-1} к Y_i определяется бикватернионом $\boldsymbol{\Lambda}^i_{i-1}$, который находится через бикватернионы составляющих конечных перемещений $\boldsymbol{\Lambda}_{i-1}$ и $\boldsymbol{\Lambda}_{i-1,\,i}$ по формуле сложения собственных бикватернионов [4]:

$$\boldsymbol{\Lambda}^i_{i-1} = \boldsymbol{\Lambda}_{i-1} \circ \boldsymbol{\Lambda}_{i-1,\,i} =$$
$$= (\Lambda_{0i-1} + \mathbf{i}_3\Lambda_{3i-1}) \circ (\Lambda_{0i-1,\,i} + \mathbf{i}_1\Lambda_{1i-1,\,i}),$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_{i-1} = \Lambda_{0i-1} + \mathbf{i}_3\Lambda_{3i-1}$; $\boldsymbol{\Lambda}_{0i-1} = \cos\dfrac{\Phi_{i-1}}{2}$, $\Lambda_{3i-1} = \sin\dfrac{\Phi_{i-1}}{2}$; $\boldsymbol{\Lambda}_{i-1,\,i} = \Lambda_{0i-1,\,i} + \mathbf{i}_1\Lambda_{1i-1,\,i}$; $\Lambda_{0i-1,\,i} = \cos\dfrac{\Phi_{i-1,\,i}}{2}$, $\Lambda_{1i-1} = \sin\dfrac{\Phi_{i-1,\,i}}{2}$; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, символ "$\circ$" означает кватернионное умножение.

Отсюда находим компоненты Λ^i_{ki-1} $(k = \overline{0,3})$ бикватерниона $\boldsymbol{\Lambda}^i_{i-1}$:

$$\begin{aligned} \Lambda^i_{0i-1} &= \Lambda_{0i}\Lambda_{0i-1,\,i} = \cos\frac{\Phi_i}{2}\cos\frac{\Phi_{i,\,i-1}}{2}; \\ \Lambda^i_{1i-1} &= \Lambda_{0i-1}\Lambda_{1i-1,\,i} = \cos\frac{\Phi_{i-1}}{2}\sin\frac{\Phi_{i-1,\,i}}{2}; \\ \Lambda^i_{2i-1} &= \Lambda_{3i-1}\Lambda_{1i-1,\,i} = \sin\frac{\Phi_{i-1}}{2}\sin\frac{\Phi_{i-1,\,i}}{2}; \\ \Lambda^i_{3i-1} &= \Lambda_{3i-1}\Lambda_{0i-1,\,i} = \sin\frac{\Phi_{i-1}}{2}\cos\frac{\Phi_{i-1,\,i}}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Описание на основе бикватернионных матриц. Сопоставим винтам конечных перемещений $\boldsymbol{\Theta}_{i-1}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{i-1,\,i}$ (бикватернионам $\boldsymbol{\Lambda}_{i-1}$ и $\boldsymbol{\Lambda}_{i-1,\,i}$) бикватернионные матрицы $\mathbf{M}_{i-1}$, $\mathbf{N}_{i-1}$ и $\mathbf{M}_{i-1,\,i}$, $\mathbf{N}_{i-1,\,i}$, имеющие вид [4]:

$$\mathbf{M}_{i-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{0i-1} & 0 & 0 & -\Lambda_{3i-1} \\ 0 & \Lambda_{0i-1} & -\Lambda_{3i-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{3i-1} & \Lambda_{0i-1} & 0 \\ \Lambda_{3i-1} & 0 & 0 & \Lambda_{0i-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{N}_{i-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{0i-1} & 0 & 0 & -\Lambda_{3i-1} \\ 0 & \Lambda_{0i-1} & \Lambda_{3i-1} & 0 \\ 0 & -\Lambda_{3i-1} & \Lambda_{0i-1} & 0 \\ \Lambda_{3i-1} & 0 & 0 & \Lambda_{0i-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{i-1,\,i} = \begin{pmatrix} \Lambda_{0i-1,\,i} & -\Lambda_{1i-1,\,i} & 0 & 0 \\ \Lambda_{1i-1,\,i} & \Lambda_{0i-1,\,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{0i-1,\,i} & -\Lambda_{1i-1,\,i} \\ 0 & 0 & \Lambda_{1i-1,\,i} & \Lambda_{0i-1,\,i} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{N}_{i-1,\,i} = \begin{pmatrix} \Lambda_{0i-1,\,i} & -\Lambda_{1i-1,\,i} & 0 & 0 \\ \Lambda_{1i-1,\,i} & \Lambda_{0i-1,\,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{0i-1,\,i} & \Lambda_{1i-1,\,i} \\ 0 & 0 & -\Lambda_{1i-1,\,i} & \Lambda_{0i-1,\,i} \end{pmatrix}.$$

Переход от системы координат Y_{i-1} к Y_i определяется бикватернионной матрицей $\mathbf{M}^i_{i-1} = \mathbf{M}_{i-1}\mathbf{M}_{i-1,\,i}$ или бикватернионной матрицей $\mathbf{N}^i_{i-1} = \mathbf{N}_{i-1,\,i}\mathbf{N}_{i-1}$.

Вместо последних двух формул для описания взаимного положения систем координат Y_{i-1} и Y_i может быть использовано матричное уравнение, имеющее вид

$$\mathbf{\Lambda}^i_{i-1} = \mathbf{M}_{i-1}\mathbf{\Lambda}_{i-1,\,i} = \mathbf{N}_{i-1,\,i}\mathbf{\Lambda}_{i-1};$$
$$\mathbf{\Lambda}_{i-1} = (\Lambda_{0i-1},\, 0,\, 0,\, \Lambda_{3i-1});$$
$$\mathbf{\Lambda}_{i-1,\,i} = (\Lambda_{0i-1,\,i},\, \Lambda_{1i-1,\,i},\, 0,\, 0),$$

где $\mathbf{\Lambda}^j_i$ — матрица-столбец размера 4 × 1, элементы которой имеют вид (2).

Уравнения прямых задач кинематики манипуляционных систем роботов. Полагая, что кинематическая схема манипулятора состоит из n последовательно соединенных элементарных кинематических модулей, получим следующие уравнения для определения конечных положений манипулятора робота:

- уравнения в матрицах дуальных направляющих косинусов

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^n_0 = \mathbf{C}^n_{n-1}\,\mathbf{C}^{n-1}_{n-2}\,...\,\mathbf{C}^3_2\,\mathbf{C}^2_1\,\mathbf{C}^1_0;$$

- уравнения в бикватернионах

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^n_0 = \mathbf{\Lambda}^1_0 \circ \mathbf{\Lambda}^2_1 \circ ... \circ \mathbf{\Lambda}^n_{n-1};$$

- уравнения в бикватернионных матрицах

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^n_0 = \mathbf{M}^1_0 \circ \mathbf{M}^2_1 \circ ... \circ \mathbf{M}^{n-1}_{n-2} \circ \mathbf{M}^n_{n-1}$$

или

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^n_0 = \mathbf{N}^n_{n-1} \circ \mathbf{N}^{n-1}_{n-2} \circ ... \circ \mathbf{N}^2_1 \circ \mathbf{N}^1_0.$$

При получении уравнений были учтены правила сложения конечных перемещений в матрицах дуальных направляющих косинусов, бикватернионах и бикватернионных матрицах [4].

Построение матричных и бикватернионных уравнений прямых задач кинематики роботов-манипуляторов на примере робота манипулятора Пума

Поскольку каждая пара, состоящая из звена и сочленения, обеспечивает одну степень свободы, то манипулятор Пума с шестью степенями свободы содержит шесть пар звено—шарнир, причем звено 0 соединено с основанием, где размещается опорная система координат данной динамической системы, а последнее звено снабжено рабочим инструментом. Звенья и сочленения нумеруются по возрастанию от стойки к схвату манипулятора.

Введем следующие системы координат: $X_0Y_0Z_0$ — неподвижная, связанная с основанием манипулятора Пума; $X_iY_iZ_i$ — связанная с i-м звеном манипулятора.

Углы относительных поворотов звеньев вокруг осей Z_i обозначим, соответственно, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6. Эти шесть углов и будут обобщенными координатами манипулятора. Конструктивные параметры робота манипулятора Пума заданы в таблице [7], где d_i и θ_i являются расстоянием и углом между смежными звеньями, a_i и β_i — длина и угол скрутки i-го звена соответственно.

Схема дуальных поворотов согласно (1) имеет вид

$$X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1} \xrightarrow[z_{i-1} = z_i]{\theta_i + \varphi_i} X'_i\,Y'_i\,Z'_i \xrightarrow[z'_i = z''_i]{d_i}$$
$$X''_i\,Y''_i\,Z''_i \xrightarrow[x''_i = x'''_i]{a_i} X'''_i\,Y'''_i\,Z'''_i \xrightarrow[x''_i = x_i]{\beta_i} X_iY_iZ_i, \quad (3)$$

где $i = \overline{1, 6}$.

Бикватернионы конечных перемещений системы координат $X_1Y_1Z_1$ относительно системы координат $X_0Y_0Z_0$ введем в соответствии со схемой (3). Например, повороту на угол $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ вокруг оси $z_0 = z'_1$ отвечает дуальный угол $\Theta_1 = \theta_1 + s\theta^0_1 = \theta_1 = \frac{\pi}{2}$, бикватернион конечного перемещения $\mathbf{\Theta}_1 = \cos\frac{\Theta_1}{2} +$

Параметры систем координат звеньев манипулятора Пума

Сочленение i	θ_i	β_i	a_i, мм	d_i, мм	Пределы изменения
1	90	−90	0	0	−160...+160
2	0	0	431,8	149,09	−225...45
3	90	90	−20,32	0	−45...225
4	0	−90	0	433,07	−110...170
5	0	90	0	0	−100...100
6	0	0	0	56,25	−266...266

$+ \mathbf{i}_3 \sin\frac{\Theta_1}{2} = \cos\frac{\theta_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}_3\frac{\sqrt{2}}{2}$ и бикватернионные матрицы

$$\mathbf{M}(\mathbf{\Theta}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \ \mathbf{N}(\mathbf{\Theta}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Линейному смещению на величину $d_1 = 0$ мм вдоль оси $z_0 \| z_1'$ соответствует дуальный угол $D_1 = = d_1 + s d_1^0 = 0$,

бикватернион конечного перемещения

$$\mathbf{D}_1 = \cos\frac{D_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin\frac{D_1}{2} = \cos\left(s\frac{d_1^0}{2}\right) + \mathbf{i}_3 \sin\left(s\frac{d_1^0}{2}\right) = 1$$

и бикватернионные матрицы

$$\mathbf{M}(\mathbf{D}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{N}(\mathbf{D}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным способом находим дуальные углы, бикватернионы конечных перемещений и бикватернионные матрицы для следующих звеньев манипулятора.

Переход от системы координат $X_0 Y_0 Z_0$ к $X_6 Y_6 Z_6$ определяется дуальной матрицей направляющих косинусов

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0^6 = \mathbf{C}_5^6 \mathbf{C}_4^5 \mathbf{C}_3^4 \mathbf{C}_2^3 \mathbf{C}_1^2 \mathbf{C}_0^1 = \mathbf{c}_0^6 + s\mathbf{c}_0^{\circ 6},$$

где $\mathbf{c}_0^6$ и $s\mathbf{c}_0^{\circ 6}$ — главная и моментная части дуальной матрицы $\mathbf{C}$.

Поскольку

$$\mathbf{c}_0^{\circ 6} = 0;$$
$$\mathbf{c}_0^1 = \mathbf{c}(\beta_1)\mathbf{c}(\theta_1)\mathbf{c}(\varphi_1);$$
$$\mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}(\varphi_2);$$
$$\mathbf{c}_2^3 = \mathbf{c}(\beta_3)\mathbf{c}(\theta_3)\mathbf{c}(\varphi_3);$$
$$\mathbf{c}_3^4 = \mathbf{c}(\beta_4)\mathbf{c}(\varphi_4);$$
$$\mathbf{c}_4^5 = \mathbf{c}(\beta_5)\mathbf{c}(\varphi_5);$$
$$\mathbf{c}_5^6 = \mathbf{c}(\varphi_6),$$

то получим

$$\mathbf{C}_0^6 = \mathbf{c}(\varphi_6) * \mathbf{c}(\beta_5)\mathbf{c}(\varphi_5) * \mathbf{c}(\beta_4)\mathbf{c}(\varphi_4) * \\ * \mathbf{c}(\beta_3)\mathbf{c}(\theta_3)\mathbf{c}(\varphi_3) * \mathbf{c}(\varphi_2) * \mathbf{c}(\beta_1)\mathbf{c}(\theta_1)\mathbf{c}(\varphi_1).$$

Бикватернионные матрицы результирующего конечного перемещения системы координат выходного звена относительно опорной системы координат примут вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0^6 = \mathbf{M}_0^1 \mathbf{M}_1^2 \mathbf{M}_2^3 \mathbf{M}_3^4 \mathbf{M}_4^5 \mathbf{M}_5^6 = \mathbf{m}_0^6 + s\mathbf{m}_0^{\circ 6};$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0^6 = \mathbf{N}_5^6 \mathbf{N}_4^5 \mathbf{N}_3^4 \mathbf{N}_2^3 \mathbf{N}_1^2 \mathbf{N}_0^1 = \mathbf{n}_0^6 + s\mathbf{n}_0^{\circ 6},$$

где $\mathbf{m}_0^6$, $\mathbf{n}_0^6$ — главные, а $\mathbf{m}_0^{\circ 6}$, $\mathbf{n}_0^{\circ 6}$ — моментные части бикватернионных матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$.

Эти уравнения можно также записать в следующем матричном виде:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}_0^1 \mathbf{M}_1^2 \mathbf{M}_2^3 \mathbf{M}_3^4 \mathbf{M}_4^5 \mathbf{\Lambda}_5^6 = \mathbf{N}_5^6 \mathbf{N}_4^5 \mathbf{N}_3^4 \mathbf{N}_2^3 \mathbf{N}_1^2 \mathbf{\Lambda}_0^1.$$

Бикватернион результирующего конечного перемещения системы координат выходного звена относительно опорной системы координат примет вид

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0^1 \circ \mathbf{\Lambda}_1^2 \circ \mathbf{\Lambda}_2^3 \circ \mathbf{\Lambda}_3^4 \circ \mathbf{\Lambda}_4^5 \circ \mathbf{\Lambda}_5^6 = \boldsymbol{\lambda}_0^6 + s\boldsymbol{\lambda}_0^{\circ 6},$$

где $\boldsymbol{\lambda}_0^6$ и $\boldsymbol{\lambda}_0^{\circ 6}$ — главная и моментная части бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ (кватернионы).

Полученные выражения описывают геометрию движения манипулятора Пума и позволяют находить положение и ориентацию выходного звена через отдельные перемещения звеньев манипулятора. Ими описывается решение прямой задачи кинематики манипуляторов в различных дуальных матричных и бикватернионных формах. Полученные бикватернионные уравнения могут быть использованы для решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с помощью нового перспективного метода, основанного на использовании бикватернионной теории кинематического управления.

Список литературы

1. **Hollerbach J.** A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and comparative study of dynamic complication complexity // IEEE Trans. on SMC, SMC-10. 1980. N 11. P. 730—736.
2. **Kahn M. E., Roth B.** The near-minimum-time control of open-loop articulated kinematic chains // ASME J. of Dynam Syst, Measur. and Countr. 1971. V. 93. P. 164—172.
3. **Uicer J. J.** Dynamic force analysis of spatial linkages // ASME J. of appl. mech. 1967. June. P. 418—424.
4. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.
5. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 230 с.
6. **Clifford W.** Preliminary Scetch of Biquaternions // Proc. of London Math. Soc. 1873. V. IV. — P. 381—393.
7. **Фу К., Гонсалес Р., Ли К.** Робототехника: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 624 с.

УДК 519.713

П. К. Лопатин, канд. техн. наук, доц.,
efa14@yandex.ru,
Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева

Алгоритм исследования достижимости объекта манипулятором в неизвестной среде

Рассматривается алгоритм управления n-звенным манипуляционным роботом в среде с неизвестными статическими препятствиями. Доказывается теорема, утверждающая, что, двигаясь по данному алгоритму в дискретизированном конфигурационном пространстве, манипуляционный робот за конечное число шагов либо захватит объект, либо выдаст обоснованный ответ о том, что объект не может быть захвачен ни в одной из конфигураций.

***Ключевые слова**: робот, неизвестная среда, препятствия, достижимость*

Введение

При управлении манипуляционным роботом (МР) типичной является следующая задача: МР должен выдвинуться из стартовой конфигурации $\mathbf{q}^0$ и захватить своим схватом некоторый объект *Obj*. При этом часто *Obj* может быть захвачен не в одной, а в нескольких, а иногда и в бесконечном числе целевых конфигураций $\mathbf{q}_i^T$. Целевые конфигурации $\mathbf{q}_i^T$ объединяются в целевое множество B_T. Множество B_T может иметь произвольный вид.

Будем считать, что B_T не пополняется в течение всего времени движения МР. Считаем также, что координаты каждой точки из B_T известны и определены достоверно.

МР представляется в пространстве конфигураций (пространстве обобщенных координат) как точка. Функционирование МР должно происходить в пределах ограниченной области X конфигурационного пространства. Будем считать, что область X имеет такой вид, что для любого $\mathbf{q} \in X$ выполняются неравенства

$$\mathbf{a}^1 \leqslant \mathbf{q} \leqslant \mathbf{a}^2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{a}^1 = (a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1)$ — вектор нижних ограничений на значения обобщенных координат; $\mathbf{a}^2 = (a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2)$ — вектор верхних ограничений на значения обобщенных координат; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ — вектор обобщенных координат МР. Таким образом, область X представляет собой гиперпараллелепипед. При этом

1) точки, находящиеся вне (1), квалифицируются как запрещенные;

2) внутри X также могут присутствовать запрещенные состояния, которые можно вычислить заранее, например, это те состояния (конфигурации), в которых происходит недопустимое взаимопересечение звеньев.

Кроме того, запрещенной является та конфигурация, в которой МР налегает на препятствия. В условиях неизвестной среды все такие конфигурации вычислить заранее невозможно. Перед началом движения информации о запрещенных состояниях в X нет или она неполна. Точки из X, о которых нет достоверной информации о том, что они запрещенные, считаем разрешенными.

Рассмотрим теперь точки из B_T. Достижимой точкой $\mathbf{q}^T \in B_T$ будем считать только ту точку, которая удовлетворяет следующим двум критериям: 1) она не является запрещенной; 2) в нее можно попасть за конечное число шагов из $\mathbf{q}^0$, двигаясь в X по разрешенным состояниям. Точки из B_T, не удовлетворяющие хотя бы одному из двух таких критериев, считаем недостижимыми.

Теперь сформулируем следующую ***Задачу*** управления МР в неизвестной статической среде: даны стартовая конфигурация МР $\mathbf{q}^0$ и целевое множество B_T. Требуется предложить алгоритм, который за конечное число шагов либо передвинет МР из $\mathbf{q}^0$ в хотя бы одно достижимое состояние из множества B_T, либо выдаст обоснованный ответ о том, что ни одно состояние из целевого множества B_T не является достижимым.

Обзор исследований по проблеме

Если предположить, что B_T состоит из конечного числа точек $(\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, ... \mathbf{q}_N^T)$, то для решения ***Задачи*** можно применять различные алгоритмы управления МР в неизвестной и известной средах. Анализ этих алгоритмов проведен в работе [2].

В статье [2] также приводится алгоритм исследования достижимости множества целевых состояний, пригодный для решения ***Задачи.*** Алгоритм применим для *n*-мерного пространства состояний и решает ***Задачу*** за конечное число шагов. Однако алгоритм требует множества механических перемещений, а в худшем случае требует перемещения и/или исследования всех точек дискретизированного конфигурационного пространства, для чего необходимо очень значительное время.

В данной статье для решения ***Задачи*** мы модифицировали подход, предложенный в работе [1]. Суть данного подхода заключается в том, что МР планирует путь, соединяющий стартовую точку $\mathbf{q}^0$ и целевую $\mathbf{q}^T$, обходящий известные запрещенные состояния, и пытается исполнить данный путь либо до достижения $\mathbf{q}^T$, либо до столкновения в некоторой точке $\mathbf{q}^n$ с ранее неизвестным запрещенным состоянием. В последнем случае планируется новый путь $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$, соединяющий $\mathbf{q}^n$ и $\mathbf{q}^T$ и обходящий все известные запрещенные состояния. Показано [1], что задача перевода робота из $\mathbf{q}^0$ в $\mathbf{q}^T$ в неизвестной среде сводится к решению конечного числа задач планирования и исполнения пути $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$ (другими словами, к решению конечного числа задач ПИ (планирования в известной среде)). При этом предполагается, что имеется априорное знание о том, что $\mathbf{q}^T$ достижима.

Сформулированный в данной статье алгоритм сводится к задаче исследования достижимости конечного числа N_{BT} точек $\mathbf{q}_i^T$, $i = 1, 2, ..., N_{BT}$. Требование априорного знания о достижимости $\mathbf{q}_i^T$, $i = 1, 2, ..., N_{BT}$, снято. Сформулированы новые требования к процедуре ПИ, необходимые для решения ***Задачи***.

Предварительные условия

1. На множестве X вводим дискретизацию, т. е. накладываем на X сетку и впредь будем рассматривать только точки, лежащие на узлах сетки.

2. На множестве B_T выделяем конечное число N_{BT} точек $\mathbf{q}_i^T$, $i = 1, ..., N_{BT}$. Это те целевые конфигурации, достижимость которых будет исследоваться. В дальнейшем B_T будем рассматривать как список конфигураций $\mathbf{q}_i^T$, $i = 1, ..., N_{BT}$. Считаем, что B_T не пополняется, и потому N_{BT} не увеличивается. Считаем, что координаты каждой точки из B_T определяются достоверно.

3. Считаем, что у нас есть процедура ПИ ($\mathbf{q}^n$, $\mathbf{q}^T$, $ZAPR$, X), которая за конечное число шагов либо планирует путь из произвольной разрешенной точки $\mathbf{q}^n \in X$ в произвольную точку $\mathbf{q}^T \in X$ среди сообщенного ей множества $ZAPR$ известных запрещенных состояний (в этом случае ПИ() возвращает 1), либо выдает сообщение, что путь, в силу расположения $\mathbf{q}^n$, $\mathbf{q}^T$, $ZAPR$, спланирован быть не может (в этом случае ПИ() возвращает 0). Такие процедуры уже существуют, например, алгоритм полного перебора или алгоритм A* [3], которые для любой начальной точки $\mathbf{q}^n$ и любой целевой точки $\mathbf{q}^T$ при заданных известных запрещенных состояниях за конечное число шагов либо планируют путь из $\mathbf{q}^n$ в $\mathbf{q}^T$, либо сообщают, что путь из $\mathbf{q}^n$ в $\mathbf{q}^T$ спланирован быть не может.

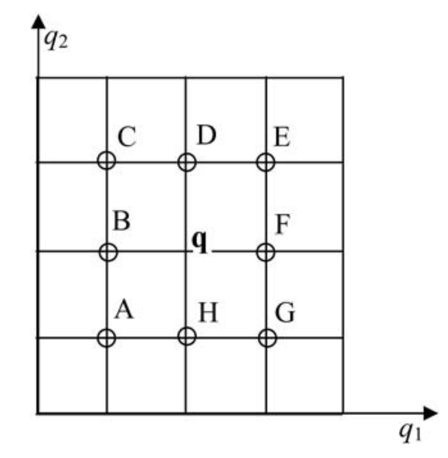


Рис. 1. Точки A-H образуют *r*-окрестность точки *q* в двумерном дискретизированном конфигурационном пространстве

4. Расположение и число препятствий внутри рабочей зоны МР остается неизменным в течение всего времени движения МР.

5. Все движение, в том числе и результирующий путь, должно происходить в гиперпараллелепипеде (1).

6. МР имеет сенсорную систему (СС), которая доставляет информацию об r-окрестности текущей точки МР $\mathbf{q} \in X$. Текущая точка МР — это та точка, в которой МР в настоящий момент находится.

Под r-окрестностью $\mathbf{q}$ понимаем множество точек, соседних к $\mathbf{q}$ и отстоящих от $\mathbf{q}$ не более, чем на один дискрет. Рис. 1 иллюстрирует расположение соседних к точке $\mathbf{q}$ точек (A, B, C, D, E, F, G, H) в двумерном конфигурационном пространстве.

Число соседних точек равно $3^n - 1$, где n — размерность конфигурационного пространства.

Множество всех точек, входящих в r-окрестность точки $\mathbf{q}$, обозначаем $Y(\mathbf{q})$ (в двумерном конфигурационном пространстве $Y(\mathbf{q})$ будет состоять из восьми точек A, B, C, D, E, F, G, H). Слова "доставляет информацию об r-окрестности точки $\mathbf{q}$" означают, что относительно каждой точки из $Y(\mathbf{q})$ ее СС определяет, является ли она разрешенной или запрещенной, при этом все запрещенные точки из $Y(\mathbf{q})$ заносятся в множество $Q(\mathbf{q})$, а все разрешенные точки из $Y(\mathbf{q})$ заносятся в множество $Z(\mathbf{q})$.

Способ записи множеств $Y(\mathbf{q})$, $Z(\mathbf{q})$, $Q(\mathbf{q})$ может быть разным — в виде формул, списков, таблиц и т. д., но мы считаем, что он есть. Устройство СС в данной работе не рассматривается.

7. Считаем, что у нас есть программная *Процедура 1* (B_T, N_{BT}, $ZAPR$). *Процедура 1* (B_T, N_{BT}, $ZAPR$) получает при вызове множество B_T, число N_{BT} точек в множестве B_T, множество $ZAPR$ запрещенных точек. *Процедура 1* (B_T, N_{BT}, $ZAPR$) выбрасывает из B_T те точки, которые совпадают с точками из $ZAPR$. После выброса оставшиеся точки в B_T перенумеровываются сплошной нумерацией, начиная с 1, и в N_{BT} записывается число точек, оставшихся в B_T после исполнения *Процедуры 1* (B_T, N_{BT}, $ZAPR$).

8. Считаем, что у нас есть программная *Процедура 2*(), которая работает в соответствии со следующим псевдокодом:

Процедура 2()

СС доставляет информацию о $Y(\mathbf{q}^n)$, $Z(\mathbf{q}^n)$, $Q(\mathbf{q}^n)$.

if ($QBT := Q(\mathbf{q}^n) \cap B_T \neq 0$)

/*то есть если поступила информация о том, что какие-то конфигурации из B_T являются запрещенными, произвести выброс запрещенных точек из B_T*/N_{BT}: = *Процедура 1* (B_T, N_{BT}, $Q(\mathbf{q}^n)$);

endif

Return(N_{BT});

Конец Процедуры 2 ()

9. Исполнение пути происходит следующим образом. МР находится в текущей точке $\mathbf{q}$ и, если следующая точка $\mathbf{q}^*$ пути не является запрещенной, то МР переходит в $\mathbf{q}^*$. В противном случае в $\mathbf{q}^*$ МР не переходит.

Ниже приведен ***Алгоритм*** решения нашей ***Задачи***. Перед началом движения текущей конфигурацией $\mathbf{q}^c$ МР является $\mathbf{q}^0$, по ходу движения ***Алгоритм1*** может вызываться из других текущих конфигураций МР.

Алгоритм

1. while ($N_{BT} \neq 0$)
2. qc — текущая конфигурация МР. В качестве qT выбираем первую точку из BT .
3. if (объект_захвачен: = ***Алгоритм1*** (qc, qT) = ДА)
   сообщить о том, что Obj захвачен в конфигурации qT;
   go to 6;
   endif
4. endwhile
5. Сообщить о том, что Obj не может быть захвачен
6. Конец ***Алгоритма***

Алгоритм 1 получает значения в формате ***Алгоритм1*** ($\mathbf{q}^n$, $\mathbf{q}^T$) и посвящен выяснению вопроса о том, является ли точка $\mathbf{q}^T$ достижимой из $\mathbf{q}^n$ в неизвестной среде.

Алгоритм1 ($\mathbf{q}^n$, $\mathbf{q}^T$)

1. МР находится в $\mathbf{q}^n$ (назовем ее "точка смены пути").
2. N_{BT}: = *Процедура 2* ();
3. if ($N_{BT} = 0$)
   объект_захвачен: = НЕТ;
   return(*объект_захвачен*);
   endif
4. /*если в $Z(q^n)$ есть конфигурации, в которых может быть захвачен Obj*/
   if (ZBT: = $Z(\mathbf{q}^n) \cap B_T \neq 0$)
   перейти в первую такую конфигурацию из B_T;
   объект захвачен: = ДА;
   return *(объект_захвачен)*;
   else
   go to 5;
   endif
5. /* Здесь осуществляется попытка планирования $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$ внутри X*/
   if (*number_config: = ПИ* ($\mathbf{q}^n$, $\mathbf{q}^T$, $\bigcup_{i=0}^{n} Q(\mathbf{q}^i)$, X) = 0)
   /*Если попытка не успешна*/
   /*$L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$ сгенерирован быть не может, то есть $\mathbf{q}^T$ является недостижимой*/
   N_{BT}: = *Процедура 1* (B_T, N_{BT}, $\mathbf{q}^T$);
   объект_захвачен: = НЕТ;
   return(*объект_захвачен*);
   endif
   /*Если попытка успешна, происходит переход на 6*/
6. МР начинает исполнение пути $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$. Исходов движения может быть два: 1) МР попадает в некоторую разрешенную точку $\mathbf{q}_i^T \in B_T$. В этом случае происходит присвоение $\mathbf{q}^T$: = $\mathbf{q}_i^T$ и *объект_захвачен: = ДА* и выполняется возврат в ***Алгоритм***; 2) МР придет в некоторую точку $\mathbf{q}^*$, следующая за которой является запрещенной. В этом случае
   n: = $n + 1$;
   $\mathbf{q}^n$: = $\mathbf{q}^*$;
   go to 1;
7. Конец Алгоритма1

Теорема. Исполняя ***Алгоритм***, МР решит ***Задачу*** за конечное число шагов.

Доказательство. ***Алгоритм*** выясняет достижимость конечного числа точек из B_T. Выяснение достижимости в отношении каждой из точек $\mathbf{q}^T \in B_T$ осуществляется путем исполнения ***Алгоритма1***. Отсюда видно, что исполнение ***Алгоритма*** сводится к конечному числу вызовов ***Алгоритма1***. Поэтому, чтобы доказать, что ***Алгоритм*** будет исполнен за конечное число шагов, требуется показать, что исполнение ***Алгоритма1*** для произвольных $\mathbf{q}^n$ и $\mathbf{q}^T$ будет осуществлено за конечное число шагов.

Алгоритм1 посвящен выяснению вопроса о том, является ли точка $\mathbf{q}^T$ достижимой в неизвестной среде из точки смены маршрута $\mathbf{q}^n$ или нет. В ***Алгоритме1***, когда МР находится в точке $\mathbf{q}^n$, $n = 0, 1, 2, ...$, происходит запуск СС и запуск процедуры ПИ(). Если в результате исполнения этих действий точка $\mathbf{q}^T$ будет определена как запрещенная (в силу налегания на препятствие, либо в силу недостижимости), произойдет возврат в ***Алгоритм***, и для исследования достижимости будет назначена другая точка $\mathbf{q}^T \in B_T$. Если в результате исполнения этих действий точка $\mathbf{q}^T$ не будет определена как запрещенная, происходит генерация пути $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$, и МР начнет исполнять этот путь. Исполнение этого пути может иметь два исхода: либо МР, не встретив на своем пути запрещенных точек, достигнет $\mathbf{q}^T$, она окажется разрешенной, и тогда произойдет успешное окончание работы ***Алгоритма***, либо МР придет в точку $\mathbf{q}^n$, $n = 1, 2, ...$, следующая за которой будет запрещенной. Покажем, что все точки смены пути $\mathbf{q}^n$, $n = 0, 1, 2, ...$, будут различными и их число будет конечным.

Покажем, что все точки смены пути различны. Предположим, что МР сменил путь, находясь в точке $\mathbf{q}^s$, а потом, находясь в точке $\mathbf{q}^p$, вновь сменил путь, т. е. $s < p$. Покажем, что $\mathbf{q}^s \neq \mathbf{q}^p$. Предположим сначала, что $\mathbf{q}^s = \mathbf{q}^p$, и тогда $Q(\mathbf{q}^s) = Q(\mathbf{q}^p)$. Поскольку МР сменил путь, находясь в точке $\mathbf{q}^s$, то он сгенерировал путь, не налегающий, в том числе, и на $Q(\mathbf{q}^s)$. Но поскольку МР сменил путь в точке $\mathbf{q}^p$, то это означает, что его путь налег на $Q(\mathbf{q}^p) = Q(\mathbf{q}^s)$ (при этом $\mathbf{q}^s = \mathbf{q}^p$ является центром r-окрестности точки $\mathbf{q}^s = \mathbf{q}^p$ и следующая за ней точка является запрещенной), т. е. $Q(\mathbf{q}^p) = Q(\mathbf{q}^s)$ не было известным. Получили противоречие. Отсюда видно, что все точки смены пути различны.

Сделав отступление, заметим здесь, почему про каждую точку из $Y(\mathbf{q}^n)$, $n = 0, 1, 2, ...$, СС должна доставлять точную и достоверную информацию, где $\mathbf{q}^n$ — точка смены пути. Предположим, что МР исполнял путь $L(\mathbf{q}^{n-1}, \mathbf{q}^T)$ и прибыл в точку $\mathbf{q}^n$, которая оказалась точкой смены пути, поскольку следующая точка пути $\mathbf{q}^A$ оказалась запрещенной (рис. 2).

В точке $\mathbf{q}^n$ сработала СС, но предположим, что она доставила информацию не обо всех точках из $Y(\mathbf{q}^n)$, например, о точке $\mathbf{q}^B$ не была доставлена информация. В точке $\mathbf{q}^n$ МР сменил путь и продолжал дви-

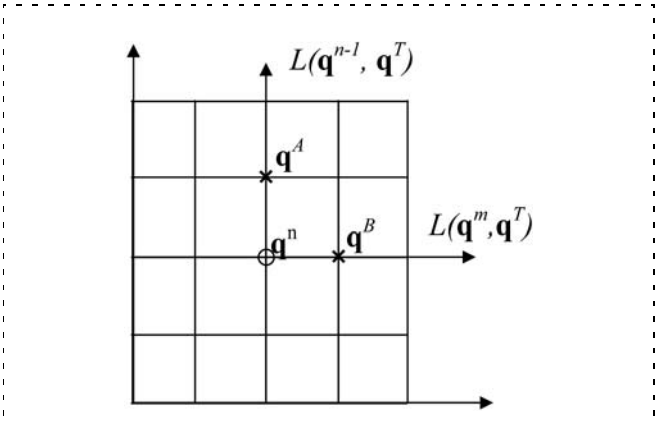


Рис. 2. СС должна доставлять достоверную информацию о каждой точке из $Y(\mathbf{q}^n)$

гаться. Пусть теперь МР исполняет путь $L(\mathbf{q}^m, \mathbf{q}^T)$, $m \geqslant n$. По прибытии в $\mathbf{q}^n$ МР обнаружит, что $\mathbf{q}^B$ является запрещенной, и тогда $\mathbf{q}^n$ вновь станет точкой смены пути. Поэтому мы и потребовали, чтобы в каждой точке смены пути $\mathbf{q}^n$, $n = 0, 1, 2, ...$, СС доставляла точную и достоверную информацию о каждой точке из $Y(\mathbf{q}^n)$.

Число точек смены пути конечно, поскольку конечно число точек в X в силу введенной дискретизации.

Итак, число точек смены пути $\mathbf{q}^n$, $n = 0, 1, 2, ...$, конечно, и они все различны. В каждой точке $\mathbf{q}^n$ осуществляются запуск СС и вызов процедуры ПИ, генерирующей $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$. В результате выполнения этих действий либо получаем информацию о том, что $\mathbf{q}^T$ является запрещенной, либо нет. Если получаем, то выяснение вопроса о достижимости $\mathbf{q}^T$ заканчивается выводом о недостижимости $\mathbf{q}^T$. Если нет, происходит попытка исполнения пути $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$. Если и в последней точке смены пути $\mathbf{q}^n$ точка $\mathbf{q}^T$ не была квалифицирована как запрещенная, то будет сгенерирован $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$, этот путь будет исполнен, и $\mathbf{q}^T$ будет достигнута.

Таким образом, показано, что МР, исполняя ***Алгоритм1,*** за конечное число шагов либо достигнет точки $\mathbf{q}^T$, либо сделает вывод о том, что $\mathbf{q}^T$ недостижима. ***Алгоритм*** сводится к исполнению ***Алгоритма1*** конечное число раз. Отсюда видно, что, исполняя ***Алгоритм***, МР решит ***Задачу*** за конечное число шагов. ***Теорема доказана.***

Замечание 1. Мы уже говорили, что ***Алгоритм1*** сводится к генерации и исполнению конечного числа пути $L(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^T)$. ***Алгоритм*** сводится к исполнению конечного числа раз ***Алгоритма1***. Отсюда следует вывод о том, что ***Задача*** сводится к решению конечного числа задач ПИ планирования и исполнения пути в среде с известными запрещенными состояниями. Этот факт позволяет и стимулирует поиск либо разработку эффективных алгоритмов для решения задачи ПИ, которые бы удовлетворяли следующим требованиям:

1) они должны быть применимы к n-мерному пространству состояний;

2) они бы за конечное, а еще лучше — за минимальное число шагов либо планировали путь, либо выдавали бы обоснованный вывод о том, что путь спланирован быть не может;

3) они бы эффективно корректировали путь при поступлении новой информации о запрещенных состояниях.

Замечание 2. При первом вызове ***Алгоритма1*** $\mathbf{q}^c = \mathbf{q}^0$ и исследуется достижимость первой точки из B_T, которую назовем $\mathbf{q}_1^T$. При последующих вызовах ***Алгоритма1*** исследуется достижимость точек $\mathbf{q}_i^T \in B_T$, $i = 2, 3, ..., N_{BT}$, и, вообще говоря, $\mathbf{q}^c \neq \mathbf{q}^0$. Но, поскольку МР прибыл в $\mathbf{q}^c$ из $\mathbf{q}^0$ по непрерывно следующим одна за другой разрешенным точкам, то вывод о достижимости/недостижимости $\mathbf{q}_i^T \in B_T$, $i = 2, 3, ..., N_{BT}$, из $\mathbf{q}^c \neq \mathbf{q}^0$ будет квалифицироваться как вывод о достижимости/недостижимости точки $\mathbf{q}_i^T \in B_T$, $i = 2, 3, ..., N_{BT}$ из $\mathbf{q}^0$.

Заключение

Приведен алгоритм управления n-звенным МР в среде с неизвестными статическими препятствиями. Доказана теорема, утверждающая, что, двигаясь по данному алгоритму в дискретизированном конфигурационном пространстве, МР за конечное число шагов либо захватит объект, либо выдаст обоснованный ответ о том, что объект не может быть захвачен ни в одной из конфигураций.

Список литературы

1. **Ильин В. А.** Интеллектуальные роботы: Теория и алгоритмы. Красноярск: Изд-во САА, 1995.
2. **Лопатин П. К.** Исследование достижимости целевых состояний в неизвестной статической среде // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 4. С. 2—6.
3. **Нильсон Н**. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1973.

Управление и информатика в авиакосмических и морских системах

№ 9
сентябрь
2012

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 629.7.051.83

Е. А. Евдокимчик, инженер,
obstwasser@mail.ru,
Ю. Г. Оболенский,
д-р техн. наук, проф., нач. отделения,
Г. М. Синевич,
д-р техн. наук, проф., вед. специалист,
ОАО "РСК "МиГ", г. Москва

Определение крутизны радиосигнала при автоматическом заходе на посадку летательного аппарата

Рассматривается оценка крутизны радиосигнала при автоматическом заходе на посадку летательного аппарата с помощью интегральных квадратичных оценок в целях корректировки коэффициента усиления прямой цепи. Представлены два подхода к реализации данного метода, проведено их сравнение.

Ключевые слова: *оценка крутизны радиосигнала, автоматический заход на посадку*

Введение

В режиме автоматического захода на посадку летательного аппарата наблюдаются случаи отклонения крутизны радиосигнала (характеристики чувствительности выходного сигнала глиссадного радиоприемника к угловому отклонению от глиссады планирования: $S = I_\varepsilon/\varepsilon$, где I_ε — выходной сигнал радиоприемника, ε — отклонение от глиссады планирования [1]) от номинального значения в пределах до 20 %, а в некоторых случаях — даже двукратные отклонения. Данные отклонения вызывают ухудшение процессов захода на посадку, а главное, уменьшают безопасность полетов. В настоящее время для определения крутизны радиосигнала используют специализированный летательный аппарат, который во время специального полета определяет диаграмму направленности глиссадного радиомаяка (ГРМ) и замеряет выходной сигнал радиоприемника при различных значениях отклонения от глиссады планирования. Предлагается введение схемы коррекции, определяющей по оценке крутизны радиосигнала S во время автоматического захода на посадку соответствующий коэффициент коррекции коэффициента усиления прямой цепи ($K_{\text{кор}} = 1/\hat{S}$).

Предлагаемая система помимо повышения безопасности полетов способна снизить расходы на применение специализированного летательного аппарата, а также осуществлять определение аэродромов, значение крутизны радиосигнала на которых выходит за допустимые пределы.

О синтезе системы автоматического захода на посадку

Траектория движения летательного аппарата при выполнении маневра захода на посадку в продольной плоскости изображена на рис. 1. Траектория складывается из двух последовательных участков: участка стабилизации заданной высоты (*1*) и участка стабилизации заданной глиссады планирования (*4*). Процесс перехода от режима стабилизации высоты полета к режиму стабилизации летательного аппарата на глиссаде планирования называется "захватом глиссады" (*3*). Этот режим начинается в точке траектории, лежащей в области уверенного приема сигналов ГРМ (*2*). Точка окончания режима стабилизации летательного аппарата на глиссаде называется точкой "схода" с глиссады (*5*). (На рис. 1 также показаны дальняя приводная (ДПРС) и ближняя приводная (БПРС) радиостанции.)

Траектория движения обусловливает необходимые функциональные подсистемы системы автоматического захода на посадку: систему управления высотой, систему управления движением по глиссаде, систему управления нормальной избыточной перегрузкой, а также систему, организующую требуемое переключение между участками стабилизации высоты и стабилизации глиссады планирования.

Синтез первых трех систем подробно освещен в трудах [1—2]. В данной работе используется система управления нормальной избыточной перегрузкой с астатическим законом управления, система управления высотой, использующая информацию о барометрической высоте и вертикальной скорости, система управления движением по глиссаде, использующая информацию об угловом отклонении летательного аппарата от равносигнальной зоны ГРМ и дальности до взлетно-посадочной полосы.

Переход от режима управления высотой к режиму управления движением по глиссаде планирования (захват глиссады) осуществляется по сигналу с выхода системы управления движением по глиссаде планирования $n_{y,\,\text{зад}}^{\varepsilon} = 0$, благодаря чему достигается плавное сопряжение участков управления.

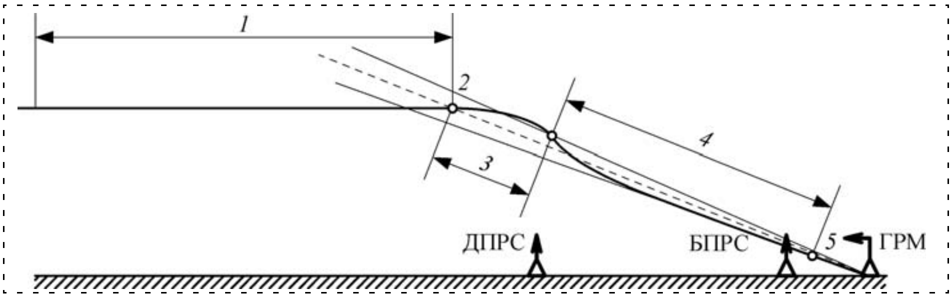


Рис. 1. Траектория захода на посадку

Система коррекции

Определение $\hat{S}$ проводится с помощью интегральных квадратичных оценок, характеризующих качество управления. При перегрузочном законе управления сигнал $n^{\varepsilon}_{y,\,зад}$ с выхода системы управления движением по глиссаде планирования характеризует качество движения. Интегрируя величину $n^{\varepsilon}_{y,\,зад}$ на некотором интервале времени от начала захвата глиссады, при различных значениях S (за номинальное значение примем $S = 1$) можно получить соответствующие оценки крутизны радиосигнала:

$$I = K\int_{t_з}^{t_к}[n^{\varepsilon}_{y,\,зад}(t)]^2dt. \quad (1)$$

Здесь K — некоторый коэффициент, используемый для нормирования характеристики таким образом, чтобы при номинальном значении S выполнялось равенство $I = 1$.

При посадке в условиях неизвестного значения крутизны радиосигнала S значение интеграла I можно использовать для его оценки. Как отмечалось, коэффициент коррекции будет составлять $K_{кор} = 1/\hat{S}$.

Укрупненная структурная схема системы автоматического захода на посадку совместно с системой коррекции имеет вид, показанный на рис. 2.

Здесь $U_{пр}$ — сигнал, поступающий на вход привода летательного аппарата, H, V_y, ε, L, ω_z, α, n_y — входные сигналы системы, поступающие с соответствующих датчиков (обозначения общепринятые). "Блок логики" организует требуемое включение системы коррекции.

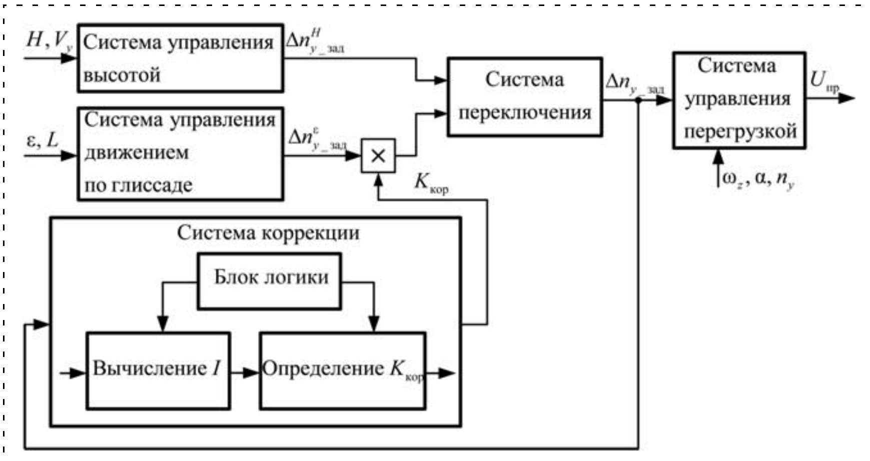


Рис. 2. Система автоматического захода на посадку совместно с системой коррекции

Возможные реализации

Возможны несколько подходов к определению оценки. Можно интегрирование выполнять на всем этапе захвата глиссады, а оценку проводить непрерывно. В этом случае время начала интегрирования $t_з$ совпадает со временем начала захвата глиссады, время окончания интегрирования $t_к$ принимается совпадающим с моментом окончания стабилизации глиссады на определенной дальности. Определение нелинейной функции $K_{кор} = f_1(I)$ в этом случае осуществляется следующим образом: определяется значение интеграла I по формуле (1) для различных значений S при разомкнутом контуре коррекции, данная характеристика используется как начальная, после замыкания контура коррекции выполняется ее уточнение до получения необходимой точности системы. Полученная таким образом характеристика будет иметь вид, показанный на рис. 3 штриховой линией (за начальное значение принимается $K_{кор} = 1$, что соответствует отсутствию коррекции).

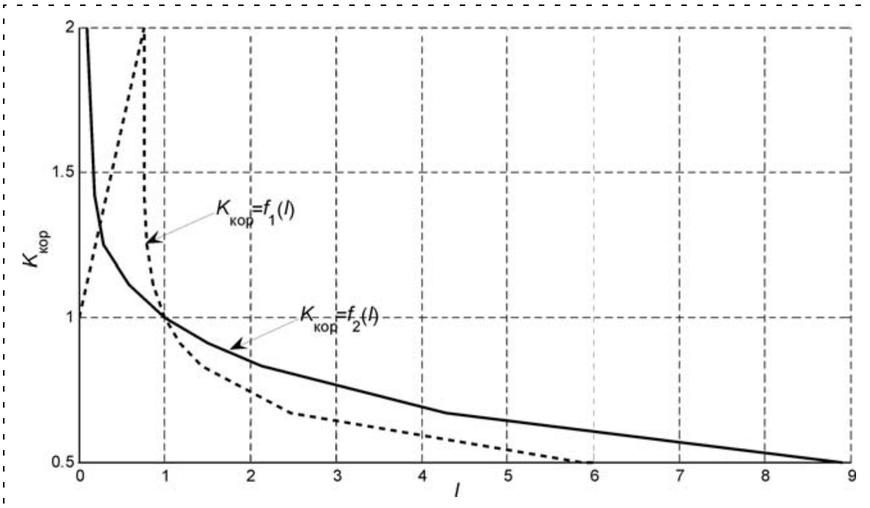


Рис. 3. Графики зависимости $K_{кор} = f_1(I)$ и $K_{кор} = f_2(I)$

Анализируя данную характеристику, можно прийти к заключению, что на начальном этапе вычисления коэффициент коррекции $K_{кор}$ определяется неверно: по мере увеличения интеграла I значение $K_{кор}$ нарастает от 1 до 2, а уже после этого происходит правильная оценка. Такое повышение коэффициента усиления прямой цепи нежелательно с точки зрения устойчивости. Кроме того, интегрирование ведется на значительном интервале времени, в течение которого весьма вероятно появление ветровых воздействий, ухудшающих точность системы.

Для уменьшения влияния ветровых возмущений и исключения повышения коэффициента усиления прямой цепи следует сократить время интегрирования, коррекцию проводить не непрерывно, а по итогам вычисления интеграла I за данный промежуток времени $t_{инт} = t_к - t_з$. Для улучшения свойств такой системы отрезок времени $t_{инт}$ следует уменьшать, однако это будет приводить к увеличению отношения между крайними значениями интегральных оценок $I_{S=2,0}/I_{S=0,5}$, что нежелательно с точки зрения точности определения коэффициента коррекции $K_{кор}$. Решение о выборе времени $t_{инт}$ должно приниматься на основе компромисса между желаемым быстродействием и располагаемой точностью вычислительного устройства. На рис. 3 сплошной линией показан график зависимости $K_{кор} = f_2(I)$ для этого случая.

Моделирование

Для моделирования движения летательного аппарата использовали линейные дифференциальные уравнения [3] в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = \overline{Y}^{\alpha}\alpha + \overline{Y}^{\delta_в}\delta_в + (g \cdot 57{,}3/V)\cos\theta + \overline{Y}_0;\\
&\dot{\omega}_z = \overline{M}_z^{\alpha}\alpha + \overline{M}_z^{\omega_z}\omega_z + \overline{M}_z^{\delta_в}\delta_в + \overline{M}_z^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \overline{M}_{z0};\\
&\dot{\vartheta} = \omega_z;\\
&\theta = \vartheta - \alpha;\\
&n_y = V\dot{\theta}/(g \cdot 57{,}3);\\
&\dot{x} = V;\\
&\dot{H} = V\theta/57{,}3.
\end{aligned} \qquad (2)$$

В уравнениях (2) $\overline{Y}^{\alpha}$, $\overline{Y}^{\delta_в}$, $\overline{M}_z^{\omega_z}$, $\overline{M}_z^{\dot{\alpha}}$, $\overline{M}_z^{\alpha}$, $\overline{M}_z^{\delta_в}$ — приведенные аэродинамические коэффициенты, при моделировании учитывалась зависимость этих коэффициентов от скорости.

На рис. 4 представлены графики отклонения высоты летательного аппарата от заданной ($\Delta H = H - H_{зад}$) в зависимости от дальности до взлетно-посадочной полосы при значениях $S = 0{,}65$ и $1{,}20$ без коррекции (сплошные линии), с коррекцией по первому способу (линии с квадратными маркерами), с коррекцией по второму способу (линии с круглыми маркерами); на графике также представлена номинальная траектория (отсутствие коррекции, $S = 1{,}00$). Заданная траектория движения состоит из двух участков: движения с постоянной высотой и движения по глиссаде, пересечение участков расположено на дальности 4000 м.

Благодаря использованию систем коррекции удается избежать значительного перерегулирования при $S < S_{ном}$ и увеличения колебательности при $S > S_{ном}$, в отсутствии ветрового возмущения обе системы выдают достаточно точные оценки крутизны глиссадной зоны $\hat{S}$ и соответствующие им коэффициенты коррекции $K_{кор}$. Из-за недостатков работы первой системы на начальном этапе траектории движения имеют разброс и удалены от номинальной, при использовании второй системы траектории сгруппированы около номинальной. Вторая система позволяет избежать повышения коэффициента усиления прямой цепи и снижает риск появления неустойчивости во время захвата глиссады.

Следует отметить, что на точность оценок влияют многие факторы: направление и сила ветра, момент времени, на котором появляется ветровое возмущение, время, которое работает система до появления возмущения и т. д. Важным преимуществом второй системы является ее нечувствительность к ветровым воздействиям, парированным до начала захвата глиссады, и к воздействиям, наступившим по истечении времени $t_{инт}$, когда оценивание завершено. Вероятность появления ветровых возмущений на участке времени $t_{инт}$ значительно ниже, чем на всем участке движения по глиссаде, а значит, вторая система будет меньше подвержена ошибкам оценивания, связанным с появлением ветровых возмущений.

Заключение

Применение второго подхода является более предпочтительным. Использование предложенного метода позволяет избежать перерегулирования и затягивания процесса захвата глиссады при отклонениях крутизны радиосигнала в меньшую сторону и избежать увеличения колебательности при отклонениях в большую сторону, тем самым повышается безопасность полетов. Для повышения точности системы возможно использование системы оценки и учета влияния ветровых возмущений.

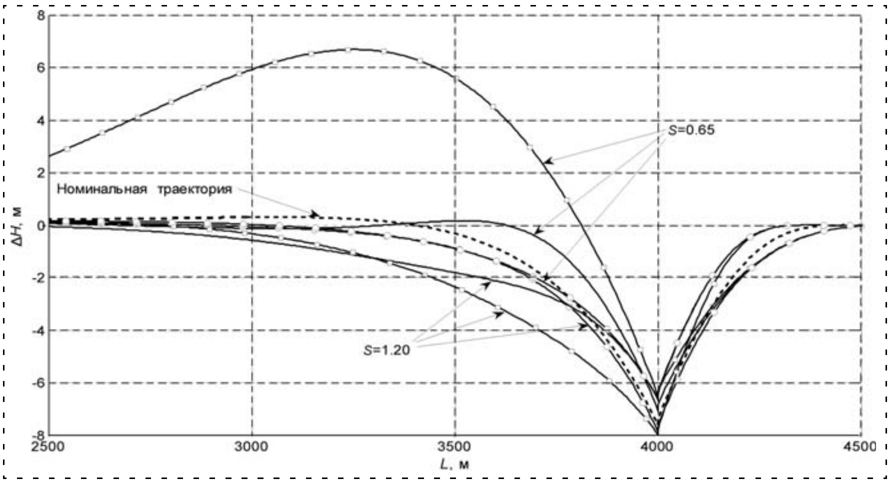


Рис. 4. Отклонение высоты при работе систем

Список литературы

1. **Белогородский С. Л.** Автоматизация управления посадкой самолета. М.: Транспорт, 1972.
2. **Михалев И. А., Окоемов Б. Н., Чикулаев М. С.** Системы автоматической посадки. М.: Машиностроение, 1975.
3. **Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.** Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973.

УДК 681.513.54:629.7.015

Д. С. Кабанов, аспирант,
kabanovds@mail.ru,
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Оптимизация пространственного маневра автоматического подводного аппарата с коррекцией параметров структуры управления

Показано, что алгоритм коррекции параметров структуры управления, полученной на основе решения задачи по принципу максимума, позволяет строить траекторию оптимального маневра в пространстве автоматического подводного аппарата (АПА) и устойчиво работает при изменении терминальных условий. Структура управления содержит участки особого управления. Представлены формулы для вычисления особого управления и результаты численного моделирования движения АПА.

Ключевые слова: *автоматический подводный аппарат, принцип максимума, особое управление, прогнозирующая модель*

Введение

Рассматривается задача построения траектории оптимального пространственного маневра автоматического подводного аппарата (АПА) с выходом в заданную точку пространства с учетом ограничений на управление и вектор состояния. Задача поиска оптимальной траектории АПА решается с использованием алгоритма коррекции параметров структуры управления [1]. Корректируемыми параметрами этой структуры являются моменты времени переключения управления. В качестве целевого принимается функционал обобщенной работы А. А. Красовского [2]. Стабилизация АПА на выбранной траектории выполняется с использованием ПИД-регулятора. Управление осуществляется поворотом рулей глубины и направления для обеспечения минимума отклонений перегрузки АПА от ее значения на оптимальной траектории.

Постановка задачи оптимизации

Требуется найти такую программу управления проекциями перегрузок $n_y(t)$ и $n_z(t)$, которая обеспечит выполнение АПА пространственного маневра из одной точки пространства в другую с обеспечением требований по углам подхода θ_f (угол наклона траектории) и φ_f (угол поворота траектории) в конечный момент времени. Накладываются ограничения на угол наклона траектории и на составляющие вектора перегрузки в процессе маневра.

Такая формулировка требований к управляемому движению АПА (выбор в качестве управления проекций перегрузки на нормаль n_y и бинормаль n_z к траектории) позволяет удерживать его в эксплуатационной области, которая выбирается из условий достижения высокой эффективности и обеспечения безопасности функционирования объекта управления, в том числе выдерживания конструктивных ограничений на прочность АПА. Уравнения движения центра масс АПА записываются в следующем виде [3, 4]:

$$\dot V = g(n_x - \sin\theta);\ \dot\theta = \frac{g}{V}(n_y - \cos\theta);$$
$$\dot\varphi = -\frac{g}{V}\frac{n_z}{\cos\theta};\ \dot x = V\cos\theta\cos\varphi; \qquad (1)$$
$$\dot y = V\sin\theta;\ \dot z = -V\cos\theta\sin\varphi,$$

где $X = (V\ \theta\ \varphi\ x\ y\ z)^{\text{т}}$ — вектор состояния в траекторной системе координат; θ — угол наклона траектории; φ — угол поворота траектории; x, y — продольная дальность и глубина движения АПА соответственно; V — скорость АПА; g — ускорение свободного падения; продольная перегрузка $n_x = (P\cos\alpha - X)/(mg)$; P — сила тяги двигателя; сила сопротивления $X = (c_{x_0} + c_x^{\alpha^2}\alpha^2)qS$; скоростной напор $q = \rho V^2/2$; угол атаки $\alpha = n_y/n_y^\alpha$; $n_y^\alpha = c_y^\alpha qS$; c_{x_0}, $c_x^{\alpha^2}$, c_y^α — гидродинамические коэффициенты; S — характерная площадь миделя; $|\theta| \leqslant \theta_m$, θ_m — предельное значение угла наклона траектории.

Граничными условиями задачи являются следующие:

$$V(0) = V_0,\ \theta(0) = \theta_0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,$$
$$z(0) = z_0,\ V(t_f) = V_f,\ \theta(t_f) = \theta_f,\ \varphi(t_f) = \varphi_f,$$
$$x(t_f) = x_f,\ y(t_f) = y_f,\ z(t_f) = z_f,$$

где V_0, θ_0, φ_0, x_0, y_0, z_0, V_f, θ_f, φ_f, x_f, y_f, z_f — заданные величины; терминальный момент времени t_f не фиксирован.

Для достижения поставленных требований минимизируется критерий оптимальности вида

$$J = F[\mathbf{X}(t_f)] + \int_0^{t_f} Q_{\text{ш}}dt, \qquad (2)$$

где $F[\mathbf{X}(t_f)] = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{X}_f^{\text{т}}\boldsymbol{\rho}\Delta\mathbf{X}_f$, $\Delta\mathbf{X}_f = \mathbf{X}(t_f) - \mathbf{X}_f$; $\boldsymbol{\rho} = \operatorname{diag}(\rho_V, \rho_\theta, \rho_\varphi, \rho_x, \rho_y, \rho_z)$ — матрица коэффициентов. Кроме того $|n_y| \leqslant n_{ym}$, $|n_z| \leqslant n_{zm}$, где n_{ym}, n_{zm} — максимальные значения проекций перегрузки. Для формального учета ограничений на угол наклона траектории в подынтегральную часть критерия (2) введена штрафная функция [4] вида

$$Q_{\text{ш}} = \begin{cases} G\Delta\theta^2, & |\theta| > \theta_m; \\ 0, & |\theta| \leqslant \theta_m, \end{cases}$$

здесь коэффициент $G > 0$, $\Delta\theta = |\theta| - \theta_m$.

Метод решения задачи оптимизации

Для формирования структуры оптимального управления обратимся к необходимым условиям оптимальности [5]. Запишем гамильтониан

$$H = \psi_V g(n_x - \sin\theta) + \psi_\theta \frac{g}{V}(n_y - \cos\theta) - \psi_\varphi \frac{g}{V}\frac{n_z}{\cos\theta} + $$
$$+ \psi_x V\cos\theta\cos\varphi + \psi_y V\sin\theta - \psi_z V\cos\theta\sin\varphi + Q_ш,$$

где $(\psi_V\, \psi_\theta\, \psi_\varphi\, \psi_x\, \psi_y\, \psi_z)^T = \mathbf{\Psi}$ — вектор сопряженных переменных. В соответствии с принципом максимума сопряженные переменные определяются из уравнения $\dot{\mathbf{\Psi}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}\right)^T$, или в поэлементном виде:

$$\dot\psi_V = \psi_\theta \frac{g}{V^2}(n_y - \cos\theta) - \psi_\varphi \frac{g}{V^2}\frac{n_z}{\cos\theta} -$$
$$- \psi_x\cos\theta\cos\varphi - \psi_y\sin\theta + \psi_z\cos\theta\sin\varphi;$$
$$\dot\psi_\theta = \psi_V g\cos\theta - \psi_\theta \frac{g}{V}\sin\theta + \psi_\varphi \frac{g}{V}\frac{n_z}{\cos^2\theta}\sin\theta +$$
$$+ \psi_x V\sin\theta\cos\varphi - \psi_y V\cos\theta - \psi_z V\sin\theta\sin\varphi - \frac{\partial Q_ш}{\partial\theta}; \quad (3)$$
$$\dot\psi_\varphi = \psi_x V\cos\theta\sin\varphi + \psi_z V\cos\theta\cos\varphi;$$
$$\dot\psi_x = 0;\ \dot\psi_y = 0;\ \dot\psi_z = 0;$$
$$\frac{\partial Q_ш}{\partial\theta} = \begin{cases} 2G\Delta\theta, & |\theta| > \theta_m, \\ 0, & |\theta| \leqslant \theta_m, \end{cases}$$

с граничными условиями $\mathbf{\Psi}(t_f) = \left(\frac{\partial F[\mathbf{X}(t_f)]}{\partial x}\right)^T$, а оптимальное управление $\mathbf{u}_o$ находится из условия $\inf\limits_{u \in [-u_m,\, u_m]} H(\mathbf{X}, \mathbf{\Psi}, \mathbf{u}, t) = H(\mathbf{X}, \mathbf{\Psi}, \mathbf{u}_o, t)$ следующим образом:

$$n_y = \begin{cases} -n_{ym}\,\mathrm{sign}\,\psi_{\theta 0} \text{ при } \psi_\theta \ne 0, \\ n_{yoc} \text{ при } \psi_\theta \approx 0, \text{ на } t \in [\tau_1, \tau_2]; \end{cases}$$
$$n_z = \begin{cases} n_{zm}\,\mathrm{sign}\psi_{\varphi 0} \text{ при } \psi_\varphi \ne 0, \\ n_{zoc} \text{ при } \psi_\varphi \approx 0, \text{ на } t \in [\tau_3, \tau_4], \end{cases} \quad (4)$$

где $(n_y\, n_z)^T = \mathbf{u}_o$; n_{ym}, n_{zm} — предельные значения соответствующих перегрузок; $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in [0, t_f]$ — моменты времени смены участков структуры управления, $\psi_{\theta 0}$ — начальное значение $\psi_\theta(0)$, $\psi_{\varphi 0}$ — начальное значение $\psi_\varphi(0)$, а n_{yoc}, n_{zoc} — особые управления. Принципиальная возможность существования особого управления следует из граничных условий задачи, поскольку для совершения маневра АПА, например, в продольной плоскости необходимо осуществить в соответствии с (4) два переключения, при этом участок между двумя предельными управлениями будет особым. При решении задачи выведения на заданную глубину за минимальное время такой участок управления сводится к движению по ограничению на угол наклона траектории [1].

Особое управление для рассматриваемой задачи определяется из необходимого условия существования особого управления $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial n_y}\right) = 0$ [5]. После взятия производных от гамильтониана H по n_y и по времени t

$$\frac{\partial H}{\partial n_y} = \psi_\theta \frac{g}{V};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial n_y}\right) = (\psi_\theta)' \frac{g}{V} + \psi_\theta \left(\frac{g}{V}\right)' =$$
$$= (\psi_\theta)' \frac{g}{V} - \psi_\theta \frac{g}{V^2} g(n_x - \sin\theta)$$

и после второго дифференцирования по времени уравнение для нахождения особого управления n_{yoc} принимает вид

$$n_y \frac{g^2}{V^3}\left(D_1 + \frac{\psi_\theta^2 g^2 k_1^2}{V}\right) + n_z \frac{g^2}{V^3}\left(D_2 - \psi_\theta\psi_\varphi \frac{g^2 k_1^2}{V\cos\theta}\right) +$$
$$+ n_y n_z \frac{g^2}{V^3} D_3 + n_x n_z \frac{g^2}{V^3} D_4 + n_x D_5 + D_6 = 0, \quad (5)$$

где

$$D_1 = \psi_\theta g\cos\theta - \psi_V V g\sin\theta + \psi_x V^2\cos\theta\cos\varphi +$$
$$+ \psi_y V^2\sin\theta - \psi_z V^2\cos\theta\sin\varphi;$$
$$D_2 = (\psi_x\sin\varphi + \psi_z\cos\varphi)\frac{V^2\sin\theta}{\cos\theta} + \psi_x \frac{V^2}{\cos\theta}\sin\theta\sin\varphi +$$
$$+ \psi_z V^2\cos\varphi\,\mathrm{tg}\theta - 2g\psi_\varphi;$$
$$D_3 = \psi_\varphi\left(\frac{2V\sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{V}{\cos\theta}\right);\ D_4 = \psi_\varphi \frac{(V + 2g)\sin\theta}{\cos^2\theta};$$
$$D_5 = -\psi_\theta \frac{g^3}{V^3}\cos^2\theta - \psi_x \frac{g^2}{V}\cos\varphi - \psi_y \frac{g^2}{V}\sin(2\theta) +$$
$$+ 2\psi_z \frac{g^2}{V}\cos^2\theta\sin\varphi + \psi_V \frac{g^3}{V^2}\sin(2\theta) -$$
$$- \psi_x \frac{g^2}{V}\cos(2\theta)\cos\varphi - \psi_z \frac{g^2}{V}\sin^2\theta\sin\varphi +$$
$$+ n_x\left(-\psi_\theta \frac{g^3}{V^3}\sin\theta - \psi_x \frac{g^2}{V}\sin\theta\cos\varphi + \psi_y \frac{g^2}{V}\cos\theta +\right.$$
$$\left. + \psi_z \frac{g^2}{V}\sin\theta\sin\varphi - 2\psi_V \frac{g^3}{V^2}\cos\theta\right) + 2\psi_\theta \frac{g^3}{V^3} n_x^2;$$
$$D_6 = -\psi_\theta \frac{g^3 k_1^2}{V^2}\left(\psi_\theta \frac{g}{V^2}\cos\varphi + \psi_x\cos\theta\cos\varphi +\right.$$
$$\left. + \psi_y\sin\theta - \psi_z\cos\theta\sin\varphi\right).$$

Аналогично выводится уравнение для особого управления n_{zoc} из равенства $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial n_z}\right) = 0$, которое после взятия производных принимает вид

$$n_y \frac{g^2}{V\cos\theta} D_1 + n_y^2 D_2 + n_z D_3 + n_x n_y D_4 + D_5 = 0, \quad (6)$$

где

$$D_1 = -\sin\theta(\psi_x\sin\varphi + \psi_z\cos\varphi) + \frac{\psi_\varphi g}{V^3}(-gk_1^2\psi_\theta + V\cos\theta);$$

$$D_2 = -\frac{\psi_\varphi g^3}{V(V\cos\theta)^3}(1 + \sin^2\theta);$$

$$D_3 = \frac{g^2}{V\cos\theta}(-\psi_x\cos\varphi + \psi_z\sin\varphi) + \frac{g^4k_1^2\psi_\varphi}{V^2(V\cos\theta)^2};$$

$$D_4 = \psi_\varphi\frac{5g^3\sin\theta}{V(V\cos\theta)^2};$$

$$D_5 = \frac{g^2}{V}n_x(\psi_x\sin\varphi + \psi_z\cos\varphi) +$$

$$+ \psi_\varphi g\left(\frac{g^3k_1^2\psi_\theta}{V^4} + \frac{g^2k_1^2\psi_x\cos\varphi}{V^2} + \frac{g^2k_1^2\psi_y\sin\theta}{V^2\cos\theta} - \right.$$

$$- \frac{g^2\sin\varphi k_1^2\psi_z}{V^2} - \frac{2gn_x\sin\theta}{(V\cos\theta)^2} - \frac{2g^2\sin^2\theta}{V^3\cos\theta} -$$

$$\left. - \frac{g^2n_x\sin\theta}{V^3\cos\theta} + \frac{2g^2\sin^2\theta}{V^3\cos\theta} - \frac{2g^2n_x^2}{V^3\cos\theta}\right).$$

Участки особого управления n_{yoc} и n_{zoc} появляются при $\frac{\partial H}{\partial n_y} = \psi_\theta\frac{g}{V} \approx 0$ и при $\frac{\partial H}{\partial n_z} = \psi_\varphi\frac{g}{V\cos\theta} \approx 0$, т. е. при $\left|\psi_\theta\frac{g}{V}\right| \leqslant \varepsilon$ и $\left|\psi_\varphi\frac{g}{V\cos\theta}\right| \leqslant \varepsilon$ соответственно, где ε — погрешность вычислительного метода. Если выполняются оба эти неравенства одновременно, система уравнений (5), (6) должна решаться совместно. Если же они выполняются не одновременно, то из первого находится n_y при регулярных остальных компонентах вектора управления (здесь — при предельном значении n_z), а из второго — n_z при, соответственно, предельном значении n_y.

Решение по принципу максимума позволяет сформировать структуру управления в соответствии с (4).

Решение краевой задачи (1), (3), (4) методом Ньютона [4, 6, 7] связано с вычислительными трудностями, обусловленными поиском начального приближения для сопряженного вектора $\mathbf{\Psi}(0)$ и обеспечением сходимости алгоритма при изменении граничных условий задачи оптимизации, что осложняет применение алгоритма. Для преодоления этих трудностей рассмотрим следующую вспомогательную задачу оптимизации. Представим найденную структуру управления n_y и n_z в виде [1]

$$n_y = -n_{ym}\text{sign}\psi_{\theta0} + \Delta n_{y1}l(t, \tau_1) + \Delta n_{y2}l(t, \tau_2);$$

$$n_z = n_{zm}\text{sign}\psi_{\varphi0} + \Delta n_{z1}l(t, \tau_3) + \Delta n_{z2}l(t, \tau_4),$$

где $\psi_{\theta0} = \psi_\theta(0)$, $\psi_{\varphi0} = \psi_\varphi(0)$, $\Delta n_{y1} = n_{ym}\text{sign}\psi_{\theta0} + n_{yoc}$, $\Delta n_{y2} = -n_{yoc} + n_{ym}\text{sign}\psi_{\theta0}$, $\Delta n_{z1} = -n_{zm}\text{sign}\psi_{\varphi0} + n_{zoc}$, $\Delta n_{z2} = -n_{zoc} - n_{zm}\text{sign}\psi_{\varphi0}$, а $l(t, \tau_1)$, $l(t, \tau_2)$, $l(t, \tau_3)$, $l(t, \tau_4)$ — функции вида

$$l(t, t_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}(k(t - t_1)), \tag{7}$$

k — коэффициент, при неограниченном возрастании которого функция $l(t, t_1)$ приближается к единичной функции Хэвисайда (для задач с управлением релейного типа аналогичная структура рассмотрена в работах [8, 9]).

Домножим правые части уравнений исходной системы (1) на функцию $l(t_f, t)$ вида (7), чтобы иметь возможность управлять величиной t_f. Введение функции $l(t_f, t)$ в правые части не меняет содержательной постановки задачи, так как требуется обеспечить перевод системы (1) из $\mathbf{X}(0)$ в заданное конечное $\mathbf{X}(t_f)$ в течение интервала оптимизации. С математической точки зрения это означает, что $\dot{\mathbf{X}} = 0$ при $t > t_f$.

Моменты τ_1 и τ_2 переключения управления функции $n_y(t)$, τ_3 и τ_4 — функции $n_z(t)$, а также t_f будем рассматривать в качестве компонент обобщенного вектора состояния, а в качестве управления выберем производные τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, t_f по времени. Тогда динамика объекта управления будет представлена совокупностью следующих уравнений [2, 8, 9]:

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = g(n_x - \sin\theta)l(t_f, t);\\
&\dot{\theta} = \frac{g}{V}[-n_{ym}\text{sign}\psi_{\theta0} + \Delta n_{y1}l(t, \tau_1) +\\
&+ \Delta n_{y2}l(t, \tau_2) - \cos\theta]l(t_f, t);\\
&\dot{\varphi} = -\left[\frac{g}{V\cos\theta}(n_{zm}\text{sign}\psi_{\varphi0} + \Delta n_{z1}l(t, \tau_3) +\right.\\
&\left.+ \Delta n_{z2}l(t, \tau_4))\right]l(t_f, t);\\
&\dot{x} = V\cos\theta \cdot l(t_f, t);\ \dot{y} = V\sin\theta \cdot l(t_f, t);\\
&\dot{z} = -V\cos\theta\sin\varphi \cdot l(t_f, t);\\
&\dot{\tau}_1 = w_1l(t_f, t);\ \dot{\tau}_2 = w_2l(t_f, t);\ \dot{\tau}_3 = w_3l(t_f, t);\\
&\dot{\tau}_4 = w_4l(t_f, t);\ \dot{t}_f = w_5l(t_f, t),
\end{aligned} \tag{8}$$

здесь $(w_1\ w_2\ w_3\ w_4\ w_5)^{\mathrm{T}} = \mathbf{w}$ — вектор управления во вспомогательной задаче оптимизации. Управление перегрузками n_y и n_z осуществляется косвенно — через вектор управления $\mathbf{w}$.

Для выбора оптимальной траектории движения АПА предлагается использовать алгоритм коррекции параметров структуры управления $n_y(t)$ и $n_z(t)$ с прогнозирующей моделью [2, 8, 9]. В отличие от указанных работ в рассматриваемой в статье структуре управления имеются участки особого управления n_{yoc} и n_{zoc}.

В соответствии с алгоритмом с прогнозирующей моделью в качестве критерия оптимальности этой задачи выбирается функционал Красовского [2]

$$J_1 = J + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_w^{-2}\mathbf{w}dt + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\mathbf{w}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_w^{-2}\mathbf{w}_{\mathrm{o}}dt, \tag{9}$$

$\mathbf{w}_o = (w_{1o}\ w_{2o}\ w_{3o}\ w_{4o}\ w_{5o})^{\mathrm{T}}$ — оптимальное значение вектора управления $\mathbf{w}$; $\mathbf{k}_w^2 = \mathrm{diag}(k_{w_1}^2, k_{w_2}^2, k_{w_3}^2, k_{w_4}^2, k_{w_5}^2)$. Коэффициенты $\mathbf{k}_w^2$ определяются моделированием при отладке вычислительного алгоритма. Введение слагаемых $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_w^{-2}\mathbf{w}dt$ и $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\mathbf{w}_o^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_w^{-2}\mathbf{w}_o dt$ в исходный критерий оптимальности (2) фактически не меняет требований задачи, ибо по завершении переходных процессов $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$, $\tau_3(t)$, $\tau_4(t)$, $t_f(t)$ имеем $\dot\tau_1 = 0$, $\dot\tau_2 = 0$, $\dot\tau_3 = 0$, $\dot\tau_4 = 0$, $\dot t_f = 0$, что обнуляет добавленные слагаемые.

Гамильтониан вспомогательной задачи оптимизации

$$H = [\psi_V g(n_x - \sin\theta) + \psi_\theta \frac{g}{V}(n_y - \cos\theta) + \\ + \psi_\varphi\left(-V\frac{n_z}{\cos\theta}\right) + \psi_x V\cos\theta + \psi_y V\sin\theta + \\ + \psi_z(-V\cos\theta\sin\varphi) + \psi_{\tau_1}w_1 + \psi_{\tau_2}w_2 + \psi_{\tau_3}w_3 + \psi_{\tau_4}w_4 + \\ + \psi_{t_f}w_5 + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_w^{-2}\mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_o^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_w^{-2}\mathbf{w}_o + Q_{ш}]l(t_f, t). \quad (10)$$

Вспомогательная краевая задача состоит из системы (8), дополненной уравнениями для сопряженных переменных вида $\dot{\mathbf{\Psi}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\mathrm{T}}$, и граничных условий для вектора состояния и сопряженных переменных. $\mathbf{\Psi}(t_f)$ находится из терминальной части $F[\mathbf{X}(t_f)]$ критерия: $\psi_V(t_f) = \rho_V[V(t_f) - V_f]$, $\psi_\theta(t_f) = \rho_\theta[\theta(t_f) - \theta_f]$, $\psi_\varphi(t_f) = \rho_\varphi[\varphi(t_f) - \varphi_f]$, $\psi_x(t_f) = \rho_x[x(t_f) - x_f]$, $\psi_y(t_f) = \rho_y[y(t_f) - y_f]$, $\psi_z(t_f) = \rho_z[z(t_f) - z_f]$, $\psi_{\tau_1}(t_f) = 0$, $\psi_{\tau_2}(t_f) = 0$, $\psi_{\tau_3}(t_f) = 0$, $\psi_{\tau_4}(t_f) = 0$, $\psi_{t_f}(t_f) = 0$. Здесь $\mathbf{X} = (V\ \theta\ x\ y\ z\ \tau_1\ \tau_2\ \tau_3\ \tau_4\ t_f)^{\mathrm{T}}$.

Из условия минимума H по $\mathbf{w}$ находим оптимальное управление:

$$w_1(t) = -k_{w_1}^2\psi_{\tau_1}(t);\ w_2(t) = -k_{w_2}^2\psi_{\tau_2}(t); \\ w_3(t) = -k_{w_3}^2\psi_{\tau_3}(t);\ w_4(t) = -k_{w_4}^2\psi_{\tau_4}(t); \\ w_5(t) = -k_{w_5}^2\psi_{t_f}(t), \quad (11)$$

где $\psi_{t_f}(t) = H(t_f)$, что следует из интегрирования последнего уравнения $\dot\psi_{t_f} = -H(t)\delta(t_f, t)$ при граничном условии $\psi_{t_f}(t_f) = \frac{\partial F[\mathbf{X}(t_f)]}{\partial t_f} = 0$.

Решение задачи выбора оптимальной траектории АПА строится в соответствии с алгоритмом с прогнозирующей моделью [2, 9]. Для определения управления не требуется решать двухточечную краевую задачу. Вычисления сводятся к решению двух задач Коши, решаемых в прямом и обратном времени соответственно.

Результаты моделирования

Для одного из вариантов начальных условий ($V_0 = 20$ м/с, $\theta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = -100$ м, $z_0 = 0$ м, $\tau_{1_0} = 2$ с, $\tau_{2_0} = 15$ с, $\tau_{3_0} = 2$ с, $\tau_{4_0} = 15$ с) и граничных условий ($V_f = 20$ м/с, $\theta_f = 0$, $\varphi_f = 90°$, $x_f = -250$ м, $y_f = 0$ м, $z_f = -100$ м) на рис. 1—3 (см. третью сторону обложки) представлены результаты численного моделирования управляемого движения АПА по разработанному алгоритму в виде зависимостей $n_y(t)$, $n_z(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $\mathbf{X}(t)$. При заданных условиях были получены результаты: $x(t_f) = -249{,}4$ м, $y(t_f) = -0{,}16$ м, $z(t_f) = -100{,}5$ м, $\theta(t_f) = 0{,}1°$, $\varphi(t_f) = 90{,}4°$.

На рис. 1 представлены графики управления $n_y(t)$ и $n_z(t)$. Первый график на этом рисунке демонстрирует структуру управления $n_y(t)$, которая представляет собой чередование предельного управления (n_{ym}), особого управления (n_{yoc}) и предельного с обратным знаком ($-n_{ym}$). В данном примере $n_{ym} = 1{,}5$, особое управление отчетливо видно на интервале [1,3; 17,3] с, также можно отметить переходной процесс в окрестности переключений τ_1 и τ_2.

Графики зависимостей $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ представлены на рис. 2 (см. третью сторону обложки). На графиках также прослеживаются участки предельного и особого управлений. Видно, что угол наклона траектории θ не выходит на ограничение $\theta_m = 30°$. Полученные графики позволяют сделать вывод о верности проведенных математических изысканий в части нахождения аналитических зависимостей для n_{yoc} и n_{zoc} по формулам (5) и (6) соответственно.

Полученные с использованием представленного алгоритма оптимизации требуемые значения углов θ и φ подаются на вход ПИД-регулятора, который обеспечивает решение задачи стабилизации АПА на оптимальной траектории в двух каналах управления (продольном и боковом). Полученные значения отклонения рулей используются в подробной математической модели движения АПА, включающей действия всех приложенных к АПА сил и учет присоединенных масс, что является характерной особенностью движения аппаратов под водой [10—12].

На рис. 3 (см. третью сторону обложки) представлен график траектории АПА. Расчеты показали, что инерционность АПА существенно сказывается на реализации выбранной оптимальной траектории. Для заданных начальных условий, например, отклонения в конечных значениях линейных координат x, y и z из подробной имитационной модели и из динамики траектории материальной точки составили несколько метров.

Результаты моделирования показали, что разработанный алгоритм с коррекцией параметров структуры управления позволяет формировать программу изменения значений перегрузки $n_y(t)$ и $n_z(t)$, под воздействием которой центр масс АПА движется по оптимальной траектории, обеспечивающей выход в заданную точку пространства. Алгоритм не связан с большим объемом вычислений, поэтому он применяется для обновления этой программы в текущий момент времени. В этом случае он рассматривается как алгоритм синтеза управления $n_y(\mathbf{X}, t)$ и $n_z(\mathbf{X}, t)$. Результаты имитационного моделирования динамики процесса с использованием разработанного алгоритма оптимального управления АПА показали его работоспособность при изменении терминальных условий без изменения коэффициентов целевого функционала, что позволяет обеспечить актуальное на сегодняшний день адаптивное управление АПА при изменении условий выполняемой миссии [13].

Заключение

Разработан алгоритм с коррекцией параметров структуры управления для перевода АПА из начального положения в заданное конечное. Алгоритм позволяет формировать оптимальное управление траекторией пространственного движения АПА в темпе движения, что выгодно отличает его от известных алгоритмов решения двухточечных краевых задач. При этом структура алгоритма содержит участок особого управления и существенно определяется своими параметрами τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, t_f.

Список литературы

1. **Малышев В. В., Кабанов Д. С.** Оптимизация траектории движения материальной точки в пространстве с использованием алгоритма с заданной программой прогноза движения при ограничениях на управление // Тез. докл. 15 междунар. конф. "Системный анализ, управление и навигация". М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 61—62.
2. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
3. **Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.** Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: учеб. пособ. для вузов. Изд. 2-е, переработанное и доп. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
4. **Александров А. А., Кабанов С. А.** Оптимизация посадки беспилотного летательного аппарата с учетом ограничений на управление // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 2. С. 50—54.
5. **Малышев В. В.** Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления: учеб. пособ. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 440 с.
6. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
7. **Кабанов Д. С.** Оптимальное управление ядерным реактором с учетом случайных возмущений // Изв. вузов. Приборостроение. Т. 52. 2009. № 5. С. 27—30.
8. **Буков В. Н.** Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 232 с.
9. **Кабанов С. А.** Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.
10. **Агеев М. Д., Касаткин Б. А., Киселев Л. В.** и др. Автоматические подводные аппараты. Л.: Судостроение, 1981. 224 с.
11. **Грумондз В. Т., Яковлев Г. А.** Алгоритмы аэрогидробаллистического проектирования. М.: Изд-во МАИ, 1994. 304 с.
12. **Лебедев А. В., Филаретов В. Ф.** Система с переменной структурой для централизованного управления движением автономного подводного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 4. С. 73—78.
13. **Киселев Л. В.** Код глубины. Владивосток: Дальнаука, 2011. 332 с.

УДК 658.512.2-52

Д. Г. Грязин, д-р техн. наук, нач. отдела,
gdg@mt.ifmo.ru,
А. Б. Чекмарев, инженер,
chekmarev-ab@yandex.ru,
ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор",
г. Санкт-Петербург

Исследование кинематической схемы стенда для воспроизведения угловых колебаний

Рассматриваются вопросы проектирования испытательного стенда, поворотная платформа которого приводится в угловое колебательное движение путем преобразования линейного возвратно-поступательного перемещения подвижной катушки управления электромагнитного привода. Обосновывается выбор кинематической схемы стенда, приводится описание функциональной схемы. Предлагается анализ влияния размеров и формы конструктивных элементов на точностные и динамические характеристики стенда.

Ключевые слова: *стенд, испытания, угловая скорость, микромеханический датчик, динамические характеристики, калибровка, электромагнитный привод, кинематическая схема, погрешность*

Введение

Микромеханические акселерометры, гироскопы и бесплатформенные инерциальные навигационные системы находят все более широкое применение в системах управления различными объектами. Оценка динамических характеристик указанных датчиков и систем может проводиться только на специализированных стендах, воспроизводящих угловые скорости в заданном диапазоне частот.

Для решения задачи динамической калибровки микродатчиков могут быть использованы универсальные стенды, которые обладают как достоинствами, так и недостатками, связанными с их универсальностью. Так, стенды, обладающие избыточной для испытания микродатчиков точностью и функциональностью, имеют высокую стоимость. Кроме того, специализированное оборудование, предназначенное для решения узкого круга задач, имеет лучшие характеристики по сравнению с многофункциональным оборудованием. В связи с этим в ЦНИИ "Электроприбор" ведутся работы по созданию испытательного стенда для оценки частотных характеристик микродатчиков и модулей на их основе при угловых колебаниях в диапазоне до 120 Гц.

Анализ характеристик испытательных стендов на основе различных конструктивных решений показал, что для воспроизведения гармонических колебаний целесообразно использование специального исполнительного механизма.

Разработка кинематической схемы стенда в первую очередь связана с исследованием характеристик его механической системы, необходимым для выявления особенностей схемы построения стенда, выбора ее оптимальных параметров и получения предварительных оценок погрешностей. При проведении анализа механической системы стенда должны быть решены задачи:

- определения критерия выбора длины кривошипа;
- выбора способа расположения катушек управления;
- оценки погрешностей, обусловленных схемой построения стенда.

На основе исследований могут быть приняты необходимые конструктивные решения.

Выбор кинематической схемы стенда

Очевидно, что стенд для исследования частотных характеристик микродатчиков может быть построен на основе различных кинематических схем.

Очевидным, на первый взгляд, решением задачи воспроизведения гармонических угловых скоростей в заданном спектре частот является использование классического электродвигателя. Основным достоинством схемы с электродвигателем является возможность непосредственного получения вращательного движения платформы без каких-либо преобразований. Однако такая схема построения привода имеет ряд особенностей. При синусоидальном движении двигатель проходит две крайние точки, в которых угловая скорость равна нулю. По этой причине колебательный режим работы характеризуется постоянным реверсом электродвигателя. Очевидно, что при работе в режиме постоянного изменения скорости вращения ротора от нулевого до амплитудного значения возникают большие пусковые токи, превышающие номинальные в десятки раз. Таким образом, для обеспечения рабочих температурных режимов линейные размеры подобного

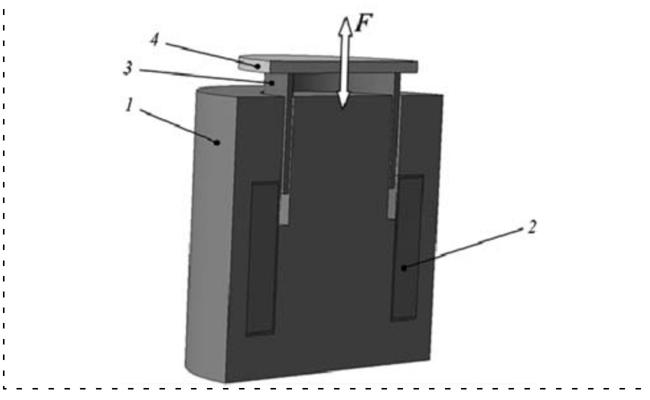


Рис. 1. Трехмерная модель электродинамического вибростенда: *1* — магнитопровод; *2* — катушка намагничивания; *3* — подвижная катушка управления; *4* — планшайба

двигателя должны быть значительными. Указанный режим работы также нехарактерен и для подшипников. Тела качения, функционирующие в режиме неполного оборота, приобретают овальную форму, а на дорожках образуются канавки.

В случае использования коллекторного двигателя щеточно-коллекторный узел будет подвержен значительному износу, а коммутация обмоток приведет к большим пульсациям момента на валу.

В схеме с бесколлекторным электродвигателем для получения синусоидального изменения момента на валу ток в обмотках необходимо изменять не по синусоидальному, а по гораздо более сложному закону. Это повышает требования к электронике и системе управления. Кроме того, любой электродвигатель из-за наличия конечного числа пар полюсов будет формировать момент на роторе дискретно, вследствие чего неизбежны пульсации момента на валу.

Таким образом, создание стенда для воспроизведения угловых колебаний связано с проектированием специальной электрической машины. Следует отметить, что схема построения вибростендов, воспроизводящих линейные колебания в близком диапазоне частот, основана на применении электромагнитной системы. Рассмотрим типовую схему построения электродинамических вибростендов (рис. 1).

Вибростенд конструктивно состоит из электромагнита, создающего постоянное магнитное поле в рабочем воздушном зазоре, и помещенной в него обмотки управления, выполненной в виде подвижной катушки управления (КУ). В качестве источника постоянного магнитного поля могут быть использованы высококоэрцитивные магниты из редкоземельных металлов, например, такие, как в широко известных вибростендах немецкой фирмы Tira [1].

Постоянный ток, протекая по обмотке намагничивания *2*, создает постоянное магнитное поле, которое, замыкаясь через магнитопровод *1*, создает в рабочем воздушном зазоре постоянное магнитное поле. На катушку управления *3*, помещенную в зазор электромагнита, при протекании по ней переменного тока будет воздействовать переменная сила *F*. Вследствие этого планшайба с испытываемым изделием будет совершать возвратно-поступательное движение.

Типовые вибростенды предназначены для воспроизведения вертикальных и горизонтальных линейных перемещений в диапазоне до нескольких килогерц, что позволяет судить о высоких динамических характеристиках их привода. Идея создания стенда для исследования частотных характеристик микродатчиков заключается в преобразовании осевых возвратно-поступательных движений подвижной катушки управления электромагнитного привода в угловые колебательные движения платформы [2, 3]. Аналогичная схема была опробована ранее на макете стенда [4], однако ее расчеты и теоретическое обоснование проведены не были.

В отличие от типового вибростенда в разрабатываемой схеме предлагается использовать два элек-

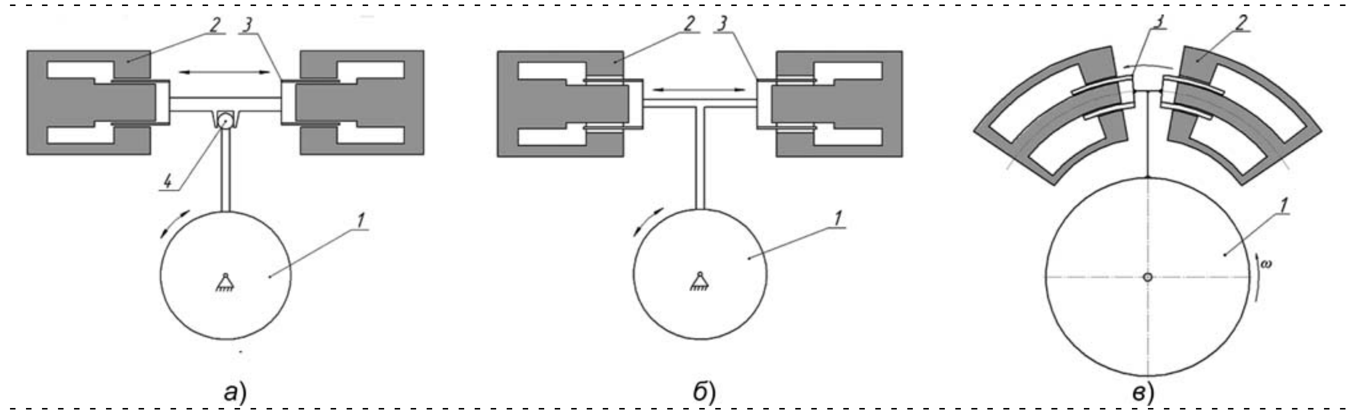


Рис. 2. Схемы построения стенда:
а — с шарниром; *б* — с увеличенным воздушным зазором; *в* — с тороидальными катушками, где *1* — поворотная платформа; *2* — электромагнит; *3* — катушка управления; *4* — шарнир

тромагнитных привода. Это целесообразно с точки зрения повышения момента на валу платформы. Кроме того, система из двух приводов компенсирует погрешности, вызванные конструктивными особенностями каждого из них. На рис. 2 предложены возможные варианты схем построения стенда при использовании электромагнитов с различной конфигурацией магнитопровода [5].

Очевидно, что для воспроизведения угловых колебаний с помощью электромагнитного привода следует преобразовать возвратно-поступательные колебания в угловые. При этом возникает необходимость в применении шарнира (рис. 2, *а*), который может оказать влияние на динамические характеристики стенда. Исключение из кинематической схемы шарнира повлечет увеличение воздушных зазоров в постоянных электромагнитах (рис. 2, *б*) либо применение вместо цилиндрических катушек и магнитопровода указанных элементов тороидальной формы (рис. 2, *в*). Следует отметить, что применение схемы, предложенной на рис. 2, *б*, приведет к неравномерности распределения индукции в зазоре в связи с искривлением силовых линий поля и к функциональной зависимости осевой составляющей электромагнитной силы от угла поворота платформы. Это, в свою очередь, внесет нелинейность в закон управления.

Разработка стенда по схеме на рис. 2, *в* усложняется необходимостью изготовления магнитопровода тороидальной формы из сортовой стали. Процесс набора магнитопровода из изолированных тонких пластин электротехнической стали в форме сектора тороида также приведет к усложнению конструкции и процесса намотки; кроме того, это не технологично.

Таким образом, наиболее целесообразным представляется построение стенда по схеме, предложенной на рис. 2, *а*.

На основе предложенной кинематической схемы стенда сформируем его функциональную схему и определим состав основных элементов. Функциональная схема стенда приведена на рис. 3. Стенд состоит из исполнительного механизма и электронного блока.

Исполнительный механизм предназначен для воспроизведения линейных возвратно-поступательных перемещений и преобразования их в угловые колебания аналогично кривошипно-шатунному механизму. Возвратно-поступательные перемещения шатуна реализуются с помощью двух жестко закрепленных на основании постоянных электромагнитов идентичной конструкции и двух катушек управления. Магнитопроводы электромагнитов должны иметь кольцевой воздушный зазор, в котором могут быть размещены катушки управления, конструктивно связанные между собой единым шатуном, соединенным с основанием посредством линейной направляющей. На шатуне может быть размещен

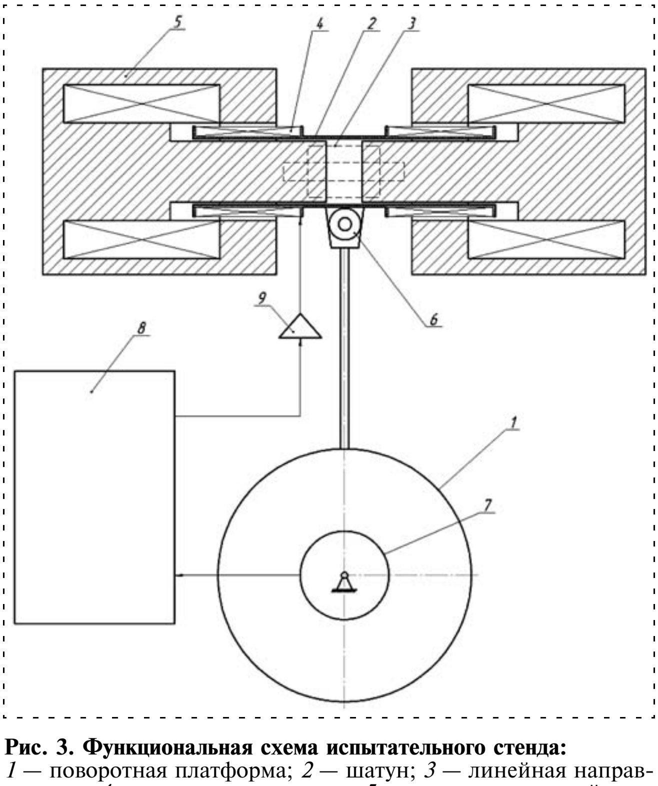


Рис. 3. Функциональная схема испытательного стенда:
1 — поворотная платформа; *2* — шатун; *3* — линейная направляющая; *4* — катушка управления; *5* — электромагнитный привод; *6* — шарнир; *7* — датчик угла поворота платформы; *8* — ЭВМ; *9* — усилитель мощности

кронштейн, предназначенный для установки линейных акселерометров. Возвратно-поступательные колебания шатуна предполагается преобразовывать в угловые колебания платформы через кривошип посредством двухстепенного шарнира. Датчик угла поворота платформы должен быть размещен на валу платформы соосно с ней.

К основным элементам электронного блока относятся датчик угла поворота платформы, ЭВМ с установленной программой управления, усилитель мощности КУ. В разрабатываемой схеме реализуется классическая отрицательная обратная связь по угловому положению платформы.

Согласно предлагаемой схеме угол поворота платформы конструктивно не фиксирован и может изменяться в зависимости от частоты в целях обеспечения постоянства амплитуды угловой скорости. В связи с этим стенд, построенный по предложенной схеме, способен воспроизводить угловую скорость фиксированной амплитуды в заданном диапазоне частот.

Исследование влияния размеров и формы конструктивных элементов на характеристики стенда

Рассмотрим задачу выбора длины кривошипа, определяющей расстояние между осью шатуна и центром вращения платформы, при условии достижения наилучших моментных характеристик стенда.

Очевидно, что в целях снижения энергозатрат, необходимых для достижения требуемых параметров воспроизводимой угловой скорости, момент инерции подвижной части стенда должен быть минимальным. В предлагаемой схеме момент инерции подвижной части находится в квадратичной зависимости от межосевого расстояния, причем момент привода зависит от межосевого расстояния прямо пропорционально. В связи с этим при увеличении межосевого расстояния момент сил инерции будет расти более интенсивно, чем момент, создаваемый электромагнитным приводом на оси платформы. Очевидно, что требуемые динамические характеристики обеспечиваются только в случае, если значение момента привода превышает момент сил инерции. Таким образом, моментные характеристики стенда тем лучше, чем меньше межосевое расстояние между шатуном и платформой.

Очевидно, что в реальной конструкции минимальная длина кривошипа определяется, в первую очередь, конструктивными ограничениями, обусловленными размерами и взаимным расположением элементов. Ввиду этого длина кривошипа выбирается минимально возможной при действующих конструктивных ограничениях.

На силовые характеристики, качество и удобство управления перемещением КУ влияет ее длина и способ расположения относительно полюса.

Сила электромагнитного привода изменяется во времени пропорционально силе тока в КУ:

$$F = Bi(t)L, \tag{1}$$

где B — среднее значение индукции постоянного магнитного поля в зазоре электромагнита; $i(t)$ — мгновенное значение силы тока в КУ; L — длина провода КУ, находящаяся в постоянном магнитном поле.

Из (1) следует, что наиболее простой вид закон управления движением шатуна будет иметь в случае пропорциональной зависимости силы привода от силы тока в КУ. Однако специфика линейного перемещения обусловливает некоторые конструктивные особенности. В случае использования катушки с длиной обмоточного окна, равной длине полюса a (рис. 4), при движении шатуна с КУ на расстояние c часть ее витков будет выходить за пределы силовых линий поля, создаваемого постоянным электромагнитом. Вследствие этого сила привода будет нелинейно изменяться за период колебаний. Поэтому длина и относительное расположение КУ должны быть такими, чтобы при ее перемещении вдоль оси электромагнита длина провода, находящаяся в пределах полюса шириной a, оставалась неизменной.

Это требование может быть выполнено путем увеличения длины КУ на величину $2c$ (рис. 4).

В результате требуемая длина КУ b складывается из ширины полюса электромагнита a и удвоенного расстояния c:

$$b = a + 2c.$$

Подобное расположение КУ обеспечивает постоянство коэффициента L в (1). Таким образом, обеспечивается линейная зависимость силы привода от силы тока в КУ, что упрощает закон управления движением шатуна.

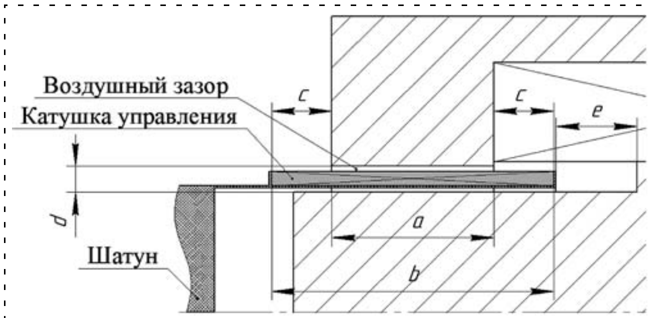


Рис. 4. Схема расположения КУ в воздушном зазоре

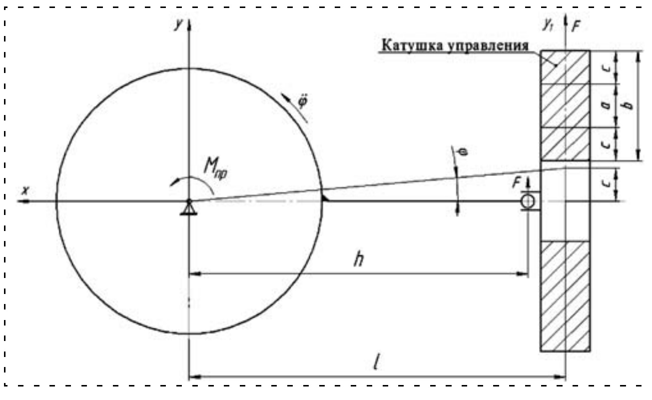


Рис. 5. Схема подвижной части

Расстояние c, в свою очередь, зависит от межосевого расстояния шатуна и платформы. Из схемы, представленной на рис. 5, следует, что для поворота платформы на угол $\pm\varphi$ шатун должен отклониться от нулевого положения на расстояние $\pm c$. При этом для отклонения платформы на заданный угол φ при увеличении межосевого расстояния l увеличивается расстояние c. Так как для создания силы привода используется только часть КУ, находящаяся в пределах полюса шириной a, часть КУ, находящаяся вне его пределов, представляет собой дополнительную инерционную массу. Очевидно, что при увеличении межосевого расстояния длина катушки, выходящая за пределы полюса, возрастет. Таким образом, увеличение межосевого расстояния l приводит к увеличению массы КУ и ухудшению моментных характеристик стенда.

Для снижения момента инерции подвижной части стенда постоянство длины провода (коэффициента L) может быть обеспечено путем увеличения ширины полюса относительно длины КУ на величину $2c$ (рис. 6). В таком случае масса КУ уменьшается за счет ее расположения в пределах полюса электромагнита. Вся КУ используется для создания силы, что энергетически выгодно.

В данной схеме при изменении межосевого расстояния представляется возможным пропорциональное изменение ширины полюса. При этом, в отличие от первой схемы, длина КУ и ее масса изменяться не будут. Это целесообразно с точки зрения уменьшения момента инерции. Однако при увеличении ширины полюса снижается сопротивление воздушного зазора, магнитный поток увеличивается и магнитопровод входит в насыщение. По этой причине КУ не может иметь большую длину. Силы электромагнитного привода с КУ малой длины недостаточно для обеспечения требуемых моментных характеристик. Таким образом, в разрабатываемом приводе предложено использовать КУ, выходящую за пределы полюса магнитопровода.

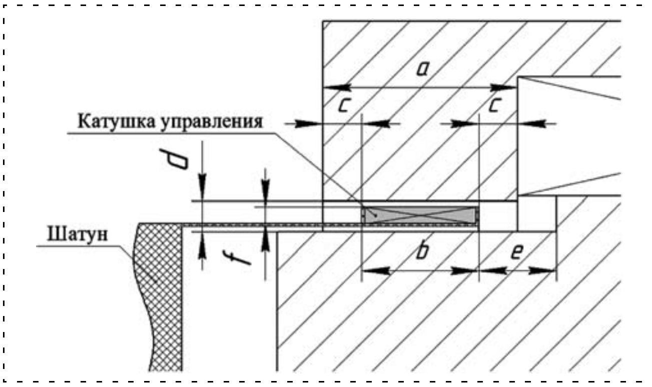


Рис. 6. Схема расположения КУ в пределах полюса

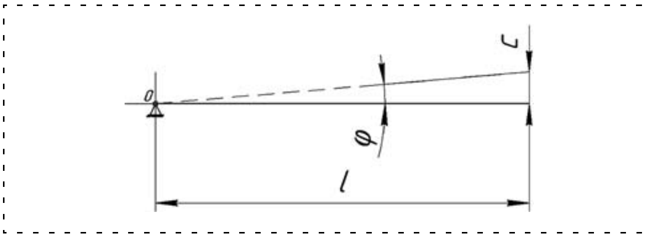


Рис. 7. Упрощенная кинематическая схема

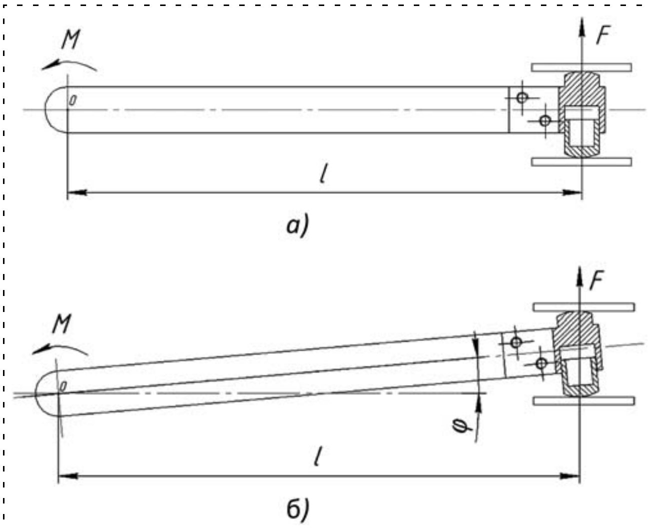


Рис. 8. Схема движения платформы:
а — нулевое положение; *б* — отклонение на угол φ

Оценка погрешностей, обусловленных схемой построения стенда

Исследования кинематической схемы стенда необходимы для обоснования возможности воспроизведения гармонического сигнала и получения оценки погрешности. Под кинематической погрешностью понимается погрешность преобразования закона движения шатуна, обусловленная схемой построения стенда, а именно, спецификой преобразования линейного движения в угловое.

В предлагаемой схеме при преобразовании линейного возвратно-поступательного гармонического движения шатуна колебательное движение платформы не будет гармоническим. На рис. 7 представлена упрощенная кинематическая схема стенда.

Из рисунка видно, что $\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{c}{l}$.

Таким образом, гармоническое движение шатуна не может быть преобразовано в гармоническое движение платформы даже теоретически. Однако при малых углах φ, например при $\varphi \leqslant 5°$, зависимость тангенса от угла носит линейный характер. Таким образом, для малых φ можно записать:

$$\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi \Rightarrow \varphi \approx \frac{c}{l}.$$

Из последнего выражения видно, что максимальная относительная погрешность преобразования при угле поворота платформы 5° не превышает 0,26 %. Таким образом, при малых углах колебаний линейное движение шатуна преобразуется в угловое с пренебрежимо малыми погрешностями.

К другим особенностям разрабатываемой схемы относятся зависимость момента привода от угла поворота. Рассмотрим часть конструкции стенда, состоящую из кривошипа и шарнира (рис. 8). Момент M, создаваемый силой F на плече h относительно точки 0, вычисляется по формуле

$$M = Fl\cos\varphi.$$

При этом максимальный момент будет при начальном положении платформы (рис. 8, *а*).

При отклонении на угол φ (рис. 8, *б*) момент M уменьшится из-за уменьшения $\cos\varphi$. Зависимость момента от угла поворота приведет к отклонению закона движения от гармонического и к погрешности воспроизведения угловой скорости. При отклонении платформы на угол $\varphi = 5°$ момент уменьшается на 0,38 %, что является допустимым.

Заключение

В результате проведенных исследований механической системы можно сделать выводы о том, что:

- при уменьшении длины кривошипа моментные характеристики улучшаются. Минимальная длина определяется исходя из конструктивных ограничений;
- в конструкции привода целесообразно использовать катушку управления, выходящую за пределы полюса;
- суммарная относительная погрешность воспроизведения угловых колебаний, обусловленная схемой построения стенда, не превышает 1 %.

Указанные исследования дают понимание о принципе построения кинематической схемы стенда, но не позволяют судить о структуре системы управления и о точности системы в целом. Эти вопросы заслуживают отдельного рассмотрения при дальнейшей разработке стенда.

Список литературы

1. URL: http://www.tira-gmbh.de
2. **Скалон А. И., Чекмарев А. Б.** Устройство для воспроизведения угловых скоростей // Тез. докл. Второго междунар. симпозиума "Механические измерения и испытания". Ч. 1. Москва, 2010. 206 с.
3. **Чекмарев А. Б**. Стенд для контроля частотных характеристик микромеханических гироскопов и модулей на их основе. Навигация и управление движением // Матер. докл. XII конф. молодых ученых "Навигация и управление движением". СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2010. С. 159—166.
4. **Грязин Д. Г., Евсеев В. О.** Средство контроля частотных характеристик микромеханических гироскопов // Научное приборостроение. 2009. Т. 19. С. 30—35.
5. **Грязин Д. Г., Чекмарев А. Б**. Устройство для определения частотных характеристик акселерометров и датчиков угловых скоростей // Тр. XIX междунар. науч.-техн. сем. "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации". М.: ЗАО "Издательский дом МЭИ", 2010. С. 79.

УДК 629.7.054

В. Э. Джашитов, д-р техн. наук, проф.,
В. М. Панкратов, д-р техн. наук, проф.,
А. В. Голиков, канд. техн. наук,
iptmuran@san.ru,
Институт проблем точной механики
и управления РАН, г. Саратов

Гироскопический тренажер с переменным кинетическим моментом: автоматизированный анализ и управление

Построена и исследована нелинейная математическая модель специализированного гироскопического тренажера для рук, применяемого в медицинской и спортивной практике. Разработано поддерживающее программное обеспечение. На основе аналитического и автоматизированного численного анализа полученных динамических уравнений движения осуществлен выбор параметров тренажера и необходимых управляющих воздействий, обеспечивающих существенное увеличение его переменного кинетического момента. Выработаны практические рекомендации по управлению тренажером.

Ключевые слова: *гироскопический тренажер с переменным кинетическим моментом, математическая модель, программное обеспечение, автоматизированный анализ, управляющие воздействия*

Введение и постановка задач

Гироскопический тренажер, показанный на рис. 1, представляет собой двухстепенной гироскоп с быстровращающимся ротором [1—7]. Конструкция тренажера такова, что внутреннее кольцо *2* вместе с ротором *1*, может поворачиваться на неограниченный угол α относительно корпуса *3*.

Корпус *3* со всеми элементами помещается в руке восстанавливающего двигательные функции руки пациента или тренирующегося спортсмена.

Ротору *1* гироскопа придают начальное вращение (вручную или с помощью наматываемой на ротор лески) с угловой скоростью $\Omega_0 = \dot{\gamma}_0$.

Далее вызывают круговыми колебательными движениями руки (управляющее воздействие) определенной амплитуды и частоты вокруг оси 0ξ вращение внутреннего кольца *2* гироскопа вместе с ротором *1* по углу α с угловой скоростью $\dot{\alpha}$. При определенных характеристиках (амплитуда и частота) такого управляющего воздействия можно добиться возрастания угловой скорости Ω вращения ротора, т. е. увеличения кинетического момента.

Таким образом, *принцип действия* гироскопического тренажера заключается в том, что взаимно перпендикулярные векторы переносной угловой скорости $\dot{\alpha}$ и кинетического момента H ротора гироскопа создают приложенный к руке гироскопический момент, а значит, и гироскопические силы реакции. При этом тренирующийся должен приложить определенные динамические усилия, чтобы удержать тренажер в руке.

Главная особенность рассматриваемого устройства — это возможность *существенного увеличения* начальной угловой скорости собственного вращения гироскопа (и, тем самым, возрастания его кинетического момента и динамического гироскопического момента) за счет управляющего воздействия руки, в которой помещается тренажер.

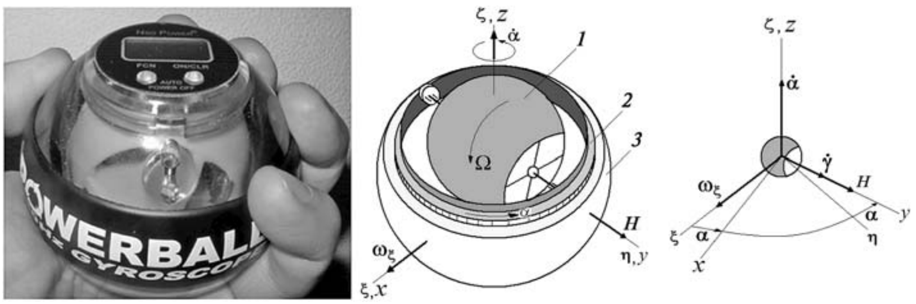


Рис. 1. Элементы конструкции, кинематическая схема и системы координат гироскопического тренажера:
1 — ротор; *2* — внутреннее кольцо с грузиком; *3* — корпус

Например, можно приближенно оценить гироскопические силы F, приложенные к руке, и найти, во сколько раз они больше веса тренажера, при следующих исходных данных: $\Omega = 2100$ с$^{-1}$; радиус инерции ротора $i = 0{,}02$ м; масса ротора гироскопа $m = 0{,}25$ кг и примерно равна массе всего тренажера. Диаметр тренажера, помещаемого в руку, $D = 0{,}07$ м. Угловая скорость $\dot\alpha = 10$ с$^{-1}$, $g \approx 10$ м/с^2. Ответ получается после приравнивания гироскопического момента и момента внешних сил: $F = mi^2\Omega\dot\alpha/D = 30$ Н, что в 12 раз ($F/mg = 12$) превышает собственный вес тренажера.

В прилагаемом к реальному тренажеру руководстве отсутствуют практические рекомендации по способам дополнительной раскрутки ротора от начальной угловой скорости.

Для теоретической и практической разработки и более точного понимания функционирования гироскопического тренажера, а также анализа влияния на его работу конструктивных параметров и управляющих воздействий, представляется важным решение следующих задач:

1) построение и автоматизированное исследование его математической модели в виде нелинейных динамических уравнений движения с учетом управляющих воздействий.

2) выбор параметров тренажера и управляющих воздействий на основе аналитического и численного анализа полученных уравнений.

Подходы к таким задачам имеются в теории гироскопов [1—7]. Однако рассматриваемый гироскопический тренажер имеет существенные особенности как нелинейная возмущаемая динамическая система. Поэтому необходимо проведение исследований.

Математическая модель

Система координат $0xyz$, связанная с внутренним кольцом *1*, — сопутствующая (рис. 1). Система координат $0\xi\eta\zeta$ связана с инерциальным пространством (условно неподвижная). Обобщенные координаты — угол α поворота внутреннего кольца *2* относительно корпуса и угол γ собственного вращения ротора, $\dot\gamma = \Omega(t)$. Система имеет две степени свободы.

Задаваемая угловая скорость круговых колебаний и угол поворота корпуса *3* в руке (управляющее воздействие) соответственно равны

$$\omega_\xi = \dot\varphi_\xi = (\omega_0 - k\Omega)\cos pt,\ \varphi_\xi = -\frac{\omega_0}{p}\sin pt, \qquad (1)$$

где ω_0, ω_0/p — амплитуды гармонического управляющего воздействия за счет угловой скорости и угла поворота вокруг оси ξ; p — частота колебаний; k — задаваемый коэффициент пропорциональности.

В кинематических соотношениях (1) амплитуда задаваемой угловой скорости может изменяться пропорционально угловой скорости $\dot\gamma = \Omega(t)$ ротора ($k \ne 0$) или быть постоянной ($k = 0$).

Нелинейные дифференциальные уравнения движения гироскопического тренажера, полученные на основе уравнений Лагранжа 2-го рода (после нахождения кинетической энергии системы и обобщенных сил и применения формализма Лагранжа [7]), примут вид

$$C\ddot\alpha + \mu_\alpha\dot\alpha + D\omega_\xi^2\sin\alpha\cos\alpha + B_1\dot\gamma\,\omega_\xi\cos\alpha = -M_{T\alpha}; \qquad (2)$$

$$B_1\ddot\gamma + \mu_\gamma\dot\gamma - B_1\dot\omega_\xi\sin\alpha - B_1\omega_\xi\dot\alpha\cos\alpha = -M_{T\gamma}, \qquad (3)$$

где $C = A_1 + C_2$; $D = A_1 + A_2 + A_3 - B_1 - B_2 - B_3$; $A_1 = C_1$, B_1 — моменты инерции ротора *1* относительно x, y, z; A_2, B_2, C_2 — моменты инерции внутреннего кольца *2* с грузиком относительно x, y, z; A_3, B_3 — моменты инерции корпуса *3* относительно x, y; μ_α — коэффициент вязкого демпфирования между кольцом *2* и корпусом *3*; μ_γ — коэффициент вязкого демпфирования между ротором *1* и кольцом *2*; $M_{T\alpha} = M_{T\alpha 0}\mathrm{sign}\,\dot\alpha$ — момент сил сухого трения между кольцом *2* и корпусом *3*; $M_{T\gamma} = M_{T\gamma 0}\mathrm{sign}\,\dot\gamma$ — момент сил сухого трения между ротором *1* и кольцом *2*; $B_1\dot\gamma(t) = H(t)$ — переменный кинетический момент ротора.

Анализ полученных уравнений движения (1)—(3)

Основная особенность полученных уравнений — это зависимость угловой скорости собственного вращения, а значит, и кинетического момента ротора от времени. Еще одна особенность — наличие вязкого трения между кольцом *2* и корпусом *3*.

Получим и исследуем *нелинейные уравнения* движения гироскопического тренажера для случая равных нулю моментов сил сухого трения $M_{T\alpha} = M_{T\gamma} = 0$, моментов сил вязкого трения $\mu_\gamma = 0$ по оси ротора и $k = 0$.

Уравнения движения (2), (3) примут вид

$$C\ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} + D\omega_\xi^2 \sin\alpha\cos\alpha + B_1 \dot{\gamma}\,\omega_\xi \cos\alpha = 0; \quad (4)$$

$$\ddot{\gamma} = d(\omega_\xi \sin\alpha)/dt = \dot{\omega}_\xi \sin\alpha + \omega_\xi \dot{\alpha} \cos\alpha. \quad (5)$$

Из уравнения (5) видно, что возникающий за счет круговых колебаний корпуса тренажера с заданной амплитудой и частотой $\omega_\xi = \dot{\varphi}_\xi = \omega_0 \cos pt$, $\varphi_\xi = -(\omega_0/p)\sin pt$ приведенный момент сил инерции вызывает угловое ускорение $\ddot{\gamma}$ собственного вращения ротора. Это ускорение тем больше, чем больше угловая скорость $\dot{\alpha}$ внутреннего кольца *2*.

Теперь становится понятным возможное возрастание угловой скорости собственного вращения ротора за счет вынуждающих круговых колебаний корпуса.

Полученный результат подтверждается экспериментом с реальным тренажером. После совершения вращательных колебаний с определенной амплитудой и частотой в течение определенного отрезка времени (порядка нескольких десятков секунд) угловая скорость вращения ротора начинает возрастать от начального значения примерно в 4...7 раз.

Проинтегрируем (5) при начальных условиях $\alpha(0) = \alpha_0 = 0$, $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_0$ и подставим в уравнение (4) полученное выражение для угловой скорости $\dot{\gamma}$:

$$C\ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} + D_1\omega_\xi^2 \sin\alpha\cos\alpha + B_1 \dot{\gamma}_0\, \omega_\xi \cos\alpha = 0; \quad (6)$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 + \omega_\xi \sin\alpha, \quad (7)$$

где $D_1 = A_1 + A_2 + A_3 - B_2 - B_3$.

Из уравнений (6), (7) видно, что важным параметром является ненулевая начальная угловая скорость собственного вращения ротора $\dot{\gamma}_0$. Без нее в начальный момент гироскопический момент отсутствует, и гироскоп в дальнейшем раскрутить невозможно. Важным параметром также может оказаться разность моментов инерции в выражении для D_1. Для заданной установки этой разности на кольце 2 имеется грузик определенной массы.

С учетом $\omega_\xi = \omega_0 \cos pt$ получим из уравнения (6) нелинейное уравнение с переменными коэффициентами:

$$C\ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} + 0{,}5 D_1 \omega_0^2 (1 + \cos 2pt)\sin\alpha\cos\alpha + B_1 \dot{\gamma}_0\, \omega_0 \cos pt \cos\alpha = 0. \quad (8)$$

Для малых углов α будем иметь неоднородное уравнение типа уравнения Матье:

$$C\ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} + 0{,}5 D_1 \omega_0^2 (1 + \cos 2pt)\alpha + B_1 \dot{\gamma}_0\, \omega_0 \cos pt = 0. \quad (9)$$

Известно [5], что в таких уравнениях может иметь место параметрический резонанс при условии $p = \omega_0\sqrt{0{,}5 D_1/C}$. При этом трение играет существенную роль, обусловливая минимальное значение амплитуды колебаний за счет соответствующего движения руки с тренажером, при котором возникает параметрический резонанс. В традиционных гироскопических системах колебания, при наличии трения и нелинейных эффектов, достигают лишь конечной амплитуды.

Проведем в соответствии с работами [5—7] анализ *нелинейной динамики* полученных уравнений.

Представим нелинейные уравнения (4), (5) в форме Коши с учетом выражения $\omega_\xi = \omega_0 \cos pt$ и начальных условий $\alpha_0 = 0$, $\dot{\gamma}_0 = \Omega_0$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = \psi = f_1(\alpha, \psi, \gamma, z);\\
&\dot{\psi} = -\frac{\mu_\alpha}{C}\psi - \frac{D_1\omega_0^2}{2C}\cos z \sin 2\alpha - \frac{B_1\Omega_0\omega_0}{C}\cos z \cos\alpha = \\
&= f_2(\alpha, \psi, \gamma, z);\\
&\dot{\gamma} = \Omega_0 + \omega_0 \cos z \sin\alpha = f_3(\alpha, \psi, \gamma, z);\\
&\dot{z} = p = f_4(\alpha, \psi, \gamma, z),
\end{aligned} \quad (10)$$

где α, ψ, γ, z — фазовые переменные системы; μ_α, C, B_1, D_1, Ω_0, ω_0, p — параметры системы.

Приравняем правые части системы (10) нулю и получим систему алгебраических уравнений для определения стационарных (неподвижных) точек: $\psi = 0$, $(B_1 - D_1)\sin 2\alpha = 0$, $p = 0$.

Поскольку $B_1 - D_1 = -D \neq 0$, то получим стационарные точки системы:

$$\alpha_* = \pi n/2,\ n \in Z,\ \psi_* = 0,\ z_* = 0. \quad (11)$$

Составляя матрицу устойчивости для линеаризованной в окрестностях неподвижных точек (11) системы (10), получим на ее основе характеристическое уравнение линеаризованной системы:

$$\lambda^2 + \frac{\mu_\alpha}{C}\lambda + \frac{D_1\omega_0^2}{2C}\cos 2\alpha_* - \frac{B_1\Omega_0\omega_0}{C}\sin\alpha_* = 0. \quad (12)$$

Анализ условий устойчивости по Гурвицу характеристического уравнения (12) линеаризованной в окрестности стационарных точек исходной нелинейной системы (10) показывает следующее.

1. При $\alpha_* = 0$ уравнение (12) принимает вид

$$\lambda^2 + \frac{\mu_\alpha}{C}\lambda + \frac{D_1\omega_0^2}{2C} = 0. \quad (13)$$

Условия устойчивости по Гурвицу выполняются, если имеется вязкое сопротивление $\mu_\alpha > 0$ и разность моментов инерции $D_1 = A_1 + A_2 + A_3 - B_2 - B_3 > 0$.

При выполнении этих условий состояние равновесия — *устойчивый фокус*. Стационарной точке $\alpha_* = 0$ соответствует положение оси кинетического момента гироскопа, перпендикулярное вектору вынуждающей угловой скорости ω_ξ колебательного вращательного движения тренажера.

2. При $\alpha_* = \pi/2$ уравнение (12) принимает вид

$$\lambda^2 + \frac{\mu_\alpha}{C}\lambda - \frac{D_1\omega_0^2}{2C} - \frac{B_1\Omega_0\omega_0}{C} = 0. \qquad (14)$$

Полагаем $-D_1\omega_0 - B_1\Omega_0 < 0$. Тогда все корни действительные, и один корень больше нуля. Этому корню соответствует состояние равновесия — *неустойчивый узел*. Стационарной точке $\alpha_* = \pi/2$ соответствует положение оси кинетического момента гироскопа, совпадающее по направлению с вектором вынуждающей угловой скорости ω_ξ.

Таким образом, при $\alpha_* = \pi/2$ положение равновесия *неустойчиво* при всех параметрах системы.

3. При $\alpha_* = -\pi/2$ уравнение (12) принимает вид

$$\lambda^2 + \frac{\mu_\alpha}{C}\lambda - \frac{D_1\omega_0^2}{2C} + \frac{B_1\Omega_0\omega_0}{C} = 0. \qquad (15)$$

В этом случае устойчивость или неустойчивость зависит от знака свободного члена в (15), т. е. от сочетания параметров системы.

При $|n| > 1$ в (11) повторяется какой-либо из рассмотренных случаев.

Проведенный анализ линеаризованной системы позволяет сделать два основных вывода:

- для устойчивой работы системы должно иметь место *вязкое сопротивление* между внутренним кольцом *2* и корпусом *3* тренажера;
- при определенных сочетаниях параметров системы рассматриваемого гироскопического тренажера в ней теоретически возможно возникновение *феномена детерминированного хаоса*.

Необходимые условия возникновения этого феномена выполняются [6, 7]: система (10) является существенно нелинейной в силу произвольности угла α поворота внутреннего кольца относительно корпуса, управляющее воздействие носит периодический характер, и размерность системы $N > 3$.

Компьютерные эксперименты и анализ полученных результатов

Для выяснения полной картины поведения гироскопического тренажера необходимо численно интегрировать систему нелинейных уравнений (2), (3) с учетом управляющего воздействия (1).

Полученные же аналитические оценки помогают в выборе исходных параметров гироскопического тренажера:

- общая масса $m = 0{,}26$ кг; масса ротора *1* $m_1 = 0{,}2$ кг; масса кольца *2* $m_2 = 0{,}03$ кг; масса корпуса *3* $m_3 = 0{,}03$ кг;
- радиус инерции $r_1 = 0{,}02$ м и длина ротора *1* $h_1 = 0{,}025$ м;
- радиус инерции кольца *2* с грузиком $r_2 = 0{,}025$ м;
- радиус грузика $r_{2г} = 0{,}0125$ м;
- радиус инерции сферического корпуса *3* $r_3 = 0{,}035$ м;
- $\mu_\alpha = 0{,}00004$ Н · м · с; $\mu_\gamma = 0$; $M_{T\alpha 0} = 0$; $M_{T\gamma 0} = 0$; $k = 0...0{,}1$.

Начальные условия $t = 0$, $\dot\gamma_0 = \Omega_0 = 200$ с$^{-1}$, $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$, $\dot\alpha_0 = 0$.

Для автоматизации исследований, а именно, численного интегрирования нелинейной системы уравнений (1)—(3) и визуализации движения тренажера, управляющих воздействий и полученных результатов разработан специализированный программный комплекс "Powerball".

Диалоговые окна программного комплекса для автоматизированных расчетов и визуализации динамических процессов показаны на рис. 2 (см. вторую сторону обложки).

На рис. 3 показаны результаты численного интегрирования нелинейных уравнений движения (2)—(3) при неадаптивном (колебательное движение руки с постоянной амплитудой ω_0) гармоническом управляющем воздействии (1):

$$\omega_\xi = \omega_0 \cos pt,\ \varphi_\xi = -(\omega_0/p)\sin pt,$$

где $k = 0$; амплитуда колебаний угловой скорости $\omega_0 = 35$ с$^{-1}$; частота $p = 35$ с$^{-1}$; амплитуда колебаний по углу φ_ξ равна $\omega_0/p = 1$ рад.

При выбранных параметрах тренажера и управляющего неадаптивного воздействия возможно существенное (примерно в шесть раз по данным моделирования) увеличение кинетического момента ротора.

Угловая скорость вращения ротора $\dot\gamma = \Omega$ при постоянной амплитуде управляющего воздействия увеличивается приблизительно по экспоненциаль-

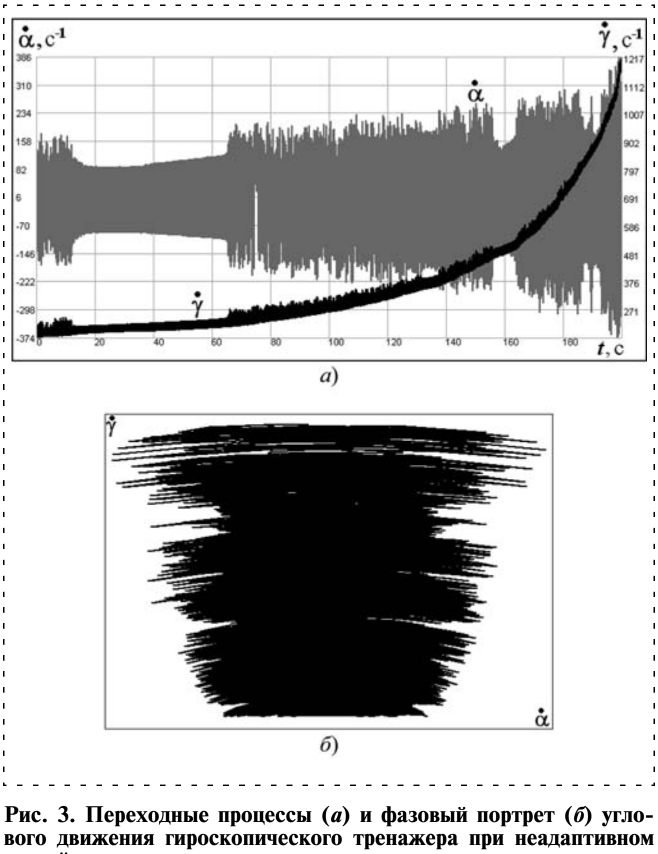


Рис. 3. Переходные процессы (*а*) и фазовый портрет (*б*) углового движения гироскопического тренажера при неадаптивном воздействии $\omega_\xi = \omega_0 \cos pt$

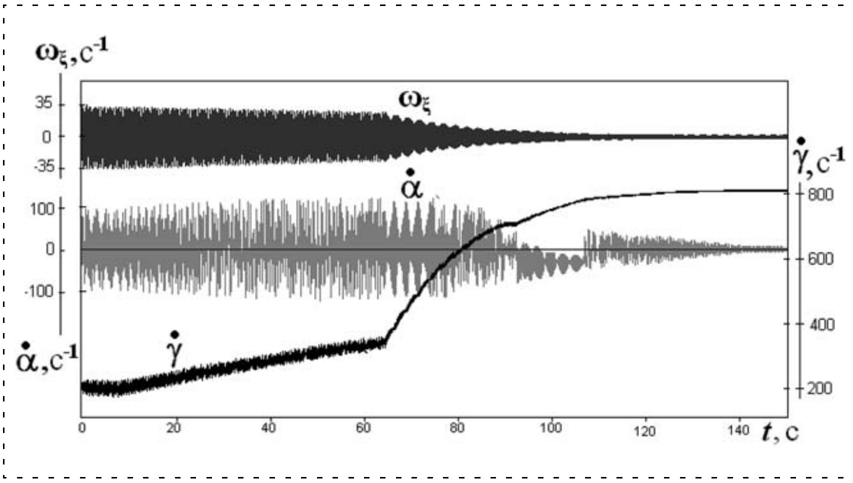


Рис. 4. Переходные процессы углового движения гироскопического тренажера при адаптивном воздействии $\omega_\xi = (\omega_0 - k\Omega)\cos pt$

ному закону за конечный промежуток времени. При этом основной рост угловой скорости вращения $\dot\gamma = \Omega$ ротора гироскопа при рассмотренных параметрах тренажера начинается примерно с 40-й секунды, когда существенно увеличивается угловая скорость $\dot\alpha$.

На рис. 4 представлены результаты численного интегрирования нелинейных уравнений движения (2), (3) при адаптивном (колебательное движение руки с переменной амплитудой $\omega_0 - k\Omega$) гармоническом управляющем воздействии (1):

$$\omega_\xi = (\omega_0 - k\Omega)\cos pt,$$

где $k = 0{,}04$; $\omega_0 = 35$ с$^{-1}$; $p = 35$ с$^{-1}$.

При выбранных параметрах тренажера и управляющего адаптивного воздействия также возможно существенное (приблизительно в четыре раза по данным моделирования) увеличение кинетического момента ротора.

Угловая скорость вращения ротора $\dot\gamma = \Omega(t)$ при предложенной переменной амплитуде управляющего воздействия увеличивается по линейно-экспоненциальному закону, стремясь к установившемуся значению.

Таким образом, возможны следующие *практические рекомендации* по разгону ротора и увеличению, тем самым, его кинетического момента и гироскопических сил реакций тренажера. Надо задать начальную угловую скорость вращения ротора. Затем вращательными колебательными движениями кисти руки вокруг оси 0ξ с заданной постоянной амплитудой и частотой следует добиться увеличения угловой скорости ротора до максимально возможной величины. Эта величина определяется физическими возможностями тренирующегося. Далее уменьшить амплитуду движений кисти руки и поддерживать достигнутое значение кинетического момента ротора.

Полученные аналитические результаты и численные компьютерные эксперименты на построенной математической модели полностью подтверждаются натурными экспериментами на реальном гироскопическом тренажере. Угловая скорость вращения ротора и возникающие гироскопические силы, действующие на руку тренирующегося, фиксируется в цифровом виде с помощью программируемого чипа и встроенного табло.

Заключение

Построена в виде нелинейных динамических уравнений движения с учетом управляющих воздействий и исследована математическая модель гироскопического тренажера с переменным кинетическим моментом, применяемого в медицинской и спортивной практике.

Показано, что для устойчивой работы системы должно иметь место вязкое сопротивление между внутренним кольцом и корпусом тренажера.

Выявлено, что при определенных сочетаниях параметров системы рассматриваемого гироскопического тренажера в ней теоретически возможно возникновение феномена детерминированного хаоса.

Выбраны параметры тренажера и управляющих воздействий на основе анализа его математической модели, даны рекомендации по практическому применению гироскопического тренажера.

Построенная математическая модель и программное обеспечение могут быть использованы как при проектировании и создании гироскопических тренажерных систем с заданными свойствами, так и при анализе их функционирования с учетом управляющих и возмущающих воздействий.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту 10-08-00119а.

Список литературы

1. **Лунц Я. Л.** Введение в теорию гироскопов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 296 с.
2. **Магнус К.** Гироскоп. Теория и применения. М.: Мир, 1974. 516 с.
3. **Одинцов А. А.** Теория и расчет гироскопических приборов. К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. 392 с.
4. **Павловский М. А.** Теория гироскопов. К.: Вища шк. Головное изд-во,1986. 303 с.
5. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., испр. и доп. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989. 472 с.
6. **Джашитов В. Э., Панкратов В. М.** Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий / Под общей ред. акад. РАН В. Г. Пешехонова. С.-Петербург: Изд. ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2005. 404 с.
7. **Джашитов В. Э., Панкратов В. М., Голиков А. В.** Общая и прикладная теория гироскопов с применением компьютерных технологий / Под общ. ред. акад. РАН В. Г. Пешехонова. СПб.: Изд. ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2010. 154 с.

CONTENTS

Aircraft rotating on a list are equipped with the systems of orientation containing a gimbal and mechanical gyroscopes are considered. It is shown that existing algorithms of orientation in the conditions of fast rotation on a list give the considerable phase and amplitude distortions that limits their application. The new algorithm of orientation is developed for aircraft rotating on a list, having more accurate development of orientation parameters and allows to implement the "sine-cosine mechanism" rudders.

Keywords: *gyroscope, systems of orientation, pilotless aircraft*

The article is devoted the strapdown orientation system (SOS) with the line acceleration corrector and the correction method as well. The mathematical modeling results and the experience results of SOS working are shown in the article too.

Keywords*: the strapdown orientation system, the mathematical model, a linearization, the corrector*

The article is devoted to aerodynamical coefficients definition method and thrust characteristics definition method for unmanned aerial vehicles (UAVs). Control system 4-G navigation algorithms for UAVs is considered.

Keywords: *coordinate systems, mathematical model, aerodynamical coefficients, thrust characteristics, 4-G navigation algorithms*

Synthesis of control algorithm by unstable linear plant with the saturating control based on of a method of model predictive control is considered. In this method theoretical group decomposition of the nonlinear differential equations of the expanded plant and the weighed projection with gramian of controllability is applied. For determination of bound of stabilization region it is used homotopy (continuous deformation) vector fields; such characteristics of vector fields as rotation, an index of a vector field are considered. The algorithm of synthesis of control, a technique of a finding of bound of stabilization region and results of modeling are submitted.

Keywords: *decomposition of the differential equations, Lie groups, nonlinear affine systems, a method of model predictive control, synthesis of regulators, gramian of controllability, homotopy of vector fields, rotation of a vector field, integration of the differential 1-form*

On the basis of sufficient conditions of qualitative exponential stability and instability obtained an expressions assessment of dynamical quality scores of the transition process used to build algorithms for analysis and synthesis of both continuous and discrete dynamical systems on the desired direct quality scores, as well as for analysis of dynamic properties of instability continuous and discrete dynamical systems.

Keyword*s: continuous and discrete systems, qualitative exponential stability and instability, the analysis and synthesis of control systems, assessment of quality scores*

Deals with methods of numerical optimization controllers using different software tools (MATLAB-6.5 and VisSim 6.0). Offers effective methods for calculating adjustments to ensure the best quality control in a simple structure of the regulator (in comparison with the proposed structures in other articles).

Keywords: *many-parameter regulators, automatic control, regulators design, optimization*

We develop a method for solving the direct problems of robot manipulators based on the biquaternion models. We consider the geometry and kinematics of the robot manipulator Puma with biquaternions of finite displacements, biquaternion matrices, matrices of the dual directing cosines of the angles.

Keywords: *direct problem of kinematics, biquaternion, biquaternion matrix, the matrix of the dual directing cosines of the angles*

An algorithm for a n-link manipulating robot (MR) control in an environment with unknown static obstacles is considered. A theorem is proved, stating that following the algorithm in the discrete configuration space, the MR in a finite number of steps will either grasp an object or will come to a proved conclusion that the object may not be grasped in any configuration.

Keywords: *robot, unknown environment, obstacles, reachability*

Here is presented a correction system with the estimation of the sensitivity characteristic of a radio signal to a deviation from the glide path by means of integrated square-law estimations for the purpose of updating of factor of strengthening of a direct chain. Two approaches to realization of the given method are presented, their comparison is made.

Keywords*: estimation of the sensitivity characteristic of a radio signal, automatic landing approach*

Control algorithm for a spatial maneuver of an automatic underwater vehicle (AUV) is considered. A problem of payload delivery by AUV to a given point is solved. The essence of the algorithm consists in optimal parameters correction of the control's structure. The control's structure is formed using Pontryagin's maximum principle and contains singular control segments. This algorithm forms an optimal trajectory of AUV and works stable under changing terminal conditions. Numerical calculations of AUV dynamics using the simulation model and formulas for singular control are presented.

Keywords: *automatic underwater vehicle, Pontryagin's maximum principle, singular control, predictive model*

The issues of the test bench design kinematic analysis are investigated. The key feature of the test bench is a method of transformation of the linear reciprocating movement of the coil of an electromagnetic actuator to the angular oscillations of the platform. The kinematic scheme of the stand is proved, the functional circuit is described. Analyze results of the influence of the size and shape of structural elements on the accuracy and dynamic characteristics of the test bench are presented.

Keywords: *test bench, test, angular velocity, micromechanical sensor, dynamic response, calibration, electromagnetic actuator, kinematics, error*

The non-linear mathematical model of a specialized gyroscopic simulator for the hands, applied in a medical and sporting practice is constructed and researched. It is developed supporting the software. On the basis of the analytical and automated numerical analysis of the received dynamic equations of motion the selection of parameters of a simulator and the necessary control effects providing essential increase of its variable angular momentum is executed. Practical recommendations on control of a simulator are produced.

Keywords: *gyroscopic simulator with a variable angular momentum, mathematical model, the software, the automated analysis, control effects*

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Дизайнер *Т. Н. Погорелова.*
Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Е. В. Комиссарова.*

Сдано в набор 29.06.2012. Подписано в печать 15.08.2012. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН912. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
105120, г. Москва, ул. Нижняя Сыромятническая, д. 5/7, стр. 2, офис 2.