

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

№ 7 (160)

июль

2014

Редакционный совет:

VIDYADHAR S., PhD, prof.
JEN-HWA GUO, PhD, prof.
JERRY L., PhD, prof.
KATALINIC B., PhD, prof.
АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.
КАЛЯЕВ И. А., чл.-корр. РАН, проф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.
СОЙФЕР В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.
ШЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.
ЮШЕНКО А. С., д. т. н., проф.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.
ПШИХОПОВ В. Х., д. т. н., проф.
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс., с. н. с.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации. 3
Ширяев В. И., Подвильова Е. О. Аппроксимация информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности. 10
Потапов В. И. Математическая модель и алгоритм оптимального управления подвижным объектом в конфликтной ситуации. 16

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

- Кулаков Ф. М., Шмыров А. С., Шиманчук Д. В.** Управление космическим роботом с использованием неустойчивой точки либрации. 23
Филаретов В. Ф., Коноплин А. Ю. Система автоматической стабилизации подводного аппарата в режиме зависания при работающем многозвенном манипуляторе. Часть 2. 29
Турыгин Ю. В., Зубкова Ю. В., Гартянски Р. Исследование точности позиционирования выходного звена манипулятора автоматизированного электронно-лучевого технологического комплекса. 35

КОНТРОЛЬ И ДИАГНОСТИКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

- Будко П. А., Литвинов А. И.** Кинетический метод контроля и диагностики технических средств. 42
Тупиков Д. В., Резчиков А. Ф., Иващенко В. А. Подход к прогнозированию значений факторов пожароопасных ситуаций. 48

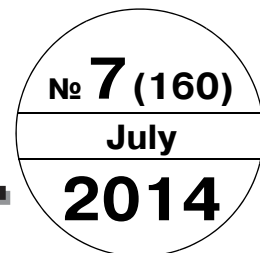
Журнал в журнале "УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"

- Лукаевич В. И., Соколов С. В.** Решение задачи инерциальной наземной навигации с использованием информации электронных карт. 53
Зыбин Е. Ю., Косьянчук В. В., Кульчак А. М. Аналитическое решение задачи оптимальной реконфигурации системы управления летательного аппарата при отказе нескольких органов управления. 59
Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Алгоритм оптимального в смысле комбинированного функционала разворота космического аппарата в классе конических движений. 67

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Editorial Council:

ALIEV T. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 ANSHAKOV G. P., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 BIDYADHAR S., PhD, prof.
 BOLOTNIK N. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 VASILYEV S.N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 JEN-HWA GUO, PhD, prof.
 JERRY L., PhD, prof.
 KALYAEV I. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KATALINIC B., PhD, prof.
 KRASNEVSKIY L. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KUZNETSOV N. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 LEONOV G. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 MATVEENKO A. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 MIKRIN E. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PESHEKHONOV V. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 REZCHIKOV A. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SEBRYAKOV G. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SIGOV A. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 SOJFER V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SOLOVJEV V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SOLOMENTSEV Yu. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 FEDOROV I. B., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 CHENTSOV A. G., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 CHERNOUSKO F. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 SCHERBATYUK A. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 YUSUPOV R. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Editor-in-Chief:

FILIMONOV N. B., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Deputy Editor-in-Chief:

PODURAEV Yu. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PUTOV V. V., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 YUSCHENKO A. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Responsible Secretary:

BEZMENOVA M. Yu.

Editorial Board:

ALEXANDROV V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 ANTONOV B. I.
 ARSHANSKY M. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 BUKOV V. N., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 VITTIKH V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 GRADETSKY V. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 IVCHENKO V. D., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 ILYASOV B. G., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KOLOSOV O. S., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 KOROSTELEV V. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 LEBEDEV G. N., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 LOKHIN V. M., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PAVLOVSKY V. E., Dr. Sci. (Phys.-Math.), prof.
 PROKHOROV N. L., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 PSHIKHOPOV V. Kh., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 RAPOPORT E. Ya., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 SERGEEV S. F., Dr. Sci. (Psychol.), prof.
 FILARETOV V. F., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 FRADKOV A. L., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 FURSOV V. A., Dr. Sci. (Tech.), prof.
 YUREVICH E. I., Dr. Sci. (Tech.), prof.

Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E.V.

CONTENTS

CONTENTS METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

- Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Hybrid Scheme of Solution to the Problems of Linear Acting on the Basis of Polyhedral Optimization Formalism 3
- Shiryayev V. I., Podivilova E. O.** Feasible Set Approximation in Dynamic System State Guaranteed Estimation Problem under Condition of Uncertainty 10
- Potapov V. I.** Mathematical Model and Algorithm of Optimal Control Movable Object in Conflict Situation 16

AUTOMATION AND CONTROL OF TECHNOLOGIC PROCESSES

- Kulakov F. M., Shmyrov A. S., Shymanchuk D. V.** Robotic Spacecraft Control Using an Unstable Libration Point 23
- Filaretov V. F., Konoplin A. Ju.** System of Automatic Stabilization of Underwater Vehicle in Stationkeeping Regime with Working Multilink Manipulator. Part 2 29
- Turygin Yu. V., Zubkova Yu. V., Hartyansky R.** The Positioning Accuracy Research of Manipulator Output Member of Automated Electron Beam Production Complex 35

CONTROL AND DIAGNOSTICS OF TECHNOLOGICAL AND PRODUCTION SYSTEMS

- Budko P. A., Litvinov A. I.** Kinetic Method of Control and Diagnostics of Technical Means 42
- Tupikov D. V., Rezchikov A. F., Ivaschenko V. A.** The Approach to Predict Values of Factors of Fire-Risk 48

Journal within journal

"CONTROL AND INFORMATICS IN THE AEROSPACE AND MARINE SYSTEMS"

- Lukasiewicz V. I., Sokolov S. V.** Solution of the Problem of Inertial Earth Navigation Using Information of Electronic Maps. 53
- Zybin E. Yu., Kosyanchuk V. V., Kulchak A. M.** Analytical Solution of the Optimal Aircraft Control System Reconfiguration Problem in Case of Actuators Failures 59
- Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** Algorithm of the Optimal in the Sense of Combined Functional Turn of a Spacecraft in the Class of Conical Motion 67

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 007.5; 62-52

А. Б. Филимонов¹, д-р техн. наук, проф., filimon_ab@mail.ru,
Н. Б. Филимонов², д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр., nbfilimonov@mail.ru,
¹ МГТУ МИРЭА, "МАТИ" — РГТУ им. К. Э. Циолковского, г. Москва,
² МГУ им. М. В. Ломоносова, ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации*

Рассматривается задача линейного быстродействия для класса аналоговых управляемых объектов. Обсуждаются вопросы дискретизации задачи в условиях применения гибридных схем управления, включающих механизм амплитудно-импульсной модуляции сигналов. Излагается метод решения дискретной оптимизационной задачи. Его основу составляет формализм полиэдральной оптимизации и три теоретические конструкции: прогнозная экстраполяция управляемых движений объекта, принцип погружения исходной оптимизационной задачи в ряд алгоритмически более простых вычислительных задач и механизм экстремального прицеливания.

Ключевые слова: линейное быстродействие, гибридная схема управления, дискретизация времени, многошаговый прогноз, полиэдральная оптимизация, принцип погружения, экстремальное прицеливание

В последнее время в ряде областей научных исследований (математическое моделирование, устойчивость движения, автоматическое управление и др.) все больший интерес проявляется к классу так называемых гибридных систем.

Термин "гибридные системы" (hybrid systems) впервые введен в 1966 г. Витсенхаузенем (H. S. Witsenhausen) в работе [1] для описания комбинации непрерывных и дискретных динамических процессов. В современной англоязычной литературе понятие гибридных систем трактуется весьма широко — сюда относятся (см., например, [2—5]) логико-динамические системы, событийно-управляемые системы, системы с переменной структурой, многорежимные системы, переключательные системы и др.

Цель настоящей работы — показать продуктивность применения гибридных схем управления для решения аналоговых задач линейного быстродействия. Развивается подход, основу которого составляет механизм дискретизации задачи управления в условиях амплитудно-импульсной модуляции аналоговых управляющих сигналов. Гибридная система управления включает взаимодействующие аналоговые и дискретные компоненты, динамика которых описывается соответственно дифференциальными и разностными уравнениями. Переход к дискретной модели объекта позволяет применить полиэдральную методологию оптимизации дискретных процессов управления, развиваемую в работах авторов [6, 7].

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты: № 13-08-00161 и № 13-08-00948.

Задача линейного быстродействия

Рассмотрим класс линейных аналоговых объектов, динамика которых в непрерывном времени t описывается дифференциальным уравнением состояния вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}, \quad (1)$$

где $t \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X} = \mathbf{R}^n$ — состояние, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^r$ — управляющий вход; $\mathbf{A}_0 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_0 \in \mathbf{R}^{n \times r}$.

Полагаем, что управление ограничено:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (2)$$

где $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{R}^r$ — область допустимых управлений.

Задано целевое множество состояний объекта:

$$\mathbf{G} \subset \mathbf{X}. \quad (3)$$

Пусть объект вначале находится в состоянии

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4)$$

которое не является целевым:

$$\mathbf{x}_0 \notin \mathbf{G}.$$

Поставим задачу линейного быстродействия: требуется перевести объект (1) за кратчайшее время из начального состояния (4) в целевое множество (3):

$$\mathbf{x}(t_F) \in \mathbf{G}, \quad (5)$$

$$t_F \rightarrow \min, \quad (6)$$

в условиях ресурсных ограничений (2). Допустимыми считаем управляющие воздействия, являющиеся кусочно-непрерывными функциями времени.

Естественно считать, что \mathbf{G} — односвязное множество. Рассматриваемая задача относится к классу задач оптимального управления с подвижным правым

концом. В ней в отличие от классической двухточечной задачи линейного быстрогодействия правый конец фазовой траектории не является "жестко закрепленным" и может выбираться в пределах заданного множества \mathbf{G} .

В частном случае \mathbf{G} может быть одноточечным множеством:

$$\mathbf{G} = \{\mathbf{x}_F, \mathbf{x}_F \in \mathbf{X}\}. \quad (7)$$

Обозначим через t_F^* оптимальное время окончания процесса управления:

$$\mathbf{x}(t_F^*) \in \mathbf{G}. \quad (8)$$

Далее $\Omega(\mathbf{x}) \subset \mathbf{X}$ — множество всех достижимых из \mathbf{x} состояний объекта. Полагаем, что рассматриваемая задача управления разрешима, т. е.

$$\mathbf{G} \in \Omega(\mathbf{x}_0).$$

Данная общая постановка оптимизационной задачи управления может служить теоретической основой для различных частных инженерных задач.

Многорежимное управление. В автоматических системах с широким диапазоном изменения рабочих режимов возникает проблема эффективного перевода объекта из текущего состояния в заданный рабочий режим. В этом случае целевое множество \mathbf{G} является некоторой зоной заданного нового режима, в которой осуществляется его стабилизация [8].

Гомеостатическое управление. Задана рабочая зона объекта управления $\mathbf{G} \subset \mathbf{X}$, в которой действуют некоторые штатные регуляторы. Ситуация выхода объекта из рабочей зоны считается критической. В этих случаях объект должен принудительно возвращаться в рабочую зону наискорейшим образом. Эту функцию выполняет автомат ограничений, реализующий процессы терминального управления [9].

К рассматриваемой оптимизационной задаче в принципе применимы классические методы теории оптимального управления. Однако их алгоритмизация и программная реализация в реальном масштабе времени весьма проблематична для объектов порядков $n \geq 3$. Поэтому они оказываются малоперспективными для многих инженерных приложений. Альтернативный подход связан с применением схем гибридного управления в целях дискретизации задач управления и применения методов математического программирования для решения последних.

Гибридная система управления

Рассматриваемая гибридная система управления (ГСУ) включает следующие функциональные компоненты: аналоговый объект управления, дискретную модель объекта, интерфейс сопряжения аналогового и дискретного компонентов, дискретный алгоритм управления (рис. 1).

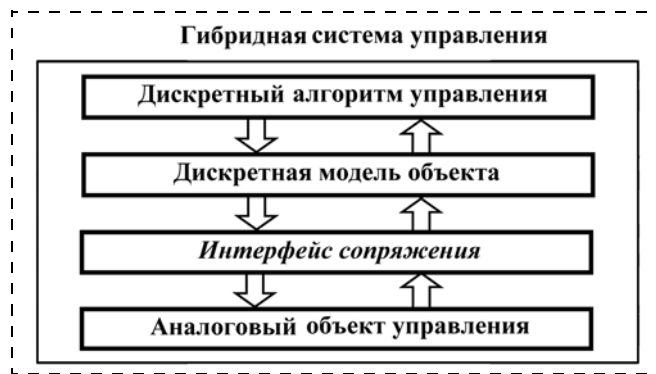


Рис. 1

Интерфейс сопряжения выполняет две функции: во-первых, преобразует дискретные управляющие сигналы в аналоговые и, во-вторых, осуществляет дискретизацию аналоговых информационных сигналов.

Положим, в ГСУ применяется механизм импульсного управления с амплитудной модуляцией. Пусть дискретизация информации в системе проводится в дискретные моменты времени

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\theta < \dots$$

Введем также шаги дискретизации времени:

$$h_\theta = t_{\theta+1} - t_\theta, \theta \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (9)$$

Дискреты процесса управления (т. е. отсчеты аналоговых сигналов) определяются равенствами

$$\mathbf{u}[\theta] = \mathbf{u}(t_\theta), \mathbf{x}[\theta] = \mathbf{x}(t_\theta). \quad (10)$$

Полагаем, что формирование импульсов осуществляется посредством экстраполятора нулевого порядка.

Из (1), (9), (10) получаем дискретную модель объекта:

$$\mathbf{x}[\theta + 1] = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{x}[\theta] + \mathbf{B}(\theta)\mathbf{u}[\theta], \quad (11)$$

где

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_0 h_\theta}, \mathbf{B}(\theta) = \int_0^{h_\theta} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_0 \tau} \mathbf{B}_0 d\tau. \quad (12)$$

Дискретные процессы управления благодаря дискретности времени имеют следующие существенные преимущества перед непрерывными:

- ♦ решаемая дискретная краевая задача оптимального управления имеет сетеподобную структуру, и к ней применимы численные методы решения задач математического программирования;
- ♦ применяемые вычислительные алгоритмы выполняются между двумя последовательными отсчетами времени и поэтому могут выполняться в реальном масштабе времени и включаться в структуру управляющей обратной связи.

Важное значение имеет возможность управления самим процессом дискретизации времени в ГСУ, так что вследствие изменения шага дискретизации дискретная модель также будет динамически перестраиваться.

Рассматриваемая задача управления является краевой, и ее размерность определяется выбором шагов дискретизации. В связи с этим необходимо учитывать следующие положения:

- с уменьшением шагов дискретизации возрастает размерность решаемой задачи и наоборот — с увеличением шагов она снижается;
- большие шаги выгодны с точки зрения редукции размерности решаемой задачи;
- решение дискретной оптимизационной задачи, по существу, является некоторой аппроксимацией точного решения исходной аналоговой задачи линейного быстрогодействия, причем выбор шагов определяет точность такой аппроксимации.

Экстраполяция траекторий движения

Построение алгоритмов управления в ГСУ основано на дискретной модели объекта (11).

Начальное состояние модели в соответствии с (4) равно

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0. \quad (13)$$

Обозначим через $\theta_F \in \mathbf{Z}_+$ финальный шаг перемещения объекта в целевое множество:

$$\mathbf{x}[\theta_F] \in \mathbf{G}. \quad (14)$$

Требование *оптимальности* дискретного процесса управления:

$$\theta_F \rightarrow \min. \quad (15)$$

Обозначим через θ_F^* минимальное значение этого критерия, а $\mathbf{u}^*[\theta]$ и $\mathbf{x}^*[\theta]$ — соответствующие ему оптимальное управляющее воздействие и оптимальную фазовую траекторию.

Решение задачи будем основывать на прогнозной экстраполяции управляемых движений.

Пусть шаг дискретизации времени зафиксирован:

$$h_0 = h, \theta \in \mathbf{Z}_+. \quad (16)$$

Тогда в соответствии с (12) коэффициентные матрицы модели постоянны:

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A} = \mathbf{e}^{A_0 h}, \mathbf{B}(\theta) = \mathbf{B} = \int_0^h \mathbf{e}^{A_0 \tau} \mathbf{B}_0 d\tau,$$

и мы получаем стационарную дискретную систему

$$\mathbf{x}[\theta + 1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[\theta] + \mathbf{B}\mathbf{u}[\theta]. \quad (17)$$

Пучок всех возможных траекторий управляемого движения системы (17) из некоторого состояния \mathbf{x} длительностью в P шагов можно описать дискретной формулой Коши:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^0 \mathbf{x} + \sum_{v=0}^{\theta-1} \mathbf{A}^{\theta-v-1} \mathbf{B} \mathbf{u}[v], \theta = 1:P. \quad (18)$$

Введем дополнительные обозначения применительно к дискретной динамической системе (17):

- $\hat{\Omega}_P(\mathbf{x}) \subset \mathbf{X}$ — множество состояний системы, достижимых из состояния \mathbf{x} не более чем за P шагов;

- $\hat{\Omega}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{X}$ — множество всех ее состояний, достижимых из \mathbf{x} :

$$\hat{\Omega}(\mathbf{x}) = \lim_{P \rightarrow \infty} \hat{\Omega}_P(\mathbf{x}).$$

Элементы данных множеств, очевидно, представляются формулой (18).

Далее полагаем, что

$$\mathbf{G} \subset \hat{\Omega}(\mathbf{x}_0).$$

Условия (14), (15) означают, что

$$\hat{\Omega}_P(\mathbf{x}_0) \cap \mathbf{G} = \emptyset \Rightarrow P < \theta_F.$$

Алгоритмизацию решения рассматриваемой оптимизационной задачи будем основывать на *принципе погружения* [10], сформулированном в методологии динамического программирования для многошаговых дискретных процессов оптимального управления. Суть данного принципа заключается в погружении исходной оптимизационной задачи в ряд алгоритмически более простых вычислительных задач.

Базовая задача оптимального планирования траекторий

Введем некоторую меру расстояния точек пространства состояний $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ до целевого множества \mathbf{G} — $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{G})$.

Обратимся к следующей вспомогательной оптимизационной задаче для системы (17).

Заданы:

- 1) критерий близости состояний к целевому множеству

$$Q(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{G});$$

- 2) интервал времени управления: $\theta = 0:P - 1$;

- 3) некоторая точка пространства состояний $\xi \in \mathbf{X}$, лежащая вне целевого множества: $\xi \notin \mathbf{G}$.

Требуется найти управляющее воздействие $\hat{\mathbf{u}}[\theta]$ ($\theta = 0:P - 1$) и порождаемую им фазовую траекторию $\hat{\mathbf{x}}[\theta]$ ($\theta = 1:P$), выпущенную из этой точки:

$$\hat{\mathbf{x}}[0] = \xi, \quad (19)$$

которая приближает состояние объекта к целевому множеству \mathbf{G} на минимально возможное расстояние:

$$Q(\hat{\mathbf{x}}[P]) \rightarrow \min. \quad (20)$$

Данную задачу будем называть *базовой задачей оптимального планирования траекторий*, сокращенно — БЗОПТ (ξ, P), а финальную точку $\hat{\mathbf{x}}[P]$ будем именовать *точкой прицеливания*.

Траектория движения объекта в соответствии с (18) определяется равенствами

$$\hat{\mathbf{x}}[\theta] = \mathbf{A}^0 \xi + \sum_{v=0}^{\theta-1} \mathbf{A}^{\theta-v-1} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}[v] \quad (\theta = 1:P), \quad (21)$$

где

$$\hat{\mathbf{u}}[v] \in \mathbf{U} \quad (v = 0:P - 1). \quad (22)$$

Предложение. Пусть в семействе задач БЗОПТ($\mathbf{x}_0, 1$), БЗОПТ($\mathbf{x}_0, 2$), ..., БЗОПТ(\mathbf{x}_0, P^*) (23) точка прицеливания $\hat{\mathbf{x}} [P^*]$ последней задачи и только она попадает в целевое множество \mathbf{G} :

$$Q(\hat{\mathbf{x}} [P^*]) = 0. \quad (24)$$

Тогда решение задачи БЗОПТ(\mathbf{x}_0, P^*) дает также решение исходной задачи предельного быстродействия (11):

$$\mathbf{u}^*[\theta] = \hat{\mathbf{u}} [\theta], \mathbf{x}^*[\theta] = \hat{\mathbf{x}} [\theta], \theta_F^* = P^*.$$

Итак, здесь принцип погружения воплощается семейством вспомогательных задач (19), (20), решением которых являются *стратегии предупреждающего управления*, а их основу составляет процедура многошаговой экстраполяции динамики системы и принцип экстремального прицеливания.

Полиэдральная формализация задачи управления

Задачи (23) относятся к классу задач математического программирования. Они характеризуются выбором целевой функции $Q(\mathbf{x})$, критерием оптимальности (20) и ограничениями (19), (21), (22).

Дальнейшую формализацию и метод решения БЗОПТ будем основывать на концепции и аппарате полиэдрального программирования [6, 7], ключевые положения которого изложены в *Приложении* (см. конец статьи).

Применение полиэдральной методологии требует постулирования полиэдральной структуры для области управления \mathbf{U} , целевого множества состояний \mathbf{G} и целевой функции $Q(\mathbf{x})$.

Полагаем, что область допустимых управлений \mathbf{U} является r -мерным параллелепипедом:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{u} = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_r) | \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i = 1:r\},$$

где $\underline{u}_i < 0 < \bar{u}_i$ — заданные предельные значения управляющего входа u_i .

Считаем, что целевое множество состояний также является полиэдром и задано полиэдральным неравенством

$$\mathbf{G} = \{\mathbf{x} | V(\mathbf{x}) \leq 0\}, \quad (25)$$

где $V(\mathbf{x})$ — некоторая полиэдральная функция.

Принципиальное значение имеет следующее свойство функции $V(\mathbf{x})$: вне множества \mathbf{G} она принимает положительные значения и *может служить мерой расстояния до его границы*. В связи с этим в качестве такой меры расстояния будем использовать следующую модификацию функции $V(\mathbf{x})$:

$$Q(\mathbf{x}) = \max\{V(\mathbf{x}), 0\}. \quad (26)$$

Отметим, что эта функция неотрицательна и вне множества \mathbf{G} совпадает с $V(\mathbf{x})$.

В случае, когда \mathbf{G} является одноточечным множеством (7), в качестве целевой функции $Q(\mathbf{x})$ можно принять функцию вида

$$Q(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_F),$$

где $V(\mathbf{x})$ — некоторая полиэдральная норма.

Вследствие описанной выше формализации решаемые оптимизационные задачи БЗОПТ(ξ, h) будут иметь полиэдральную структуру. Важно подчеркнуть, что алгоритмизация данных задач в конечном итоге основана на их сведении к задачам линейного программирования (ЗЛП) [6, 7]. Обсуждение соответствующих методологических соображений и математического аппарата полиэдральной оптимизации вынесены в *Приложение*.

Принцип алгоритмической обратной связи

Итоговым результатом решения задачи терминального управления является оптимальное программное управление $\mathbf{u}^*[\theta]$. Наряду с этим теоретический и практический интерес представляют организация процессов терминального управления по принципу обратной связи.

В этом случае целесообразно воспользоваться сформулированной Дрейфусом (S. E. Dreyfus) концепцией *программно-позиционного управления* и формировать гибкие, циклически обновляемые (в частности, на каждом шаге) программы.

Исходя из данной концепции будем рекуррентно решать соответствующую задачу оптимального планирования траекторий на *каждом* шаге процесса управления. Именно, для каждого текущего шага θ полагаем

$$\xi = \mathbf{x}[\theta]$$

и решаем семейство задач {БЗОПТ(ξ, P), $P = 1:P^*$ } до момента выполнения условия (24). Конечной задаче БЗОПТ(ξ, P^*) отвечает управляющая программа

$$\{\hat{\mathbf{u}} [0], \hat{\mathbf{u}} [1], \dots, \hat{\mathbf{u}} [P^* - 1]\},$$

первая дискрета которой определяет текущее значение управляющего сигнала:

$$\mathbf{u}[\theta] = \hat{\mathbf{u}} [\theta].$$

Итак, на каждом шаге управления объект *направляется* по вычисленной экстремальной траектории. Благодаря рекуррентному характеру такой процедуры как раз и формируется *управляющая обратная связь*.

Заметим, что обоснование данного подхода дано Н. Н. Красовским в виде принципа локальной эквивалентности позиционного и программного управлений [11, § 28].

В изложенном подходе применяется *стратегия предупреждающего управления* на основе многошаговой экстраполяции динамики объекта. В конкретных инженерных приложениях может возникнуть необходимость в снижении вычислительной нагрузки на управляющий контроллер посредством априорного фиксирования *глубины прогноза* $P \in \mathbf{Z}_+, P > 0$, и решения на каждом шаге управления лишь одной экстремальной задачи БЗОПТ(ξ, P). Прогноз повторяется на каждом шаге, и в итоге мы получаем двойной эффект: во-первых, реализуется *виртуальная обратная связь*; во-вторых, мы получаем так

называемое "управление со скользящим интервалом прогноза".

Проблема выбора шага

Если шаг дискретизации времени в соответствии с (16) зафиксирован, а интервал управления занимает \hat{P} шагов, то длительность процесса управления будет равна

$$\hat{t}_F = \hat{P}h.$$

Полученное решение дискретной оптимизационной задачи будет давать приемлемое приближение к решению исходной аналоговой задачи (5), (6), (8) при условии

$$\hat{t}_F = t_F^* + \Delta t,$$

где

$$0 \leq \Delta t \ll h.$$

В противном случае избыточная длина траектории может существенно исказить структуру построенной фазовой траектории по сравнению с оптимальным аналоговым вариантом. Данный нежелательный эффект иллюстрируется ниже в примере. В связи с этим возникает проблема выбора рациональной стратегии дискретизации непрерывного времени.

В частности, целесообразной может оказаться стратегия уменьшения размера шагов при приближении фазовых траекторий к целевому множеству \mathbf{G} .

Пример. Обратимся к задаче управления боковым движением судна на воздушной подушке (СВП). Его математическая модель с параметрами $n = 5$, $r = 1$ приведена в работе [12].

Введем вектор состояния углового движения СВП:

$$\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

где $x_1 = \varphi$ — угол рыскания; $x_2 = \omega_y$ — угловая скорость рыскания; $x_3 = \beta$ — угол дрейфа; $x_4 = \theta$ — угол крена; $x_5 = \omega_x$ — угловая скорость крена.

Управляющая переменная: $u = \delta$ — угол переладки аэроуля.

Динамика СВП описывается уравнением состояния (1) с коэффициентными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 1 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$a_{22} = -0,185, a_{23} = -0,07, a_{24} = 0,01, a_{33} = -0,085, \\ a_{34} = 0,01, a_{52} = 0,05, a_{53} = 0,05, a_{54} = -1,625, \\ a_{55} = -0,5; b_2 = 0,313, b_3 = 0,052.$$

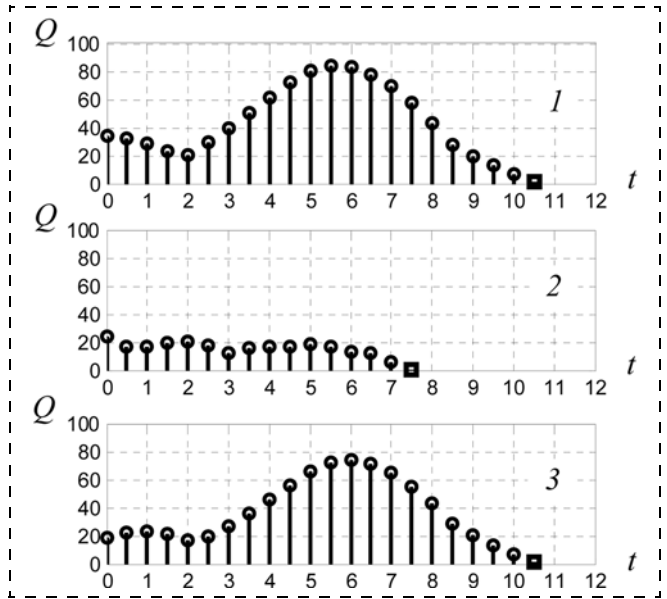


Рис. 4

Конструктивные ограничения на угол отклонения руля:

$$|u| \leq M = 35.$$

Реализуем описанную выше схему гибридного управления. Целевое множество (25) зададим в виде многомерного куба:

$$V(\mathbf{x}) = \max\{|x_i|, i = 1:n\} - 3.$$

На рис. 2, 3 (см. вторую сторону обложки) и на рис. 4 представлены результаты расчета и моделирования процессов управления для периода квантования $h = 0,5$.

На рис. 2 (см. вторую сторону обложки) показаны проекции дискрет фазовых траекторий движения объекта $\mathbf{x}[0]$ на плоскость (x_1, x_2) для трех начальных состояний:

- 1) $\mathbf{x}(0) = \text{col}(35, 0, 0, 0, 0)$;
- 2) $\mathbf{x}(0) = \text{col}(0, 25, 0, 0, 0)$;
- 3) $\mathbf{x}(0) = \text{col}(-20, -10, 10, 0, 0)$.

Там же представлена проекция целевого полиэдра \mathbf{G} .

На рис. 3 (см. вторую сторону обложки) приведены соответствующие графики дискретных управляющих сигналов $\mathbf{u}[0]$, а на рис. 4 — графики изменения функции (26) для указанных трех начальных состояний.

На рис. 5, 6 (см. вторую сторону обложки) представлены фазовые траектории управляемых движений из первого начального состояния для двух вариантов шага дискретизации времени: $h = 0,5$ и $h = 0,25$, соответственно. Видно, что они практически идентичны.

Рис. 7 (см. вторую сторону обложки) иллюстрирует эффект структурной перестройки управляемых фазовых траекторий при движении из первого начального состояния при значительном увеличении шага дискретизации. Для сравнения показаны траектории объекта при $h = 0,5$ и $h = 1,5$.

Приложение

Элементы теории полиэдральной оптимизации

Полиэдральные множества. Полиэдральное множество, или выпуклый полиэдр $\mathbf{P} \subset \mathbf{X} = \mathbf{R}^n$, — множество, образованное пересечением конечного числа замкнутых полупространств в \mathbf{X} , причем пустое множество \emptyset является полиэдральным по определению.

Каждый полиэдр $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$ может быть задан системой линейных неравенств:

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}: \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1:m\},$$

где $\varphi_i(\mathbf{x})$ — линейные функции:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i,$$

$$\mathbf{a}_i \in \mathbf{X}, b_i \in \mathbf{R} (i = 1:m).$$

Здесь угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается скалярное произведение векторов.

Полиэдральные функции. Полиэдральная функция f — функция, надграфик которой $epi f$ является выпуклым полиэдром. Класс полиэдральных функций совпадает с классом выпуклых кусочно-линейных функций.

На классе непрерывных функций $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ определим операцию поточечного максимума:

$$\begin{aligned} \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\} &= \\ &= \bigvee_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}) \equiv (f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_m)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Теорема 1. Функция $f(\mathbf{x})$ является полиэдральной тогда и только тогда, когда она является функцией максимума конечного числа линейных функций:

$$f(\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (27)$$

где $\varphi_i(\mathbf{x})$ — некоторые линейные функции. \square

Представление полиэдральной функции в виде (27) является ее дизъюнктивным разложением.

Важнейшим свойством полиэдральных функций является сохранение свойства полиэдральности при операциях умножения на положительный скаляр, сложения, а также линейного преобразования аргумента. Сюда также относится операция поточечного максимума.

Теорема 2. Если $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ — полиэдральные функции, а $f(\mathbf{x})$ — функция максимума:

$$f(\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}),$$

тогда $f(\mathbf{x})$ — также полиэдральная функция. \square

Посредством перечисленных операций возможно построение новых полиэдральных функций из имеющихся.

Наиболее часто в теоретических исследованиях используются полиэдральные функции поточечного максимума и суммы модулей:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \\ f(\mathbf{x}) &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \end{aligned}$$

Полиэдральные неравенства. Полиэдральное неравенство — неравенство вида

$$g(\mathbf{x}) \leq C,$$

в котором $g(\mathbf{x})$ является полиэдральной функцией, а $C = \text{const}$.

Полиэдральные нормы и метрики. Математическая структура многих прикладных задач оптимизации определяется выбором нормы векторов в пространстве решений \mathbf{X} . Введение полиэдральных норм может дать существенные преимущества, позволяя в прикладных задачах оптимизации эффективно использовать методологию полиэдральной оптимизации.

Полиэдральная норма — норма, являющаяся полиэдральной функцией координат. Широкое распространение находят две полиэдральные нормы:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

известные как *октаэдрическая* и *кубическая* (чебышевская) нормы.

Полиэдральные нормы порождают особый класс "неевклидовых" метрик — *полиэдральные метрики*.

Задача полиэдральной оптимизации. К классу задач полиэдрального программирования (ЗПП) относятся экстремальные задачи с полиэдральной структурой, т. е. с полиэдральными целевой и ограничивающей функциями.

Ограничимся рассмотрением класса ЗПП на минимум:

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (28)$$

$$g_k(\mathbf{x}) \leq 0, k = 1:K, \quad (29)$$

где $f(\mathbf{x})$ и $g_k(\mathbf{x})$ — полиэдральные функции.

Алгоритмическую особенность таких оптимизационных задач выражает следующая теорема.

Теорема 3. Любая ЗПП на минимум сводится к некоторой ЗЛП. \square

Изложим способ редукции оптимизационной задачи (28), (29) к ЗЛП.

Пусть для функций в (28), (29) справедливы дизъюнктивные разложения:

$$f(\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^L \varphi_i(\mathbf{x}); \quad (30)$$

$$g_k(\mathbf{x}) = \bigvee_{j=1}^{M_k} \psi_{kj}(\mathbf{x}), k = 1:K, \quad (31)$$

где $\varphi_i(\mathbf{x}), \psi_{kj}(\mathbf{x})$ — линейные функции.

ЗП (28)—(31) эквивалентна следующей ЗЛП в расширенном пространстве $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \times \mathbf{R}$:

$$\bar{f}(\bar{\mathbf{x}}) = x_{n+1} \rightarrow \min;$$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) - x_{n+1} \leq 0, i = 1:L;$$

$$\psi_{kj}(\mathbf{x}) \leq 0, k = 1:L, j = 1:M_k,$$

где $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \bar{\mathbf{X}}$.

Отметим особенности данного способа редукции ЗПП к ЗЛП:

- полиэдральные ограничения ЗПП разбиваются на линейные;
- вводится дополнительная переменная x_{n+1} — мажоранта целевой функции исходной задачи;
- исходная задача преобразуется в расширенную ЗЛП с линейной целевой функцией x_{n+1} .

Список литературы

1. **Witsenhausen H. S.** A Class of Hybrid-State Continuous-Time Dynamic System // *IEEE Trans. on Automat. Control.* 1966. 11 (2). P. 161—167.
2. **Grossman R. L., Nerode A., Ravn A. P., Rischel H.** (ed.). *Hybrid Systems* // *Lecture Notes in Computer Science.* V. 736. Springer-Verlag, 1993.
3. **Hybrid Systems.** III / Ed. by R. Alur, T. A. Henzinger, E. D. Son-tag // *Lect. Notes in Computer Science.* V. 1066. Berlin, Springer, 1996.
4. **Van der Schaft A., Schumacher H.** An Introduction to Hybrid Dynamical Systems // *Lect. Notes in Control and Information Sciences.* V. 251. Springer-Verlag, 2000.

5. **Lygeros J.** *Lecture Notes on Hybrid Systems.* University of Cambridge, 2003.

6. **Филимонов Н. Б.** Полиэдральное программирование в дискретных задачах управления // *Информационные технологии.* Приложение. 2004. № 1. 32 с.

7. **Филимонов Н. Б.** Методы полиэдрального программирования в дискретных задачах управления и наблюдения // *Методы классической и современной теории автоматического управления.* Учеб. в 5-и тт. Т. 5. Методы современной теории автоматического управления. Гл. 7. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. С. 647—720.

8. **Филимонов Н. Б.** Системы многорежимного регулирования: концепция, принципы построения, проблемы синтеза // *Изв. вузов. Приборостроение.* 1988. № 2. С. 18—33.

9. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Автомат ограничений управляемых динамических процессов // *Известия ЮФУ. Технические науки.* 2013. № 3. С. 50—56.

10. **Касты Дж., Калаба Р.** Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976.

11. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

12. **Лукомский Ю. А., Пешехонов В. Г., Скороходов Д. А.** Навигация и управление движением судов. СПб.: Элмор, 2002.

A. B. Filimonov, professor, filirnon_ab@rmail.ru, "MATI" — Russian State Technological University,
N. B. Filimonov, professor, nbfilimonov@mail.ru, M. V. Lomonosov Moscow State University

Hybrid Scheme of Solution to the Problems of Linear Acting on the Basis of Polyhedral Optimization Formalism

The problems of application of hybrid control systems for solution to the problems of linear speed is discussed. Hybrid systems include analog and discrete components whose dynamics is described by differential and difference equations respectively. In the proposed scheme of hybrid control the mechanism of amplitude-impulse modulation of analog control signals with the purpose of discretization of control problem is used. The discretization of the model of control object makes possible to apply methods of mathematical programming for optimization of discrete control processes.

The polyhedral methodology of formalization of discrete problems of linear speed is presented. The polyhedral formalism covers all key elements for the statement of control problem namely: purpose of control, the optimality criterion and resource constraints to control. The polyhedral constructions of convex analysis that is the polyhedral functions and the polyhedral norms are in its base. Algorithmization of the problems of polyhedral programming is based on the mathematical device and calculating methods of linear programming.

Three theoretical structures such as: the prediction extrapolation of controlled movements of the object, the principle of immersion of the input optimization problem in a number of more algorithmic ally simple computing problems and mechanism of extreme aiming compose the base of the suggested method for solving of discrete problems of linear speed.

The possibility of control by the process of discretized time in the considered hybrid system has the important applied implications. Due to the dynamic change of the discretization step the discrete model of the object will be retuned itself during control process and this fact gives the possibility of the essential reduction of the dimension of the problem being solved.

Keywords: linear speed, hybrid control scheme, the discretization of time, resource constraints, multistep prediction, polyhedral optimization, principle of immersion, extreme aiming

References

1. **Witsenhausen H. S.** A Class of Hybrid-State Continuous-Time Dynamic System. *IEEE Trans. on Automat. Control.* 1966. 11 (2). P. 161—167.
2. **Grossman R. L., Nerode A., Ravn A. P., Rischel H.** (ed.). *Hybrid Systems.* *Lecture Notes in Computer Science.* V. 736. Springer-Verlag, 1993.
3. **Hybrid Systems.** III. Ed. by R. Alur, T. A. Henzinger, E. D. Son-tag. *Lect. Notes in Computer Science.* V. 1066. Berlin, Springer, 1996.
4. **Van der Schaft A., Schumacher H.** An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. *Lect. Notes in Control and Information Sciences.* V. 251. Springer-Verlag, 2000.
5. **Lygeros J.** *Lecture Notes on Hybrid Systems,* University of Cambridge, 2003.
6. **Filimonov N. B.** Polijedral'noe programmirovanie v diskretnyh zadachah upravlenija. *Informacionnye tehnologii. Prilozhenie.* 2004. N. 1. 32 p.

7. **Filimonov N. B.** Metody polijedral'nogo programmirovaniya v diskretnyh zadachah upravlenija i nabljudenija. *Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomatich-eskogo upravlenija. Uchebnik v 5-i tt.* V. 5. *Metody sovremennoj teorii avtomatich-eskogo upravlenija. Gl.* 7. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2004. P. 647—720.

8. **Filimonov N. B.** Sistemy mnogorezhimnogo regulirovaniya: koncepcija, principy postroenija, problemy sinteza. *Izv. vuzov. Pribo-rostroenie.* 1988. N. 2. P. 18—33.

9. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Avtomat ogranichenij upravljajemyh dinamicheskikh processov. *Izvestija JuFU. Tehniceskie nauki.* 2013. N. 3. P. 50—56.

10. **Kasty Dzh., Kalaba R.** Metody pogruzenija v prikladnoj matematike. M.: Mir, 1976.

11. **Krasovsij N. N.** Teorija upravlenija dvizheniem. M.: Nauka, 1968.

12. **Lukomskij Ju. A., Peshehonov V. G., Skorohodov D. A.** Navigacija i upravlenie dvizheniem sudov. SPb.: Jelmor, 2002.

В. И. Ширяев, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, vis@prima.susu.ac.ru,

Е. О. Подвиллова, аспирант, podvilova_elena@mail.ru,

Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет)

Аппроксимация информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности

Рассматривается построение гарантированных оценок состояния динамических систем в условиях неопределенности, когда статистическая информация о начальном состоянии, возмущениях и помехах отсутствует, и известны только множества их возможных значений. Описан алгоритм построения аппроксимации информационных множеств, когда множества возможных значений возмущений, помех и начального состояния являются многогранниками, заданными системами линейных неравенств. Рассмотрено построение аппроксимации информационных множеств на основе текущего измерения, а также с учетом накопленных за предыдущие шаги данных. Работа алгоритма продемонстрирована на примере двумерной модели и шестимерной модели истребителя F-16. Проведено сравнение аппроксимаций информационных множеств и оценок фильтра Калмана.

Ключевые слова: динамические системы, гарантированные оценки, минимаксный фильтр, системы линейных неравенств, аппроксимация информационных множеств

Введение

Задача оценивания вектора состояния динамических систем возникает в различных технических приложениях, таких как системы управления летательными аппаратами, системы слежения и обнаружения целей, автоматизированные системы управления технологическими процессами и пр. [5, 6, 9, 10]. Широкое применение в задаче оценивания состояния динамических систем находит фильтр Калмана, не требующий большого числа вычислений. При использовании фильтра Калмана предполагается, что возмущения, помехи и начальное состояние системы являются случайными величинами с известными функциями распределения [2, 15]. При этом в реальных условиях, как правило, статистическая информация о них отсутствует, но известны только множества их возможных значений, что приводит к необходимости решения задач гарантирующего оценивания или минимаксной фильтрации вектора состояния динамической системы [1, 3, 4, 11–14, 16]. Гарантированное оценивание в работе [3] сводится после получения результатов очередного измерения к построению информационного множества, т. е. множества возможных значений вектора состояния. Построение информационных множеств — вычислительно сложная задача. При увеличении размерности вектора состояния возникают проблемы в реализации операции суммы множеств в реальном времени [1, 4]. Когда многогранники заданы набором своих вершин, то задача построения суммы множеств сводится к нахождению выпуклой оболочки. Известные в настоящее время алгоритмы построения выпуклой оболочки из N точек в n -мерном пространстве имеют время решения $O(N^{\lfloor n/2 \rfloor + 1})$, что неприемлемо для многих практических задач. Нередко удобно представлять многогранники системой линейных неравенств. В этом случае операция суммы множеств сводится к проектированию многогранника в пространство меньшей размерности методом свертки системы

линейных неравенств Фурье—Черникова [1, 4, 8]. Недостатком данного метода является появление в промежуточных вычислениях большого числа избыточных неравенств [1, 4, 8]. Чтобы уменьшить вычислительную сложность алгоритма, применяют различные аппроксимации информационных множеств геометрическими фигурами заданной формы, например эллипсоидами [12, 16], полиэдрами [13], методом сдвига граней [4] и др., хотя при этом и происходит потеря точности. В данной работе описана процедура построения аппроксимации информационных множеств сверху. Приведен пример расчета для динамических моделей второго порядка и для модели истребителя F-16, вектор состояния которого — шестого порядка. Работа продолжает исследования, представленные в работах [4, 7, 9, 10].

1. Постановка задачи

Процессы в системе управления описываются уравнениями

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{w}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{H}\mathbf{v}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^l$, $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^p$ — векторы состояния системы, возмущения, измерения, ошибок измерений на k -м шаге соответственно; \mathbf{A} , $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{B} — известные матрицы; \mathbf{u}_k — заданное управление.

Начальное состояние \mathbf{x}_0 и неопределенные воздействия \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k на k -и шаге могут принимать любые значения из заданных выпуклых множеств:

$$\mathbf{x}_0 \in X_0, \quad \mathbf{w}_k \in W, \quad \mathbf{v}_k \in V, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Задача гарантированного оценивания текущего состояния системы состоит в построении последовательности информационных множеств \bar{X}_{k+1} , $k = 0, 1, \dots, N-1$ [3], причем $\mathbf{x}_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, N$:

$$X_{k+1/k} = \mathbf{A}\bar{X}_k + \mathbf{\Gamma}W + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (4)$$

$$X[\mathbf{y}_{k+1}] = \{\mathbf{x}[\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{y}_{k+1}, \forall \mathbf{v} \in V], \quad (5)$$

$$\bar{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[\mathbf{y}_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Операции в соотношениях (4)—(6) проводятся над множествами: сумма Минковского, линейное преобразование и пересечение множеств. Здесь и далее для реализации операций над множествами будем считать, что выпуклые множества (3) аппроксимированы с заданной точностью многогранниками.

2. Аппроксимация информационных множеств \bar{X}_{k+1} многогранниками

Рассмотрим процедуру построения многогранника X_{k+1} , аппроксимирующего информационное множество \bar{X}_{k+1} сверху, т. е. $\bar{X}_{k+1} \subset X_{k+1}$, для системы (1)—(3) без построения вычислительно затратных операций суммы и пересечения множеств, когда ограничения (3) заданы системами линейных неравенств:

$$\begin{aligned} x_0 \in X_0: \mathbf{A}_{x_0} \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{b}_{x_0}; \mathbf{w}_k \in W: \mathbf{A}_w \mathbf{w}_k \leq \mathbf{b}_w; \\ \mathbf{v}_k \in V: \mathbf{A}_v \mathbf{v}_k \leq \mathbf{b}_v, k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Для построения аппроксимирующего многогранника X_{k+1} информационного множества \bar{X}_{k+1} используется неявное задание информационного множества \bar{X}_{k+1} системами линейных неравенств, полученных из условий (7), и уравнений модели (1), (2). На основе этой системы строится явное представление аппроксимирующего многогранника X_{k+1} в виде системы линейных неравенств относительно переменной \mathbf{x}_{k+1} , т. е. $X_{k+1} = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}_{x_{k+1}} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{x_{k+1}}\} \supset \bar{X}_{k+1}$. Для этого необходимо задать набор векторов нормалей \mathbf{a}_i к граням аппроксимирующего многогранника X_{k+1} , где \mathbf{a}_i — i -я строка матрицы $\mathbf{A}_{x_{k+1}}$, по направлению которых оценки значения координат вектора состояния \mathbf{x}_{k+1} являются наиболее значимыми. Для вычисления значений свободного члена $\mathbf{b}_{x_{k+1}}$ требуется решить ряд задач линейного программирования.

Алгоритм 1

Шаг 1. На k -м шаге в системе (1), (2) известны значения управления \mathbf{u}_k и измерения \mathbf{y}_{k+1} , а векторы $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ являются неизвестными. В уравнениях модели (1), (2) неизвестные перенесем в одну часть, а известные — в другую. Получим систему линейных уравнений, описывающую модель системы:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{A} & -\mathbf{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \\ \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Шаг 2. Получим систему линейных неравенств из ограничений (7):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{x_k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{x_k} \\ \mathbf{b}_w \\ \mathbf{b}_v \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Шаг 3. Системы (8), (9) неявно задают информационное множество \bar{X}_{k+1} . Аппроксимируем это информационное множество \bar{X}_{k+1} многогранником X_{k+1} с набором граней, записанных по строкам матрицы $\mathbf{A}_{x_{k+1}}$, т. е. получим многогранник $X_{k+1} \supset \bar{X}_{k+1}$, описанный системой линейных неравенств

$$X_{k+1} = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}_{x_{k+1}} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{x_{k+1}}\}.$$

Для каждого направления \mathbf{a}_i (i -я строка матрицы $\mathbf{A}_{x_{k+1}}$) решаем задачу линейного программирования

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_{k+1} \rangle \rightarrow \max \quad (10)$$

при ограничениях (8) и (9), где $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_{k+1} \rangle$ — скалярное произведение векторов \mathbf{a}_i и \mathbf{x}_{k+1} . Тогда i -я координата вектора $\mathbf{b}_{x_{k+1}}$ равна $b_i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_{k+1}^* \rangle$, где \mathbf{x}_{k+1}^* — решение задачи линейного программирования (10).

В результате применения алгоритма аппроксимации информационного множества \bar{X}_{k+1} на основе текущего измерения \mathbf{y}_{k+1} получаем оценку X_{k+1} информационного множества

$$\bar{X}_{k+1} \subset X_{k+1} = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}_{x_{k+1}} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{x_{k+1}}\}.$$

Если использовать эту оценку X_{k+1} для нахождения на следующем ($k+2$)-м шаге оценки X_{k+2} информационного множества $\bar{X}_{k+2} \subset X_{k+2}$, то неточности, получаемые из-за аппроксимации, могут с каждым шагом накапливаться. Повысить точность можно, если учитывать информацию, полученную не на одном предыдущем k -м шаге, а на нескольких предыдущих шагах $k, k-1, \dots, k-K$. Если в алгоритме 1 система (8), (9) составлена относительно неизвестных переменных $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$, то теперь увеличим размерность системы (8), (9), включив в нее переменные $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_{k-K}, \mathbf{w}_{k-1}, \dots, \mathbf{w}_{k-K}, \mathbf{v}_k, \dots, \mathbf{v}_{k-K}$. С помощью алгоритма 2 может быть получена более точная оценка X_k информационного множества \bar{X}_k .

Алгоритм 2

Шаг 1. Зададим K — число предыдущих шагов, значения измерений $\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}, \dots, \mathbf{y}_{k-K}$ и управлений $\mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-2}, \dots, \mathbf{u}_{k-K}$ с которых будут использованы для вычисления текущей оценки.

Шаг 2. Составим систему линейных уравнений, описывающих систему (1)—(3) на последних K шагах:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{A} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{\Gamma} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{A} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{\Gamma} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{H} & \mathbf{0} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{H} & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \\ \dots \\ \mathbf{x}_{k-K} \\ \mathbf{w}_{k-1} \\ \dots \\ \mathbf{w}_{k-K} \\ \mathbf{v}_k \\ \dots \\ \mathbf{v}_{k-K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \\ \dots \\ \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-K} \\ \mathbf{y}_k \\ \dots \\ \mathbf{y}_{k-K} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Шаг 3. Составим систему линейных неравенств, описывающих множества возмущений $W_i, i = k - K, \dots, k - 1$, помех $V_i, i = k - K, \dots, k$, и оценку X_{k-K} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{x_{k-K}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_w & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_v & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k-K} \\ \mathbf{w}_{k-1} \\ \dots \\ \mathbf{w}_{k-K} \\ \mathbf{v}_k \\ \dots \\ \mathbf{v}_{k-K} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{x_{k-K}} \\ \mathbf{b}_{w_{k-1}} \\ \dots \\ \mathbf{b}_{w_{k-K}} \\ \mathbf{b}_{v_k} \\ \dots \\ \mathbf{b}_{v_{k-K}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Шаг 4. Аналогично шагу 3 алгоритма 1 строится аппроксимация X_k информационного множества \bar{X}_k на основе систем (11), (12). Для каждого направления \mathbf{a}_i (i -я строка матрицы $\mathbf{A}_{x_{k+1}}$) аппроксимирующего многогранника решаем задачу линейного программирования

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_k \rangle \rightarrow \max \quad (13)$$

при ограничениях (11) и (12) и получаем аппроксимацию X_k информационного множества

$$\bar{X}_k \subset X_k = \{ \mathbf{x} | \mathbf{A}_{x_k} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{x_k} \},$$

где i -я координата вектора \mathbf{b}_{x_k} равна $b_i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_k^* \rangle$, где \mathbf{x}_k^* — решение задачи линейного программирования (13).

3. Примеры реализации алгоритма

Пример 1. Рассмотрим применение минимаксного фильтра на примере системы (1)–(3). Пусть матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{\Gamma}$ имеют следующие значения:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,9976 & 0,04636 \\ -0,09278 & 0,8584 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} = (0,2289 \cdot 10^{-3} \quad 4,639 \cdot 10^{-3})^T, \quad \mathbf{y}_k \in R^2.$$

Множества X_0, W, V заданы следующим образом: X_0 — прямоугольник с центром в начале координат и сторонами $1,5 \cdot 10^{-3}$ и $6 \cdot 10^{-2}$; W — отрезок, симметричный относительно 0 длиной 3; V — прямо-

угольник с центром в начале координат и сторонами $2,9 \cdot 10^{-4}$ и $4,56 \cdot 10^{-2}$. При моделировании процесса $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}, k = 0, 1, \dots, 8$, будем считать, что начальное состояние \mathbf{x}_0 системы равно $\mathbf{0}$, а возмущения \mathbf{w}_k и ошибки измерений \mathbf{v}_{k+1} при $k = 0, 1, \dots, 8$ меняются по вершинам множеств W и V соответственно.

Построим информационные множества $\bar{X}_k, k = 1, \dots, 8$, выполняя операции над множествами по соотношениям (4)–(6), а также построим аппроксимацию информационных множеств X_k шестиугольником с гранями, нормали которых записаны по строкам матрицы

$$\mathbf{A}_{x_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0,04 & 0 & -1 & -0,04 \end{pmatrix}^T,$$

используя информацию с предыдущего шага (алгоритм 1) и путем расширения систем (11), (12) на пять шагов (алгоритм 2). Поскольку аппроксимация прямоугольником является грубой, для аппроксимации были выбраны грани, параллельные одной из диагоналей множества V , которое непосредственно используется при построении информационного множества \bar{X}_k (6). На рис. 1 приведены информационные множества \bar{X}_k для $k = 6, 7, 8$. Серым цветом показано информационное множество \bar{X}_k , сплошными линиями показана граница шестиугольника X_k , полученного при аппроксимации на основе текущего измерения \mathbf{y}_k , штриховой линией — при аппроксимации с учетом расширения системы на 5 шагов при заданных направлениях $\mathbf{a}_i, i = \overline{1, 6}$. В данном случае увеличение числа шагов при аппроксимации позволило уменьшить чебышевский радиус и площадь множества, аппроксимирующего информационное множество \bar{X}_k : штриховая линия оказалась ближе к истинному информационному множеству \bar{X}_k , чем сплошная (см. рис. 1). Однако потеря точности все равно остается. В связи с этим возникает задача выбора направлений граней \mathbf{a}_i аппроксимирующего многогранника X_k и числа предыдущих шагов K , информация с которых будет использоваться для вычисления текущей оценки вектора состояния.

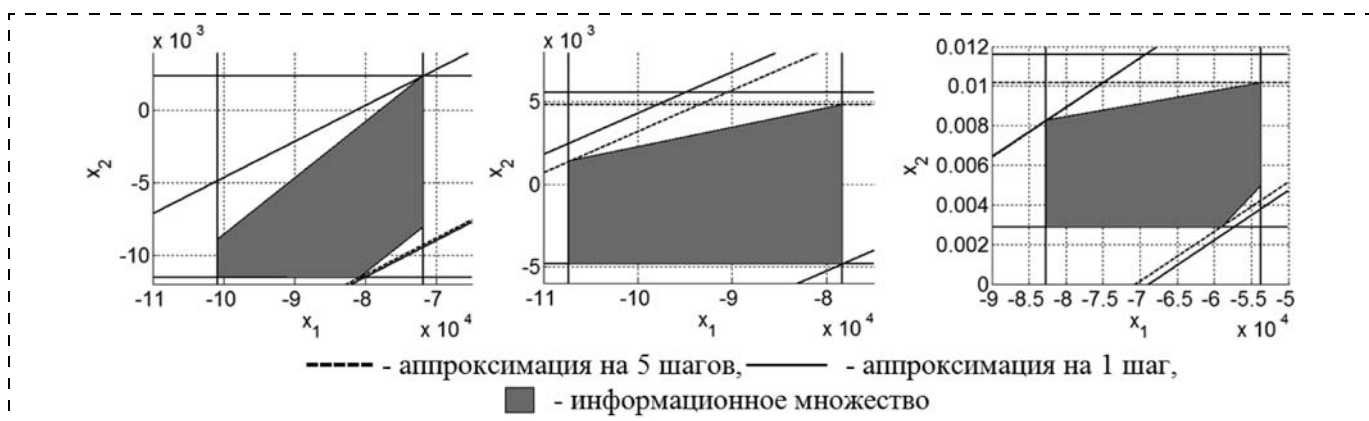


Рис. 1. Информационные множества $\bar{X}_6, \bar{X}_7, \bar{X}_8$

Пример 2. Рассмотрим построение аппроксимации информационного множества на примере математической модели самолета F-16 [15]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{w}, \mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}, \quad (14)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^8$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — соответственно состояние, известное управление, возмущения, измерения, ошибки измерений;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,3220 & 0,0640 & 0,0364 & -0,9917 & 0,0003 & 0,0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0037 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30,6492 & 0 & -3,6784 & 0,6646 & -0,7333 & 0,1315 & 0 & 0 \\ 8,5395 & 0 & -0,0254 & -0,4764 & -0,0319 & -0,0620 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20,2 & 0 & -0,01 & -5,47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20,2 & -0,168 & 51,71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T; \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 57,295800 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 57,295800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_{2 \times 2}; \mathbf{w} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q});$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(0,01 \ 0,01 \ 0,01 \ 0,01 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1);$$

$$\mathbf{v} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}); \mathbf{R} = \mathbf{I}_{2 \times 2}.$$

Для демонстрации работы алгоритма, не нарушая общности, исключим из системы две последние координаты. Переходя от непрерывной модели (14) к дискретному виду (1), (2) с шагом 0,01 с, получаем соответствующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,996306 & 0,000639 & 0,000361 & -0,009876 & 0,000003 & 0,000010 \\ -0,001531 & 1 & 0,009816 & 0,0000701 & -0,000037 & 0,000007 \\ -0,300078 & -0,000098 & 0,963836 & 0,008028 & -0,006459 & 0,001155 \\ 0,085093 & 0,000027 & -0,000233 & 0,994823 & -0,000285 & -0,000556 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,818402 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,818402 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,0000003 & -0,0000023 & -0,0006847 & -0,000030 & 0,182900 & 0 \\ 0,0000010 & 0,0000004 & 0,0001225 & -0,0000585 & 0 & 0,182900 \end{pmatrix}^T;$$

\mathbf{G} — матрица 6×4 , у которой элементы $\gamma_{ii} = 1$, остальные элементы — нули.

Зададим начальные ограничения состояния \bar{X}_0 , возмущений W и помех V в соответствии с ковариационными матрицами \mathbf{P}_0 , \mathbf{Q} , \mathbf{R} : опишем сверху эллипсоиды, заданные ковариационными матрицами, параллелепипедами. Множество \bar{X}_0 является шестимерным параллелепипедом с центром в начале координат и со сторонами, равными 0,6; множество W — четырехмерный параллелепипед с центром в начале координат и со сторонами, равными 0,6; множество V — двумерный параллелепипед с центром в начале координат и со сторонами, равными 6.

Рассмотрим реализацию процесса, когда возмущения \mathbf{w}_k являются низкочастотными, а помехи измерений \mathbf{v}_k — высокочастотными (рис. 2). Информационные множества \bar{X}_k на k -м шаге будем аппроксимировать сверху параллелепипедом X_k с гранями, параллельными координатным плоскостям:

$$X_k = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k \leq \mathbf{b}_{\mathbf{x}_k}\}, \mathbf{A}_{\mathbf{x}_k} = (\mathbf{I} \ -\mathbf{I})^T,$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размера 6×6 .

Из результатов работы алгоритма 1 для $k = 1, \dots, 70$ (рис. 3) следует, что размер аппроксимирующего параллелепипеда X_k по первой и второй координатам уменьшается, так как эти координаты измеря-

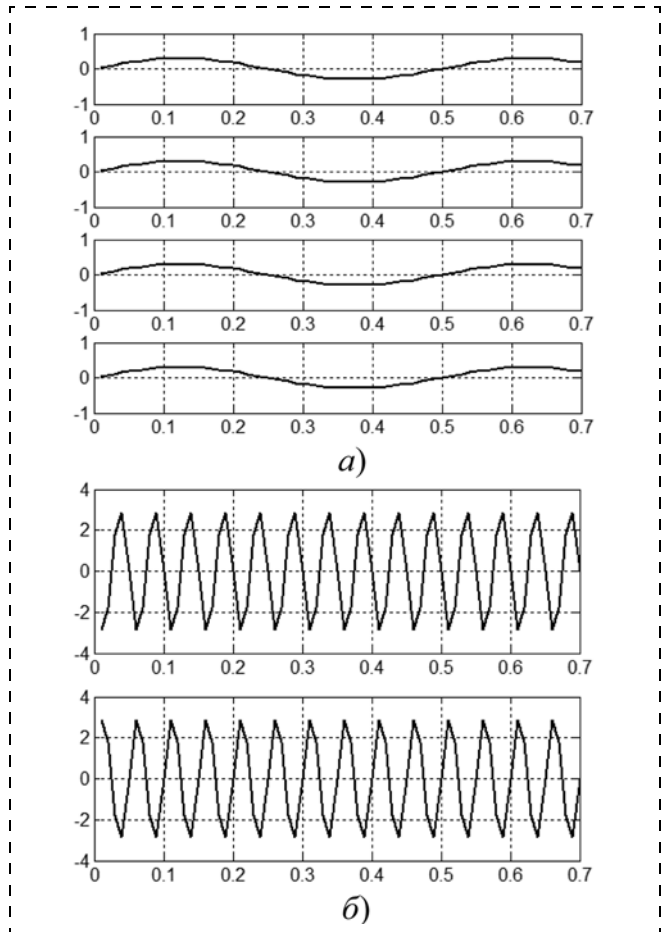


Рис. 2. Реализация возмущений w_k (а) и помех измерений v_k (б)

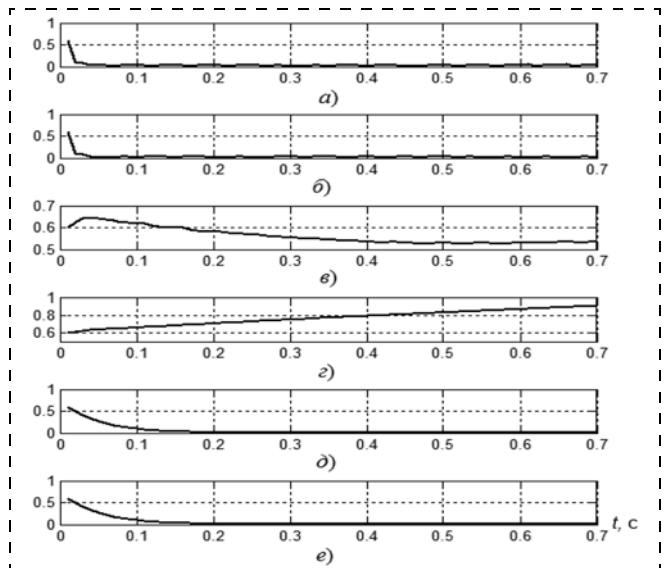


Рис. 3. Длины ребер аппроксимирующего параллелепипеда X_k , ориентированного вдоль координатных плоскостей, параллельных: а — оси x_1 ; б — оси x_2 ; в — оси x_3 ; г — оси x_4 ; д — оси x_5 ; е — оси x_6

ются, и соотношение реализованных возмущений и помех оказалось таким, что они как бы скомпенсировали друг друга и размер параллелепипеда по этим координатам получился достаточно небольшим. При этом несмотря на то, что множество ошибок измерений V является большим по сравнению с множествами возмущений W и множеством начального состояния X_0 по соответствующим координатам, т. е. измерения проводятся неполные и неточные, множественная оценка по этим координатам за счет модели системы (1), (2) получилась точнее, чем без учета модели системы. Длина ребер аппроксимирующего параллелепипеда по первой и второй координатам не превышает 1, а размер множества ошибок измерений этих координат равен 6.

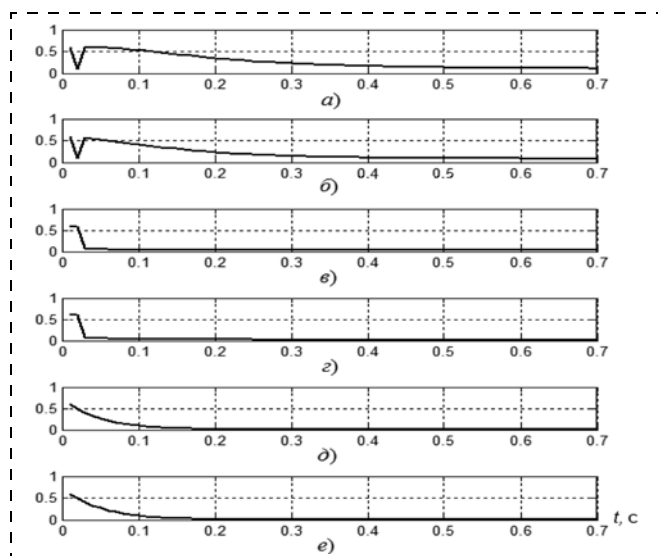


Рис. 4. Длины осей доверительного эллипсоида: a — длина первой оси; b — второй оси; c — третьей оси; d — четвертой оси; e — пятой оси; f — шестой оси

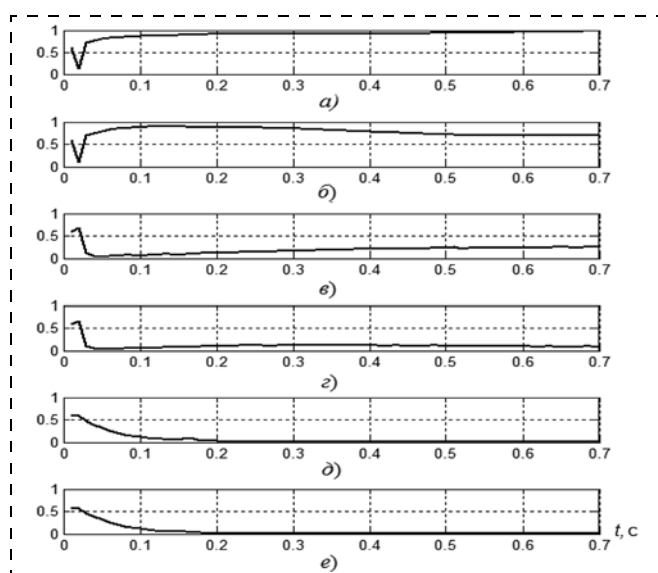


Рис. 5. Длины ребер аппроксимирующего параллелепипеда X_k , ориентированного по направлению осей доверительного эллипсоида, перпендикулярных: a — первой оси эллипсоида; b — второй оси; c — третьей оси; d — четвертой оси; e — пятой оси; f — шестой оси

Размер по пятой и шестой координатам вектора x_k уменьшается с течением времени за счет того, что по этим координатам возмущения не действуют, а матрица A в уравнении (1) для модели истребителя F-16 является сжимающей по этим координатам.

Проведем оценку вектора состояния для данной реализации процесса с помощью фильтра Калмана [7, 15]. Вычислим ковариационные матрицы ошибок фильтрации P_k и на их основе построим доверительные области $(x_k - \hat{x}_k)^T P_k^{-1} (x_k - \hat{x}_k) = 9$, где \hat{x}_k — оценка фильтра Калмана, в которые истинное значение вектора состояния x_k должно попадать с вероятностью 0,989.

Доверительный эллипсоид с течением времени уменьшается по каждой из осей (рис. 4). Аппроксимируем информационные множества \bar{X}_k параллелепипедом, ориентированным по осям эллипсоида (рис. 5). Длины сторон параллелепипеда по четырем направлениям оказались больше соответствующих длин осей эллипсоида. Однако вычисления показали, что на некоторых шагах ($k = 21 - 38, 57, 62$) истинное значение вектора состояния x_k не попадает в доверительную область. Это можно объяснить тем, что фильтр Калмана построен в предположении, что возмущения w_k и помехи измерений v_k имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей ковариации, но при единственной реализации процесса возмущения и помехи не соответствовали этому предположению. Фильтр Калмана позволяет получить оптимальные оценки на множестве реализаций процесса, в данном же примере рассмотрена единственная реализация. При минимаксной фильтрации истинное значение вектора состояния системы x_k всегда принадлежит информационному множеству \bar{X}_k .

Заключение

Приведена процедура построения аппроксимации информационного множества сверху многогранником любой формы. В процедуре используется неявное задание информационного множества системами линейных неравенств и уравнений, полученных из модели системы. Алгоритм заключается в решении ряда простейших задач линейного программирования (для n -мерной задачи требуется решить не менее $2n$ задач линейного программирования), которые решаются независимо друг от друга, что позволяет ускорить вычисления за счет их параллельного решения. В некоторых случаях чебышевские радиусы истинного информационного множества и аппроксимации совпадают, хотя форма и объем у них не одинаковы. Также рассмотрена возможность уточнения аппроксимации благодаря расширению системы за счет включения в нее данных, полученных на нескольких предыдущих шагах. По сравнению с аппроксимацией на один шаг аппроксимация с расширенной системой на некоторых итерациях позволяет уменьшить чебышевский радиус и объем аппроксимирующего многогранника.

Были получены аппроксимации информационных множеств для истребителя F-16, вектор состояния которого является шестимерным. Проведено сравнение множественных оценок вектора состояния для F-16, полученных с помощью фильтра Калмана и минимаксного фильтра. Доверительные области, построенные на основе фильтра Калмана, оказались меньше аппроксимаций информационных множеств, но истинное значение вектора состояния в ряде случаев не попадало в доверительную область. Вычисления проводили в среде MATLAB на компьютере с тактовой частотой 2 ГГц и ОЗУ 4ГБ.

Список литературы

1. Бушенков В. А., Лотов А. В. Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20. №5. С. 1130—1141.
2. Калман Р. Е. Идентификация систем с шумами // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, вып. 4 (244). С. 27—41.
3. Кац И. Я., Куржанский А. Б. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 79—87.
4. Подвилова Е. О., Ширяев В. И. О подходе к оцениванию состояния динамических систем как к решению системы линейных неравенств // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2013. Вып. 17, № 3 (13). С. 133—136.
5. Степанов О. А. Рекуррентное оценивание и фильтрация: предыстория и современное состояние // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 10—16.

6. Филимонов Н. Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2003. № 2. С. 11—15.
7. Фокин Л. А., Ширяев В. И., Подвилова Е. О. Об использовании калмановского и минимаксного алгоритмов оценивания погрешностей интегрированной навигационной системы // Труды ФГУП "НПЦАП". Системы и приборы управления. 2013. № 3. С. 65—79.
8. Черников С. Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
9. Ширяев В. И. Синтез управления линейными системами при неполной информации // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 229—237.
10. Ширяев В. И. Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника. 2001. № 8. С. 2—5.
11. Шориков А. Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 248 с.
12. Chernousko F. L. Minimax control for a class of linear systems subject to disturbances // Journal of Optimization Theory and Applications. 2005. V. 127. N. 3. P. 535—548.
13. Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems // V. T. H. Le, C. Stoica, T. Alamo et al // Automatica. 2013. N. 49. P. 3418—3424.
14. Schweppe F. C. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. N. 13 (1). P. 22—28.
15. Tsai Huan-Liang. Generalized Linear Quadratic Gaussian and Loop Transfer Recovery Design of F-16 Aircraft Lateral Control // Engineering Letters. 2007. V. 14, Iss. 1. P. 1—6.
16. Zhou B., Kun Qian, Xu-Dong Ma, Xian-Zhong Dai. A New Nonlinear Set Membership Filter Based on Guaranteed Bounding Ellipsoid Algorithm // Acta Automatica Sinica. 2013. V. 39. N. 2. P. 146—154.

V. I. Shiryaev, professor, head of Control Systems department, vis@prima.susu.ac.ru,
E. O. Podivilova, postgraduate student of Control Systems department, podivilova_elen@mail.ru,
Federal State State-Financed Educational Institution of High Professional Education
"South Ural State University" (National Research University)

Feasible Set Approximation in Dynamic System State Guaranteed Estimation Problem under Condition of Uncertainty

The article describes guaranteed estimation of dynamic system state vector under condition of uncertainty when statistic information about disturbances, noises and initial state is unknown but sets of their possible values are available. In this case state estimation is performed with minimax filter which consists of a construction of feasible sets. Algorithm of construction feasible set approximation with polyhedron of any form is presented when disturbance, noise and initial state sets are polyhedrons given by linear inequalities systems. The article describes the construction of feasible set approximation using current measurement and saved for several previous steps information without performing intractable set operations. The algorithms are based on implicit description of feasible set with dynamic system state equations and linear inequalities describing disturbances, noises and initial state. Approximation construction is reduced to solving a number of linear programming problems. The algorithms are demonstrated with the numerical examples for two-dimensional system and six-dimensional system of fighter aircraft F-16. The comparison of feasible sets approximations and Kalman filter estimations is performed.

Keywords: dynamic systems, guaranteed estimation, minimax filter, linear inequalities systems, feasible sets approximation

References

1. Bushenkov V. A., Lotov A. V. Metody i algoritmy analiza lineynyh sistem na osnove postroeniya obobshchennyh mnozhestv dostizhimosti. Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 1980. V. 20. N. 5. P. 1130—1141.
2. Kalman R. E. Identifikacija sistem s shumami. Uspehi matematicheskikh nauk. 1985. V. 40, N. 4 (244). P. 27—41.
3. Kac I. Ja., Kurzhanskij A. B. Minimaksnaja mnogoshagovaja fil'tracija v statisticheski neopredelennyh situacijah. Avtomatika i telemekhanika. 1978. N. 11. P. 79—87.
4. Podivilova E. O., Shirjaev V. I. O podhode k ocenivaniju sostojanija dinamiceskikh sistem kak k resheniju sistemy linejnyh nera-

- venstv. Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija "Komp'juternye tehnologii, upravlenie, radiojelektronika". 2013. Iss. 17, N. 3 (13). P. 133—136.
5. Stepanov O. A. Rekurrentnoe ocenivanie i fil'tracija: predystorija i sovremennoe sostojanie. Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie. 2010. N. 12. P. 10—16.
6. Filimonov N. B. Identifikacija sostojanija i vneshnej sredy diskretnyh dinamiceskikh ob'ektov metodom polijedral'nogo programirovaniya. Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie. 2003. N. 2. P. 11—15.
7. Fokin, L. A., Shirjaev V. I., Podivilova E. O. Ob ispol'zovanii kalmanovskogo i minimaksnogo algoritmov ocenivaniya pogreshnos-

tej integrirovanoj navigacionnoj sistemy. *Trudy FGUP "NPCAP". Sistemy i pribory upravlenija*. 2013. N. 3. P. 65–79.

8. **Chernikov S. N.** Linejnye neravenstva. M.: Nauka, 1968. 488 p.

9. **Shirjaev V. I.** Sintez upravlenija linejnymi sistemami pri nepolnoj informacii. *Izv. RAN. Tehniceskaja kibernetika*. 1994. N. 3. P. 229–237.

10. **Shirjaev V. I.** Algoritmy upravlenija dinamičeskimi sistemami v uslovijah neopredeljonnosti. *Mehatronika*. 2001. N. 8. P. 2–5.

11. **Shorikov A. F.** Minimaksnoe ocenivanie i upravlenie v diskretnyh dinamičeskikh sistemah. Ekaterinburg: Izd-vo Ural. un-ta, 1997. 248 p.

12. **Chernousko F. L.** Minimax control for a class of linear systems subject to disturbances. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2005. V. 127. N. 3. P. 535–548.

13. **Le V. T. H., Stoica C., Alamo T.** at al. Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems. *Automatica*. 2013. N. 49. P. 3418–3424.

14. **Scheppe F. C.** Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs / F. C. Scheppe. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1968. N. 13 (1). P. 22–28.

15. **Tsai Huan-Liang.** Generalized Linear Quadratic Gaussian and Loop Transfer Recovery Design of F-16 Aircraft Lateral Control System. *Engineering Letters*. 2007. V. 14, Iss. 1. P. 1–6.

16. **Zhou B., Kun Qian, Xu-Dong Ma, Xian-Zhong Dai.** A New Nonlinear Set Membership Filter Based on Guaranteed Bounding Ellipsoid Algorithm. *Acta Automatica Sinica*. 2013. V. 39. N. 2. P. 146–154.

УДК 519.711.3:004

В. И. Потапов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, ivt@omgtu.ru,
Омский государственный технический университет

Математическая модель и алгоритм оптимального управления подвижным объектом в конфликтной ситуации

Построена математическая модель и разработан алгоритм оптимального управления подвижной управляемой по каналам связи резервированной системой, участвующей в конфликтной ситуации, у которой интенсивность отказов компонентов зависит от времени и точки пространства, в котором перемещается система.

Ключевые слова: математическая модель, алгоритм, подвижная система, конфликтная ситуация

Введение

Задачи, связанные с разработкой математических моделей и алгоритмов оптимального управления в конфликтных ситуациях подвижными объектами, управляемыми по каналам связи, в силу целого ряда объективных причин приобрели важное научное и практическое значение. По-видимому, одной из первых научных публикаций, прямо относящихся к проблемам оптимального управления подвижными объектами в конфликтной ситуации, является работа [1]. В ней автор предложил метод направленной оптимизации вектора начальных координат в одной частной модели конфликта подвижных объектов, технические характеристики которых ухудшаются в результате конфликтного взаимодействия с объектами противника, что приводит к старению системы и, естественно, увеличивает вероятность отказа этой системы. В более общей постановке вопросы оптимального управления конфликтующими подвижными объектами изучаются в работе [2], где рассмотрены достаточно сложные модели конфликта подвижных объектов, в которых на надежность объекта влияет не только взаимодействие противостоящего подвижного объекта, но и воздействия изменяющихся пространственных факторов, таких как физико-географические особенности пространства, радиационная обстановка и другие.

В указанных выше работах основное внимание уделено постановке задач и разработке математических методов и моделей оптимизации управления

подвижными конфликтующими объектами. При этом, к сожалению, алгоритмы для численного решения сформулированных задач в этих работах не рассматриваются, что существенно затрудняет использование полученных математических результатов на практике. К тому же в разработанных моделях не уделено должного внимания управляющим устройствам конфликтующих подвижных объектов, надежность которых существенно влияет на вероятность безотказной работы в целом.

Большая группа задач, связанных с конфликтными ситуациями подвижных объектов типа "преследование", "сближение", "убегание" и другие, относится к классу динамических дифференциальных игр [3–5]. Обычно методы дифференциальных игр используют при решении задач прикладного плана, имеющих игровой характер, которые не укладываются (или плохо укладываются) в рамки сформированной теории оптимального управления [6]. К числу таких дифференциальных игровых задач, наиболее близких к рассматриваемым в данной работе проблемам, являются задачи управления подвижными системами с переменной структурой с разрывными траекториями и импульсного управления подвижными системами в дискретные моменты времени с помощью управляющего устройства. В каждом из режимов работы динамика подвижной системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а переключение между режимами функционирования происходит скачкообразно в дискретные моменты времени [4].

Однако в работах [3—5], так же как в работах [1, 2], решение дифференциальных игровых задач не доведено до численных методов решения с помощью средств вычислительной техники, что при всей научной значимости безусловно снижает практическую ценность полученных результатов.

Кроме того, в указанных выше работах при разработке моделей поведения подвижных объектов в конфликтной ситуации практически не учитывается физическая структура подвижного объекта, включающая основные и резервные компоненты, что характерно для современных подвижных объектов, и методы самозащиты объекта в процессе конфликта.

В данной статье сделана попытка в какой-то мере восполнить указанный выше пробел и дать практически реализуемый на компьютере численный алгоритм оптимального управления самозащищающимся подвижным объектом в конфликтной ситуации, обеспечивающий максимизацию вероятности безотказной работы объекта.

Достаточно сложными в этом отношении являются задачи, в которых подвижный объект, участвующий в конфликтной ситуации, в течение времени конфликта должен защищаться за счет собственных ресурсов — средств защиты (как правило, избыточности) — от воздействия другой конфликтующей стороны, стремящейся своими средствами нападения увеличить вероятность отказа подвижного объекта в течение конфликта в пространстве взаимодействия, т. е. уменьшить надежность каналов связи подвижного объекта с системой его управления и надежность аппаратных компонентов подвижного объекта (подвижной системы).

Таким образом, причинами отказов участвующего в конфликтной ситуации управляемого подвижного объекта являются отказы его аппаратных компонентов, отказы каналов связи системы управления и особенности свойств пространства, в котором перемещается управляемый объект, на которые может оказывать влияние противоположная конфликтующая сторона.

В общем виде рассматриваемая в данной работе задача может быть описана на содержательном уровне следующим образом.

В конфликтной ситуации участвует перемещающаяся в пространстве в заданную точку аппаратно-резервированная структурно-перестраиваемая система, управляемая по каналам связи. Интенсивности отказов компонентов системы и каналов связи являются функциями времени и точки пространства, в котором находится подвижная система.

Требуется определить оптимальные траектории движения системы, вектор моментов настройки системы для самозащиты и векторы резервирования, обеспечивающие максимизацию вероятности безотказной работы конфликтующей подвижной системы в заданной точке пространства.

Формализация объекта исследования и постановка задачи

Будем считать, что участвующий в конфликтной ситуации подвижный объект (подвижная система) представляет собой управляемую по каналам связи перемещающуюся в трехмерном евклидовом пространстве R^3 избыточную $A(n, m, \mathbf{s}, q, \lambda(t, \mathbf{r}), \boldsymbol{\tau})$ систему, состоящую из n основных модулей, разбитых на q групп по n_1, n_2, \dots, n_q ($n_i \geq 1$) модулей в каждой. Интенсивности отказов модулей, входящих в соответствующую группу $\lambda_1(t, \mathbf{r}), \lambda_2(t, \mathbf{r}), \dots, \lambda_q(t, \mathbf{r})$, являются функциями времени и точки пространства, в которой находится система. В состав подвижной системы входят также по числу основных q групп резервных модулей по s_1, s_2, \dots, s_q ($s_i \geq 0$) модулей в каждой группе ($s_1 + s_2 + \dots + s_q = m$), интенсивность отказов каждого из которых $\lambda_0(t, \mathbf{r})$ также является функцией времени и точки пространства. В каждой q -й группе основные модули при их отказе мгновенно замещаются резервными из этой же группы. Как только резервный модуль подключается вместо отказавшего основного в своей группе, он начинает функционировать с интенсивностью отказов $\lambda_i(t, \mathbf{r}), 1 \leq i \leq q$.

Считаем, что вектор резервирования $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_q)$ является переменным во времени, т. е. в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L$ по командам может происходить перераспределение резервных модулей между группами, которое назовем настройкой системы, а соответствующие моменты времени τ_σ ($1 \leq \sigma \leq L$) — моментами настройки и, соответственно, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$ — вектором настройки. Каждому моменту настройки τ_σ соответствует вектор резервирования $\mathbf{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$. Число настроек за время движения системы t_f ограничено числом L ($L \geq 0$).

В рассматриваемой подвижной системе каждая i -я группа модулей ($1 \leq i \leq q$) получает управляющие сигналы из центра управления, размещенного, например, в начале координат пространства, в котором движется система, по N_i каналам связи, причем отказ в каждой группе Q_i каналов связи из N_i ($Q_i < N_i$) еще не приводит к отказу системы управления i -й группы модулей подвижного объекта A , а отказ $Q_i + 1$ каналов связи приводит к ее отказу.

Пусть $\Lambda_i(t, \boldsymbol{\tau})$ — интенсивность отказов на единицу длины одного канала связи i -й группы модулей системы A , которую назовем *удельной интенсивностью отказов i -й группы каналов связи* и будем использовать при разработке алгоритмов оптимального управления подвижным объектом в конфликтной ситуации.

Решаемая задача может быть сформулирована следующим образом. При заданных $\lambda_i = \lambda_i(t, \mathbf{r}), 0 \leq i \leq q$, и $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \mathbf{r}), 1 \leq i \leq q$, для системы $A(n, m, \mathbf{s}, q, \lambda(t, \mathbf{r}), \boldsymbol{\tau}, \Lambda(t, \mathbf{r}), N_i, Q_i)$, участвующей в конфликтной ситуации, разработать алгоритм оптимального управления, включающий алгоритмы вычисления траектории ее движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, век-

тора настройки $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$ и векторов резервирования $\mathbf{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$, $0 \leq \sigma \leq L$, отвечающих моментам настройки τ_σ , максимизирующий вероятность безотказной работы $P(t_f)$ подвижной конфликтующей системы в момент t_f прибытия ее в заданную точку \mathbf{r}_f пространства. Иными словами, требуется решить задачу оптимизации выбора траектории движения и пространственно-временной стратегии резервирования избыточной подвижной системы, участвующей в конфликте, в целях максимизации вероятности ее безотказной работы $P(t_f)$ при движении по выбранной траектории, включая конечную точку движения [7].

В приведенной выше постановке рассматриваемая задача сводится к задаче оптимального управления подвижной системой A , где (в терминах теории оптимального управления [6]) в качестве максимизируемого функционала качества управления принимается $P(t_f)$, в качестве управления используются \mathbf{r} , τ , \mathbf{s}_σ , в качестве внешнего воздействия на систему используются $\lambda_i = \lambda_i(t, \mathbf{r})$, $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \mathbf{r})$ при ограничениях $1 \leq i \leq q$, $0 \leq \sigma \leq L$ и естественных ограничениях на параметры движения подвижной системы A , которые приведены ниже.

Решение поставленной задачи

Положим, что система A из начала координат должна попасть в заданную конечную точку \mathbf{r}_f пространства R^3 . Время движения системы t_f зависит от траектории и имеет естественное ограничение $t_f \leq T$, указывающее на то, что время движения (полета) ограничено.

Введем следующие ограничения для подвижной системы.

В связи с тем, что прочностные характеристики аппаратной части подвижной системы всегда ограничены, должно соблюдаться условие

$$|\ddot{\mathbf{r}}(t)| \leq M \text{ для любого } t \in [0, t_f]. \quad (1)$$

Из неравенства (1) следует, что для любого $t \in [0, t_f]$

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| \leq Mt + v_0; \quad |\mathbf{r}(t)| \leq \frac{Mt^2}{2} + v_0t, \quad (2)$$

где v_0 — начальная скорость подвижной системы.

Последнее ограничение на траекторию движения подвижной системы:

$$|\mathbf{r}(t)| \in V \text{ для любого } t \in [0, t_f], \quad (3)$$

где V — заданная область конечной связности в R^3 (ясно, что $0 \in V$ и $\mathbf{r}_f \in V$). Это ограничение "запрещает" для траектории некоторые односвязные области пространства.

Чтобы завершить построение математической модели управляемой подвижной системы A , воспользуемся следующим приемом. Вместо каналов связи подвижной системы с центром управления введем в каждый i -й аппаратный основной модуль n_i системы переменное число фиктивных элемен-

тов $\tilde{n}_i(t, \mathbf{r})$ и в каждую i -ю группу резервных модулей — Q_i фиктивных элементов.

С помощью такой замены удалось избавиться от каналов связи и получить новую систему $A^*(n^1(t, \mathbf{r}), m^1, \mathbf{s})$ с переменным числом элементов в основном и резервном модулях, где

$$n^1(t, \mathbf{r}) = n + \tilde{n}_1(t, \mathbf{r}) + \tilde{n}_2(t, \mathbf{r}) + \dots + \tilde{n}_q(t, \mathbf{r}), \\ m^1 = m + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_q.$$

Число фиктивных элементов $\tilde{n}_i(t, \mathbf{r})$ определяется из уравнения

$$N_i \Lambda_i(t, \mathbf{r}) |\mathbf{r}| = \tilde{n}_i(t, \mathbf{r}) \lambda_i(t, \mathbf{r}) + Q_i(t, \mathbf{r}) \lambda_0(t, \mathbf{r}). \quad (4)$$

Отсюда, учитывая, что $\tilde{n}_i(t, \mathbf{r})$ — натуральное число (опуская при записи аргументы), получим

$$\tilde{n}_i = \left[\frac{N_i \Lambda_i |\mathbf{r}| - Q_i \lambda_0}{\lambda_i} \right] + 1, \quad 1 \leq i \leq q, \quad (5)$$

где $[X]$ — ближайшее натуральное число, меньшее X .

Легко понять, что физический смысл уравнения (4) состоит в том, что суммарная интенсивность отказов каналов связи i -го модуля "перекладывается" на i -й модуль аппаратной части подвижной системы.

Будем полагать, что поведение участвующей в конфликте подвижной системы $A^*(n^1(t, \mathbf{r}), m^1, \mathbf{s})$ может быть аппроксимировано марковским случайным процессом с конечным числом состояний, соответствующих числу отказов в системе. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих однородный марковский процесс, соответствующий функционированию подвижной системы A^* , имеет вид [8]

$$p'_0(t, \mathbf{r}) = -D_1 p_0(t, \mathbf{r}); \\ p'_k(t, \mathbf{r}) = A_k p_{k-1}(t, \mathbf{r}) - D_{k+1} p_k(t, \mathbf{r}), \quad (6) \\ 1 \leq k \leq m^1$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_{m^1}(0) = 0, \quad (7)$$

где $p_k(t, \mathbf{r})$ — вероятность пребывания подвижной системы A^* в момент времени t в состояниях с k отказами.

При этом

$$D_k = A_k + B_k, \quad 1 \leq k \leq m^1, \\ D_{m^1+1} = B_{m^1+1}.$$

Коэффициенты системы уравнений (6) вычисляются по формулам

$$A_k = \sum_{i=0}^q \alpha_i(k) \lambda_i(t, \mathbf{r}), \quad 1 \leq k \leq m^1; \\ D_k = \sum_{i=0}^q \beta_i(k) \lambda_i(t, \mathbf{r}), \quad 1 \leq k \leq m^1 + 1, \quad (8)$$

где для $0 \leq k \leq m^1$ имеет место

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} (m^1 - k + 1) \tilde{R}_k, & \text{если } i = 0; \\ \delta_i n_i \tilde{R}_k, & \text{если } 0 \leq i \leq q; \end{cases} \quad (9)$$

$$\beta_i(k) = \begin{cases} (m^1 - k + 1) \tilde{R}_k, & \text{если } i = 0; \\ \delta_i n_i \tilde{R}_k - n_i^1 \Theta_i(k), & \text{если } 1 \leq i \leq q; \end{cases} \quad (10)$$

$$\beta_i(m^1 + 1) = \delta_i n_i, \quad 1 \leq i \leq q;$$

$$\tilde{R}_k = \binom{n^1 + m^1}{k} R_k.$$

Коэффициенты δ_i и $\Theta_i(k)$, являющиеся элементами векторов $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q)$ и $\Theta(k) = (\Theta_1(k), \Theta_2(k), \dots, \Theta_q(k))$, определяются следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } s_i = 0; \\ 1, & \text{если } s_i \geq 1; \end{cases} \quad (11)$$

$$\Theta_i(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq s_i; \\ 1, & \text{если } k \geq s_i + 1. \end{cases} \quad (12)$$

Очевидно, что $\Theta_i(1) = 1 - \delta_i$.

Переменная R_k определяет число возможных попаданий конфликтующей подвижной системы $A^*(n^1(t, \mathbf{r}), m^1, \mathbf{s})$ в состояние с k отказами и вычисляется [8] по формуле

$$R_k = \sum_{\mathbf{v} \in \Omega(k, \mathbf{s})} \prod_{i=1}^q \binom{n_i^1 + s_i}{v_i}, \quad (13)$$

где $\Omega(k, \mathbf{s}) = \{\mathbf{v} | v_1 + v_2 + \dots + v_q = k; \forall_i 0 \leq v_i \leq s_i + Q_i\}$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_q)$ — целочисленный вектор, представляющий сумму целочисленных векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ и $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_q)$: $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$.

Выражение (13) получено в предположении, что k отказов в рассматриваемой подвижной системе распределены следующим образом: в i -й группе основных модулей $n^1 - x_i$ отказов, в i -й группе резервных модулей $m^1 - z_i$ отказов ($1 \leq i \leq q$). Если $x_i = 0$ или $z_i = 0$, то в соответствующей группе отказов не было.

Очевидно, что аналитическое решение поставленной задачи оптимального управления участвующей в конфликтной ситуации подвижной системой $A^*(n^1(t, \mathbf{r}), m^1, \mathbf{s})$ не представляется возможным, поэтому воспользуемся приближенным численным методом для решения данной задачи, основанном на методе дискретизации [8, 9].

Суть этого метода применительно к рассматриваемой задаче состоит в том, что систему дифференциальных уравнений (6), коэффициенты которой являются функциями времени и точки пространства, в которой находится подвижная система, необходимо заменить системой дискретных аналогов, у которых коэффициенты можно рассматривать как постоянные (с заранее установленной степенью точности) на дискретных интервалах времени и пространства, в котором движется конфликтующая система A^* .

Для численного решения задачи, прежде всего, получим оценку t_f .

Из второго неравенства (2) следует

$$|\mathbf{r}(t_f)| = |\mathbf{r}_f| \leq M t_f^2 / 2 + v_0 t_f.$$

Отсюда имеем

$$t_f \geq \frac{1}{M} (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2M|\mathbf{r}_f|}). \quad (14)$$

Обозначим правую часть неравенства (14) через t_f^{\min} . Ясно, что $t_f^{\min} \leq T$.

На вектор настройки $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$ из физических соображений естественно наложить следующее ограничение:

$$\min_{0 \leq \delta \leq L-d} (\tau_{\delta+1} - \tau_{\delta}) \geq \alpha,$$

смысл которого заключается в том, что две последовательные настройки подвижной системы $A^*(n^1(t, \mathbf{r}), m^1, \mathbf{s})$ нельзя выполнять слишком быстро, между ними должно пройти некоторое время, не меньше α .

Обозначим теперь e точность измерения траектории $\mathbf{r}(t)$ движения системы A^* , при которой становится заметно, когда в какой-либо окрестности любой точки $t_0 \in [0, t_f]$ траектория начинает отклоняться от касательной, проходящей через точку $\mathbf{r}(t_0)$. Используя величину e , нетрудно вычислить временной интервал дискретизации Δt .

Для этого разложим вектор-функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t_0 \in [0, t_f]$ и ограничимся двумя членами:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}(t_0)(t - t_0)^2.$$

Отсюда ясно, что траектория $\mathbf{r}(t)$ в окрестности точки t_0 не будет отличаться от касательной с точностью e , если

$$|\ddot{\mathbf{r}}(t_0)|(t - t_0)^2 / 2 \leq e.$$

Из выражения (1) следует, что это неравенство выполняется наверняка, если выполняется неравенство

$$M(t - t_0)^2 / 2 \leq e.$$

Отсюда следует, что за временной интервал дискретизации можно принять

$$\Delta t = \sqrt{2e/M}. \quad (15)$$

При этом из физических соображений ясно, что $\Delta t < \alpha$, так как в малой окрестности любой точки $\mathbf{r} \in R^3$ пространство можно считать изотропным, а настройка подвижной систем A^* необходима только тогда, когда изотропность существенно нарушается.

Теперь, на основании (15), t_f может принимать дискретные значения

$$t_f = t_f^{\min} + l \Delta t,$$

где $0 \leq l \leq \tilde{l}$, а $\tilde{l} = [(T - t_f^{\min}) / \Delta t]$.

Координаты вектора настройки $\tau = (\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$ системы A^* могут принимать значения из дискретного множества $\chi = \{0, \alpha, 2\alpha, \dots, \tilde{\omega}\alpha\}$, где $\tilde{\omega} = [t_f/\alpha]$.

Ясно, что $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_L < \tau_f$. Каждому моменту настройки τ_σ отвечает вектор резервирования $s_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$, $0 \leq \sigma \leq L$. Обозначим $t_\omega = \omega\alpha$, $0 \leq \omega \leq \tilde{\omega}$. Тогда вектор настройки τ будет описываться вектором натуральных чисел $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(L))$ через отображение $\tau_\sigma \rightarrow \omega(\sigma)$, при этом $\omega(0) = 0$.

Обозначим $\Delta_\sigma = [\omega(\sigma)\alpha, \omega(\sigma + 1)\alpha]$, $0 \leq \sigma \leq L - 1$, и $t_v^\sigma = t_{\omega(\sigma)} + v\Delta t$, где $0 \leq v \leq \tilde{v}(\sigma)$, $a \tilde{v}(\sigma) = (\omega(\sigma + 1) - \omega(\sigma))[\alpha/\Delta t]$, и введем множество $\Delta_{v\sigma} = [t_{v-1}^\sigma, t_v^\sigma]$, $1 \leq v \leq \tilde{v}(\sigma)$.

Очевидно, что

$$\Delta_\sigma = \bigcup_{v=1}^{\tilde{v}(\sigma)} \Delta_{v\sigma};$$

$$[0, t_f] = \left(\bigcup_{\sigma=0}^L \Delta_\sigma \right) \cup [\omega(L)\alpha, t_f],$$

причем для любых $\sigma \neq \sigma'$ $\Delta_\sigma \cap \Delta_{\sigma'} = \emptyset$, и для любых $v \neq v'$ и любого σ $\Delta_{v\sigma} \cap \Delta_{v'\sigma} = \emptyset$.

Теперь система уравнений (6) с начальными условиями (7), описывающая поведение подвижной системы $A^*(n^1(t, \mathbf{r}), m^1, \mathbf{s})$, разобьется на $K(t_f)$ систем уравнений с постоянными коэффициентами A_{kv}^σ и D_{kv}^σ по числу множеств $\Delta_{v\sigma}$, где

$$K(t_f) = \sum_{\sigma=0}^L v(\sigma),$$

которые являются дискретным аналогом системы уравнений (6):

$$(p_{0v}^\sigma)' = -D_{1v}^\sigma p_{0v}^\sigma,$$

$$(p_{kv}^\sigma)' = A_{kv}^\sigma p_{k-1,v}^\sigma - D_{k+1,v}^\sigma p_{kv}^\sigma, \quad 1 \leq k \leq m^1, \quad (16)$$

с начальными условиями [8]

$$p_{kv}^\sigma(t_{v-1}^\sigma) = \begin{cases} p_{k, d(\sigma-1)}^{\sigma-1} (\tau_\sigma - 1), & \text{если } v = 1, \\ p_{k, v-1}^\sigma (t_{v-1}^\sigma), & \text{если } 2 \leq v \leq d(\sigma), \end{cases} \quad (17)$$

для $2 \leq \sigma \leq l$, и

$$p_{kv}^1(t_{v-1}^1) = \begin{cases} p_{k0}(0), & \text{если } v = 1, \\ p_{k, v-1}^1 (t_{v-1}^1), & \text{если } 2 \leq v \leq d(1), \end{cases} \quad (18)$$

для $\sigma = 1$, где $d(\sigma)$ — натуральное число.

Коэффициенты A_{kv}^σ и D_{kv}^σ определяются по формулам (8)—(13) с соответствующими изменениями, о которых говорилось выше. В частности, вместо n_i будет $n_i + \tilde{n}_i(t_v^\sigma, \mathbf{r})$ а вместо λ_i будет λ_{iv} .

Теперь проведем операцию дискретизации пространства, в котором перемещается участвующая в конфликтной ситуации система A^* .

Допустим, что движущаяся система A^* в момент времени $t = t_0$ попала в точку пространства $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$. Требуется определить радиус $\rho = \rho(\Delta t)$ максимального шара $U(\mathbf{r}_0, \Delta t)$ с центром в точке \mathbf{r}_0 , за который подвижная система не выйдет за время (Δt) . Этот шар является пространственным аналогом элемента временной дискретизации.

Для этого решим дифференциальное неравенство $|\ddot{\mathbf{r}}(t)| \leq M$ с начальными условиями $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0$.

Получим

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| \leq |\dot{\mathbf{r}}_0|(t - t_0) + M(t - t_0)^2/2 - Mt_0(t - t_0).$$

Отсюда, учитывая первое из неравенств (2), имеем

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0\| \leq \left(v_0 + \frac{M}{2}(t - t_0) \right) (t - t_0).$$

Следовательно,

$$\rho(\Delta t) = \left(v_0 + \frac{M}{2}\Delta t \right) \Delta t. \quad (19)$$

Дискретизацию $\lambda_i = \lambda_i(t, \mathbf{r})$, $0 \leq i \leq q$, и $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \mathbf{r})$, $1 \leq i \leq q$, проведем, руководствуясь следующими соображениями.

Из построения множества $\Delta_{v\sigma}$ ясно, что для любого $t \in [0, t_f]$ всегда можно найти такие σ и v , что $t \in \Delta_{v\sigma}$. Выше было показано, что для любого $\mathbf{r} \in R^3$ шар $U(\mathbf{r}, \Delta t) = \{\mathbf{r}' \mid |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq \rho(\Delta t)\}$ является пространственным интервалом дискретизации.

Функции λ_i и Λ_i отображают четырехмерное евклидово пространство $R^4 = R_t^1 \otimes R^3$ на R^1 , где $R_t^1 = \{t \mid t \in [0, \infty[\}$, а R^3 — физическое безразмерное трехмерное пространство, в котором перемещается система A^* . Элементом дискретизации в пространстве R^4 является четырехмерный шар $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 + t^2 \leq \rho^2 + (\Delta t)^2$, объем которого $u(\gamma)$, где $\gamma = U(\mathbf{r}, \Delta t) \otimes \Delta_{v\sigma}$, вычисляется по формуле $u(\gamma) = \pi^2(\rho^2 + (\Delta t)^2)^2/2$.

Теперь интенсивности отказов на элементе дискретизации γ можно определить как средние интегральные:

$$\lambda_{iv}^\sigma = (u(\gamma))^{-1} \int_{t_{v-1}^\sigma}^{t_v^\sigma} dt \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq \rho} \lambda_i(t, \mathbf{r}') du', \quad (20)$$

$$\Lambda_{iv}^\sigma = (u(\gamma))^{-1} \int_{t_{v-1}^\sigma}^{t_v^\sigma} dt \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq \rho} \Lambda_i(t, \mathbf{r}') du', \quad (21)$$

где $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $du = dx_1 dx_2 dx_3$.

Будем рассматривать R^3 как ячеистую структуру с узлами в точках $\mathbf{r}(\mathbf{i}) = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_1 = ei_1$, $x_2 = ei_2$, $x_3 = ei_3$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ — целочисленный вектор. Будем также считать, что подвижная система A^* наблюдается и корректируется только в точках $\mathbf{r}(\mathbf{i})$, что не противоречит реальности.

Установим, для каких векторов \mathbf{i} рассматриваемая система не выйдет за пределы шара $U(\mathbf{r}_0, \Delta t)$.

Пусть вектору \mathbf{r}_0 отвечает целочисленный вектор $\mathbf{i}^0 = (i_1^0, i_2^0, i_3^0)$. Тогда, очевидно, что для всех $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$, удовлетворяющих неравенству

$$(i_1 - i_1^0)^2 + (i_2 - i_2^0)^2 + (i_3 - i_3^0)^2 \leq \left(\frac{\rho}{e}\right)^2, \quad (22)$$

точка $\mathbf{r}(\mathbf{i}) \in U(\mathbf{r}_0, \Delta t)$.

Теперь, после проведенной дискретизации с учетом (20) и (21), формула (5) принимает вид

$$\tilde{n}_i = \left\lfloor \frac{N_i \Lambda_{iv}^\sigma |\mathbf{r}| - Q_i \lambda_{0v}^\sigma}{\lambda_{iv}^\sigma} \right\rfloor + 1 \quad (23)$$

для $t \in \Delta_{v\sigma}$.

Выполнив дискретизацию компонентов рассматриваемой задачи, перейдем к вычислению управлений, максимизирующих вероятность безотказной работы $P(t_f)$ подвижной конфликтующей системы $A^*(n^1(t, \mathbf{r}), m^1, \mathbf{s})$ в момент t_f достижения системой заданной точки \mathbf{r}_f пространства.

Для этого необходимо вычислить управления $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L)$ и матрицу

$$S = \begin{bmatrix} S_{01} & S_{02} & \dots & S_{0q} \\ S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{L1} & S_{L2} & \dots & S_{Lq} \end{bmatrix},$$

строки которой составлены из последовательности координат векторов резервирования \mathbf{s} , максимизирующих $P(t_f)$. При этом задача максимизации $P(t_f)$ для фиксированных $\boldsymbol{\tau}$ и S , т. е. выбор оптимальной траектории $\mathbf{r}(t)$, эквивалентна задаче максимизации $P(t)$ в любой точке $t \in [0, t_f]$. Этот факт доказан в работе [8].

В рассматриваемой задаче $P(t)$ представляет функционал качества управления подвижной системой A^* . Обозначим его $P[\boldsymbol{\tau}, S, \mathbf{r}(t); t]$, где $\boldsymbol{\tau}, S, \mathbf{r}(t)$ — управления. Тогда алгоритм численного решения данной задачи, в котором использован принцип последовательной оптимизации (процедура пп. 20—29 алгоритма), можно описать следующим образом.

Алгоритм

1. Задать $n, m, q, \{n_1, n_2, \dots, n_q\}, \{\lambda_0(t, \mathbf{r}), \lambda_1(t, \mathbf{r}), \dots, \lambda_q(t, \mathbf{r})\}, \{\Lambda_1(t, \mathbf{r}), \Lambda_2(t, \mathbf{r}), \dots, \Lambda_q(t, \mathbf{r})\}, \{N_1, N_2, \dots, N_q\}, \{Q_1, Q_2, \dots, Q_q\}, L, T, M, v_0, a, e, \mathbf{r}_f$ множество V .

2. Вычислить $t_f^{\min} = \frac{1}{M} (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2M|\mathbf{r}_f|})$.

3. Вычислить $\Delta t = \sqrt{2e/M}$.

4. Вычислить $\tilde{t} = [(T - t_f^{\min})/\Delta t]$.

5. Вычислить $\rho = (v_0 + M\Delta t/2)\Delta t$.

6. Положить $j = 0$.

7. Вычислить $t_f^j = t_f^{\min} + j\Delta t$.

8. Вычислить $\tilde{\omega} = \lfloor t_f^j/a \rfloor$.

9. Для всех векторов $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L)$, где $\tau_\sigma \in \chi$, выполнить процедуру пп. 10—25.

10. Положить $\sigma = 0$.

11. Положить $\mathbf{i}_0 = 0$.

12. Положить $v = 1$.

13. Вычислить $z = \omega(\sigma) + v$.

14. Вычислить $\lambda_{iv}^\sigma, \Lambda_{iv}^\sigma$ для всех $0 \leq i \leq q$ ($\Lambda_{0v}^\sigma = 0$) по формулам (20) и (21) соответственно.

15. Вычислить $\tilde{n}_i, 1 \leq i \leq q$, по формуле (23).

16. Для всех натуральных решений $\mathbf{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$ диафантова уравнения

$$\begin{aligned} s_{\sigma 1} + s_{\sigma 2} + \dots + s_{\sigma q} &= \\ &= m + \sum_{i=1}^q Q_i - \left[\sum_{k=0}^{m^1} k p_{k, \omega(\sigma)}^\sigma(\tau_\sigma) \right], \end{aligned}$$

где $p_{kv}^\sigma(t)$ — решение системы уравнений (16) с начальными условиями (17), (18), выполнить процедуру пп. 17—20.

17. Для всех целочисленных векторов $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3) \in I_z$, где $I_z = I_z^1 \cap I_z^2 \cap \tilde{V}$, а множества I_z^1, I_z^2, \tilde{V} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_z^1 &= \{\mathbf{i} | |\mathbf{i} - \mathbf{i}_z - \mathbf{1}| \leq \rho/e\}; \\ I_z^2 &= \{\mathbf{i} | |\mathbf{i}_f - \mathbf{i}| \leq \frac{1}{e} (Mt_f + v_0)(t_f - t_v^\sigma)\}; \\ \tilde{V} &= \{\mathbf{i} | \mathbf{e}\mathbf{i} \in V\}, \text{ а } \mathbf{r}_f = \mathbf{e}\mathbf{i}_f \end{aligned}$$

выполнить процедуру пп. 18—19.

18. Если $I_z = \emptyset$, переход к п. 27.

19. Вычислить

$$\begin{aligned} P_j[\mathbf{r}_\sigma, \{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_{\sigma-1}^0, \mathbf{s}_\sigma\}, \mathbf{r}(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] &= \\ &= \sum_{k=0}^{m^1} p_{kv}^\sigma(t_{v+1}^\sigma), \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}(t_{v+1}^\sigma) = \mathbf{e}\mathbf{i}$, $\tau_\sigma = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_\sigma)$, а принцип вычисления векторов $\mathbf{s}_\mu^0, 0 \leq \mu \leq \sigma - 1$ описывается в п. 21 этого алгоритма (ясно, что для $\sigma = 0$ $\{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_{\sigma-1}^0, \mathbf{s}_\sigma\} = \{\mathbf{s}_0\}$).

20. Вычислить вектор $\mathbf{i}_z \in I_z$, для которого

$$\begin{aligned} P_j[\boldsymbol{\tau}_\sigma, \{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_{\sigma-1}^0, \mathbf{s}_\sigma\}, \mathbf{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] &= \\ = \max_{\mathbf{i} \in I_z} P_j[\boldsymbol{\tau}_\sigma, \{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_{\sigma-1}^0, \mathbf{s}_\sigma\}, \mathbf{r}(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma], \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}^0(t_{v+1}^\sigma) = \mathbf{e}\mathbf{i}_z$.

21. Вычислить вектор \mathbf{s}_σ^0 , для которого

$$\begin{aligned} P_j[\boldsymbol{\tau}_\sigma, \{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_{\sigma-1}^0, \mathbf{s}_\sigma\}, \mathbf{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] &= \\ = \max_{\mathbf{s}_\sigma} P_j[\boldsymbol{\tau}_\sigma, \{\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_{\sigma-1}^0, \mathbf{s}_\sigma\}, \mathbf{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma]. \end{aligned}$$

22. Положить $v = v + 1$.

23. Если $v \leq \tilde{v}(\sigma)$, переход к п. 13.

24. Положить $\sigma = \sigma + 1$.
25. Если $\sigma \leq L$, переход к п. 11.
26. Вычислить вектор τ_L^0 , для которого

$$P_j[\tau_L^0, S^0, \mathbf{r}^0(t_j); t_j] = \max_{\tau_L} P_j[\tau_L, S^0, \mathbf{r}^0(t_j); t_j],$$

где S^0 — матрица, строки которой составлены из последовательных координат векторов $\mathbf{s}_0^0, \mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_L^0$.

27. Положить $j = j + 1$.
28. Если $j < \tilde{l}$, переход к п. 7.
29. Вычислить \tilde{j} , для которого

$$P_j[\tau_L^0, S^0, \mathbf{r}^0(t_j); t_j] = \max_{0 \leq j \leq \tilde{l}} P_j[\tau_L^0, S^0, \mathbf{r}^0(t_j); t_j].$$

30. Конец (управление $\{\tau, S, \mathbf{r}(t)\}$, где величины $\tau = \tau_L^0, S = S^0, \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{e}}_z$ для $t \in \Delta_{v\sigma}$ соответствуют индексу \tilde{j} , является оптимальным).

Список литературы

1. Nartov B. K. Conflict of Moving Systems. AMSE Press, France, 1994. 87 p.
2. Нартов Б. К. Управление подвижными объектами. Формализация и модели. Омск: Изд-во ОмГУ, 2002. 83 с.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
4. Кривонос Ю. Г., Матичин И. И., Чикрий А. А. Динамические игры с резервными траекториями. Киев: Наукова думка, 2005. 219 с.
5. Петросян Л. А., Томский Г. В. Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1982. 252 с.
6. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 517 с.
7. Потапов В. И. Постановка двух задач оптимального управления подвижной структурно-перестраиваемой избыточной системой, управляемой по каналам связи // Динамика систем, механизмов и машин. Матер. VIII Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 70-летию ОмГТУ. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2012. С. 276—278.
8. Потапов В. И., Братцев С. Г. Новые задачи оптимизации резервированных систем. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1986. 112 с.
9. Потапов В. И., Потапов И. В. Противоборство (дифференциальная игра) двух нейрокомпьютерных систем // Информационные технологии. 2005. № 8. С. 53—57.

V. I. Potapov, Professor, Head of the chair of Informatics and Computer Science, ivt@omgtu.ru, Omsk state technical University

Mathematical Model and Algorithm of Optimal Control Movable Object in Conflict Situation

Mathematical model and the algorithm of the numerical solution of optimal control, involved in conflict situations mobile controllable via the communication channels redundant system has been involved which a failure rate of components depending on the time and space to which you are moving the system is moving.

In the structure of the mathematical model of a moving object (system) there is a mathematical model of communication channels to control the object and mathematical model of the moving object moving in three-dimensional Euclidean space. Movable object consists of the main and reserve units, divided by the number of groups, each of which may be replaced failed during conflict core modules redundant in this group. This replacement is done with commands transmitted via communication channels, which are just able to refuse. The concept of the failure intensity per unit length of a single communication channel. Failure rate of primary and backup modules are functions of time and space in which the mobile system is moving.

Vector reservation is variable in time. At appropriate points of time called points system configuration commands can be spliced modules between groups (system setup). Each time from the vector configuration corresponds to the vector of system redundancy. Number of settings during the motion of a system at a given point in space is limited.

The behavior is involved in a conflict situation the moving system approximated by a Markov random process with a finite number of states corresponding to the number of failures in the system, and is described by differential equations with variable coefficients.

In the work the task of optimization of the choice and the trajectory of motion and spetal interim strategy reservation of the mobile system participating in the conflict in order to maximize its probability of faultless work at movement on the selected path including end point of the movement.

The problem is reduced to the problem of optimal control of a mobile system, where maximized functional quality management is the probability of failure-free operation and quality control are used, the trajectory of system and vectors configuration and redundancy when the relevant restrictions on control and motion parameters of the moving system in used as control.

The problem is solved by approximate numerical method based on the method of sampling and integer programming. The algorithm of numerical solution is used for the principle of consistent optimization.

Keywords: mathematical model, algorithm, movable system, conflict situation

References

1. Nartov B. K. Conflict of Moving Systems. AMSE Press, France, 1994. 87 p.
2. Нартов Б. К. Управление подвижными об'ектами. Формализация и модели. Омск: Изд-во ОмГУ, 2002. 83 п.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 п.
4. Кривонос Ю. Г., Матичин И. И., Чикрий А. А. Динамические игры с резервными траекториями. Киев: Наукова думка, 2005. 219 п.
5. Петросян Л. А., Томский Г. В. Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1982. 252 п.

6. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 517 п.
7. Потапов В. И. Постановка двух задач оптимального управления подвижной структурно-перестраиваемой избыточной системой, управляемой по каналам связи. Динамика систем, механизмов и машин. Матер. VIII Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 70-летию ОмГТУ. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2012. П. 276—278.
8. Потапов В. И., Братцев С. Г. Новые задачи оптимизации резервированных систем. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1986. 112 п.
9. Потапов В. И., Потапов И. В. Противоборство (дифференциальная игра) двух нейрокомпьютерных систем. Информационные технологии. 2005. № 8. П. 53—57.

УДК 521.1/3

Ф. М. Кулаков, д-р техн. наук, проф.,

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,

А. С. Шмыров, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Д. В. Шиманчук, канд. физ.-мат. наук, доц., shymanchuk@mail.ru,

Санкт-Петербургский государственный университет

Управление космическим роботом с использованием неустойчивой точки либрации

Рассмотрены навигационные задачи управления космическим роботом, который функционирует как в окрестности неустойчивой точки либрации системы Земля—Солнце, так и в околоземном космическом пространстве. Движение космического робота рассматривается в рамках хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел. На основании линеаризованной системы уравнений движения анализируется понятие специальной функции фазовых переменных, называемой в работе функцией опасности. Проводится численный анализ управляемых траекторий в зависимости от значения функции опасности. Показана возможность маневрирования в околоземном космическом пространстве с возвращением в окрестность коллинеарной точки либрации и стабилизации орбитального движения в рамках рассматриваемой математической модели. Результаты численного моделирования проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: космический робот, круговая ограниченная задача трех тел, коллинеарная точка либрации, околоземное космическое пространство, мониторинг, орбитальное движение

Введение

Одним из наиболее привлекательных направлений развития современной космонавтики является космическая робототехника, основной целью которой является создание и развитие сложных механизмов, способных функционировать в суровых условиях космической среды. Прежде всего, такие системы могут быть применены при проведении наблюдений, монтаже и строительстве, эксплуатации и обслуживании, а также и для решения других задач, которые, как следует отметить, не всегда удается полностью понять при проектировании робота на Земле.

Космическая робототехника имеет важное значение для общей способности, а, следовательно, и эффективности, работы в космосе, она уже существенно расширяет функциональные возможности космических аппаратов (КА), позволяет помочь космонавтам в открытом космосе или полностью освободить от работы в опасных условиях. В целом космическая робототехника открывает новые возможности для развития традиционной космонавтики в направлении создания принципиально новых типов КА, например, конструирования в космосе больших космических станций, которые совершают управляемые маневры в околоземном пространстве. Особенно актуально это будет при исследовании других небесных тел.

Очевидно, что проектирование проектов, предполагающих использование систем космической

робототехники, должно включать оценку возможности их осуществления на практике, что влечет необходимость применения весьма сложных уравнений небесной механики.

Известно, что космическое пространство в окрестности точек либрации Земля—Солнце или Земля—Луна обладает замечательным свойством. Это свойство позволяет КА осуществлять в этой окрестности различные маневры, в том числе очень большой протяженности, без существенных затрат энергии реактивных двигателей, используя для перемещения в основном гравитационные силы или в будущем, возможно, давление света. Это открывает путь для создания и использования специальных КА, предназначенных для очень длительного функционирования в окрестности точек либрации в целях выполнения там большого числа разнообразных задач, в том числе робототехнических, например, операций сборки КА, подобных себе. Такие КА можно назвать автономными космическими роботами (АКР). Управление АКР рационально осуществлять в так называемом супервизорном режиме [1, 2], когда человек выполняет роль супервизора. Для этой цели предполагается использование двух контуров управления — глобального, замкнутого через человека-оператора, находящегося в наземном центре управления, и локального, замкнутого через автономный информационно управляющий комплекс, расположенный на самом АКР.

Задачи обоих управляющих контуров делятся на два класса: первый — навигационные задачи, второй — задачи, реализующие рабочие функции, для осуществления которых АКР был создан, например задачи сборки [3]. Навигационные задачи глобального контура включают выполнение следующих функций:

- формирование программной траектории АКР на основе использования информации о текущем и целевом векторе его состояния;
- формирование вектора управления, который должен быть передан на АКР и реализован с помощью его двигателей;
- наблюдение за процессом реализации программной траектории АКР, осуществляемом человеком-оператором, и вмешательство в случае необходимости.

Задачи по реализации рабочих функций включают:

- формирование директив, составленных из операторов проблемно-ориентированного языка. В случае, если АКР является сборочным роботом, то это директива выполнения и сборочной операции;
- наблюдение за ходом выполнения директив и вмешательство в случае ошибки.

Навигационная задача локального контура управления включает

- удержание АКР на программной траектории.

С этой целью автономный информационно-управляющий комплекс АКР оперативно формирует управления для двигателей АКР, используя для этой цели текущую информацию о векторе состояния АКР и командную информацию о его целевом состоянии.

Задача по реализации АКР рабочих функций включает формирование управлений приводами рабочих органов АКР, например, его механическими руками-манипуляторами.

Данная статья посвящена рассмотрению навигационных задач глобального контура управления АКР, функционирующего в окрестности неустойчивой точки либрации системы Солнце—Земля.

1. Область применения

Задача исследования орбитального движения в окрестности коллинеарной точки либрации системы Солнце—Земля уже давно имеет практическое значение в связи с проектами (SOHO, WIND и т. д.), реализуемыми Национальным управлением по воздухоплаванию и исследованию космического пространства (NASA) и Европейским космическим агентством (ESA).

При космическом маневрировании, например, имеющем цель мониторинга или сближения и перехвата заданного космического объекта в околоземном пространстве, существенную роль могут сыграть коллинеарные точки либрации системы Солнце—Земля.

Движение АКР под действием сил тяготения двух притягивающих тел, таких как Земля и Солнце, мо-

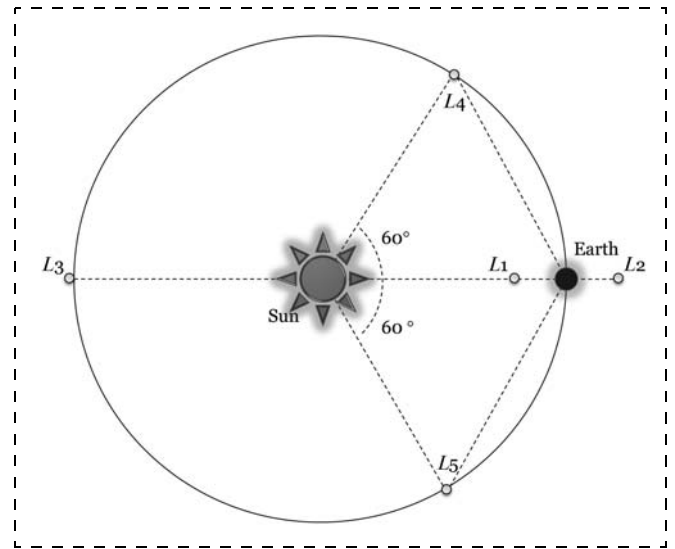


Рис. 1. Точки либрации

жет быть описано моделью круговой ограниченной задачи трех тел. В рамках этой модели исследуется движение тела малой массы P под действием гравитационных полей притяжения двух массивных тел E и S , обращающихся вокруг их общего центра инерции. Тела рассматриваются как материальные точки, считается также, что тело бесконечно малой массы P не влияет на движение притягивающих центров E и S .

Известно, что уравнения задачи трех тел имеют пять стационарных решений — эти решения в небесной механике называют *точками либрации* или *точками Лагранжа*. Три из них (L_1 , L_2 , L_3) — коллинеарные точки либрации — являются неустойчивыми положениями равновесия во вращающейся системе координат, L_4 и L_5 — устойчивы, и в силу расположения в пространстве конфигураций их называют *треугольными* [4] (рис. 1).

Точки либрации являются абстрактными понятиями круговой ограниченной задачи трех тел, однако их свойства определяют качественный характер движения АКР, которое в реальности происходит под действием многих возмущающих факторов.

2. Уравнения движения

Развитие космонавтики с недавнего времени позволяет реализовывать проекты, связанные с использованием окрестностей коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 . С учетом их свойств становится очевидной актуальность задачи стабилизации АКР в их окрестности [5—12], но неустойчивость коллинеарных точек либрации может являться и положительным фактором, способствующим космическому маневрированию с относительно небольшими энергетическими затратами [11, 12].

Уравнения движения АКР во вращающейся системе координат при использовании хилловского

приближения для солнечного потенциала [9] могут быть представлены в виде [5]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2; \\ \dot{x}_3 = y_3; \\ \dot{y}_1 = -\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} + 2x_1 + y_2; \\ \dot{y}_2 = -\frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_2 - y_1; \\ \dot{y}_3 = -\frac{x_3}{\|\mathbf{x}\|^3}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ — вектор координат АКР; $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$ — вектор импульсов; центр инерции Земли совпадает с началом системы координат, а ось Ox_1 направлена вдоль оси, соединяющей центры масс Земли и Солнца; $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. В принятой модели единицы времени и расстояния выбраны таким образом, что единица расстояния приблизительно равна 10^{-2} а. е. $\approx 1,5 \cdot 10^6$ км, а единица времени — 58,0916 суток (год, деленный на 2π). Точки либрации L_1, L_2 во вращающейся системе неподвижны и имеют координаты $\mathbf{x}^* = (1; 0; 0)$, $\mathbf{y}^* = (0; 1; 0)$ и $\mathbf{x}^{**} = (-1; 0; 0)$, $\mathbf{y}^{**} = (0; -1; 0)$, соответственно.

Система (1) — гамильтонова, где функция Гамильтона

$$H = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2} - \frac{3}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{3x_1^2}{2} + \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2. \quad (2)$$

Известно, что гамильтониан (2) на траекториях движения сохраняет свое значение, т. е. является интегралом для системы (1). Этот факт может быть использован для оценки точности приводимых примеров численного интегрирования.

Система линеаризованных уравнений (1) в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 имеет вид [5, 6]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2; \\ \dot{x}_3 = y_3; \\ \dot{y}_1 = 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1); \\ \dot{y}_2 = -4x_2 - y_1; \\ \dot{y}_3 = -4x_3. \end{cases} \quad (3)$$

Матрица линеаризованной системы (3) имеет набор собственных значений [5]

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1+2\sqrt{7}}, \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2\sqrt{7}-1}, \lambda_{5,6} = \pm 2i.$$

Замечание. Из положительности собственного значения $\lambda_1 = \sqrt{1+2\sqrt{7}}$ следует неустойчивость точки либрации L_1 .

Так как последние два уравнения, соответствующие пространственным переменным (x_3, y_3), отделяются от остальных, удобно рассмотреть задачу нахождения законов управления отдельно для системы плоского движения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2; \\ \dot{y}_1 = 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1); \\ \dot{y}_2 = -4x_2 - y_1 \end{cases} \quad (4)$$

и системы пространственных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = y_3; \\ \dot{y}_3 = -4x_3. \end{cases} \quad (5)$$

Замечание. Для неуправляемой системы (5) ($u_3 = 0$) в силу интеграла энергии имеет место устойчивость по Ляпунову стационарного решения.

Из проведенного анализа системы уравнений орбитального движения АКР можно сделать вывод, что неустойчивость коллинеарной точки либрации, с одной стороны, требует стабилизирующего управления, а с другой стороны, может быть использована как положительный фактор в задачах маневрирования [11, 12].

Выше было показано, что стационарное решение уравнений неуправляемого движения, соответствующее коллинеарной точке либрации, является неустойчивым положением равновесия. Поэтому весьма актуальной будет задача стабилизации АКР в окрестности точки либрации.

Пусть $\mathbf{b}_i = (b_i^1; b_i^2; b_i^3; b_i^4)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i линеаризованной управляемой системы (4), а $\mathbf{z} = (x_1 - 1; x_2; y_1; y_2 - 1)$.

Определим линейные формы $d_i \triangleq \mathbf{b}_i \mathbf{z}$, $i = 1, \dots, 4$, тогда в силу неуправляемой системы (4) справедливо равенство

$$\dot{d}_i = \lambda_i d_i. \quad (6)$$

Если в (6) положить $i = 1$, то

$$\dot{d}_1 = \lambda_1 d_1. \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение (7) имеет решение

$$d_1 = c_1 \exp(\lambda_1 t), \quad (8)$$

где c_1 — некоторая постоянная интегрирования.

Легко видеть, что решение $|d_1| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, когда $c_1 \neq 0$.

Отсюда следует, что определенная функция d_1 экспоненциально возрастает (когда $c_1 \neq 0$), и ее рост определяется равенством (8).

Аналогично для $i = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \dot{d}_2 &= \lambda_2 d_2, & d_2 &= c_2 \exp(\lambda_2 t), \\ \dot{d}_3 &= \lambda_3 d_3, & d_3 &= c_3 \exp(\lambda_3 t), \\ \dot{d}_4 &= \lambda_4 d_4, & d_4 &= c_4 \exp(\lambda_4 t), \end{aligned}$$

где c_2, c_3, c_4 — некоторые постоянные интегрирования.

Функция d_2 экспоненциально стремится к нулю, когда $c_2 \neq 0$. Функции d_3 и d_4 описывают колебательный процесс.

Линейная форма $d_1 = \mathbf{b}_1 \mathbf{z}$ играет важную роль в задаче стабилизации и называется *функцией опасности* [10–12].

Тогда, если нам удастся некоторым образом обеспечить выполнение условия ограниченности функции d_1 в окрестности коллинеарной точки либрации, т. е. выполнение неравенства

$$|d_1| \leq \delta, \quad (9)$$

где δ — достаточно малая величина, то АКР будет находиться в некоторой окрестности коллинеарной точки либрации достаточно длительное время (быстрого ухода по экспоненте, по крайней мере, в линейном приближении, не будет).

3. Траектории с возвращением

Смоделируем применение управляющего воздействия в виде малого изменения скорости АКР, находящегося в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 . Результаты численного моделирования движения АКР в плоскости эклиптики (если в начальный момент положить $x_3 = 0, y_3 = 0$) приведены на рис. 2 и рис. 3.

На рис. 2 видно, что с помощью весьма малого воздействия АКР совершает протяженный маневр в околоземном пространстве, время движения по траекториям — порядка нескольких месяцев. На рис. 3 АКР совершает маневр с возвращением в ок-

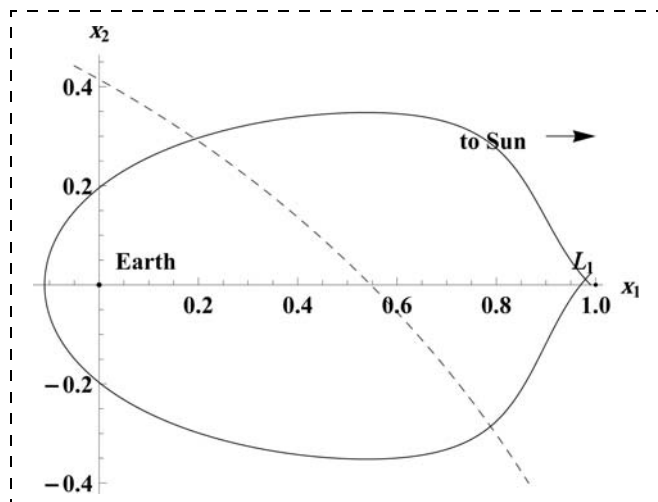


Рис. 2. Траектория с возвращением в окрестность коллинеарной точки либрации L_1 на промежутке времени около 5 месяцев

рестность точки либрации L_1 , которому соответствует больший промежуток времени. Начальный момент времени и способ применения управляющего воздействия подбираются так, чтобы обеспечить сближение с изучаемым небесным телом, траектория которого на рисунках обозначена штриховой линией.

4. Орбитальное движение в окрестности коллинеарной точки либрации

Уравнения управляемого движения космического робота во вращающейся системе координат могут быть представлены в виде [5]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2; \\ \dot{x}_3 = y_3; \\ \dot{y}_1 = -\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} + 2x_1 + y_2 + u_1; \\ \dot{y}_2 = -\frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_2 - y_1 + u_2; \\ \dot{y}_3 = -\frac{x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} + u_3, \end{cases} \quad (10)$$

где $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ — вектор ускорения.

При этом единица ускорения будет равна $5,93844 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 6,05552 \cdot 10^{-6} g$, где g — стандартное ускорение свободного падения для Земли. Единица скорости в принятой модели равна $298,057 \text{ м/с} \approx 9,94211 \cdot 10^{-7} c$, где c — скорость света в вакууме.

Для обеспечения сколь угодно длительного пребывания космического робота в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 в рамках системы (10), как было показано в работах [5–8, 10], необходимо, чтобы для его фазовых координат выполнялось соотношение (9).

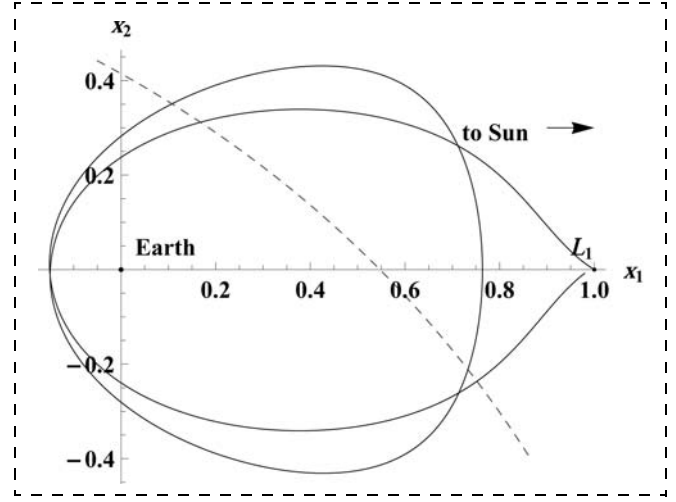


Рис. 3. Траектория с возвращением в окрестность коллинеарной точки либрации L_1 на промежутке времени около 8 месяцев

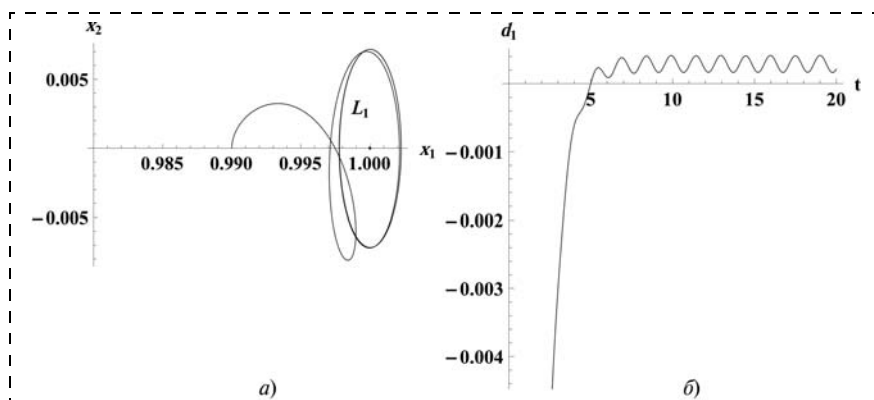


Рис. 4. Траектория орбитального движения в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 на интервале времени около 3 лет (а), график функции d_1 (б)

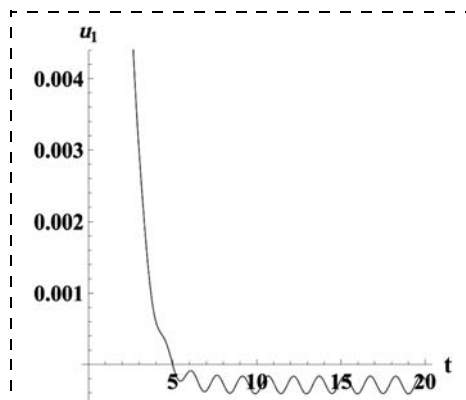


Рис. 5. График компоненты управления u_1 на траектории, приведенной на рис. 4 ($u_2 = 0$)

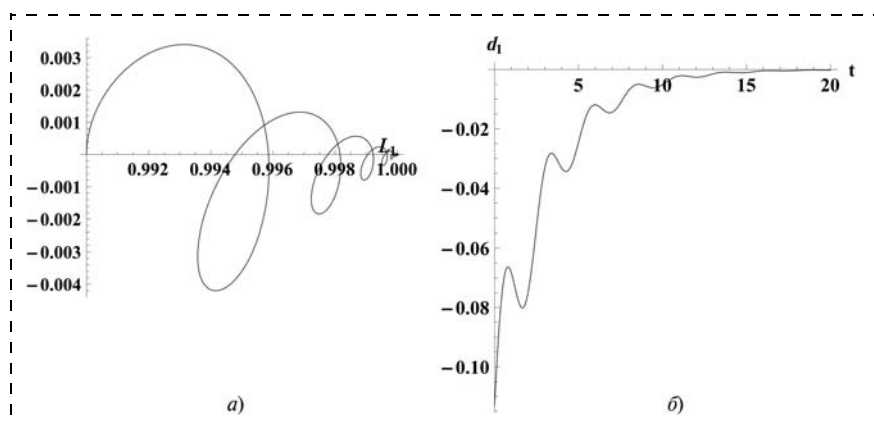


Рис. 6. Траектория орбитального движения в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 на интервале времени около 3 лет (а), график функции d_1 (б)

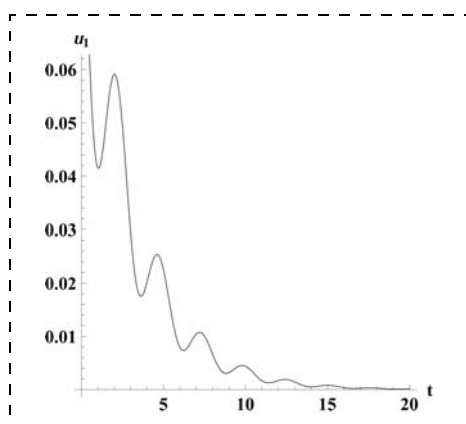


Рис. 7. График компоненты управления u_1 на траектории, приведенной на рис. 6 ($u_2 = 0$)

5. Численные примеры управляемого движения

Пусть в начальный момент времени АКР имеет в фазовом пространстве координаты: $x = (0,99; 0; 0)$, $y = (0; 1; 0)$. Орбитальное движение АКР в зависимости от значения введенной функции d_1 представлено на рис. 4–7.

Заключение

Пусть в начальный момент времени АКР находится в окрестности фазового пространства коллинеарной точки либрации, а затем совершает маневр, обеспечивающий наблюдение за околоземным пространством. Здесь можно использовать малое управляющее воздействие, которое становится эффективным в силу неустойчивости коллинеарной точки либрации. Именно в этом случае неустойчивость является положительным фактором, позволяющим при малых энергетических затратах существенно изменить траекторию движения.

Справедливость данного утверждения видна из примеров, приведенных в п. 3. Очевидно, что такого типа АКР может быть многократно использован для исследования околоземного космического про-

странства. Следует отметить, что при совершении такого маневра и возникает задача построения "траектории возвращения" [12], когда АКР в конечной точке траектории попадает в окрестность устойчивого многообразия вблизи коллинеарной точки либрации.

На основании вышесказанного можно говорить об осуществлении необходимого управления при использовании таких экзотических систем, как солнечный парус [5–8, 10–12]. Его применение оказывается возможным в силу достаточно малых значений управляющего воздействия.

Конечно, более точная оценка возможности осуществления необходимого маневра АКР может быть получена при учете, в том числе, и других возмущений (влияния эксцентриситета орбиты Земли, Луны, других планет и т. д.). В то же время это влечет рассмотрение АКР как твердого тела (не материальной точки), перемещение которого описывается сложными математическими уравнениями, учитывающими как поступательное, так и вращательное движение. Решение таких задач планируется при проведении дальнейших исследований.

Список литературы

1. Кулаков Ф. М. Супервизорное управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. Алферов Г. В., Кулаков Ф. М., Нечаев А. И., Чернакова С. Э. Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике: учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 168 с.
3. Kulakov F. M. Active Force-Torque Robot Control without Using Wrist Force—Torque Sensors // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2012. V. 51, N. 1. P. 147—168.
4. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
5. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193—199.
6. Шиманчук Д. В., Шмыров В. А. Проблемы стабилизации орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации // Молодой ученый. 2014. № 3. С. 20—24.
7. Шмыров А. С., Шмыров В. А. Синтез оптимального управления орбитальным движением в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия, 2012. Вып. 4. С. 139—146.
8. Shmyrov A., Shmyrov V. Controllable orbital motion in a neighborhood of collinear libration point // Applied Mathematical Sciences. 2014. V. 8, N. 10. P. 487—492.
9. Gomes G., Llibre J., Martinez R., Simo C. Dynamics and mission design near libration points. V. 1. River Edge, 2001. 443 p.
10. Шиманчук Д. В. Моделирование орбитального управляемого движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2010. Вып. 3. С. 86—92.
11. Kulakov F., Shmyrov A., Shymanchuk D. Supervisory Remote Control of Space Robot in an Unstable Libration Point // Proc. of the 2013 IEEE 7th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. 12—14 September 2013, Berlin, Germany. Berlin, 2013. V. 2. P. 925—928.
12. Шиманчук Д. В., Шмыров А. С. Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце—Земля // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013. Вып. 2. С. 76—85.

F. M. Kulakov, Professor, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of RAS,
A. S. Shmyrov, Professor, D. V. Shymanchuk, Associate Professor, shimanchuk@mail.ru,
Saint-Petersburg State University

Robotic Spacecraft Control Using an Unstable Libration Point

This article considers the navigation control problems of robotic spacecraft that is functioning both in the neighborhood of an unstable libration point of the Earth-Sun system and in the near-Earth space. The robotic spacecraft motion is considered under Hill's circular restricted three-body problem approximation. The concept of special function of phase variables referred to as "hazard function" in this article is analyzed on the basis of a linearized system of equations of motion. Numerical analysis of controlled trajectories is carried out subject to the value of the "hazard function". Under the mathematical model being considered, it was shown that it is possible to maneuver in the near-Earth space with a return to the neighborhood of the collinear libration point and stabilize the orbital motion. It is thus proposed to use the property of the instability of the collinear libration point as a positive factor allowing to change the trajectory of motion significantly at the influence of a small control influence. Investigation results obtained in this work may be useful in developing projects related to solving the problems of asteroid and comet impact hazard. The numerical simulation results obtained are illustrated graphically.

Keyword: robotic spacecraft, circular restricted three body problem, collinear libration point, near-Earth space, monitoring, orbital motion

References

1. Kulakov F. M. Supervizornoye upravleniye manipulyatsionnymi robotami. M.: Nauka, 1980. 448 s.
2. Alferov G. V., Kulakov F. M., Nechayev A. I., Chernakova S. E. Informatsionnyye sistemy virtual'noy real'nosti v mekhatronike i robototekhnike: Ucheb. Posobiye. SPb.: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2009. 168 p.
3. Kulakov F. M. Active Force-Torque Robot Control without Using Wrist Force—Torque Sensors. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2012. V. 51, N. 1. P. 147—168.
4. Markeev A. P. Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike. M.: Nauka, 1978. 312 p.
5. Shmyrov V. A. Stabilizatsiya upravlyayemogo orbital'nogo dvizheniya kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearney tochki libratsii L_1 . *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Ser. 10: Prikladnaya matematika, informatika, protsessy upravleniya*. 2005. Iss. 2. P. 193—199.
6. Shymanchuk D. V., Shmyrov V. A. Problemy stabilizatsii orbital'nogo dvizheniya kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearney tochki libratsii. *Molodoy uchenyy*. 2014. N. 3. P. 20—24.
7. Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Sintez optimal'nogo upravleniya orbital'nym dvizheniyem v okrestnosti kollinearney tochki libratsii. *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Ser. 1: Matematika, mekhanika, astronomiya*. 2012. Iss. 4. P. 139—146.
8. Shmyrov A., Shmyrov V. Controllable orbital motion in a neighborhood of collinear libration point. *Applied Mathematical Sciences*. 2014. V. 8, N. 10. P. 487—492.
9. Gomes G., Llibre J., Martinez R., Simo C. Dynamics and mission design near libration points. V. 1. River Edge, 2001. 443 p.
10. Shymanchuk D. V. Modelirovaniye orbital'nogo upravlyayemogo dvizheniya kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearney tochki libratsii L_1 . *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Ser. 10: Prikladnaya matematika, informatika, protsessy upravleniya*. 2010. Iss. 3. P. 86—92.
11. Kulakov F., Shmyrov A., Shymanchuk D. Supervisory Remote Control of Space Robot in an Unstable Libration Point. *Proc. of the 2013 IEEE 7th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications*. 12—14 September 2013, Berlin, Germany. Berlin, 2013. V. 2. P. 925—928.
12. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S. Postroyeniye trayektorii vozvrashcheniya v okrestnost' kollinearney tochki libratsii sitsemy Solntse—Zemlya. *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Ser. 10: Prikladnaya matematika, informatika, protsessy upravleniya*. 2013. Iss. 2. P. 76—85.

В. Ф. Филаретов, д-р техн. наук, проф., зав. лаб., filaret@pma.ru,
А. Ю. Коноплин, ассистент, kayur-prim@mail.ru,
 Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН,
 Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

Система автоматической стабилизации подводного аппарата в режиме зависания при работающем многозвенном манипуляторе¹. Часть 2²

Во второй части статьи рассматривается решение задачи синтеза замкнутой автоматической системы стабилизации положения и ориентации подводного аппарата в режиме его зависания в водной среде над объектом работ с учетом уже определенных силовых и моментных воздействий на этот аппарат со стороны работающего многозвенного подводного манипулятора.

Ключевые слова: подводный аппарат, многозвенный манипулятор, навигационная система, пространственная траектория, система стабилизации

4. Особенности формирования сил тяги движителей подводного аппарата с учетом его кинематической схемы

Схема расположения движителей подводного аппарата (ПА), обеспечивающая его движение по шести степеням подвижности, показана на рис. 1. Предполагается, что первый поворотный шарнир подводного манипулятора (ПМ) установлен в точке O , которая является началом правой системы координат (СК) $X_1Y_1Z_1$. В этой СК с помощью алгоритма решения обратной задачи динамики (ОЗД), предложенного в первой части статьи, вычисляются векторы силы F_1 и момента M_1 , действующих на ПА со стороны ПМ.

На рис. 1 введены следующие обозначения: P_i ($i = \overline{1,6}$) — тяги движителей ПА, направления которых совпадают с продольными осями соответствующих движителей; l, h, k, d — геометрические параметры ПА и компоновки движителей. Пространственные перемещения ПА происходят в абсолютной СК XYZ .

Расчет тяг, которые должен создавать каждый движитель ПА для компенсации силовых и моментных воздействий со стороны работающего ПМ, удобно выполнять в связанной с ПА правой СК $X_cY_cZ_c$, центр которой располагается в точке C , совпадающей с центром тяжести (точкой симметрии) аппарата, а оси этой СК, параллельные осям СК $X_cY_cZ_c$, являются осями его симметрии. При этом оси X_c и X_1 совпадают.

Из рис. 1 видно, что для прямолинейного движения ПА необходимо вращение каждого движителя соответствующей пары в одну сторону, а для вращательного движения ПА относительно осей СК $X_cY_cZ_c$ вращение движителей соответствующей

пары должно происходить в разные стороны. Указанным на рис. 1 расположением движителей можно добиться любой ориентации в пространстве главного вектора и главного момента результирующей силы тяги ПА.

Учитывая геометрические параметры ПА (рис. 1), несложно получить требуемое значение тяг для каждого (из шести) движителя ПА, необходимое для компенсации силовых и моментных воздействий со стороны работающего ПМ:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{F_{x1}}{2} - \frac{M_{z1} + dF_{y1}}{2l}; \\ P_2 &= -\frac{F_{x1}}{2} + \frac{M_{z1} + dF_{y1}}{2l}; \\ P_3 &= -\frac{F_{z1}}{2} + \frac{-M_{y1} + dF_{z1}}{2k}; \\ P_4 &= -\frac{F_{z1}}{2} + \frac{M_{y1} - dF_{z1}}{2k}; \\ P_5 &= -\frac{F_{y1}}{2} + \frac{M_{x1}}{2h}; \\ P_6 &= -\frac{F_{y1}}{2} - \frac{M_{x1}}{2h}, \end{aligned} \quad (1)$$

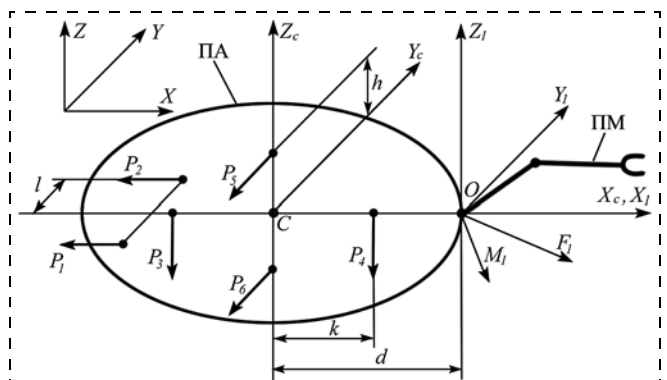


Рис. 1. Схема расположения движителей и манипулятор на ПА

¹ Выполнение этой работы поддержано грантами РФФИ 13-07-00741 а, 13-08-01344 а, а также программами ДВФУ (соглашение 13-06-0112-м и проект 12-08-13004-04).

² Часть 1 опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление" №6, 2014.

где F_{x1} , F_{y1} и F_{z1} — проекции силы F_1 , а M_{x1} , M_{y1} и M_{z1} — проекции момента M_1 на соответствующие оси СК $X_1Y_1Z_1$. Выражения (1) определяют все тяги, которые необходимо создавать соответствующими движителями ПА.

5. Разработка замкнутой автоматической системы стабилизации линейных и угловых перемещений ПА

Реальное положение и ориентация ПА в абсолютной СК XYZ задается вектором $\eta = [x, y, z, \gamma, \alpha, \beta]^T \in \mathbb{R}^6$, где x, y, z — координаты положения точки С ПА; γ, α, β — его углы крена, дифферента и рысканья; $x_0, y_0, z_0, \gamma_0, \alpha_0, \beta_0$ — значения элементов вектора η , которые необходимо стабилизировать.

Для принятой схемы установки движителей ПА (рис. 1) управление линейной x и угловой β координатами вектора η обеспечивается тягами P_1 и P_2 , управление координатами z и α — тягами P_3 и P_4 , а координатами y и γ — тягами P_5 и P_6 . В связи с этим замкнутая автоматическая система стабилизации ПА должна состоять из трех аналогичных одновременно работающих подсистем, каждая из которых управляет одной из трех пар соответствующих движителей. В СК $X_cY_cZ_c$ со стороны движителей на ПА действуют результирующая сила $T_c = [T_{xc}, T_{yc}, T_{zc}]^T \in \mathbb{R}^3$, где $T_{xc} = P_1 + P_2$, $T_{yc} = P_5 + P_6$, $T_{zc} = P_3 + P_4$, и момент $M_c = [M_{xc}, M_{yc}, M_{zc}]^T \in \mathbb{R}^3$, где $M_{xc} = (P_6 - P_5)h$; $M_{yc} = (P_3 - P_4)k$; $M_{zc} = (P_1 - P_2)l$, с помощью которых и будет осуществляться стабилизация положения и ориентации ПА в заданной точке пространства.

На рис. 2 показана схема подсистемы, стабилизирующей ПА по линейной x и угловой β координатам вектора η с помощью пары движителей Д1 и Д2, создающих тяги P_1 и P_2 , соответственно. На этом рисунке R_x и R_β — регуляторы в цепях стабилизации линейного и углового перемещений ПА, соответственно; P_{0x} и $P_{0\beta}$ — желаемые значения тяг, необходимых для управления линейной x и угловой β координатами перемещения ПА, соответственно.

Эта подсистема работает следующим образом. Поскольку для прямолинейного движения ПА по

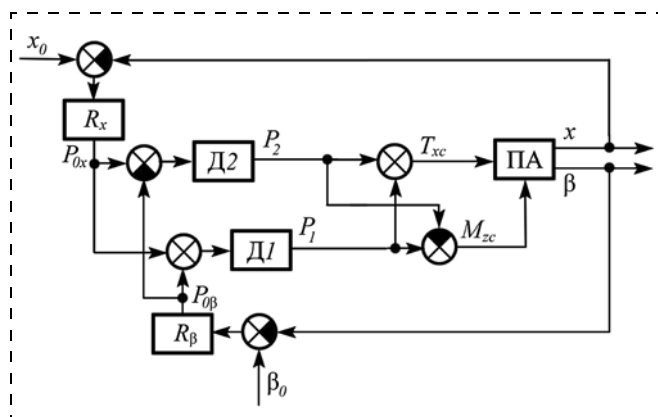


Рис. 2. Схема типовой подсистемы автоматической системы стабилизации ПА по двум координатам

оси X СК XYZ необходимо вращение движителей Д1 и Д2 в одну сторону, то на эти движители подается сигнал P_{0x} . Для вращательного движения ПА относительно оси Y абсолютной СК вращение этих движителей должно происходить в разные стороны, поэтому на движители Д1 и Д2 необходимо подавать сигналы $P_{0\beta}$ и $-P_{0\beta}$, соответственно. Так как линейные и угловые перемещения ПА осуществляются одновременно с помощью одной пары движителей, то на движители Д1 и Д2 подаются сигналы $P_{0x} + P_{0\beta}$ и $P_{0x} - P_{0\beta}$, соответственно. Эти сигналы формируют тяги P_1 и P_2 движителей (рис. 2), которые оказывают на ПА силовое T_{xc} и моментное M_{zc} воздействия, благодаря которым и осуществляется стабилизация его положения и ориентации в пространстве. Схемы построения остальных двух подсистем аналогичны.

6. Описание математических моделей ПА и установленного на нем ПМ

Для исследования особенностей функционирования и эффективности синтезированной двухконтурной системы стабилизации ПА с работающим ПМ использована математическая модель, представленная системой двенадцати нелинейных дифференциальных уравнений [2]

$$M\dot{v} + (C(v) + D(v))v + g(\eta) = \tau_c;$$

$$\dot{\eta} = J(\eta)v,$$

где $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ — матрица инерции (включающая присоединенные массы и моменты инерции жидкости); $\tau_c = [T_{xc}, T_{yc}, T_{zc}, M_{xc}, M_{yc}, M_{zc}]^T \in \mathbb{R}^6$ — вектор проекций тяг и моментов, создаваемых движителями ПА, на оси связанной СК $X_cY_cZ_c$; $C(v) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ — матрица кориолисовых и центробежных сил; $D(v) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ — матрица гидродинамических сил и моментов; $g(\eta) \in \mathbb{R}^6$ — вектор гидростатических сил и моментов; $v = [v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T \in \mathbb{R}^6$ — вектор проекций линейной и угловой скоростей движения ПА на оси связанной СК; $J(\eta)$ — матрица перехода из связанной в абсолютную СК.

Элементы указанной модели ПА, подробно описанные в работе [3], имеют следующие параметры: $m_a = 300$ кг — масса ПА; $\lambda_{11} = 80$ кг, $\lambda_{22} = 140$ кг, $\lambda_{33} = 140$ кг, $\lambda_{44} = 5$ кг · м², $\lambda_{55} = 30$ кг · м², $\lambda_{66} = 30$ кг · м² ($\lambda_{ij} = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, 6}$) — соответствующие присоединенные массы и присоединенные моменты инерции жидкости; $Y_c = 0,02$ м — метацентрическая высота ПА; $J_{xx} = 9$ кг · м², $J_{yy} = 30$ кг · м², $J_{zz} = 30$ кг · м² — моменты инерции ПА относительно его главных осей инерции; $d_{1x} = 30$ кг · с⁻¹, $d_{2x} = 10$ кг · м⁻¹, $d_{1y} = 60$ кг · с⁻¹, $d_{2y} = 30$ кг · м⁻¹, $d_{1z} = 60$ кг · с⁻¹, $d_{2z} = 30$ кг · м⁻¹, $d'_{1x} = 20$ Н · м · с,

$d'_{2x} = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $d'_{1y} = 40 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $d'_{2y} = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$,
 $d'_{1z} = 40 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $d'_{2z} = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ — коэффициенты вязкого трения, соответствующие линейной и квадратичной зависимостям гидродинамических сил (моментов) от скорости движения ПА по его отдельным степеням свободы; $d = 0,7 \text{ м}$; $l = h = k = 0,5 \text{ м}$. При использовании специальных средств адаптивной коррекции [4] все движители ПА представлены в виде апериодических звеньев первого порядка с постоянной времени $T_d = 0,1 \text{ с}$ и коэффициентом усиления $K_d = 2$, а в моделях описаны соответствующими дифференциальными уравнениями первого порядка.

Все регуляторы, включая R_x и R_β (рис. 2), для следящих САУ, обеспечивающих стабилизацию всех линейных и угловых перемещений ПА, синтезированы с помощью программного пакета Matlab Simulink Response Optimization. Все эти регуляторы имеют структуру ПИД регуляторов и описываются передаточными функциями вида $R_i(s) = k_{pi} + \frac{k_{i1}}{s} + \frac{k_{d1}s}{0,01s+1}$, ($i = (x, y, z, \gamma, \alpha, \beta)$). Поскольку используемый пакет не позволяет одновременно синтезировать два регулятора подсистемы (рис. 2), то для каждой из трех подсистем ПА вначале синтезировался регулятор указанного вида в следящей системе стабилизации угловой координаты, а затем с учетом этого синтезированного регулятора выполнялся синтез регулятора в следящей системе стабилизации линейной координаты. Затем снова синтезировался регулятор в цепи стабилизации угловой координаты с учетом синтезированного регулятора в цепи стабилизации соответствующей линейной координаты, а потом — и регулятор в цепи стабилизации линейной координаты при новых значениях параметров регулятора, предназначенного для стабилизации соответствующей угловой координаты. Указанная процедура содержала две итерации, после которых параметры всех регуляторов в рассматриваемых цепях всех подсистем ПА стабилизировались. В результате для этих подсистем были получены следующие параметры всех регуляторов: $k_{px} = 41$, $k_{ix} = 25$, $k_{dx} = 568$; $k_{py} = 4$, $k_{iy} = 1$, $k_{dy} = 686$; $k_{pz} = 35$, $k_{iz} = 2$, $k_{dz} = 539$; $k_{p\gamma} = 153$, $k_{i\gamma} = 24$, $k_{d\gamma} = 237$; $k_{p\alpha} = 78$, $k_{i\alpha} = 13$, $k_{d\alpha} = 380$; $k_{p\beta} = 35$, $k_{i\beta} = 1$, $k_{d\beta} = 878$, обеспечивающие устойчивость и заданное качество работы рассматриваемых следящих систем даже с учетом взаимовлияний во всех каналах стабилизации положения и ориентации ПА.

В процессе моделирования учитывались только три первые переносные степени подвижности ПМ типа PUMA (координаты q_i), кинематическая схема которого представлена на рис. 3, а параметры имеют следующие значения: $l_1 = l_2 = 0,5 \text{ м}$ — длины звеньев ПМ; $m_1 = m_2 = 3,9 \text{ кг}$ — массы звеньев, причем центры водоизмещения звеньев ПМ совпадают с их

центрами масс, звенья имеют форму цилиндра с радиусом основания $r_1 = r_2 = 0,05 \text{ м}$ и нейтральную плавучесть. Тензоры инерции этих звеньев относительно их центров масс имеют диагональный вид, причем $\tau_{111} = \tau_{211} = 5 \cdot 10^{-3}$, $\tau_{122} = \tau_{133} = \tau_{222} = \tau_{233} = 8,4 \cdot 10^{-2}$ — элементы тензоров инерции первого τ_1 и второго τ_2 звеньев, соответственно.

Кроме того, $P_1 = P_2 = 1,075 \text{ кг}$ — массы жидкости, присоединенные к соответствующим звеньям ПМ; $|r_1^*| = |r_2^*| = 0,25 \text{ м}$ — модули векторов, задающих положения центров масс звеньев относительно их шарниров; $\eta = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ — вязкость воды; $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды; $k_1^* = k_2^* = 0,89$ — коэффициенты вязкого трения, возникающие при движении звеньев ПМ перпендикулярно набегающему потоку жидкости; $k_{L1} = k_{L2} = 0,012$ — коэффициенты вязкого трения, возникающие при движении этих звеньев параллельно набегающему потоку жидкости; $T_{111} = T_{211} = 1,4 \cdot 10^{-3}$, $T_{122} = T_{133} = T_{222} = T_{233} = 2,6 \cdot 10^{-2}$ — диагональные элементы тензоров инерции масс жидкости, присоединенной к соот-

ветствующим звеньям ПМ; $A_2^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin q_1 & -\cos q_1 & 0 \end{bmatrix}$,

$A_3^2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & \sin q_2 & 0 \\ -\sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — матрицы направляющих

косинусов для рассматриваемой кинематической схемы ПМ; $J = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ — моменты инерции роторов электродвигателей и вращающихся частей редукторов; $i_p = 100$ — передаточные отношения редукторов в каждой степени подвижности манипулятора.

Будем полагать, что в системы управления электроприводами каждой степени подвижности ПМ

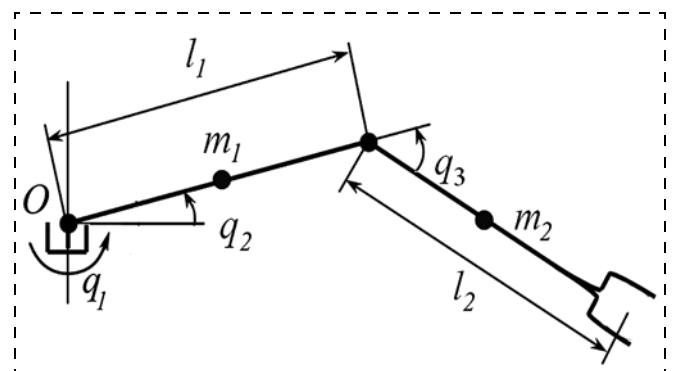


Рис. 3. Кинематическая схема ПМ ($\beta(t)$ = scale рад; $y(t)$ = scale м; $x(t)$ = scale м)

уже включены описанные в работе [5] адаптивные корректирующие устройства, обеспечивающие требуемую динамическую точность и инвариантность других показателей качества их работы к эффектам взаимовлияния между всеми степенями подвижности этого ПМ, перемещающегося в вязкой среде. В результате передаточные функции скорректированных электроприводов каждой степени подвижности ПМ при любых законах изменения обобщенных координат в процессе его движения будут иметь вид

$$W_n(s) = \frac{q_i(s)}{q_i^*(s)} = \frac{k_n}{(T_1 s + 1)s},$$

где $k_n = \frac{1}{i_p k_\omega}$, $T_1 = \frac{R_a J}{k_m k_\omega}$, $R_a = 0,2$ Ом — активное сопротивление якорной цепи; $k_\omega = 0,02$ В·с — коэффициент противоЭДС; $k_m = 0,02$ Н·м/А — моментный коэффициент.

7. Исследование синтезированной комбинированной системы стабилизации ПА

Для исследования работы синтезированной системы вначале было выполнено математическое моделирование режима стабилизации ПА в заданной точке пространства при движении ПМ в горизонтальной плоскости. При этом полагалось, что $q_1(t)$

изменяется по закону $q_1(t) = 0,5\sin(2t)$, а $q_2(t) = q_3(t) = 0$, причем здесь и далее будем полагать, что в начальный момент времени оси абсолютной XYZ и связанной с ПА СК $X_c Y_c Z_c$ совпадают, а вектор $P^*(t) = [x^*, y^*, z^*] \in R^3$ задает текущее желаемое положение характерной точки схвата ПМ в абсолютной СК XYZ.

Процессы изменения координат $\beta(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ ПА при указанном движении ПМ показаны на рис. 4.

На рис. 4, а показаны движения ПА, не оснащенного никакой системой стабилизации, на рис. 4, б — его движения при использовании только замкнутой автоматической системы стабилизации линейных и угловых перемещений ПА, на рис. 4, в — движения с использованием только разомкнутой системы стабилизации, обеспечивающей отработку движителями рассчитанных силовых и моментных воздействий на ПА со стороны работающего ПМ, а на рис. 4, г — движения ПА с использованием полной комбинированной системы стабилизации. Во всех перечисленных случаях в начальный момент времени $z(t_0) = \alpha(t_0) = \gamma(t_0) = 0$, а при движении ПМ скорость перемещения его схвата достигала 1 м/с.

Из представленных рисунков видно, что использование только замкнутой системы стабилизации позволяет в 8 раз уменьшить линейные и в 1,2 раза — угловые смещения ПА. Использование только разомкнутой системы стабилизации в 20 раз снижает линейные и в 3,2 раза — угловые смещения ПА.

Однако точности указанных систем, работающих по отдельности, все равно недостаточно для выполнения ответственных манипуляционных операций в режиме зависания ПА над объектом работ. Использование же разработанной комбинированной системы стабилизации (рис. 4, г) приводит к снижению в 37 раз линейных и в 9 раз угловых смещений ПА. Эта точность стабилизации уже позволяет качественно выполнять требуемые манипуляционные операции.

Процессы изменения всех линейных и угловых координат ПА при линейном движении рабочего органа ПМ, описываемом уравнениями $\dot{x}^* = 0,5/\sqrt{3}$, $y^* = x^* - 1$, $z^* = x^*$, в пространстве с постоянной скоростью 0,5 м/с показаны на рис. 5. Начальная точка траектории движения рабочего органа ПМ имела координаты: $x_0^* = 0,7$; $y_0^* = -1$; $z_0^* = 0$. На этих же рисунках помимо сме-

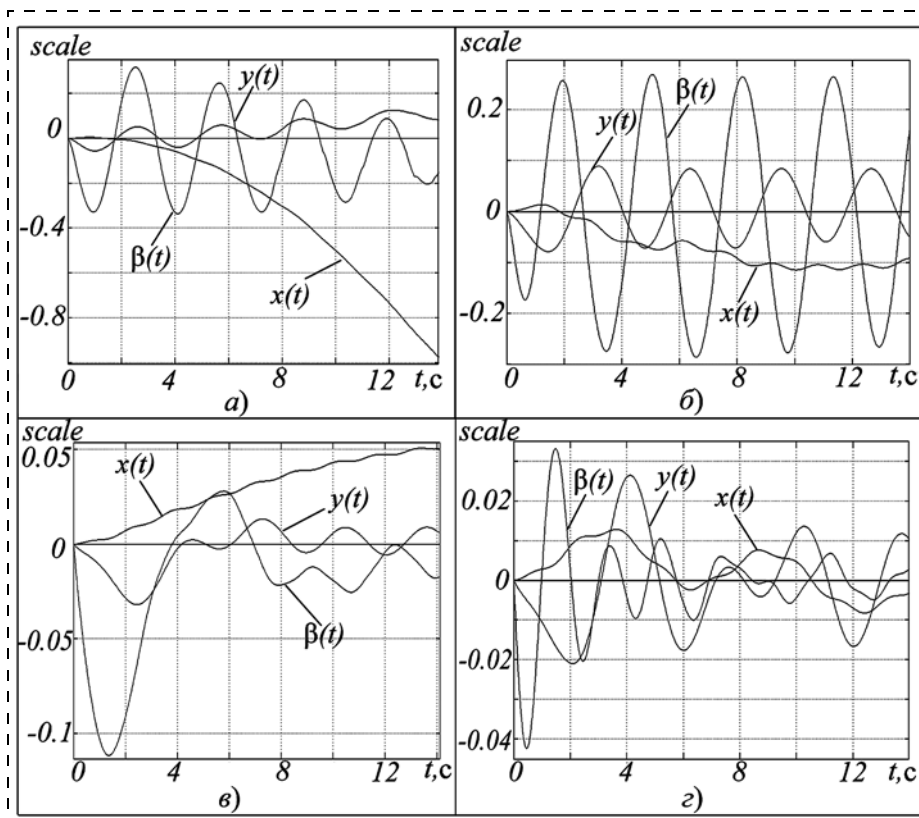


Рис. 4. Результаты моделирования работы синтезированной системы при движении ПМ в горизонтальной плоскости

щений ПА показана также евклидова норма $\|\varepsilon(t)\|$ вектора динамической ошибки отслеживания рабочим органом ПМ программной точки, движущейся в абсолютной СК XYZ с заданной скоростью по указанной выше пространственной траектории.

На рис. 5, а и 5, б показаны $\|\varepsilon(t)\|$ и отклонения ПА, не оснащенного какой-либо системой стабилизации, на рис. 5, в — те же отклонения, но при использовании только замкнутой автоматической системы стабилизации ПА, на рис. 5, г — движения с использованием только его разомкнутой системы стабилизации с точно рассчитываемыми параметрами, а на рис. 5, д и 5, е — движения ПА с использованием разработанной комбинированной системы стабилизации.

Из рис. 5, а и 5, б видно, что вообще без систем стабилизации в процессе работы ПМ всего за 0,6 с

угловые смещения ПА достигают 2 рад, а значение $\|\varepsilon(t)\|$ достигает 1 м, т. е. ПА опрокидывается, и выполнение манипуляционных операций становится невозможным. Использование только замкнутой автоматической системы стабилизации (рис. 5, в) не дает опрокинуться ПА, но точность его стабилизации ввиду реальных динамических запаздываний в системе все равно остается неприемлемой для работы ПМ. Стабилизация ПА только с помощью отработки его движителями непрерывно и точно рассчитываемых силовых и моментных воздействий со стороны работающего ПМ (рис. 5, г) позволяет стабилизировать линейные и угловые смещения ПА в пределах 0,05 м и 0,33 рад, соответственно, но при этом значение $\|\varepsilon(t)\|$ все равно достигает 0,37 м. Использование же синтезированной комбинированной системы стабилизации (рис. 5, д и 5, е) в сравнении с разомкнутой системой стабилизации (рис. 5, г) приводит к снижению в 1,6 раза линейных и в 3 раза — угловых смещений ПА, а также в 2,4 раза снижает значение $\|\varepsilon(t)\|$. При этом точности стабилизации ПА становится уже достаточно для выполнения манипуляционных операций, поскольку небольшое значение ошибки $\|\varepsilon(t)\|$ можно компенсировать с помощью системы автоматической коррекции программы траектории движения рабочего органа ПМ [7], кото-

рая за счет дополнительных движений ПМ позволяет точно компенсировать появляющиеся ошибки. При этом необходимая коррекция траектории движения рабочего органа происходит на основе информации о текущей конфигурации ПМ, а также о линейных и угловых смещениях ПА под воздействием внешних возмущений.

Следует отметить, что использование комбинированной системы стабилизации ПА крайне желательно еще и потому, что невозможно обеспечить точное вычисление силовых и моментных воздействий на этот ПА со стороны движущегося ПМ в силу приближенности определения параметров его взаимодействий с окружающей вязкой средой и механических параметров самой конструкции ПМ. Результаты моделирования показали, что при стабилизации ПА с помощью комбинированной сис-

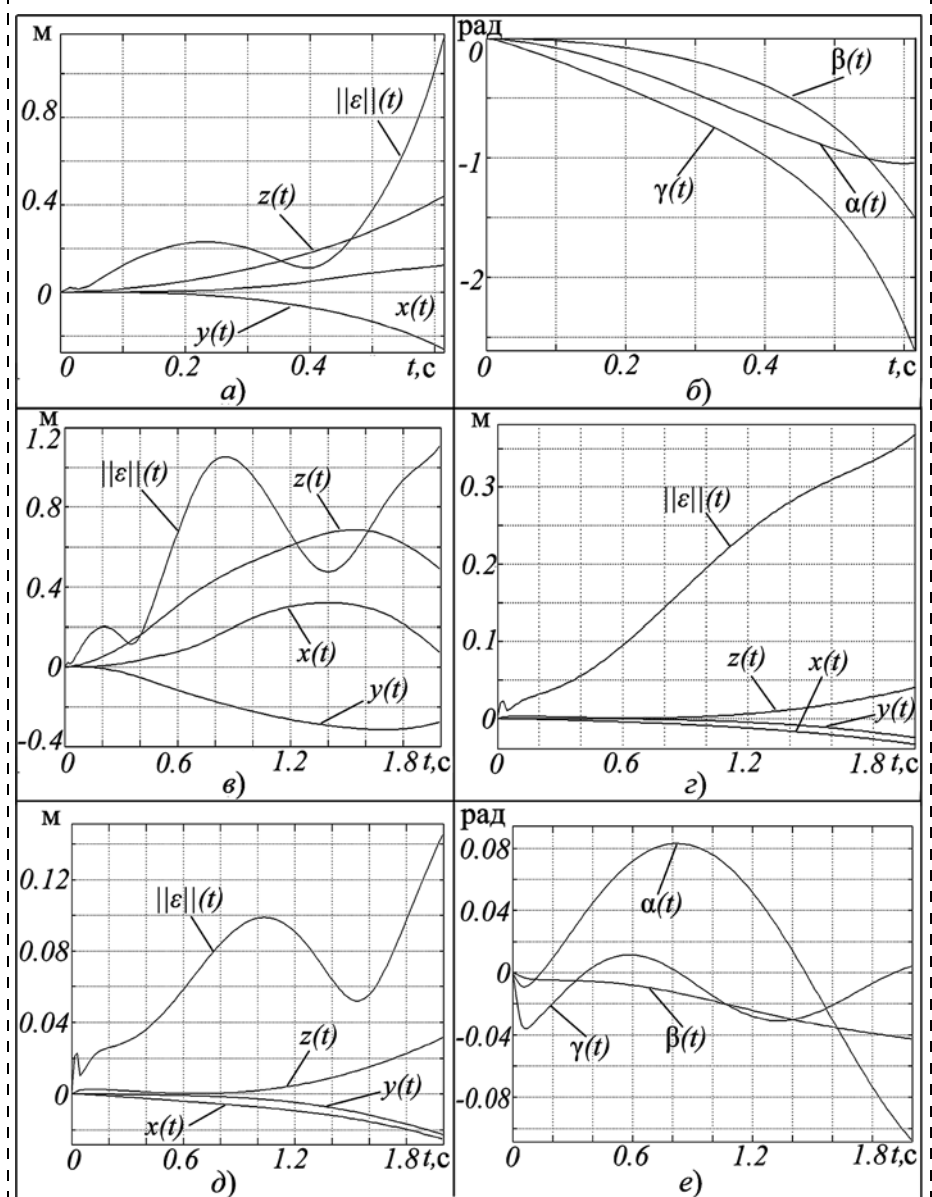


Рис. 5. Результаты моделирования работы синтезированной системы при движении ПМ по пространственной траектории

темы в процессе движения ПМ по указанной выше прямолинейной траектории с той же скоростью и погрешностях расчета силовых и моментных воздействий ПМ на ПА, не превышающих 10%, значение $\|\varepsilon(t)\|$ увеличивается всего до 0,17 м, а при погрешностях 15% — до 0,18 м. При использовании разомкнутой системы стабилизации ПА, тех же законах движения ПМ и 10 %-х погрешностях вычисления его силовых и моментных воздействий на ПА значение $\|\varepsilon(t)\|$ достигает 0,5 м, а при 15% погрешностях — 0,58 м.

Заклучение

В данной работе предложен метод синтеза комбинированной замкнутой автоматической системы стабилизации положения и ориентации ПА в режиме его зависания в водной среде вблизи объекта выполнения работ. При этом инвариантность ПА к внешним силовым воздействиям, создаваемым работающим с высокой скоростью ПМ, обеспечивается с помощью тяг его винтов, пропорциональных указанным внешним воздействиям, вычисляемым в реальном масштабе времени.

Результаты моделирования полностью подтвердили эффективность работы синтезированной комбинированной системы стабилизации, включающей

прямой канал управления движителями, строящийся на основе вычисления силовых и моментных воздействий манипулятора на ПА, и замкнутую систему, "дорабатывающую" неточности вычислений. Использование указанной системы стабилизации позволяет значительно расширить круг работ, качественно выполняемых подводными манипуляционными комплексами на высоких скоростях.

Список литературы

1. Филаретов В. Ф., Коноплин А. Ю. Система автоматической стабилизации подводного аппарата в режиме зависания при работающем многозвенном манипуляторе. Часть 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 6. С. 53—56.
2. Fossen T. I. Guidance and control of ocean vehicles. John Wiley & Sons Ltd., 1994. 494 p.
3. Филаретов В. Ф., Юхимец Д. А., Мерсалимов Э. Ш. Метод идентификации параметров математической модели подводного аппарата // Мехатроника, автоматизация и управление. 2012. № 10. 64—70 с.
4. Филаретов В. Ф., Алексеев Ю. К., Лебедев А. В. Системы управления подводными роботами / Под ред. В. Ф. Филаретова. М.: Круглый год, 2001. 288 с.
5. Филаретов В. Ф. Самонастраивающиеся системы управления приводами манипуляторов. Владивосток: Изд-во ДВГТУ. 2000. 304 с.
6. Филаретов В. Ф., Коноплин А. Ю. Система автоматической коррекции программной траектории движения многозвенного манипулятора, установленного на подводном аппарате // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 1. С. 40—45.

V. F. Filaretov, professor, head of laboratory, filaret@pma.ru,
Institute of Automation and Control Processes Far Eastern Branch of RAS,
A. Ju. Konoplin, assistant, kayur-prim@mail.ru, Far Eastern Federal University

System of Automatic Stabilization of Underwater Vehicle in Stationkeeping Regime with Working Multilink Manipulator. Part 2

In this paper the synthesis method of combined closed-loop automatic system of underwater vehicle position and orientation stabilization in stationkeeping regime is described. Underwater vehicle invariance to external influences created by working underwater manipulator is provided by thrusts of its screws. These thrusts are proportional to said external influences calculated in real time scale. For precise calculation of these effects modification of recursive algorithm for solving inverse problem of underwater manipulator dynamics was developed. Presented modification allows take into account all features of viscous environment influences on manipulator links committing random movements at high speed. To increase accuracy of stabilization of underwater vehicle additional automatic systems closed-loop at all linear and angular movement of this vehicle was synthesized. Said systems may use data obtained from high-precision navigation onboard sensors and devices.

Results of performed numerical simulations have confirmed high efficiency of developed approach to underwater vehicle stabilization in stationkeeping regime while high speed movement of underwater manipulator on complex spatial trajectories.

Keywords: *underwater vehicle, multilink manipulator, navigation system, spatial trajectory, stabilization system*

References

1. Filaretov V. F., Konoplin A. Ju. Sistema avtomaticheskoy stabilizatsii podvodnogo apparata v rezhime zavisaniya pri rabotajushhem mnogozvennom manipulyatore. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. 2014. N. 6. P. 53—56.
2. Fossen T. I. Guidance and control of ocean vehicles, John Wiley & Sons Ltd., 1994. 494 p.
3. Filaretov V. F., Juhimec D. A., Mursalimov Je. Sh. Metod identifikatsii parametrov matematicheskoy modeli podvodnogo aparata. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. 2012. N. 10. P. 64—70.
4. Filaretov V. F., Alekseev Ju. K., Lebedev A. V. Sistemy upravleniya podvodnymi robotami / edited by V. F. Filaretov. M.: Kругlyj god, 2001. 288 p.
5. Filaretov V. F. Samonastrajavajushiesja sistemy upravleniya privodami manipulyatorov. Vladivostok: Izd-vo DVG TU. 2000. 304 p.
6. Filaretov V. F., Konoplin A. Ju. Sistema avtomaticheskoy korrekcii programnoj traektorii dvizhenija mnogozvennogo manipulyatora, ustanovlennogo na podvodnom apparate. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. 2013. N. 1. P. 40—45.

Ю. В. Турыгин, докт. техн. наук, проф., **Ю. В. Зубкова**, ст. преподаватель, zubkov-jr@yandex.ru,
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова,
Р. Гартянски, канд. техн. наук, доц., rene.hartansky@stuba.sk,
Словацкий технологический университет

Исследование точности позиционирования выходного звена манипулятора автоматизированного электронно-лучевого технологического комплекса

Предложена математическая модель позиционирования электронного луча при электронно-лучевой сварке (ЭЛС). Особенностью модели является учет отклонений (угол отклонения от перпендикулярности, отклонение от середины стыка, полная погрешность мехатронных модулей) электронного луча от идеального положения. Введение результатов моделирования в модель управления процессом ЭЛС позволит повысить качество сварных соединений.

Ключевые слова: позиционирование, точность, манипулятор, мехатронный модуль движения, кинематическая погрешность, динамическая погрешность

Введение

Электронно-лучевая сварка (ЭЛС) получила широкое распространение в отраслях машиностроения, связанных с производством авиационной и аэрокосмической техники. ЭЛС относится к методам сварки высококонцентрированными источниками энергии, позволяя соединять за один проход металлы и сплавы толщиной от 0,1 до 400 мм, и обладает широкими технологическими возможностями.

В настоящее время большое внимание уделяется повышению качества ответственных и сильно нагружаемых изделий, получаемых с помощью ЭЛС. Это связано с повышенными требованиями к сроку службы таких изделий, их надежности при эксплуатации, а также к уменьшению издержек производства и стоимости технического оснащения автоматизированных электронно-лучевых технологических комплексов (АЭЛТК). Эти требования тесно связаны с точностью позиционирования выходных звеньев манипуляторов, входящих в состав АЭЛТК.

Под процессом позиционирования в данной работе понимаем наведение выходного звена исполнительного устройства и его перемещение по заданной траектории. Качество сварных соединений во многом зависит от точности позиционирования электронного луча (ЭЛ) по стыку в процессе сварки, что предполагает непрерывное слежение за стыком в процессе ЭЛС. Отсутствие точного позиционирования ЭЛ по стыку приводит к появлению различных дефектов сварного шва, что существенно отражается на качестве получаемых сварных изделий [3].

Значительные достижения технологии ЭЛС достигнуты благодаря разработке принципов автоматического регулирования режимов ЭЛС и созданию систем автоматического направления луча по стыку. Некоторые вопросы автоматического направления луча по стыку, в частности, позиционирования ЭЛ, рассмотрены в работах [1, 3, 5].

Следует отметить, что существующие автоматические устройства позиционирования луча по стыку не в полной мере удовлетворяют современным требованиям точности и надежности наведения луча на стык. Причиной этого являются проблемы, связанные с компенсацией различных возмущений, вызванные физическими процессами, сопровождающими ЭЛС, низкая помехозащищенность датчиков измерительных устройств, а также погрешности электромеханического комплекса. Поэтому актуальной является задача исследования и разработки новых моделей позиционирования ЭЛ по стыку и создание на их основе новых средств автоматизации контроля и систем слежения за стыком.

Особенности электронно-лучевой сварки

Малая ширина сварного шва и большое отношение глубины к ширине шва требуют высокоточного совмещения электронного пучка с плоскостью стыка [3]. На рис. 1 изображены параметры сварного стыка, влияющие на обеспечение точного позиционирования ЭЛ при ЭЛС.

В данной работе рассматривается задача обеспечения точного перемещения пятна нагрева ЭЛ по стыку в процессе сварки. Изменение положения ЭЛ может осуществляться фокусирующей системой, отклоняющей системой и электромеханическим комплексом АЭЛТК. Электромеханический комплекс АЭЛТК включает в себя совокупность манипуляторов, на которых жестко закреплены одна или несколько сварочных электронно-лучевых пушек, и устройство перемещения свариваемого изделия (рис. 2, см. третью сторону обложки).

Все большее внимание уделяется выполнению манипулятором рабочей функции, такой как обработка рабочим органом манипулятора некоторой траектории с заданной точностью позиционирования. Погрешность обработки траектории — это отклонение фактической траектории рабочего органа

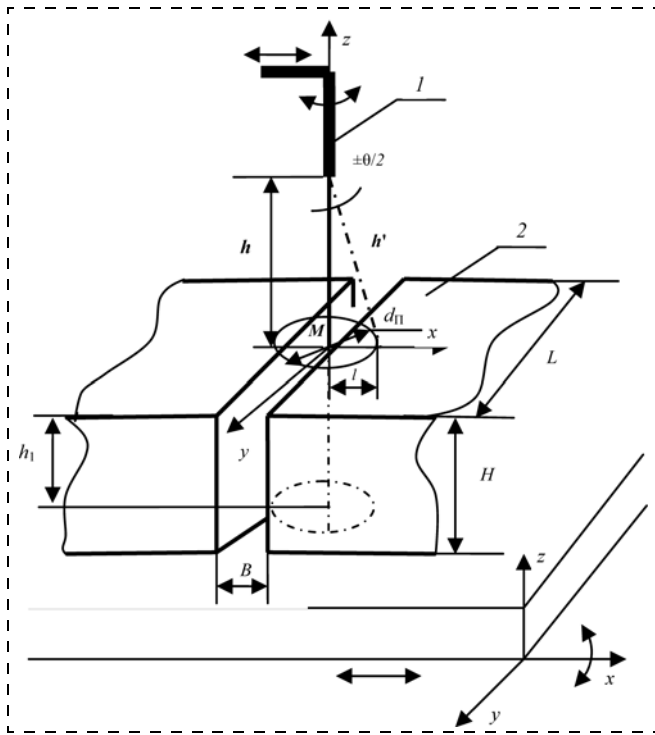


Рис. 1. Положение фокального пятна нагрева ЭЛ на поверхности стыка с учетом конструктивных характеристик стыкового соединения:

d_{π} — диаметр электронного пучка; h — расстояние от среза сварочной пушки до плоскости сварного шва — длина электронного пучка; h' — длина отклоненного на угол θ электронного пучка; H — толщина свариваемых изделий; l — смещение центра пятна нагрева M при отклонении оси электронного луча от перпендикулярности; θ — угол падения отклоненного пучка на поверхность свариваемого изделия; M — центр пятна нагрева электронного луча; h_1 — глубина проплавления; L — длина сварного шва; B — ширина зазора в стыке; l — сварочная пушка; 2 — свариваемое изделие

на от траектории, заданной программой движения. При обработке траектории выходным звеном манипулятора по заранее заданной программе без каких-либо корректирующих воздействий не всегда удастся достигнуть необходимой точности. Применение системы контроля за положением выходного звена манипулятора является необходимым при существенных термических или иных деформациях изделия в процессе сварки [3] или в случае, когда требуется получить высокую точность позиционирования.

Однако следует отметить, что применение современных контролирующих систем не всегда позволяет осуществлять процесс позиционирования выходного звена робота с заданной степенью точности и в реальном масштабе времени. При больших отклонениях рабочего органа от желаемой траектории вследствие разного рода погрешностей система управления позиционированием "не успевает" обрабатывать сигналы рассогласования и осуществлять соответствующие воздействия для коррекции положения рабочего органа.

В настоящее время при решении задач слежения за стыком и точного позиционирования луча во время сварки применяется подход, который со-

стоит в сканировании области сварочной ванны пучком электронов с некоторой частотой, а искомые координаты положения стыка рассматриваются как функции пространственных координат в каждый фиксированный момент времени. Однако при таком подходе среди прочих не учитываются кинематические и динамические характеристики исполнительных устройств АЭЛТК.

В связи с этим основной задачей становится уменьшение времени реакции системы позиционирования при обработке заданной траектории выходным звеном с учетом кинематических и инерционных характеристик манипуляторов в составе АЭЛТК. Предлагается определять необходимую компенсацию по положению при позиционировании рабочего органа манипулятора при обработке траектории на основании вычисления полной погрешности с учетом режимов сварки [3, 7].

Особенностью ЭЛС является тот факт, что визуальное наблюдение за процессом сварки и, соответственно, процессом позиционирования ЭЛ по стыку затруднено [3]. Поэтому актуальной является задача контроля за положением выходного звена сварочного манипулятора и манипулятора заготовки в процессе ЭЛС. Это становится особенно важным, когда визуализация стыка практически невозможна, например, при выполнении сварки внутри глубокого стакана или с внутренней поверхности свариваемого изделия с применением внутрикамерных электронно-лучевых пушек (ЭЛП).

Высокая скорость сварки (до 30 мм/с), точность процесса ЭЛС и ограниченные возможности визуального наблюдения создают оператору трудности в управлении как процессом сварки, так и процессом позиционирования ЭЛ. В целях уменьшения "рысканья" при слежении за стыком предлагается использовать математическую модель процесса позиционирования, основанную на учете погрешностей электромеханической части АЭЛТК.

Анализ погрешностей процесса позиционирования выходного звена манипулятора АЭЛТК

Точность работы манипулятора оценивают его погрешностью, т. е. разностью между действительным и расчетным положениями его выходного звена. Основными причинами возникновения погрешности манипулятора являются погрешности системы управления и двигателя, кинематические погрешности, мертвый ход и упругие деформации элементов преобразователей движения, динамические погрешности [4].

Полную погрешность выходного звена манипулятора определяют в виде

$$\Delta = \Delta q + \delta_{\Sigma} + J_{\Sigma} + \Delta q', \quad (1)$$

где Δq — погрешность системы управления и двигателя; δ_{Σ} — кинематическая погрешность преобразователя движения; J_{Σ} — мертвый ход преобразователей движения; $\Delta q'$ — погрешность, вызванная податливостью преобразователя движения.

Допустимая погрешность обработки траектории определяет условие обеспечения заданной точности позиционирования выходного звена манипулятора:

$$\Delta_0 \leq \Delta r_{\text{задан}}, \quad (2)$$

где Δ_0 — допускаемая погрешность манипулятора; $\Delta r_{\text{задан}}$ — максимальная погрешность обработки траектории.

Анализ литературы и нормативно-технической документации по обеспечению процесса позиционирования ЭЛ по стыку при ЭЛС показал, что расчеты по определению полной погрешности манипуляционных механизмов достаточно широко используются в теоретических исследованиях [3—5, 7]. Однако на практике многие характеристики, влияющие на значение погрешности, не учитываются либо считаются постоянными в течение всего процесса ЭЛС. Для многокоординатных манипуляторов сварочной пушки и изделия погрешность является значимой величиной, поскольку необходимо учитывать также их взаимное расположение и кинематические особенности при выполнении рабочих функций (рис. 3).

Точность положения фокального пятна нагрева ЭЛ на стыке свариваемых изделий определяется радиус-вектором r , который является радиусом шара точности выходного звена манипулятора [4]. Необходимо обеспечить совмещение точек M_1 и M_2 в соответствии с условием (2). Положение общей точки M описывается радиус-вектором, зависящим от времени:

$$\Delta r = (x(t), y(t), z(t)). \quad (3)$$

Тогда модуль линейной ошибки равен

$$\Delta r_{\text{л}} = \sqrt{(\Delta x_{\text{п}})^2 + (\Delta y_{\text{п}})^2 + (\Delta z_{\text{п}})^2}, \quad (4)$$

где $\Delta x_{\text{п}}$, $\Delta y_{\text{п}}$, $\Delta z_{\text{п}}$ — ошибки позиционирования по осям x , y , z неподвижной системы координат, зависящие от ошибок обобщенных координат.

Для получения заданной точности позиционирования ЭЛ по стыку определена целевая функция F процесса позиционирования [6]:

$$F = f(\Delta_{\text{ф}}, \theta, \Delta r, \Delta_{\text{техн}}), \quad (5)$$

где $\Delta_{\text{ф}}$ — точность фокусировки электронного луча; θ — угол падения отклоненного пучка на поверхность сварного стыка; Δr — полная погрешность манипулятора; $\Delta_{\text{техн}}$ — критерии, учитывающие технологические параметры ЭЛС.

Процесс позиционирования включает в себя также учет технологических параметров процесса ЭЛС: обеспечение перпендикулярности оси ЭЛ к плоскости симметрии стыка (K_1); обеспечение сохранения неизменным диаметра фокального пятна нагрева $d_{\text{п}}$ на поверхности стыка свариваемых деталей (K_2); соблюдение расстояния h от среза сварочной пушки до свариваемой поверхности (K_3); обеспечение сохранения постоянной глубины проплавления h_1 (K_4).

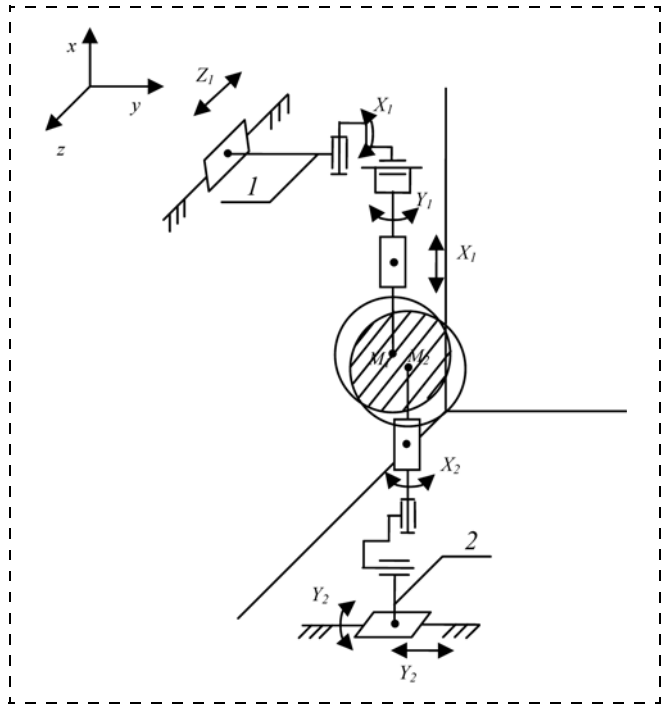


Рис. 3. Кинематическая схема технологического оборудования АЭЛТК:

1 — манипулятор сварочной пушки; 2 — устройство перемещения заготовки; 3 — область точности; M_1 — центр пятна нагрева ЭЛ; M_2 — центр сварного шва в некоторой точке

Действующие в манипуляторе АЭЛТК скорости, ускорения, силы и моменты оказывают непосредственное влияние на точность позиционирования выходного звена при прохождении траектории. Рассчитываемые в реальном масштабе времени параметры кинематики и динамики системы, а именно значения соответствующих погрешностей, позволяют корректировать положение рабочего органа в соответствии с геометрией траектории и с требованиями точности ее обработки.

В результате проведенного точностного анализа установлены виды погрешностей, влияющих на точность позиционирования при наведении ЭЛ на стык. Анализ полной погрешности манипулятора в составе АЭЛТК позволяет определить, на сколько необходимо скорректировать положение ЭЛ.

Особенности учета точности позиционирования выходного звена манипулятора при ЭЛС

Анализируя формулу (1), можно сделать вывод о том, что среди прочих параметров манипуляторов не учитываются его динамические характеристики. Таким образом, на основе проведенного анализа факторов, влияющих на точность обработки траектории выходным звеном манипулятора, предложена следующая обобщенная математическая модель процесса позиционирования его выходного звена:

$$F_{\Delta} = \begin{cases} \Delta r(\Delta q, \delta_{\Sigma}, J_{\Sigma}, \Delta q', I_D, v, m); \\ f_{\text{лп}}(K_1, K_2, K_3, K_4), \end{cases} \quad (6)$$

где Δr — полная погрешность манипулятора; Δq — погрешность системы управления и двигателя; δ_{Σ} и J_{Σ} — кинематическая погрешность и мертвый ход преобразователя движения соответственно; $\Delta q'$ — погрешность, вызванная податливостью механизма; I_D — динамический инвариант; v — скорость выходного звена манипулятора; m — масса рабочего органа манипулятора; $f_{ТП}$ — параметры технологического процесса (ТП); K_1, \dots, K_4 — критерии обеспечения точности позиционирования ЭЛ по стыку при ЭЛС [7]. Степень влияния этих факторов на точность позиционирования выходного звена различна и зависит от характеристик оборудования АЭЛТК, режимов его работы и параметров процесса ЭЛС.

Входными параметрами модели являются скорость v и масса m рабочего органа выходного звена манипулятора. Выходным параметром модели является перемещение выходного звена по одной или нескольким координатам.

В качестве допущений в предложенной модели принимаем:

- 1) упругие свойства манипулятора учитываем податливостью элементов конструкции;
- 2) значение мертвого хода преобразователей движения манипулятора считаем постоянным для конкретного вида технологического оборудования АЭЛТК;
- 3) погрешность системы управления и двигателей считаем постоянной детерминированной величиной.

Благодаря принятым допущениям упрощаем расчет полной погрешности, что позволяет уменьшить расчетное время модели.

Ограничениями в данной модели являются: число звеньев манипулятора сварочной пушки, участвующих в движении, максимальная скорость перемещения и масса сварочной пушки и заготовки.

Начальные условия процесса позиционирования ЭЛ по стыку и условия его протекания: характеристические точки устанавливаются при предварительном проходе, известны абсолютные координаты контрольных точек траектории.

Особенностью предложенной модели является анализ процесса позиционирования выходного звена при его движении по некоторой пространственной траектории с учетом кинематических свойств системы и выбор соответствующего корректирующего воздействия.

Алгоритм анализа точности при позиционировании электронного луча по стыку при ЭЛС

Анализ точности позиционирования ЭЛ по стыку с учетом разработанной модели включает в себя следующие этапы:

1. Обеспечение критериев позиционирования ЭЛ по стыку.

Критерий K_1 : перпендикулярность оси ЭЛ к плоскости симметрии стыка достигается отклонением ЭЛ на угол θ , значение которого $\theta \leq \pm (6...7)^\circ$ и за-

висит от конструктивных параметров сварного стыка (см. рис. 1). Если дальнейшее отклонение ЭЛ с помощью отклоняющей системы невозможно, то в процесс позиционирования луча по стыку включается электромеханический комплекс АЭЛТК.

Критерий K_2 : стабилизацию диаметра фокуса ЭЛ осуществляют высокоточным шелевым датчиком для обеспечения точного наведения фокального пятна нагрева на стык при ширине зазора в стыке $B = \text{const}$ по всей длине сварного стыка [3]. При этом для обеспечения полного проплавления должно выполняться условие

$$B \leq d_{\text{п}} \leq 2B. \quad (7)$$

Критерий K_3 : для позиционирования ЭЛ по стыку необходимо обеспечивать постоянство расстояния от среза сварочной пушки до поверхности свариваемого изделия h , оно задается в соответствии с геометрией сварного стыка:

$$h = \frac{l}{\text{tg}\theta} \quad (8)$$

и может быть определено по методу "двойного края" [3].

Критерий K_4 : для сохранения постоянной глубины проплавления h_1 необходимо обеспечивать либо стабильность фокусного расстояния, изменяя при этом диаметр пятна нагрева ($h = \text{const}, d_{\text{п}} = \text{var}$), либо неизменность диаметра фокуса ($h = \text{var}, d_{\text{п}} = \text{const}$), при этом фокусное расстояние варьируется перемещением сварочной пушки и/или заготовки.

2. Определение кинематической погрешности манипуляторов сварочной пушки и/или изделия.

Кинематическая погрешность исполнительных устройств манипулятора приведена к выходному звену и определяется как суммарная кинематическая погрешность многоступенчатых преобразователей движения по методу максимума-минимума [7]:

$$\delta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \delta_i, \quad (9)$$

где δ_i — кинематическая погрешность i -й передачи; ε_i — передаточный коэффициент погрешности i -й передачи, учитывающий изменение кинематической погрешности передачи при приведении ее к выходному звену кинематической цепи.

3. Особенности учета динамической погрешности исполнительных устройств манипуляторов АЭЛТК.

Для анализа динамических характеристик манипуляторов используют полную кинетическую энергию многосвязных механизмов. Исследование и анализ кинетической энергии манипуляторов лежат в основе ряда ранее разработанных динамических моделей. Однако с учетом сложности построения динамических моделей многосвязных манипуляторов сварочной пушки и устройства перемещения заготовки была предпринята попытка получить эмпирические зависимости изменения перемеще-

ния выходного звена манипулятора от полученных значений кинетической энергии в виде

$$\Delta_{\text{дин}} = f(T_i), \quad (10)$$

где $\Delta_{\text{дин}}$ — погрешность манипулятора, связанная с его динамическими характеристиками в исследуемых точках i .

Полная кинетическая энергия механической системы:

$$T = T_a + T_p, \quad (11)$$

где T_a, T_p — кинетическая энергия манипулятора и рабочего органа, соответственно.

Полная кинетическая энергия системы зависит от массы, линейных и угловых скоростей, моментов инерции и геометрических параметров звеньев манипуляторов.

На основе найденных согласно (10), (11) значений кинетической энергии T_i в контрольных точках траектории и с учетом экспериментальных данных получены эмпирические зависимости изменения динамической точности манипулятора в исследуемых точках, учитывающие инерционные характеристики исполнительных устройств в составе АЭЛТК.

4. Используя шар точности с радиусом $\Delta r_{\text{задан}}$ и центром в точке M (рис. 3), можно определить геометрическое место точек, удовлетворяющих условию (2). При "непопадании" концевых точек M выходных звеньев всех манипуляторов в полученную область шара точности, которая определяется кинематическими и инерционными характеристиками манипуляторов, проводится корректировка положения выходного звена с учетом полной погрешности электромеханического комплекса АЭЛТК. Анализ полученных результатов исследований кинематической и динамической составляющих погрешностей манипуляторов позволяет уточнить возникающие отклонения концевых точек рабочих органов от заданного положения при позиционировании выходных звеньев манипуляторов с учетом действующих сил, скоростей и ускорений.

Экспериментальная проверка разработанной модели

Натурные эксперименты по исследованию точности позиционирования выходного звена манипу-

лятора проведены на оборудовании Отдела высоких технологий и кафедры "Мехатронные системы" (ФГБОУ ВПО "ИжГТУ имени М. Т. Калашникова"). Проверку разработанных моделей проводили на роботе-манипуляторе с напольным закреплением фирмы *KUKA*. В качестве внешнего измерительного устройства был выбран лазерный датчик линейных перемещений *ZX-LD100* (фирма *OMRON*) с точностью измерений 0,01 мм.

Цель исследования: экспериментальная оценка влияния полной погрешности мехатронной системы на точность обработки траектории выходным звеном манипулятора. Объектом исследования являлось положение выходного звена манипулятора при обработке заданной траектории, т. е. сварного стыка. Под траекторией понималась пространственная кривая сложной формы, однозначно детерминированная в пространстве глобальных координат. Геометрические характеристики сварного стыка заменялись координатами опорных точек $T_1 - T_5$, контроль которых проводился.

Была разработана методика проведения экспериментального исследования, включая планирование эксперимента [2]. В данном исследовании варьируемыми факторами являются линейная скорость концевой точки рабочего органа манипулятора v_{max} (в тестовом и автоматическом режимах) и масса нагрузки m_H (масса рабочего органа). Таким образом, проведен двухфакторный двухуровневый эксперимент: $v_{\text{max}} = 10... 150$ мм/с, $m_H = 0...40$ кг.

С учетом того, что конструкция робота известна и траектория движения выходного звена строго детерминирована, были получены кинематическая и динамическая модели системы. Анализ полученной модели позволил определить ошибку позиционирования выходного звена робота в каждой исследуемой точке. Ошибка позиционирования выходного звена в точке определялась на основании разработанной методики вычисления полной погрешности с учетом кинематической схемы робота [7]. Схема экспериментальной установки и порядок проведения исследования представлены в работах [2, 8].

Данные по определению точности позиционирования выходного звена робота сведены в таблицу, где представлены значения контрольных точек

Результаты экспериментальных измерений

№ опорной точки	Реальная траектория (эксперимент 1)		Траектория с учетом кинематической погрешности (эксперимент 2)		Траектория с учетом динамической погрешности (эксперимент 3)	
	Среднее значение $Z_{\text{ср.реал}}$, мм	Средне-квадратическое отклонение $S_{\text{реал}}$	Среднее значение $Z_{\text{ср.кин}}$, мм	Средне-квадратическое отклонение $S_{\text{кин}}$	Среднее значение $Z_{\text{ср.дин}}$, мм	Средне-квадратическое отклонение $S_{\text{дин}}$
T_1	0,122	0,0066	-0,103	0,0066	-0,003	0,0062
T_2	0,138	0,0070	-0,088	0,0070	0,006	0,0066
T_3	0,188	0,00625	-0,038	0,00625	0,058	0,00623
T_4	0,238	0,0055	0,01	0,0055	0,099	0,00523
T_5	0,181	0,0064	-0,04	0,0064	0,054	0,00616
Среднее значение	0,173	0,0064	-0,052	0,0064	0,043	0,0061

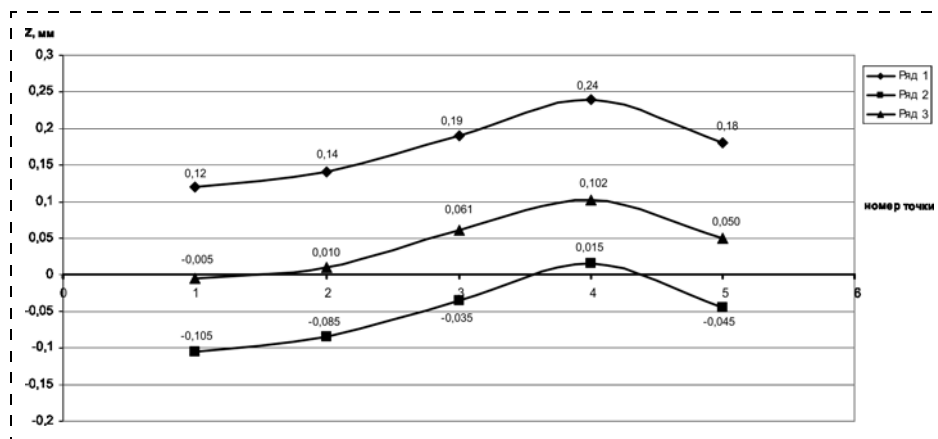


Рис. 4. Положение выходного звена манипулятора:

ось X (значение 0) — заданная (идеальная траектория); ряд 1 — реальная траектория, полученная на основе данных от датчика; ряд 2 — траектория, полученная от датчика с учетом кинематической погрешности манипулятора; ряд 3 — траектория, полученная от датчика с учетом динамической погрешности манипулятора

по оси Z с учетом данных от внешнего измерительного устройства (эксперимент 1), с учетом кинематической погрешности (эксперимент 2) и с учетом динамической погрешности манипулятора (эксперимент 3). Экспериментальные данные (эксперименты 2 и 3) получены на основании разработанной модели процесса позиционирования выходного звена манипулятора.

Согласно плану эксперимента было предусмотрено четыре комбинации сочетаний параметров. Для каждой комбинации факторов было проведено по двадцать измерений (замеров). Результаты экспериментов ($v_{\max} = 10$ мм/с и $m_H = 40$ кг) представлены в таблице.

На рис. 4 представлены графики, наглядно отображающие значения контрольных точек по оси Z с учетом используемой модели (ряд 2, ряд 3) и без нее (ряд 1).

На основе статистического анализа экспериментальных данных определены средние значения отклонений от номинального значения положения для каждой контрольной точки траектории, полученных с помощью внешнего датчика положения. Среднее значение отклонения для всех точек реальной траектории составило 0,173 мм, с учетом кинематической погрешности манипулятора 0,052 мм, с учетом также динамической погрешности 0,043 мм. Таким образом, погрешность позиционирования уменьшилась более чем в 2,5 раза. Кроме того, было определено среднее квадратическое отклонение от заданного положения для двадцати измерений. Нужно отметить, что применение разработанной модели позволило уменьшить (хотя и незначительно) среднеквадратическое отклонение с 0,00635 до 0,00608.

1. В результате проведенного теоретического и экспериментального исследования точности позиционирования выходного звена сварочного манипулятора было установлено, что применение предложенной модели, учитывающей влияние кинематической и динамической погрешностей, при обработке траектории является эффективным средством повышения точности позиционирования манипулятора.

2. Анализ точности позиционирования выходного звена манипулятора с учетом предложенного подхода дает

более полную картину процесса позиционирования электронного луча при ЭЛС при заданных режимах в реальном масштабе времени

Список литературы

1. Бельский В. Я., Язовских В. М. Контроль электронно-лучевой сварки с использованием плазменных явлений в области сварочной ванны // Сварочное производство. 1997. № 1. С. 7—9.
2. Зубкова Ю. В. Экспериментальное исследование точности позиционирования робота // Сб. науч. тр. II Всерос. науч.-техн. конф. аспирантов, магистрантов и молодых ученых с международным участием "Молодые ученые — ускорению научно-технического прогресса в XXI веке": Ижевск, 23—25 апреля 2013 г. Ижевск, "ФГБОУ ВПО "ИжГТУ имени М. Т. Калашникова". С. 329—333.
3. Кайдалов А. А. Электронно-лучевая сварка и смежные технологии. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Экотехнология, 2004. 260 с.
4. Подураев Ю. В. Мехатроника: методы, применение: учеб. пособие для студентов вузов. 2-е изд., стер. М.: Машиностроение, 2007. 256 с.
5. Тихоненко Д. В. Автоматическое определение ошибки наведения на стык деталей при ЭЛС // Вестник НИИ СУВПТ: сб. научн. трудов. Красноярск: НИИ СУВПТ, 2008. Вып. 26. С. 75—77.
6. Турыгин Ю. В., Смирнов В. Н., Зубкова Ю. В. Исследование динамической модели мехатронного модуля АЭЛТК // Сб. науч. тр. в 2-й Междунар. науч.-техн. конф. "Технологии и оборудование ЭЛС—2011" 23—26 мая, 2011. Санкт-Петербург, Россия. С. 291—297.
7. Турыгин Ю. В., Зубкова Ю. В., Мага Д. Исследование кинематической погрешности в передаточных механизмах мехатронной системы // Сб. тр. 15-й Междунар. конф. по мехатронике "МЕХАТРОНИКА—2012", Прага, Чешская республика. 5—7 декабря, 2012.
8. Турыгин Ю. В., Зубкова Ю. В. Экспериментальное исследование влияния кинематической погрешности на точность позиционирования выходного звена мехатронного комплекса // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 2. С. 100—104.

Yu. V. Turygin, professor, **Yu. V. Zubkova**, senior lecturer, zubkov-jr@yandex.ru,
Kalashnikov Izhevsk State Technical University,

R. Hartyansky, PhD in technical sciences, docent, rene.hartansky@stuba.sk,
Slovak University of Technology in Bratislava

The Positioning Accuracy Research of Manipulator Output Member of Automated Electron Beam Production Complex

The paper presents the mathematical model of electron beam positioning during electron-beam welding. The model specially is an electron beam deviations account (the deviation of perpendicularity, the joint centre beam deviation, the error of mechatronic modules) from an ideal position.

The developed mathematical model consists of: the positioning criterion assurance of electron beam on the joint; the conjugate error calculation of welding gun and/or workpiece manipulators; the dynamic characteristics analysis of welding gun and/or workpiece manipulators; the definition of accuracy solid sphere with radius Δr and centerpoint M with allowance for manipulators kinematic and dynamic properties of automated electron beam production complex (AEBPC). In case of 'missing' end points of output members of all complex manipulators in the obtained area of accuracy sphere, output member position is corrected taking into account total error of electromechanical complex AEBPC by inverse kinematics solving.

The analysis of research results is allowed to consider the gripper tips deviation of the real path in the process of manipulators positioning by forces, velocities and accelerations changing. The simulation results inclusion into control model of EBW process will enables to assure the program settings accuracy of EBW main parameters and thereby to improve the joints quality.

Keywords: positioning, precision, manipulator, motion mechatronic module, conjugate error, dynamic error

References

1. **Belenkij V. Ja., Jazovskih V. M.** Kontrol elektronno-luchevoj svarki s ispolzovaniem plazmennyyh javlenij v oblasti svarochnoj vanny. *Svarochnoe proizvodstvo*. 1997. № 1. P. 7—9.

2. **Zubkova Ju. V.** Eksperimentalnoe issledovanie tochnosti pozicionirovaniya robota. *Sb. nauch. tr. II Vseros. nauch.-tehn. konf. aspirantov, magistrantov i mo-lodyh uchenyh s mezhdunarodnym uchastiem "Molodye uchjonye — uskoreniju nauchno-tehnicheskogo progressa v XXI veke"*: Izhevsk, 23—25 aprelya 2013 g. Izhevsk, "FGBOU VPO "IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova". P. 329—333.

3. **Kajdalov A. A.** Elektronno-luchevaya svarka i smezhnye tehnologii. 2-e izd., pererab. i dop. Kiev: Ekotehnologija, 2004. 260 p.

4. **Poduraev Ju. V.** Mehatronika: metody, primenenie: ucheb. posobie dlja studentov vuzov. 2-e izd., ster. M.: Mashinostroenie, 2007. 256 p.

5. **Tihonenko D. V.** Avtomaticheskoe opredelenie oshibki nave-denija na styk detalej pri ELS. *Vestnik NII SUVPT: sb. nauchn. trudov*. Krasnojarsk: NII SUVPT, 2008. Iss. 26. P. 75—77.

6. **Turygin Ju. V., Smirnov V. N., Zubkova Ju. V.** Issledovanie dinamicheskoy modeli mehatronnogo modulja AELTK. *Sb. nauch. tr. 2-j Mezhdunar. nauch.-tehn. konf. "Tehnologii i oborudovanie ELS—2011"* 23—26 maja, 2011. Sankt-Peterburg, Rossija. P. 291—297.

7. **Turygin Ju. V., Zubkova Ju. V., D. Maga.** Issledovanie kine-maticheskoy pogreshnosti v peredatochnyh mehanizmah mehatron-noj sistemy. *Sb. tr. 15-j Mezhdunarodnoj konferencii po mehatronike "MEHATRONIKA—2012"*, Praga, Cheshskaja respublika. 5—7 deka-brja, 2012.

8. **Turygin Ju. V., Zubkova Ju. V.** Eksperimentalnoe issledovanie vlijanija kinematicheskoy pogreshnosti na tochnost pozicionirovaniya vyhodnogo zvena mehatronnogo kompleksa. *Intellektualnye sistemy v proizvodstve*. 2013. N. 2. P. 100—104.

Поздравляем юбиляра!



Заведующему кафедрой «Техническая кибернетика» Уфимского государственного авиационного технического университета, Заслуженному изобретателю СССР, Заслуженному деятелю науки и техники РФ, члену редакционной коллегии журнала «Мехатроника, автоматизация, управление», доктору технических наук, профессору

Барый Галеевичу Ильясову исполняется 75 лет.

Б. Г. Ильясов — видный ученый, крупный специалист в области системного анализа, автоматизации и процессов управления, основатель и руководитель одной из ведущих отечественных научных школ по автоматическому управлению сложными динамическими объектами. Под его руководством защищены 20 докторских и более 50 кандидатских диссертаций.

В фундаментальных трудах Барый Галеевича, насчитывающих более 700 публикаций, разработаны: новые методы описания, исследования устойчивости, анализа и синтеза автоматических систем; модели и алгоритмы управления макроэкономическими объектами; научные основы системного триадного подхода к управлению научными группами и образовательными системами; динамические когнитивные модели социально-экономических систем; модели и алгоритмы интеллектуального управления производством.

Высокий профессионализм, широкая эрудиция, большая трудоспособность, чуткость и отзывчивость снискали ему большое уважение учеников и коллег.

*Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала
сердечно поздравляют Барый Галеевича с юбилеем и желают ему здоровья,
благополучия и дальнейших успехов на благо российской науки и образования.*

УДК 681.518.3 (5); 621.317.35

П. А. Будко, д-р техн- наук, проф., budko62@mail.ru, **А. И. Литвинов**, адъюнкт, litvinovaleks@mail.ru, Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, г. Санкт-Петербург

Кинетический метод контроля и диагностики технических средств

Рассматриваются основные подходы, связанные с разработкой кинетического метода контроля и диагностики технических средств. Проведен анализ существующего научно-методического аппарата диагностирования технических средств, сформулированы основные недостатки и противоречия в рассматриваемой области. Определены пути их решения, на основании которых предложен кинетический метод контроля и диагностики технических средств. Сформулировано основное направление развития систем бесконтактного контроля и диагностики технических средств.

Ключевые слова: техническое средство, контроль и диагностика, техническое состояние, кинетика, идентификация, электрооборудование

Введение

Научно-технический прогресс породил техносферу — совокупность созданных человечеством технических средств для обеспечения жизнедеятельности людей на планете. Согласно существующим прогнозам в ближайшем будущем наряду с информатикой и биоинженерией революционизирующее влияние на развитие техносферы окажет мехатроника, представляющая собой область научно-технического знания и инженерной деятельности, интегрирующая механику, электронику, автоматику и информатику в целях совершенствования существующего и создания нового поколения техники и технологий [1].

Техническое средство (ТС) представляет собой достаточно сложный объект и содержит, как правило, не менее тысячи простейших неделимых деталей [2]. Даже при простейшем потоке отказов ТС число возможных различных неисправностей в нем не меньше, чем число простейших деталей. Если учесть, что многие детали сами по себе могут иметь существенно различающиеся неисправности, то общее число разных неисправностей возрастает в несколько раз по сравнению с числом простейших деталей в ТС [3, 4].

Усложнение схемного построения и функциональных связей в ТС порождает значительные трудности для обеспечения необходимой надежности. В результате возникает целый ряд специфических проблем, связанных с организацией обслуживания и обеспечением высокой эффективности эксплуатации обслуживаемого ТС.

Сущность этих проблем определяется тем, что развитие ТС в указанном направлении сопровождается резким увеличением временных, материальных и трудовых затрат на обслуживание, вслед-

ствие чего возросшие потенциальные возможности ТС не могут быть полностью реализованы.

Известно [2, 5, 6], что основным направлением разрешения возникшего противоречия, наряду с повышением надежности ТС, является совершенствование организации обслуживания в сочетании с комплексной автоматизацией всех процессов эксплуатации ТС. В связи с этим вопросы всестороннего совершенствования системы технического обслуживания приобрели важное практическое значение и объективно становятся все более актуальными по мере развития ТС.

При проведении технического обслуживания процесс измерения параметров ТС составляет 80...90 % от общей трудоемкости. Необходимость сокращения этих затрат естественным образом приводит к идее автоматизации процесса контроля [5].

Высокая степень автоматизации контроля определяет высокое быстродействие средств измерения, обработки и анализа результатов измерения, которое, в свою очередь, влияет на эффективность обслуживаемых объектов.

Автоматизация контроля ТС позволит повысить эффективность применения измерительно-вычислительного комплекса (ИВК). ИВК — это устройство, диагностирующее ТС. Современные ИВК представляют собой сложные комплексы технических устройств, включающих в себя самые различные узлы и элементы.

Контроль технического состояния систем различного назначения является неотъемлемой частью процесса их разработки, испытаний и эксплуатации [7]. Основной задачей контроля является получение информации для выработки необходимых воздействий на контролируемую систему или условия ее производства и эксплуатации в целях обеспечения максимального эффекта от использования ее по назначению.

В зависимости от целевого содержания оценки технического состояния указанных объектов и условий ее реализации можно выделить несколько категорий, которые характеризуются соответствием качества ТС определенным требованиям, — виды и классы технического состояния [8]. Применительно к ТС они (виды, классы) могут определяться различными параметрами или некоторыми функциями от них, включая выходные сигналы ТС или отдельных его составных частей.

Анализ перспектив развития ТС и существующих методов параметрического контроля и диагностирования, в том числе и с помощью автоматизированных средств измерений, позволяет выделить основное противоречие в практике оценки состояния ТС между тенденцией роста номенклатуры параметров ТС, обусловленной усложнением схемного построения и функциональных связей в его блоках, и традиционными методами оценки их технического состояния, что сопровождается резким увеличением временных и материальных затрат на обслуживание таких объектов.

Результаты и решения научных исследований, проводимых в рамках научно-методического аппарата (НМА) технической диагностики, можно условно разделить на две группы:

- в первой группе научных результатов, опубликованных в работах [9—14], рассматривается параметрический подход, в основу которого входят три выработанные практикой способа поиска: пробных замен, физического исключения, промежуточных измерений;
- во второй группе научных результатов, опубликованных в работах [15—21], исследуется функциональный подход, в основу которого входит идентификация технического состояния объекта контроля по выходному сигналу.

Несмотря на несомненные преимущества параметрического метода, связанные, в первую очередь, с качеством (глубиной) диагностирования, он обладает и рядом недостатков: при большом числе средств измерений каждое из них дополнительно вносит погрешности при измерении; при большом числе контролируемых параметрических точек измерение каждой требует определенного количества времени.

Вторая группа научных результатов [17—21], основанная на функциональном диагностировании [15, 16], включает в себя идентификацию технического состояния по выходному сигналу ТС. Основной задачей при этом является выбор такого метода классификации непрерывных во времени сигналов, который позволил бы получать надежные результаты за малый промежуток времени.

Недостатком данных методов является тот факт, что измерение осуществляется в одномерном метрическом пространстве, в котором сигналы различных классов во многих точках могут пересекаться. Это, в свою оче-

редь, ведет к снижению достоверности и повышению времени исследования в точках пересечения различных классов.

Недостатком существующего НМА является его низкая производительность. Классические методы параметрического контроля и диагностирования для оценки технического состояния объектов не удовлетворяют требованиям систем управления по временным показателям. Существующий НМА оценки технического состояния объектов, который основывается на использовании методов параметрического диагностирования, не позволяет решить задачу сокращения числа диагностических признаков при сохранении глубины поиска отказов и полноты диагностирования и поэтому не может быть применен для достижения поставленной цели.

В данной статье рассмотрена задача повышения быстродействия оценки состояния ТС при соблюдении ограничений на другие показатели эффективности контроля и диагностирования.

Особенности контроля и диагностики состояния технических средств по функциональному признаку

Анализ существующего НМА позволил выделить направление повышения производительности ИВК при диагностике ТС по функциональному признаку, в основу которого входит идентификация технических состояний объекта исследования по выходному сигналу. На этой основе рассмотрен новый подход к оценке технических состояний объекта исследования.

Схема измерений и обработки выходных сигналов представлена на рис. 1.

ТС включает в себя определенное число блоков, каждый из которых формирует соответствующие значения параметров $\{\theta_m\}$ ($m = 1, 2, \dots, \Lambda$), измеряемые разнотипными приборами (Λ — число классов технических состояний). Значительно сократить время диагностирования можно при использовании комплексных характеристик сигнала ТС $S(t | \theta)$, где t — время, которому соответствует вектор параметров θ , характеризующий состояние ТС. Исследуемый сигнал $S(t | \theta)$ регистрируется средством измерения и преобразуется в коэффициент взаимной корреляции эталонного и исследуемого сигналов $\varphi(\theta)$ с погрешностью измерения σ . На выходе устройства обработки формируется выходной сигнал $Z_a(\theta_a)$, при заданном значении параметров θ_a соответствующий определенному классу

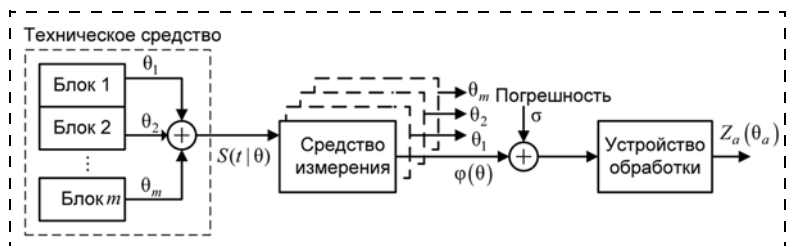


Рис. 1. Схема измерений и обработки сигналов

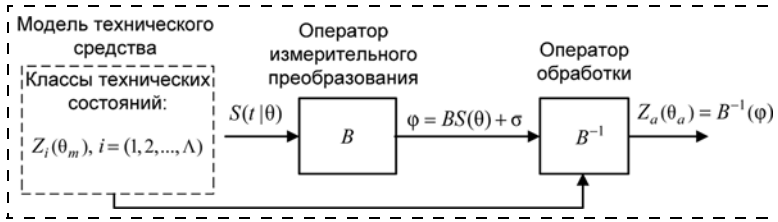


Рис. 2. Математическая схема измерений и обработки сигналов

Показатели производительности ИВК

Свойства	Показатели	Способ улучшения	Результаты
Оперативность	$T_{\Sigma} = \sum_{j=1}^m T(\theta_j) \rightarrow \min_m$	Уменьшение числа параметров	Комплексная характеристика состояния ТС
Достоверность	$ Z - B^{-1}(\varphi) \rightarrow \min_B$	Уменьшение ошибки идентификации состояния ТС	Устойчивая обработка результатов измерения

технических состояний $Z_a \in Z$, где Z — множество заданных классов технических состояний объекта.

Математическая схема с учетом введенных обозначений представлена на рис. 2.

Исследуемый сигнал $S(t|\theta)$ после оператора измерительного преобразования имеет значение $BS(\theta) + \sigma$, где B — оператор измерительного преобразования исследуемого сигнала, $S(\theta)$ — значение исследуемого сигнала, σ — погрешность измерения; B^{-1} — оператор обработки коэффициента взаимной корреляции эталонного $Z_i(\theta_m)$ и исследуемого $S(t|\theta)$ сигнала; φ — значение коэффициента взаимной корреляции эталонного $Z_i(\theta_m)$ и исследуемого $S(t|\theta)$ сигналов; $Z_a(\theta_a)$ — сигнал, соответствующий определенному классу технических состояний $\{Z_a\}$ ($a = 1, 2, \dots, \Lambda$).

Диагностическая модель ТС включает эталоны классов технических состояний, которым соответствуют эталоны преобразованных сигналов $Z_i(\theta_m)$, ($i = 1, 2, \dots, \Lambda$). С помощью обратного оператора B^{-1} вычисляется приближенное решение $Z_a(\theta_a) = B^{-1}(\varphi)$, максимально соответствующее заданному классу технических состояний.

Основными показателями производительности систем контроля и диагностики являются оперативность и достоверность (см. таблицу).

Оперативность повышается за счет уменьшения числа средств измерений до одного, а следовательно и временных затрат ($T_{\Sigma} = \sum_{j=1}^m T(\theta_j) \rightarrow \min_m$), в результате использования комплексной характеристики выходного сигнала ТС.

Достоверность достигается уменьшением вероятности принятия ошибочных решений о состоянии значений диагностических признаков ТС ($|Z - B^{-1}(\varphi)| \rightarrow \min_B$), что, в свою очередь, эквивалентно уменьшению ошибки идентификации в результате устойчивой обработки измерений.

Для повышения производительности создаваемых и эксплуатируемых ТС предлагается предварительная обработка их выходных сигналов, характеризующихся рядом параметров, при изменении номинальных значений которых изменяется форма выходного сигнала. Для повышения быстродействия диагностирования ТС исследуемый выходной сигнал с объекта контроля разделяется на два сигнала, которые отличаются друг от друга на значение, меньшее периода [22, 23]. Эти два исследуемых сигнала образуют замкнутую фигуру в декартовой системе координат. Итогом предварительной обработки является геометрическая фигура, образованная путем соединения точек, координатами которых по оси абсцисс являются значения амплитуд сигнала $S_y(t)$, а по оси ординат — значения

амплитуд сигнала $S_x(t)$ в соответствующие отсчеты времени. Данная фигура называется диаграммой состояний (ДС) (рис. 3).

В функциональной диагностике оценку ТС можно проводить, не измеряя отклонения параметров от номинальных значений с использованием целого парка разнотипных средств измерений, а анализируя лишь форму ДС.

Синтезированная фигура может иметь форму достаточно сложную и весьма чувствительную к изменению параметров режимов работы и технического состояния ТС. Диаграмма состояния создается непрерывно и обновляется через каждый период питающего напряжения, благодаря чему оказываются возможным регистрировать кратковременные отклонения в параметрах ТС и выявлять "предвест-

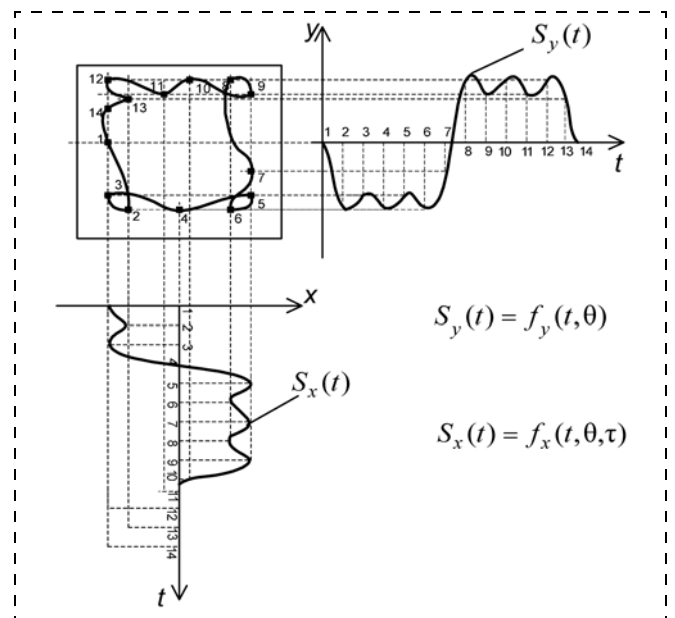


Рис. 3. Процесс получения диаграммы состояний

ники" аварийных ситуаций, что существенно повышает эффективность прогнозирующего контроля и диагностики состояния ТС. Таким образом, по полученной ДС можно судить о наличии или отсутствии дефектов в ТС, что существенно сокращает время диагностирования.

По двум полученным сигналам

$$S_y(t) = f_y(t, \theta) = \sum_{k=1}^n A_k \cos[(k \cdot \omega_0 t + \psi_k), \theta],$$

$$S_x(t) = f_x(t, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^n A_k \cos[(k \cdot \omega_0 t + \psi_k), \theta, \tau],$$

где k — число гармонических составляющих выходного сигнала; τ — элемент задержки; A_k — амплитуда k -й гармоники; ω_0 — угловая частота; ψ_k — начальная фаза, преобразованным в форму фигуры $S_y(t) = f_y(\theta, f_x^{-1}[S_x(\tau)])$, необходимо определить класс состояния ТС $S = \{\theta_a\}$ ($a = 1, 2, \dots, \Lambda$). Здесь $f_x^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная $f_x(\cdot)$; θ — вектор параметров; τ — элемент задержки; Λ — число классов технических состояний [22].

Представим объект диагностирования D , имеющий заданное число параметров Θ и вырабатывающий выходной сигнал Y , следующим образом:

$$D \xrightarrow{\Theta} Y.$$

Изменение номинальных значений Θ в объекте диагностирования D приводит к искажению выходного сигнала.

При предъявлении к системе требований по техническому состоянию необходимо, чтобы были созданы другие эталонные преобразованные выходные сигналы Y , каждый из которых характеризовал бы определенный дефект в объекте диагностирования:

$$D \xrightarrow{\Theta_a} Y_a.$$

Здесь Θ_a — изменение определенного a -го параметра, приводящее к искажению выходного сигнала, т. е. к получению сигнала Y_a , ($a = 1, 2, \dots, \Lambda$). Сравнение исследуемого выходного сигнала Y с эталонными Y_a схематично показано на рис. 4 и заключается в следующем: на выходе объекта диагностирования D формируется предварительно пре-

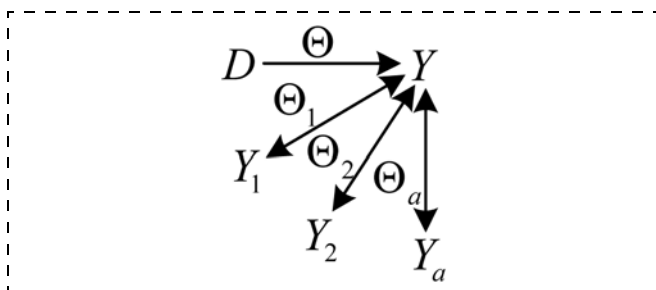


Рис. 4. Схема сравнения выходного сигнала с эталонами

образованный выходной сигнал Y при заданном значении параметров Θ . Сформированный сигнал Y соотносится с эталонными сигналами Y_1, Y_2, \dots, Y_a , которые получены при различных значениях отклонения параметров $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_a$. Наилучшее совпадение выходного сигнала Y и одного из эталонных сигналов Y_a , ($a = 1, 2, \dots, \Lambda$) говорит о месте дефекта в исследуемом объекте диагностирования D .

Применение кинетического метода на примере контроля и диагностики электрооборудования системы электроснабжения

Решение задачи автоматизированной регистрации и анализа малых изменений кинетики (формы) измерительного сигнала с выхода объекта диагностирования может быть получено путем бесконтактного контроля технического состояния электрооборудования (ЭО) систем электроснабжения (СЭС). Сущность предлагаемого подхода состоит в измерении диагностической информации о техническом состоянии ЭО бесконтактным методом и последующем формировании ДС, содержащей информационные признаки отказов ЭО, представленной в виде векторов цифровой последовательности, из которых формируют матрицу технического состояния.

Идентификация технического состояния и места отказа в ЭО выполняется на основании анализа изменений в цифровых последовательностях сформированных матриц технического состояния. При этом предлагается контроль технического состояния ЭО осуществлять в два этапа: на первом этапе (анализа) формируют библиотеку эталонных описаний возможных технических состояний ЭО (информационных признаков отказов) и запоминают их в виде эталонных матриц технического состояния, а измеренный с объекта диагностирования сигнал, преобразованный в матрицу технического состояния, также запоминают; на втором этапе (идентификации) поэлементно сравнивают полученную матрицу технического состояния с эталонными матрицами технического состояния и идентифицируют техническое состояние ЭО по наибольшему числу совпадений элементов сравниваемых матриц.

На рис. 5 приведены результаты математического моделирования, выполненного с использованием компьютерных технологий (MathCAD 14, Workbench 9 и Proteus 7).

В ходе исследований были синтезированы два негармонических сигнала $u_1(t)$ и $u_2(t)$ (рис. 5, а и б, соответственно), отличие которых друг от друга заключалось в наличии в спектре второго из них 9-й гармонической составляющей (рис. 5, в и г), амплитуда которой составляла 2...3 % от амплитуды первой гармонической составляющей. Технически такая ситуация соответствует, например, исправному трансформатору и трансформатору, имеющему два-три короткозамкнутых витка одной из обмоток. Матрицы технических состояний, сформированные

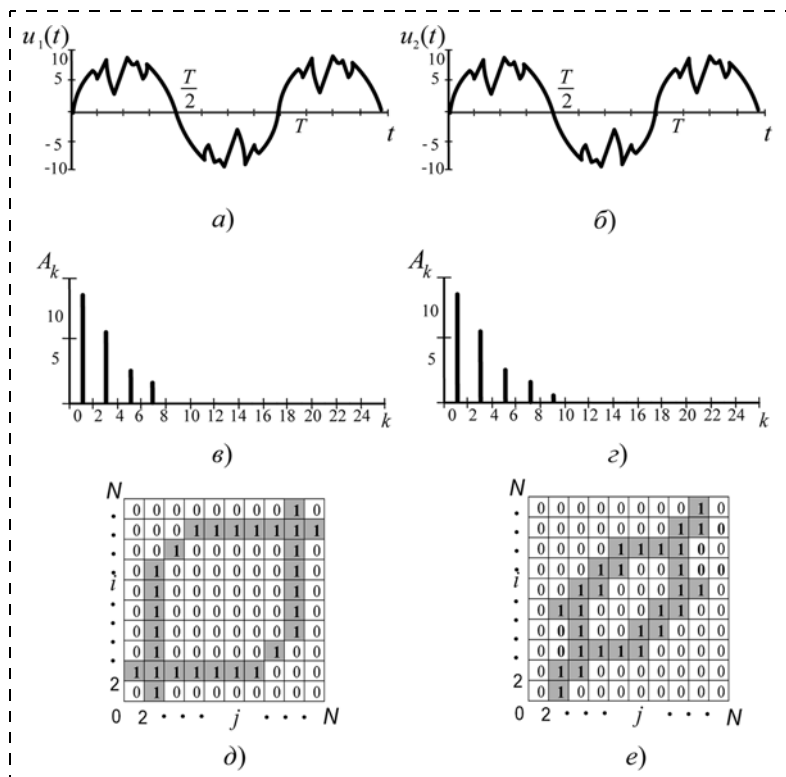


Рис. 5. Результаты математического моделирования: *a* и *б* — синтезированные сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$; *в* и *г* — спектры сигналов $u_1(t)$ и $u_2(t)$; *д* и *е* — матрицы технических состояний

с использованием рассматриваемого метода, представлены на рис. 5, *д* и *е*. Полученные результаты показывают, что ни в форме сигнала, ни в его спектре характерных анализируемых отличий нет, тогда как цифровые последовательности матриц технического состояния различаются существенно.

Проведенное математическое моделирование показало, что ДС, преобразованная к виду векторов цифровой последовательности, из которых формируют матрицу технического состояния, информативна и чувствительна к изменению технического состояния диагностируемого объекта.

Таким образом, в качестве источника диагностической информации в системах бесконтактного контроля и диагностики ТС могут быть эффективно использованы закономерности изменения кинетики выходных сигналов, сопровождающих процессы функционирования данных объектов.

Заключение

В большинстве ТС используются встроенные системы контроля, которые в условиях усложнения их схемного построения и увеличивающегося потока отказов требуют доработки, что экономически затруднено. В связи с этим для повышения эффективности процесса эксплуатации создаваемых и унаследованных ТС представляется целесообразным применение методов и устройств бесконтактного контроля и диагностики, основанных на анализе и

распознавании формы кинетики выходного сигнала, работающих совместно со штатными системами контроля.

Реализация разработанного метода позволит:

- решить вопросы унификации формы представления математической модели ТС;
- повысить оперативность и достоверность диагностических выводов;
- обеспечить диспетчеров технических систем объективной информацией;
- снизить вероятность аварийных ситуаций, внеплановых отключений и простоев ТС.

В целом, предлагаемый в статье кинетический метод контроля и диагностики ТС создает основу для реализации стратегий эксплуатации технических систем по состоянию.

Список литературы

1. Теряев Е. Д., Филимонов Н. Б., Петрин К. В. Мехатроника как компьютерная парадигма развития технической кибернетики // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 6. С. 2—10.
2. Кудрицкий В. Д., Сеница М. А., Чинаев П. И. Автоматизация контроля радиоэлектронной аппаратуры / Под ред. П. И. Чинаева. М.: Сов. радио, 1977. 256 с.
3. Бакланов И. Г. Тестирование и диагностика систем связи. М.: Эко-Трендз, 2001. 264 с.
4. Засецкий А. В., Иванов А. Б., Постников С. Д., Соколов И. В. Контроль качества в телекоммуникациях и связи. Часть II. Под ред. А. Б. Иванова. М.: Компания САЙРУС СИСТЕМ, 2001. 336 с.
5. Косыкин Ю. П. Введение в электромехатронику. СПб: Энергоатомиздат, 1991. 192 с.
6. Цапенко М. П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование.: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1985. 439 с.
7. Дмитриев А. К., Мальцев П. А. Основы теории построения и контроля сложных систем. Л.: Энергоатомиздат. Ленинградское отд., 1988. 192 с.
8. ГОСТ 20911—89 "Техническая диагностика. Термины и определения".
9. Мозгалецкий А. В., Гаскаров Д. В. Техническая диагностика (непрерывные объекты). М.: Высшая школа, 1975. 207 с.
10. Диагностирование и прогнозирование технического состояния авиационного оборудования: Уч. пос. для вузов гражд. авиации / В. Г. Воробьев, В. В. Глухов, Ю. В. Козлов и др. Под ред. И. М. Синдеева. М.: Транспорт, 1984. 191 с.
11. Давыдов П. С. Техническая диагностика радиоэлектронных устройств и систем. М.: Радио и связь, 1988. 256 с.
12. Основы технической диагностики. Кн. 1. Модели объектов, методы и алгоритмы диагноза / В. В. Карибский, П. П. Пархоменко, Е. С. Согомонян, В. Ф. Халчаев: Под ред. П. П. Пархоменко. М.: Энергия, 1976. 464 с.
13. Ding X., Frank P. M. Fault detection via factorization approach // Systems & Control Letters. 1990. № 14. P. 431—436.
14. Харченко В. С., Самарский В. Б., Шумилкин В. А. Функциональный контроль микропроцессорных структур АСКУ. МО СССР, 1990. 251 с.
15. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование динамических систем (обзор) // АИТ. 1980. № 8. С. 96—121.
16. Климов В. В., Крапивин В. Ф., Мкртчян Ф. А., Ничипор А. Е. Методы классификации и качественной интерпретации данных дистанционного мониторинга окружающей среды // Экологические системы и приборы. 2002. № 3. С. 7—12.

17. Киселев Н. В., Сечкин В. А. Техническая диагностика методами нелинейного преобразования. Л.: Энергия. Ленингр. отд.-е., 1980. 112 с.

18. Дуда Р., Харг П. Распознавание образов и анализ сцен: Пер. с англ. / Под ред. В. Л. Стефанюка. М.: Мир, 1976. 511 с.

19. Федоренко В. В. Диагностирование систем передачи сигналов с использованием корреляционных функций // Электронное моделирование. 1993. Т. 15, № 6. С. 65—69.

20. Федоренко В. В. Об оценке достоверности контроля системы передачи сигналов по показателю качества // Электронное моделирование. 1992. № 5. С. 62—66.

21. Федоренко В. В., Будко П. А., Власов В. И. Анализ достоверности функционального диагностирования формирователей сигналов // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1996. № 3. С. 24—31.

22. Дорошев А. В., Шугаев В. И. Диагностирование радиотехнических систем по диаграммам состояний // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. № 5. С. 35—37.

23. Литвинов А. И., Дорошенко Г. П. Совершенствование процесса эксплуатации электрооборудования систем электропитания стационарных узлов связи // Труды всеармейской НПК "Инновационная деятельность в ВС РФ". (СПб., 16—19 ноября 2011 г.). СПб.: ВАС, 2011. С. 93—98.

P. A. Budko, professor, budko62@mail.ru,

A. I. Litvinov, graduated in a military academy, litvinovaleks@mail.ru,

Military Academy of Communications of Marshal of the Soviet Union S. M. Budyonny, St. Petersburg

Kinetic Method of Control and Diagnostics of Technical Means

The main approaches connected with development of a kinetic method of control and diagnostics of technical means are considered in the article. Are mentioned the main restrictions and shortcomings of operating monitoring systems and diagnostics connected by that in process of increase of complexity of controlled systems of function of control also considerably become complicated. Thus there are problems of a choice of rational set of controlled parameters and the organization of procedures of control according to real-life problems. The essence of these problems is defined by development of technical means in the direction of complication of circuit construction and functional communications technical means generates considerable difficulties for ensuring necessary reliability, and also is accompanied by sharp increase in time, material and labor expenditure at service owing to what the increased potential opportunities of technical means can't be completely realized. The analysis of existing scientific means of diagnosing, the main shortcomings and contradictions of considered area are formulated. Definite solutions, based on which the proposed kinetic method-sky monitoring and diagnostic technology is offered. The main direction of development of systems of contactless control and diagnostics of technical means is formulated.

Keywords: technical tool, control and diagnostics, technical condition, kinetics, identification, electric equipment.

References

1. Teriaev E. D., Filimonov N. B., Petrin K. V. Mekhatronika как komputernay paradigma rasvitiya technicheskoi kibernetiki. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 2009. N. 6. P. 2—10.

2. Kudritsky V. D., Sinitsyna M. A., Chinayev P. I. Automatsiya kontrolya radioelektronnoi apparatury / Pod. red. P. I. Chinayev. M.: Sov. radio, 1977. 256 p.

3. Baklanov I. G. Testirovanie i diagnostika system svyazi. M.: Eko Trendz, 2001. 264 p.

4. Zasetsky A. V., Ivanov A. B., Postnikov S. D., Sokolov I. V. Kontrol kachestva v telekommunikatsiyah i svyazi. Part II. Pod. red. A. B. Ivanov M.: Com-paniya CYRUS SYSTEM, 2001. 336 p.

5. Koskin Y. P. Vvedenie v elektromehanotroniku. St. Petersburg: Energoatomizdat, 1991. 192 p.

6. Tsapenko M. P. Izmeritelnye informatcionnye sistemy: Structury i algoritmy, sistemotekhnicheskoe proektirovanie: Uchebnoe posobie dlya vuzov. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Energoatomizdat, 1985. 439 p.

7. Dmitriyev A. K., Maltsev P. A. Osnovy teorii postroeniya i kontrolya slozhnyh system. L.: Energoatomizdat. Leningradskoe otd., 1988. 192 p.

8. GOST 20911—89 "Technicheskaya diagnostica. Terminy i opredeleniya".

9. Mozgalevsky A. V., Gaskarov D. V. Tekhnicheskaya diagnostica (nepreryvnye objecty). M.: Vyschaya hkola, 1975. 207 p.

10. Vorobyov V. G., Glukhov V. V., Kozloy Y. V., etc. Diagnostirovanie i prognozirovanie technicheskogo sostoyania aviacionnogo oborudovania: uchebnoe posobie dlyavuzov grazhdanskoy aviatsii. Pod. red. I. M. Sindeev. M.: Transport, 1984. 191 p.

11. Davydov P. S. Tekhnicheskaya diagnostica radioelektronnih ustroystv i system. M.: Radio i svyaz', 1988. 256 p.

12. Karibsky V. V., Parkhomenko P. P., Sogomonyan E. S., Halchayev V. F. Osnovy i technicheskoi diagnostiki. Book 1. Modeli ob-

jectov, metody i algoritmy diagnosa. Pod red. P. P. Parkhomenko. M.: Energiy, 1976. 464 p.

13. Ding X., Frank P. M. Fault detection via factorization approach. *Systems & Control Letters*. 1990. N. 14. P. 431—436.

14. Harchenko V. S., Samara V. B., Shumilkina V. A. Funktsionalny kontrol mikroprocessornyh struktur ASKU. MO SSSR, 1990. 251 p.

15. Mironovsky L. A. Funktsionalnoe diagnostirovanie dynamicheskikh system (obzor). *AiT*. 1980. N. 8. P. 96—121.

16. Klimov V. V., Krapivin V. F., Mkrtchyan F. A., Nichipor A. E. Methody klassifikatsii i kachestvennoy interpretatsii dannykh distantsionnogo monitoringa okruzayushei sredy. *Ecologicheskije sistemy i pribory*. 2002. N. 3. P. 7—12.

17. Kiselyov N. V., Sechkin V. A. Tekhnicheskaya diagnostica metodami nelineinogo preobrazovaniy. L. Energiya. Leningradskoe. otd. 1980. 112 p.

18. Duda P., Hart P. Raspoznvanie obrazov i analiz sцен: Per. s angl. Pod red. V. L. Stefanyuk. M.: Mir, 1976. 511 p.

19. Fedorenko V. V. Diagnostirovanie system peredachi signalov s ispolzovaniem korreliatsionnyh funktsii. *Electronnoe modelirovanie*. 1993. V. 15. N. 6. P. 65—69.

20. Fedorenko V. V. Ob ocenke dostovernosti kontrolya systemy peredachi signalov po pokazatelju kachestva. *Electronnoe modelirovanie*. 1992. N. 5. P. 62—66.

21. Fedorenko V. V., Budko P. A. Vlasov V. I. Analys dostovernosti funktsionalnogo diagnostirovaniya formirovatelei signalov. *Izvestia vuzov. Radioelektronika*. 1996. N. 3. P. 24—31.

22. Doroshev A. V., Shugayev V. I. Diagnostirovanie radiotekhnicheskikh system po diagramam sostoiania. *Physics of wave processes and radio engineering systems*. 2003. N. 5. P. 35—37.

23. Litvinov A. I., Doroshenko G. P. Sovershenstvovanie protsessu ekspluatatsii elektrooborudovania system elektroosnabzheniya stacionarnykh uzlov svyazi (*St. Petersburg, on November 16—19, 2011*). SPb.: MAT, 2011. P. 93—98.

Д. В. Тупиков, аспирант, **А. Ф. Резчиков**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН,
В. А. Иващенко, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
 Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Подход к прогнозированию значений факторов пожароопасных ситуаций

Предложен подход к прогнозированию значений факторов, вызывающих пожароопасные и взрывоопасные ситуации, основанный на использовании искусственной нейронной сети. Данный подход может быть использован для своевременного определения пожароопасных ситуаций на пожаро- и взрывоопасных производствах и устранения их в режиме реального времени.

Ключевые слова: пожарная безопасность, пожароопасная ситуация, прогнозирование, искусственная нейронная сеть

Введение

Пожароопасные и взрывоопасные производства — это предприятия, на которых производятся, хранятся и транспортируются взрывоопасные продукты или продукты, приобретающие при определенных условиях способность к возгоранию или взрыву [1].

Современные системы пожаротушения на этих производствах характеризуются достаточно высокими показателями по обнаружению и тушению пожаров. Тем не менее, за промежуток времени между обнаружением и устранением пожара может быть нанесен существенный материальный ущерб производству. К тому же после устранения пожара необходимо проведение большого объема работ по ликвидации его последствий.

Проведенный причинно-следственный анализ [2, 3] показал, что предпосылкой к возникновению пожаров является совокупность сочетаний таких факторов, как температура в помещении, оптическая плотность воздуха, сопротивление проводки, сопротивление изоляции проводки и плотность воздуха в помещении.

Возникновение пожаров во многом обусловлено также изъятиями взаимодействия на уровне человек —

система — среда [3], связанными с недостаточной информированностью лица, принимающего решения, и ограниченностью времени для принятия им решений по предотвращению пожара и взрыва.

В связи с этим необходимо прогнозирование значений факторов пожароопасных ситуаций, которое позволит увеличить время для принятия решений по предотвращению пожара.

Взаимосвязь факторов и условий возникновения пожароопасных ситуаций

К необходимым условиям возникновения пожара относятся: наличие горючего вещества, источника зажигания и окислителя (рис. 1).

Для наступления пожара требуются достаточные условия, которые заключаются в одновременном совмещении необходимых условий.

В работе [4] предлагается формализация условий возникновения пожара на основе использования нечетких значений факторов пожароопасных ситуаций, связанных между собой продукционными правилами, образующими базу знаний. Функции принадлежности нечетких переменных и правила базы знаний формируются на основе согласованных мнений экспертов — компетентных в данной области специалистов пожаро- и взрывоопасных производств. Вид функций принадлежности при этом выбирается исходя из простоты их представления и вычисления при условии обеспечения адекватности соответствующей нечеткой переменной описываемому процессу.

Для своевременного устранения пожароопасных ситуаций выполняется прогнозирование значений факторов таких ситуаций и поиск по базе продукционных правил, содержащих их сочетания, приводящие к пожару. Прогнозирование осуществляется на интервалы времени, достаточные для принятия и реализации решений по предотвращению пожароопасных ситуаций.

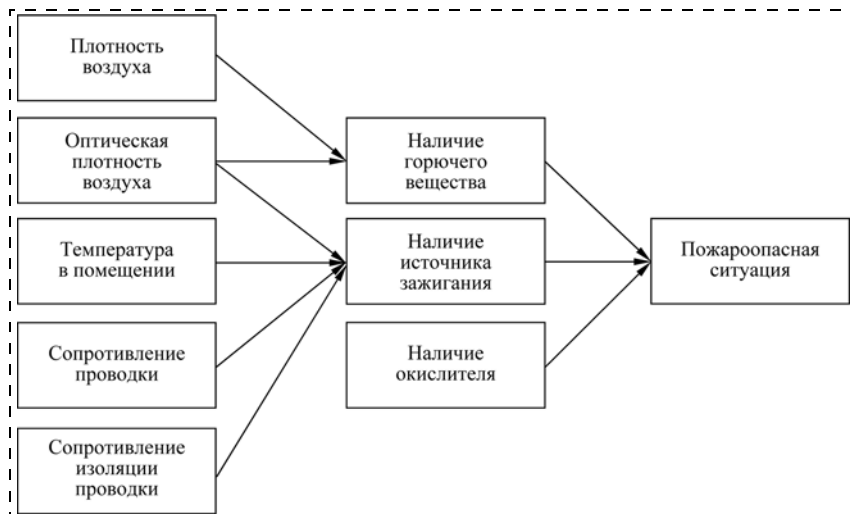


Рис. 1. Взаимосвязь факторов и условий возникновения пожароопасных ситуаций

Прогнозирование значений факторов пожароопасных ситуаций

Для принятия решений по предотвращению пожара необходимо время, которое обеспечивается за счет прогнозирования значений факторов, вызывающих его возникновение. Прогноз выполняется на основе использования искусственной нейронной сети (ИНС).

Общая схема прогнозирования значений факторов пожароопасных ситуаций представлена на рис. 2. Прогнозирование сводится к следующему.

1. Определение значений факторов x_{kl} , $k, l = \overline{1, 5}$, где k — номер фактора: $k = 1$ — температура в помещении, °С; $k = 2$ — оптическая плотность воздуха; $k = 3$ — сопротивление проводки, кОм; $k = 4$ — сопротивление изоляции проводки, МОм; $k = 5$ — плотность воздуха в помещении, кг/л; l — номер момента времени, в который измеряется значение фактора.

Значения факторов измеряются с дискретностью 4 минуты.

2. Определение архитектуры ИНС.

В качестве ИНС выбран трехслойный перцептрон с архитектурой, представленной на рис. 3.

Выбор перцептрона данной архитектуры обусловлен многочисленными машинными экспериментами, проведенными на тестовых данных, полученных со взрыво- и пожароопасных производств.

Для улучшения результатов прогноза значения факторов нормируются в диапазоне $[0, 1]$. Приведение значений факторов к одному диапазону необходимо для того, чтобы ни один из них не имел бóльший вес, чем другие.

Нормирование выполняется по формуле

$$x_{kl}^{\text{норм}} = \frac{x_{kl} - \min x_k}{\max x_k - \min x_k},$$

где $\min x_k$ и $\max x_k$ — соответственно минимальное и максимальное значения k -го фактора.

На входы перцептрона подается по пять ретроспективных нормированных значений по каждому фактору (входных переменных), т. е. входной слой содержит 25 нейронов. С выходов перцептрона снимаются пять прогнозных значений по этим факторам (выходных переменных), т. е. выходной слой включает пять нейронов.

При проведении серии машинных экспериментов установлено, что для получения адекватных результатов прогноза достаточно одного скрытого слоя с числом нейронов, равным полусумме нейронов входного и выходного слоев (15 нейронов).

Нейроны первого слоя перцептрона никаких функций не реализуют. На его входы поступают значения входных переменных, которые через точки ветвления передаются на входы нейронов второго слоя. В качестве активационной функции нейронов второго и третьего слоев принята сигмоидальная функция

$$f(s) = 1/[1 + \exp(-as)],$$

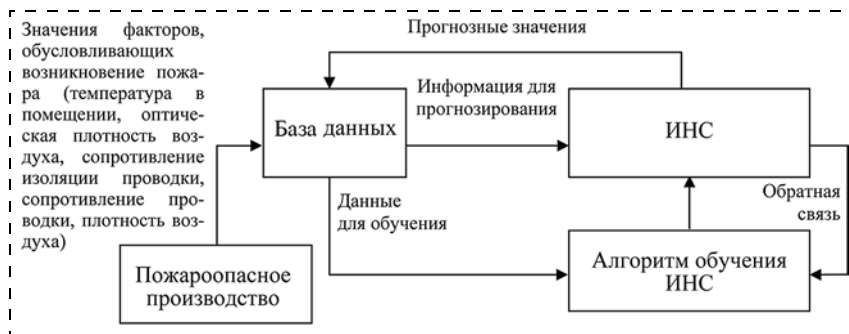


Рис. 2. Общая схема прогнозирования значений факторов пожароопасных ситуаций

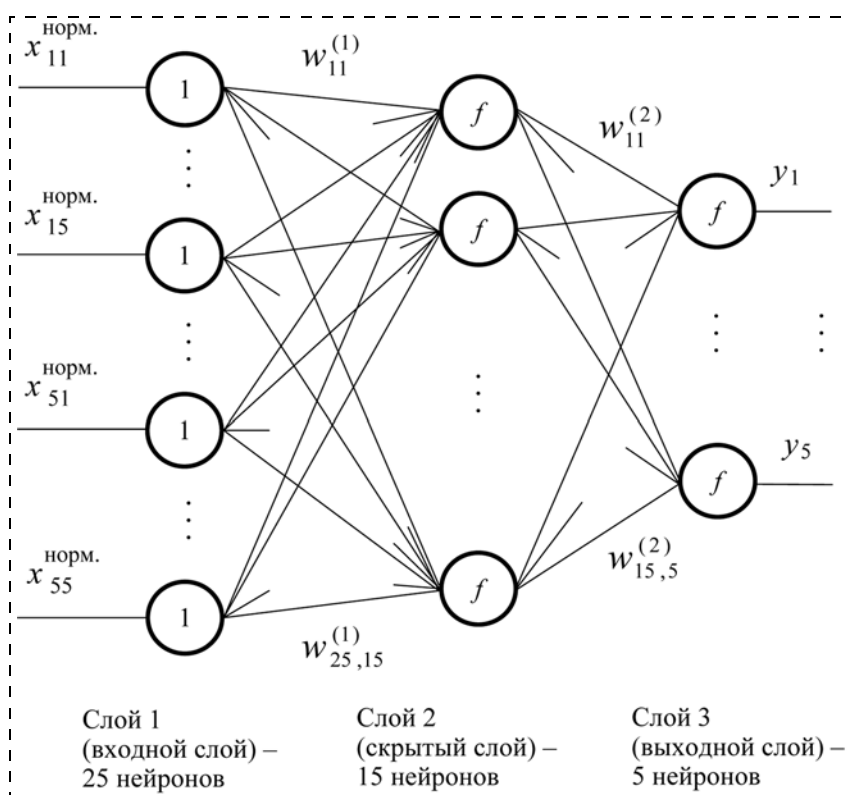


Рис. 3. Архитектура искусственной нейронной сети для прогнозирования значений факторов пожароопасных ситуаций:

$x_{kl}^{\text{норм}}$ — нормированные значения факторов (входных переменных), обуславливающих возможность возникновения пожара; $w_{ij}^{(n)}$ — весовые коэффициенты синтаптических связей; i — нейрон слоя n ; j — нейрон слоя $n + 1$; y_k — прогнозное значения факторов (выходных переменных); f — активационная функция

где a — некоторый характерный параметр, принимающий значения на отрезке $[0, 1]$, значение которого в данном случае принимается равным 1; s — взвешенная сумма входных переменных нейрона.

3. Обучение персептрона.

Несмотря на широкое применение для обучения алгоритма обратного распространения ошибки, он обладает существенным недостатком — не справляется с локальными минимумами функции ошибки.

Это часто приводит к нестабильности в работе персептрона. Поэтому для его обучения применен комбинированный метод, объединяющий данный алгоритм со статистическим алгоритмом — алгоритмом Коши. Коррекция весов нейронов в процессе обучения включает направленную компоненту, вычисляемую на основе алгоритма обратного распространения ошибки, и случайную, определяемую с помощью распределения Коши [6].

Коррекция весов нейронов выполняется по соотношению

$$w_{ij}^{(n)}(m) = w_{ij}^{(n)}(m-1) + \eta \Delta w_{ij}^{(n)}(m) + (1 - \eta)x_c,$$

где m — номер шага итеративного процесса обучения; $w_{ij}^{(n)}(m)$ — значение весового коэффициента синаптической связи, соединяющей i -й нейрон слоя n с j -м нейроном слоя $n + 1$ на m -м шаге обучения; $w_{ij}^{(n)}(m-1)$ — значение весового коэффициента на предыдущем $(m-1)$ -м шаге обучения; $\Delta w_{ij}^{(n)}(m)$ — коррекция весового коэффициента, вычисленная по алгоритму обратного распространения ошибки; x_c — случайное изменение веса нейрона, определяемое в соответствии с распределением Коши; η , $0 < \eta < 1$, — коэффициент скорости обучения персептрона, значение которого в процессе обучения уменьшается по линейному закону от 1 до 0.

Случайное изменение веса определяется в соответствии с распределением Коши:

$$x_c = \eta T(t) \operatorname{tg} P; T(t) = T_0 / (1 + t),$$

где P — вероятность изменения веса нейрона; $T(t)$ — "искусственная" температура; t — "искусственное" время; T_0 — достаточно большое априорно задаваемое число.

По квазиравномерному распределению, заданному на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, генерируется псевдослучайное число, которое подставляется вместо P , и для текущих значений "искусственной" температуры $T(t)$ и скорости обучения η вычисляется значение x_c .

Оценка качества обучения персептрона выполняется по соотношению

$$E = \sum_{r=1}^R e_r,$$

где E — суммарная ошибка обучения персептрона; e_r — ошибка обучения для r -го элемента обучающей последовательности; R — объем обучающей последовательности.

Процесс обучения завершается, когда ошибка E для всего множества выходных переменных достигает предела заданного ограничения или выполняется заранее установленное число итераций обучения.

Как показали машинные эксперименты, для достижения высокой стабильной точности прогнозирования обучающая последовательность должна содержать 360...540 элементов. Выход за эти пределы приводит к ухудшению аппроксимационных свойств персептрона.

В связи с изменением условий эксплуатации пожароопасных производств необходима адаптация персептрона к новым условиям. По этой причине осуществляется регулярное переобучение персептрона на новых ретроспективных данных.

4. Прогнозирование на базе обученного персептрона.

Результаты прогнозирования значений факторов пожароопасных ситуаций

Проведено прогнозирование значений факторов пожароопасных ситуаций для одного из взрыво- и пожароопасных помещений — склада лакокрасочных материалов Саратовского вагонного депо — в среде программирования MATLAB 7.11.0.584 (R2010b).

Для обучения персептрона была использована обучающая последовательность из 360 элементов. При 300 итерациях обучение составляет около 20 с (процессор AMD Ahtlon X2 6000+).

Результаты прогнозирования представлены на рис. 4 (см. третью сторону обложки).

В графах 1—5 таблицы указаны прогнозные, в графах 6—10 — фактические значения, соответственно, температуры в помещении, оптической плотности воздуха, сопротивления проводки, сопротивления изоляции проводки и плотности воздуха в помещении, в графах 11—15 — соответствующие им значения относительной, а в графах 16—20 — абсолютной ошибок прогноза.

Проведенные машинные эксперименты показали, что максимальная относительная ошибка прогноза составляет порядка 10 %.

Заключение

Данный подход к прогнозированию значений факторов, вызывающих пожароопасные и взрывоопасные ситуации, позволяет уменьшить число случаев возникновения пожара и взрыва на производственных объектах и прилегающих к ним территорий, тем самым, снизить наносимый им ущерб, сохранить здоровье и жизни людей.

Использование в качестве искусственной нейронной сети персептрона предложенной архитектуры позволяет осуществлять прогнозирование значений факторов пожароопасных ситуаций на интервалы времени, достаточные для принятия мер по их устранению в режиме реального времени.

Как показали результаты машинных экспериментов, комбинированный алгоритм обучения персептрона данной архитектуры на принятом объеме ретроспективных данных обеспечивает быстрое обучение и достаточно высокую стабильную точность прогнозирования.

Предложенный подход к прогнозированию значений факторов пожароопасных ситуаций может найти применение в системах автоматического определения пожароопасных ситуаций для различных пожаро- и взрывоопасных производств. Его использование позволяет обеспечить компьютерную поддержку принятия решений по устранению пожароопасных ситуаций в режиме реального времени, что очень важно для экстремальных производственных условий.

Список литературы

1. **Корольченко А. Я.** Процессы горения и взрыва. М.: Пожарная наука, 2007. 266 с.
2. **Иванов А. С., Лапковский Р. Ю., Уков Д. А., Филимонюк Л. Ю.** Причинно-следственный подход к расследованию аварийных ситуаций в человеко-машинных системах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 2. С. 38—43.
3. **Резчиков А. Ф., Твердохлебов В. А., Ивашенко В. А.** и др. Человек. Машина. Среда / под. общ. ред. чл.-корр. РАН А. Ф. Резчикова. Саратов: Издательский центр "Наука", 2013. 196 с.
4. **Тупиков Д. В., Ивашенко В. А.** Разработка базы знаний для оперативного управления взрыво- и пожароопасным производством // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2013. № 3 (72). С. 133—137.
5. **Ивашенко В. А., Васильев Д. А., Резчиков А. Ф.** Методы прогнозирования электрических нагрузок в условиях АСУ электропотреблением промышленных предприятий // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 7. С. 52—55.
6. **Новик А. Ю., Ивашенко В. А.** Модели и методы прогнозирования показателей качества листового стекла // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 37—40.

D. V. Tupikov, postgraduate student of the Department of "System engineering" of Saratov State Technical University,

A. F. Rezchikov, director of Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov,

V. A. Ivaschenko, the leading scientific employee of Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, iptmuran@san.ru

The Approach to Predict Values of Factors of Fire-Risk

The approach to forecasting of values of the factors causing fire-dangerous situations in fire and explosive productions is offered in the paper. As such factors are considered: indoors temperature, optical density of air, conducting resistance, resistance of isolation of conducting and air density of indoors. The forecast of values of these factors is based on use of an artificial neural network, as which it is accepted multilayered perceptron. The architecture, activation function and algorithm perceptron learning, which in total enable not only to distinguish of input data from learning sequence, but also to predict tendencies of their change with an admissible accuracy on time intervals, sufficient for adoption of reasonable decisions and measures for prevention of fire-dangerous situations are also offered. At essential change of operating conditions of productions is provided adaptation of perceptron to these conditions by its retraining on new retrospective data in real time.

The offered approach to values forecasting of factors of fire-dangerous situations can be used as a part of automated management systems on explosive and fire-dangerous productions. It will allow to significantly improve of operating conditions of these productions due to decision-making on timely elimination of possible fire-dangerous situations, and, as a result, to reduce damage, which they suffer in the case of fire emergence.

Keywords: fire safety, situation of fire danger, automatic control, artificial neural network, prediction

References

1. **Korol'chenko A. Ja.** Processy gorenija i vzryva. M.: Pozhnauka, 2007. 266 s.
2. **Ivanov A. S., Lapkovskij R. Ju., Ukov D. A., Filimonjuk L. Ju.** Prichinnosledstvennyj podhod k rassledovaniju avarijnyh situacij v cheloveko-mashinnyh sistemah. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. 2012. № 2. P. 38—43.
3. **Rezchikov A. F., Tverдохлебов V. A., Ivaschenko V. A.** i dr. Chelovek. Mashina. Sreda. Pod. obshh. red. chl.-korr. RAN A. F. Rezchikova. Saratov: Izdatel'skij centr "Nauka", 2013. 196 p.

4. **Tupikov D. V., Ivaschenko V. A.** Razrabotka bazy znanij dlja operativnogo upravlenija vzryvo- i pozharoопасnym proizvodstvom. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta*. 2013. N. 3 (72). P. 133—137.
5. **Ivaschenko V. A., Vasil'ev D. A., Rezchikov A. F.** Metody prognozirovanija jelektricheskikh nagruzok v uslovijah ASU jelektropotrebleniem promyshlennyh predpriyatij. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. 2006. N. 7. P. 52—55.
6. **Novik A. Ju., Ivaschenko V. A.** Modeli i metody prognozirovanija pokazatelej kachestva listovogo stekla. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. 2011. N. 1. P. 37—40.



ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ



Управление и информатика в авиакосмических и морских системах



Главный редактор:
ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Ответственный секретарь:
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

- АЛЕКСЕЕВ В. В.
- БАРАНОВ Л. А.
- БЕЛОКОНОВ И. В.
- БУКОВ В. Н.
- ВАСИЛЬЕВ В. И.
- ГОДУНОВ В. А.
- ГУРЕВИЧ О. С.
- ГУРСКИЙ Б. Г.
- ЕФИМОВ В. В.
- ЗАЙЦЕВ А. В.
- КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.
- НЕСТЕРОВ В. А.
- ОХТИЛЕВ М. Ю.
- ПАНКРАТОВ В. М.
- РАСПОПОВ В. Я.
- САБО Ю. И.
- СТЕПАНОВ О. А.
- СОЛДАТКИН В. М.
- ФИЛИМОНОВ Н. Б.
- ХИМЕНКО В. И.
- ЧЕБУРАХИН И. Ф.
- ШИРЯЕВ В. И.
- ШКОЛИН В. П.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

Лукаевич В. И., Соколов С. В.
Решение задачи инерциальной наземной навигации с использованием информации электронных карт 53

Зыбин Е. Ю., Косьянчук В. В., Кульчак А. М.
Аналитическое решение задачи оптимальной реконфигурации системы управления летательного аппарата при отказе нескольких органов управления 59

Сапунков Я. Г., Молоденков А. В.
Алгоритм оптимального в смысле комбинированного функционала разворота космического аппарата в классе конечных движений 67

В. И. Лукасевич, генеральный директор,
ОАО "Центромашпроект",
С. В. Соколов, д-р техн. наук, проф., s.v.s.888@yandex.ru,
Ростовский государственный университет путей сообщения

Решение задачи инерциальной наземной навигации с использованием информации электронных карт

Предложен подход к решению задачи навигации, основанный на аппроксимации траектории движения объекта с помощью электронных карт (ЭК) совокупностью ортодромических траекторий. Показано, что оценка навигационных параметров, реализуемая гауссовским фильтром на ортодромической траектории, во-первых, имеет минимально возможную размерность, а во-вторых, принципиально обеспечивает точную привязку оценок координат к истинной траектории движения, соответствующей ЭК.

Ключевые слова: инерциальная наземная навигация, электронные карты, ортодромическая траектория, гауссовский фильтр

Введение

Точность решения задачи инерциальной навигации подвижных объектов, движущихся по заранее известным с высокой точностью пространственным траекториям — автомобильным, железным и прочим дорогам, — отображаемым на электронных картах (ЭК), может быть существенно повышена за счет учета ограничений, накладываемых положением данных траекторий. В этом случае траектория движения объекта задается аналитически по известным точкам на ЭК (точкам коллокации) путем ее кусочно-постоянной аппроксимации по высоте и кусочно-ортодромической (наикратчайшей) — на сфере Земли. При этом важно отметить, что данные модели траекторий движения формируются только на основе картографической информации [1, 2] и инвариантны к характеру движения объекта и виду его физической модели. Как показано далее, подобное использование ЭК позволяет, во-первых, существенно сократить вычислительные затраты на решение навигационной задачи, а во-вторых, повысить устойчивость и точность процесса оценки навигационных параметров объекта.

В связи с этим оказывается актуальным исследование возможности использования ортодромических моделей пути для повышения общей точности решения задачи навигации объекта и снижения затрат при ее вычислительной реализации.

Модель навигационной системы в гринвичской системе координат

Последующее решение навигационной задачи будем осуществлять с использованием классической бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), для чего получим предварительно уравнения ее вектора состояния. При этом будем использовать описание движения БИНС в гринвичской системе координат (ГСК) с началом в центре Земли, осью $O\eta$, направленной по оси вращения Земли, осью $O\xi$, являющейся линией пересечения плоскостей нулевого меридиана и экватора, осью $O\xi$,

дополняющей систему до правой. Помимо ГСК для синтеза уравнений вектора состояния интегрированной навигационной системы (НС) будем использовать следующие правые системы координат (СК) [3—5]:

- приборную СК (ПСК) $J0xuz$ с началом в центре масс (ЦМ) объекта и осями, направленными по ортогональным осям чувствительности приборов, составляющих измерительный комплекс объекта;
- невращающуюся инерциальную СК (ИСК) $I O\xi_1\eta_1\xi_1$ с началом в центре Земли;
- географическую (или сопровождающую) СК $S OXYZ$ с началом в ЦМ объекта, осью Y , лежащей в плоскости местного меридиана; осью Z , направленной от центра Земли; осью X , дополняющей СК до правой.

Полагаем также, что в измерительный комплекс БИНС входят три датчика угловой скорости (ДУС) и три акселерометра, оси чувствительности которых направлены по осям ПСК. Модели помех измерений чувствительных элементов (ЧЭ) НС аппроксимируем далее белым гауссовским шумом (БГШ). Подобная аппроксимация не создает никаких принципиальных ограничений при решении сформулированных выше задач в силу того, что расширением вектора состояния путем использования формирующих фильтров оказывается возможным получить модель помехи ЧЭ как с требуемыми временными статистическими характеристиками (корреляционной функцией, математическим ожиданием и т. д.), так и с заданной плотностью распределения [6].

Для решения задачи синтеза полного вектора состояния БИНС необходимо предварительно описать динамику изменения параметров ориентации ПСК. Текущая ориентация трехгранника ПСК J относительно ИСК I может быть описана известными уравнениями Пуассона [3, 5]:

$$\dot{D} = D\Theta(\omega_J), D(0) = D_0, \quad (1)$$

где $D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$ — матрица направляющих косинусов d_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, определяющая ориентацию ПСК относительно ИСК;

$\Theta(\omega_J) = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}$, $\omega_J = |\omega_x \ \omega_y \ \omega_z|^T$ — вектор абсолютной угловой скорости вращения ПСК, формируемый по измерениям $Z_d = |Z_x \ Z_y \ Z_z|^T$ трех ортогональных ДУС, расположенных на объекте:

$$\omega_J = Z_d - W_d, \quad (2)$$

$W_d = |W_x \ W_y \ W_z|^T$ — аддитивный вектор шумов измерения ДУС, аппроксимируемый далее БГШ с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивностей D_d .

Для удобства дальнейшего построения уравнений оценки вектора навигационных параметров заменим матричную форму представления правых частей уравнений (1) на векторную. Вводя операцию ν преобразования матрицы A ($\dim A = m \times n$) в вектор [5]:

$A^{(\nu)} = |a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \ a_{12} \ a_{22} \ \dots \ a_{m2} \ \dots \ a_{1n} \ a_{2n} \ \dots \ a_{mn}|^T$, получим

$$\dot{D}^{(\nu)} = D_{\Theta} \omega_J, \quad D^{(\nu)}(0) = D_0^{(\nu)}, \quad (3)$$

где $D_{\Theta} = \begin{vmatrix} 0 & -d_{13} & d_{12} \\ 0 & -d_{23} & d_{22} \\ 0 & -d_{33} & d_{32} \\ d_{13} & 0 & -d_{11} \\ d_{23} & 0 & -d_{21} \\ d_{33} & 0 & -d_{31} \\ -d_{12} & d_{11} & 0 \\ -d_{22} & d_{21} & 0 \\ -d_{32} & d_{31} & 0 \end{vmatrix}$;

d_{ij} — ij -й элемент матрицы D , $i, j = \overline{1, 3}$.

В свою очередь, представление вектора абсолютной угловой скорости (2) в стохастической форме позволяет записать приведенные кинематические уравнения (3) в форме Ланжевена, исходной для последующего синтеза уравнений оценивания:

$$\dot{D}^{(\nu)} = D_{\Theta}(Z_d - W_d). \quad (4)$$

Для окончательного синтеза вектора состояния БИНС необходимо далее в замкнутой дифференциальной форме представить изменение параметров линейного движения ЦМ в ГСК.

Изменение координат ЦМ объекта в ГСК ξ, η, ζ описывается простой системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi} = V_{\xi}, \quad \dot{\eta} = V_{\eta}, \quad \dot{\zeta} = V_{\zeta}, \quad (5)$$

где проекции его линейной скорости $V_{\xi}, V_{\eta}, V_{\zeta}$ подлежат дальнейшему определению как функции всех навигационных параметров объекта.

Для определения этих функциональных зависимостей запишем предварительно основное уравнение инерциальной навигации [3, 4] в проекциях на оси гринвичской СК:

$$\begin{aligned} A_{\xi} &= \dot{V}_{\xi} + (2\Omega_{\eta} + \omega_{\eta})V_{\zeta} - (2\Omega_{\zeta} + \omega_{\zeta})V_{\eta} - g_{\xi}; \\ A_{\eta} &= \dot{V}_{\eta} + (2\Omega_{\zeta} + \omega_{\zeta})V_{\xi} - (2\Omega_{\xi} + \omega_{\xi})V_{\zeta} - g_{\eta}; \\ A_{\zeta} &= \dot{V}_{\zeta} + (2\Omega_{\xi} + \omega_{\xi})V_{\eta} - (2\Omega_{\eta} + \omega_{\eta})V_{\xi} - g_{\zeta}; \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Omega_{\eta} = \Omega$, $\Omega_{\xi} = \Omega_{\zeta} = 0$ — проекции скорости вращения Земли на оси ГСК; $g_{\xi} = g \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}}$, $g_{\zeta} =$

$= g \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}}$, $g_{\eta} = g \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}}$ — проекции

ускорения земного тяготения g ; $V = |V_{\xi} \ V_{\eta} \ V_{\zeta}|^T$ — вектор линейной скорости объекта относительно Земли в проекциях на оси ГСК; $A_G = |A_{\xi} \ A_{\eta} \ A_{\zeta}|^T$ — вектор ускорений, измеряемых акселерометрами, в ГСК; $\omega_G = |\omega_{\xi} \ \omega_{\eta} \ \omega_{\zeta}|^T$ — вектор угловой скорости объекта за счет движения относительно Земли в ГСК.

Вектор угловой скорости объекта за счет движения относительно Земли $\omega_G = |\omega_{\xi} \ \omega_{\eta} \ \omega_{\zeta}|^T$ найдем следующим образом. В проекциях на оси географической СК $S OXYZ$ данный вектор определяется как [3, 5]

$$\begin{aligned} \omega_S &= (r+h)^{-1} | -V_Y \ V_X \ V_X \operatorname{tg} \varphi |^T = \\ &= (r+h)^{-1} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg} \varphi & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где V_X, V_Y, V_Z — проекции линейной скорости объекта на соответствующие оси географической СК; r — радиус Земли; h — текущая высота; φ — широта объекта.

Выражая в гринвичских координатах входящие в данное выражение переменные, имеем

$$(r+h)^{-1} = (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}};$$

$$\begin{vmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{vmatrix} = B(\xi, \eta, \zeta) \begin{vmatrix} V_{\xi} \\ V_{\eta} \\ V_{\zeta} \end{vmatrix},$$

где матрица поворота географической СК относительно ГСК в гринвичских координатах выражается как

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} & 0 & -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \\ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}} & \frac{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}} & -\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \\ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}} & \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}} & \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \end{vmatrix}.$$

Тогда выражение для вектора ω_S трансформируется следующим образом:

$$\omega_S = (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} B(\xi, \eta, \zeta) \begin{vmatrix} V_\xi \\ V_\eta \\ V_\zeta \end{vmatrix}.$$

В то же время вектор $\omega_G = [\omega_\xi \ \omega_\eta \ \omega_\zeta]^T$ связан с вектором ω_S очевидным соотношением

$$\omega_G = B^T(\xi, \eta, \zeta)\omega_S,$$

из которого сразу следует искомое выражение для вектора ω_G в гринвичских координатах:

$$\omega_G = (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} B^T(\xi, \eta, \zeta) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} B(\xi, \eta, \zeta) \begin{vmatrix} V_\xi \\ V_\eta \\ V_\zeta \end{vmatrix} =$$

$$= (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} B^T(\xi, \eta, \zeta) \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) B(\xi, \eta, \zeta) V,$$

где

$$\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

С учетом проделанных преобразований основные уравнения инерциальной навигации (6) в проекциях на оси ГСК в векторной форме принимают вид

$$A_G = \dot{V} + \left(2 \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{vmatrix} + (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} B^T(\xi, \eta, \zeta) \times \right.$$

$$\left. \times \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) B(\xi, \eta, \zeta) V \right) V + g(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Для окончательного синтеза дифференциальной модели вектора скорости V в функции остальных параметров состояния объекта выразим пред-

варительно вектор ускорений, измеряемых акселерометрами, в ГСК A_G через вектор ускорений в ПСК A_J . Поскольку текущая ориентация ГСК относительно ИСК описывается известной матрицей поворота

$$G(\Omega t) = \begin{vmatrix} \cos \Omega t & 0 & -\sin \Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Omega t & 0 & \cos \Omega t \end{vmatrix},$$

а текущая ориентация ПСК относительно ИСК — матрицей поворота D , описываемой уравнением (1), то, следовательно, текущая ориентация ГСК относительно ПСК определяется матрицей $G(\Omega t)D^T$:

$$A_G = G(\Omega t)D^T A_J.$$

В свою очередь, вектор ускорений в ПСК A_J может быть получен по показаниям $Z_a = [Z_{ax} \ Z_{ay} \ Z_{az}]^T$ трех ортогональных акселерометров, расположенных в ЦМ:

$$A_J = Z_a - W_a,$$

где $W_a = [W_{ax} \ W_{ay} \ W_{az}]^T$ — вектор шумов измерения акселерометров, аппроксимируемый БГШ с нулевым средним и матрицей интенсивностей D_a .

Таким образом, вектор ускорений, измеряемых акселерометрами, в ГСК A_G может быть представлен в стохастической форме через вектор их выходных сигналов как

$$A_G = G(\Omega t)D^T(Z_a - W_a),$$

а векторное выражение основного уравнения инерциальной навигации (7), соответственно в виде

$$G(\Omega t)D^T(Z_a - W_a) = \dot{V} + \left(2 \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{vmatrix} + (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times B^T(\xi, \eta, \zeta) \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) B(\xi, \eta, \zeta) V \right) V +$$

$$+ g(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Из (8) непосредственно вытекает искомое векторное стохастическое дифференциальное уравнение вектора скорости V объекта в ГСК (причем сразу в форме Ланжевена):

$$\dot{V} = G(\Omega t) D^T Z_a - \left(2 \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{vmatrix} + (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \times \right. \\ \left. \times B^T(\xi, \eta, \zeta) \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) B(\xi, \eta, \zeta) V \right) V - \\ - g(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} - G(\Omega t) D^T W_a. \quad (9)$$

Объединяя уравнения (4), (5), (9) в единую систему, окончательно получаем искомые уравнения полного стохастического вектора состояния БИНС в ГСК в самом общем случае движения объекта:

$$\dot{D}^{(v)} = D_\Theta(Z_d - W_d), \quad \begin{vmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{vmatrix} = V, \\ \dot{V} = G(\Omega t) D^T Z_a - \left(2 \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{vmatrix} + (\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \times \right. \\ \left. \times B^T(\xi, \eta, \zeta) \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) B(\xi, \eta, \zeta) V \right) \times \\ \times V - g(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2})^{-1} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} - G(\Omega t) D^T W_a. \quad (10)$$

Уравнения состояния БИНС при движении по ортодромии

Введение ограничения на движение объекта в виде движения его по ортодромической траектории позволяет существенно сократить размерность представленного навигационного вектора (10). Действительно, в работе [7] показано, что на ортодромии существует следующая функциональная зависимость между гринвичскими координатами ЦМ объекта:

$$\xi = \cos P_0 \cdot P \eta - \sin P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}; \\ \zeta = \sin P_0 \cdot P \eta + \cos P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}, \quad (11)$$

где P_0, P, a_0, a_1 — известные параметры, определяемые концевыми условиями ортодромии (точками коллокации при аппроксимации траектории по ЭК).

Подобная зависимость гринвичских координат (11) позволяет исключить из процесса интегрирования системы (10), во-первых, дифференциальные уравнения зависимых переменных, а во-вто-

рых, дифференциальные уравнения для их проекций скорости, что реализует первую заявленную выше возможность повышения эффективности решения задачи навигации — сокращение вычислительных затрат. Покажем это.

Дифференцируя соотношения (11), получаем зависимости проекций скорости зависимых переменных (в данном случае V_ξ, V_ζ) от проекции скорости базовой переменной (в данном случае V_η):

$$V_\xi = (\cos P_0 \cdot P + 2 \sin P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta) V_\eta; \\ V_\zeta = (\sin P_0 \cdot P - 2 \cos P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta) V_\eta. \quad (12)$$

Это позволяет оставить в системе интегрируемых уравнений (10) только уравнения для переменных η, V_η , а переменные $\xi, \zeta, V_\xi, V_\zeta$ вычислять с помощью соотношений (11), (12).

Уравнение для проекции скорости базовой переменной V_η определим далее из второго уравнения (6), которое с учетом (12) и движения по поверхности Земли (т. е. $\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2} = r$) принимает вид

$$A_\eta = \dot{V}_\eta + \omega_\zeta (\cos P_0 \cdot P + 2 \sin P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta) \times \\ \times V_\eta - \omega_\xi (\sin P_0 \cdot P - 2 \cos P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta) - \\ - g \frac{\eta}{r} = \dot{V}_\eta + V_\eta [f_1(\eta) \omega_G - f_2(\eta) \omega_G - g \frac{\eta}{r}], \quad (13)$$

где

$$f_1(\eta) = -(\sin P_0 \cdot P - 2 \cos P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta), \\ f_2(\eta) = (\cos P_0 \cdot P + 2 \sin P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta).$$

Доопределяя с учетом этих же соотношений входящие в (13)

- ранее введенный вектор

$$\omega_G = \omega_G(\eta) = \frac{V_\eta}{r} B^T(\eta) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \\ \times B(\eta) \begin{vmatrix} \cos P_0 \cdot P + 2 \sin P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta \\ 1 \\ \sin P_0 \cdot P - 2 \cos P_0 \cdot a_0 (\sqrt{a_1 - \eta^2})^{-1} \eta \end{vmatrix} = \\ = \frac{V_\eta}{r} B^T(\eta) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} B(\eta) \begin{vmatrix} f_2(\eta) \\ 0 \\ -f_1(\eta) \end{vmatrix},$$

где матрица $B(\xi, \eta, \zeta)$ трансформирована в матрицу

$$B(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\sin P_0 \cdot P\eta + \cos P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} & 0 & \frac{\cos P_0 \cdot P\eta - \sin P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} \\ \frac{\cos P_0 \cdot P\eta - \sin P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} \cdot \frac{\eta}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - \eta^2}}{r} & \frac{\sin P_0 \cdot P\eta + \cos P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} \cdot \frac{\eta}{r} \\ \frac{\cos P_0 \cdot P\eta - \sin P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}}{r} & \frac{\eta}{r} & \frac{\sin P_0 \cdot P\eta + \cos P_0 \cdot a_0 \sqrt{a_1 - \eta^2}}{r} \end{pmatrix},$$

- и проекцию ускорения A_η , выраженную через показания акселерометров:

$$A_\eta = \{G(\Omega t)D^T\}_{(2)}(Z_a - W_a),$$

где $\{G(\Omega t)D^T\}_{(2)}$ — вторая строка матрицы $G(\Omega t)D^T$, окончательно получаем из (13) искомое уравнение для проекции скорости базовой переменной V_η :

$$\dot{V}_\eta = \{G(\Omega t)D^T\}_{(2)}(Z_a - W_a) - \frac{V_\eta^2}{r} |f_1(\eta) \ 0 \ f_2(\eta)| B^T(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} B(\eta) \begin{pmatrix} f_2(\eta) \\ 1 \\ -f_1(\eta) \end{pmatrix} + g \frac{\eta}{r}.$$

Таким образом, система уравнений вектора состояния стохастической БИНС при движении объекта по ортодромии приобретает следующий вид:

$$\dot{D}^{(v)} = D_\Theta(Z_d - m_d - W_d); \dot{\eta} = V_\eta;$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta &= \{G(\Omega t)D^T\}_{(2)}(Z_a - W_a) - \\ &\quad - \frac{V_\eta^2}{r} |f_1(\eta) \ 0 \ f_2(\eta)| B^T(\eta) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} B(\eta) \begin{pmatrix} f_2(\eta) \\ 1 \\ -f_1(\eta) \end{pmatrix} + g \frac{\eta}{r}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом остальные навигационные параметры — параметры линейного движения $\xi, \zeta, V_\xi, V_\zeta$ — определяются с помощью соотношений (11), (12).

Очевидно, что по сравнению с (10) размерность системы (14) уменьшена на 4, что при последующей реализации оценок навигационных параметров с помощью обобщенного фильтра Калмана сокращает размерность последнего со 135 до 77. В форме Ланжевена уравнения (14) могут быть представлены следующим образом:

$$\dot{Y}_{opt} = F_{opt}(Y_{opt}, t) + F_{opt1}(Y_{opt}, t)\mu, \quad (15)$$

где $Y_{opt} = [d_{11} \ d_{21} \ \dots \ d_{33} \ \eta \ V_\eta]^T$; $Y_{opt}(0) = Y_0$ опм;

$$\mu = [W_d^T \ W_a^T]^T;$$

$$F_{opt}(Y_{opt}, t) =$$

$$= \begin{pmatrix} D_\Theta Z_d \\ V_\eta \\ \{G(\Omega t)D^T\}_{(2)} Z_a - \frac{V_\eta^2}{r} |f_1(\eta) \ 0 \ f_2(\eta)| B^T(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} B(\eta) \begin{pmatrix} f_2(\eta) \\ 1 \\ -f_1(\eta) \end{pmatrix} + g \frac{\eta}{r} \end{pmatrix};$$

$$F_{opt1}(Y_{opt}, t) = \begin{pmatrix} -D_\Theta & 0 \\ 0 & -\{G(\Omega t)D^T\}_{(2)} \end{pmatrix}.$$

Нелинейная фильтрация навигационных параметров на ортодромической траектории

Важной принципиальной особенностью уравнений (15) является возможность использования методов стохастической нелинейной фильтрации, обеспечивающих оптимальность оценок навигационных переменных по соответствующим критериям. Но для использования этой возможности требуется получить [6] уравнение наблюдения вектора Y (т. е. информационную модель сигнала, аналитически зависящую от компонент вектора Y). В качестве сигнала наблюдения далее рассмотрим измерения дифференциального одометра (ДО) (хронометрического спидометра), широко применяемого в системах наземной навигации, выходной сигнал которого пропорционален модулю скорости объекта:

$$\begin{aligned} Z_{ДО} &= k \sqrt{V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2} + W_{ДО} = \\ &= H(Y, t) + W_{ДО}, \end{aligned} \quad (16)$$

где k — коэффициент пропорциональности; $W_{ДО}$ — помеха измерения, описываемая в общем случае БГШ с нулевым математическим ожиданием и интенсивностью D_d .

При движении по ортодромии функция наблюдения одометра $H(Y_{opt}, t)$ с учетом соотношений (12) принимает вид

$$\begin{aligned} H(Y_{opt}, t) &= k\sqrt{V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2} = \\ &= kV_\eta \sqrt{\left(\cos P_0 \cdot P + 2\sin P_0 \cdot a_0 \left(\sqrt{a_1 - \eta^2}\right)^{-1} \eta\right)^2 + 1 +} \\ &\quad \sqrt{\left(\sin P_0 \cdot P - 2\cos P_0 \cdot a_0 \left(\sqrt{a_1 - \eta^2}\right)^{-1} \eta\right)^2} = \\ &= k \cdot V_\eta \sqrt{P^2 + 4a_0^2(a_1 - \eta^2)^{-1} \eta^2 + 1} \end{aligned}$$

и явно зависит уже не только от скорости, но и от координаты объекта, т. е. от всех в данном случае параметров линейного движения, что существенно улучшает наблюдаемость вектора навигационных параметров объекта.

Уравнения (15), (16), полученные в стандартной форме "объект—наблюдатель", позволяют построить оценку навигационного вектора в форме обобщенного гауссовского фильтра, наиболее эффективного на сегодняшний день по критерию "точность — вычислительные затраты" [6]:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{opt} &= \\ &= F_{opt}(\hat{Y}_{opt}, t) + K(\hat{Y}_{opt}, t) [Z_{до} - H(Y_{opt}, t)]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$k(\hat{Y}_{opt}, t) = r(\hat{Y}_{opt}, t) \frac{\partial H^T(\hat{Y}_{opt}, t)}{\partial \hat{Y}_{opt}} D_D^{-1},$$

$$\begin{aligned} \dot{R}(\hat{Y}_{opt}, t) &= \frac{\partial F_{opt}(\hat{Y}_{opt}, t)}{\partial \hat{Y}_{opt}} R(\hat{Y}_{opt}, t) + \\ &+ R(\hat{Y}_{opt}, t) \frac{\partial F_{opt}^T(\hat{Y}_{opt}, t)}{\partial \hat{Y}_{opt}} + F_{opt} I(\hat{Y}_{opt}, t) \times \\ &\times D_\mu F_{opt}^T(\hat{Y}_{opt}, t) - K(\hat{Y}_{opt}, t) D_D K^T(\hat{Y}_{opt}, t), \end{aligned}$$

где \hat{Y}_{opt} — вектор текущей оценки вектора состоя-

ния БИНС $Y_{opt}(t)$, $D_\mu = \begin{vmatrix} D_d & 0 \\ 0 & D_a \end{vmatrix}$, $R(\hat{Y}_{opt}, t)$ — апостериорная ковариационная матрица,

$$\hat{Y}_0 = M(Y_0), R_0 = M\{(Y_0 - \hat{Y}_0)(Y_0 - \hat{Y}_0)^T\}.$$

Преимуществами алгоритма оценки (17) являются, во-первых, его минимально возможная размерность, а во-вторых, принципиально обеспечиваемая им точная привязка оценок координат и проекций линейной скорости объекта к истинной

траектории движения, соответствующей ЭК: координаты движения объекта всегда принадлежат траектории, построенной по ЭК (так как оценки параметров линейного движения $\xi, \zeta, V_\xi, V_\zeta$ автоматически определяются с помощью соотношений (11), (12)), что не требует дополнительных алгоритмов определения на истинной траектории координат объекта, наименее отличающихся от координат, реально вырабатываемых навигационной системой.

Для иллюстрации возможности эффективного использования предложенного навигационного алгоритма было проведено численное моделирование уравнений оценивания (17).

Пример. Моделирование осуществлялось на временном интервале $t \in [0; 1000]$ с шагом $\Delta t = 0,01$ с методом Рунге—Кутты 4-го порядка. Во избежание увеличения размерности уравнений фильтра при моделировании в качестве модели помех был использован аддитивный гауссовский вектор—шум с нулевым математическим ожиданием и интенсивностью для: датчиков угловой скорости — $(10^{-3} \text{ рад/с})^2 \text{ с}$, акселерометров — $(10^{-5} \text{ м/с}^2)^2 \text{ с}$, одометра — $(10^{-2} \text{ м/с})^2 \text{ с}$. По окончании временного интервала моделирования максимальные ошибки компонент вектора Y составили: по проекциям линейной скорости — 0,25 м/с, по углам ориентации — 1,5', по широте — 7 м, по долготе — 4 м, по высоте — 1 м (после пересчета направляющих косинусов в углы Эйлера—Крылова и гринвичских координат в географические), что сопоставимо с точностью оценивания параметров линейного движения спутниковыми средствами в дифференциальном режиме измерений.

Заключение

Полученные результаты и числовые оценки позволяют сделать вывод как о теоретическом решении задачи навигации БИНС с использованием ЭК, так и о возможности эффективного практического использования предложенного подхода.

Список литературы

1. Бугаевский Л. М. Математическая картография. М.: Златоуст, 1998. 400 с.
2. Билич Ю. С., Васмут А. С. Проектирование и составление карт. М.: Недра, 1984. 368 с.
3. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 580 с.
4. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
5. Соколов С. В., Погорелов В. А. Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем. М.: Физматлит, 2009. 184 с.
6. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
7. Соколов С. В. Синтез аналитических моделей пространственных траекторий и их применение для решения задач спутниковой навигации // Прикладная физика и математика. 2013. Т. 1. № 2. С. 3—12.

Solution of the Problem of Inertial Earth Navigation Using Information of Electronic Maps

An approach to solving the problem of navigation, based on the approximation of the movement trajectory of the object by means of electronic maps by set of great circle trajectories is considered.

For all objects moving from the known spatial trajectories, — air, land, maritime transport, the use of electronic maps allows to describe analytically the trajectory of an object by its piecewise constant approximation of height and piecewise Great Circle — on the sphere of the Earth. Because these models trajectories are formed on the base of cartographic information, they are invariant to the nature of an object's motion and its physical model, making it all-purpose for any application to aerospace objects.

The paper analyzes the possibility of using great circle path model for solving the problem of navigation in order to reduce the computational cost with a stochastic estimation of the navigation parameters, as well as improve the accuracy of object positioning.

Navigation solution is seen in the Greenwich coordinate system using analytic relations arising between the Greenwich coordinates on the great circle path. Applying these ratios significantly simplifies the equation of the state vector of the navigation system while reducing the dimension of the observed parameters.

It is shown that the estimation of navigation parameters Gaussian filter implemented by great circle trajectory, first, has the lowest possible dimension, and secondly, in principle provides accurate snap count coordinates to the true trajectory of movement corresponding to the electronic map.

Keywords: inertial Earth navigation, electronic maps, great circle trajectory, Gaussian filter

References

1. Bugaevskiy L. M. Matematicheskaya kartografiya. M.: Zlatooust, 1998. 400 p.
2. Bilich Yu. S., Vasmut A. S. Proektirovanie i sostavlenie kart. M.: Nedra, 1984. 368 p.
3. Andreev V. D. Teoriya inertsiyal'noy navigatsii. Avtonomnye sistemy. M.: Nauka, 1966. 580 p.
4. Ishlinskiy A. Yu. Orientatsiya, giroskopy i inertsiyal'naya navigatsiya. M.: Nauka, 1976. 672 p.

5. Sokolov S. V., Pogorelov V. A. Osnovy sinteza mnogostrukturnykh besplatformennykh navigatsionnykh sistem. M.: Fizmatlit, 2009. 184 p.

6. Tikhonov V. I., Kharisov V. N. Statisticheskii analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustroystv i sistem. M.: Radio i svyaz', 1991. 608 p.

7. Sokolov S. V. Sintez analiticheskikh modeley prostranstvennykh traektoriy i ikh primenenie dlya resheniya zadach sputnikovoy navigatsii. *Prikladnaya fizika i matematika*. 2013. V. 1, N. 2. P. 3—12.

УДК 681.51

Е. Ю. Зыбин, канд. техн. наук, вед. инженер, В. В. Косьянчук, д-р техн. наук, гл. науч. сотр.,
А. М. Кульчак, нач. сектора, amkulchak@2100.gosniias.ru,
ФГУП ГосНИИАС

Аналитическое решение задачи оптимальной реконфигурации системы управления летательного аппарата при отказе нескольких органов управления¹

Рассматривается алгоритм оптимальной аппроксимации решения задачи реконфигурации управления летательным аппаратом аналитическими зависимостями. Вводится понятие приближенного условия разрешимости, которое позволяет оценить точность получаемого решения заранее, до непосредственного решения задачи реконфигурации. Показывается, что в случае удовлетворения этого условия решение задачи реконфигурации управления может быть аналитически оптимизировано в смысле нормы невязки результирующей матрицы эффективности управления. Это позволяет сохранить все достоинства аналитического решения с сохранением его заданной точности.

Ключевые слова: оптимальная аналитическая реконфигурация, приближенное решение линейных матричных уравнений, приближенное условие разрешимости

Введение

Системы управления (СУ) перспективных летательных аппаратов отличаются высокой надежностью и отказоустойчивостью. Реализация вычис-

лительной части СУ предполагает 3—4-кратное резервирование каналов управления. Тем не менее, только аппаратного резервирования недостаточно для обеспечения отказоустойчивости СУ. В алгоритмы СУ перспективных самолетов введена возможность реконфигурации структуры в случае отказов органов управления, использующая функциональную избыточность рулевых поверхностей.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-08-767, № 14-08-01099).

Отказы органов управления относятся к группе критических отказов, возникновение которых часто приводит к авиационному происшествию и могут быть вызваны отказами приводов, повреждениями линий связи приводов с вычислителями, отказами вычислителей и т. д. Независимо от причины отказа органа управления проявляется в заклинивании управляющей поверхности в балансировочном либо произвольном положении.

В работе [1] решена задача описания всех возможных законов управления летательным аппаратом при одновременном отказе нескольких управляющих поверхностей путем перераспределения управляющих воздействий на исправные органы управления. Полученное решение записывается в аналитическом виде в предположении полной разрешимости задачи реконфигурации.

Однако при возникновении отказов, приводящих к неразрешимости задачи реконфигурации, не все законы из описываемого множества способны гарантированно предотвратить потерю устойчивости и управляемости ЛА. Необходимость же продолжения полета даже в условиях серьезных отказов является обязательным требованием к системе управления любого самолета.

1. Математическая основа

Суть аналитического подхода к реконфигурации системы управления при отказах состоит в том, что задача сводится к решению уравнения вида [1]

$$AX = B, \quad (1)$$

где A и B — числовые или символьные заданные матрицы параметров (коэффициентов); X — матрица с неизвестными действительными числовыми или символьными элементами.

В работе [2] сформулирована и доказана следующая теорема о точном аналитическом решении линейного уравнения.

Теорема 1.

Левостороннее линейное матричное уравнение

$$AX = B \quad (2)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие разрешимости

$$\bar{A}^L B = 0, \quad (3)$$

при этом все множество решений описывается формулой

$$X = [\tilde{A}^R \ \bar{A}^R] \begin{bmatrix} \tilde{A}^L B \\ \Theta \end{bmatrix} = \tilde{A}^R \tilde{A}^L B + \bar{A}^R \Theta, \quad (4)$$

где Θ — матрица с произвольными элементами, а каноническое разложение матрицы A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}^L \\ \bar{A}^L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [\tilde{A}^R \ \bar{A}^R]^{-1}. \quad (5)$$

Здесь и далее каноническим разложением матрицы A называют разложение вида

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}^L \\ \bar{A}^L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [\tilde{A}^R \ \bar{A}^R]^{-1},$$

где \bar{A}^L , \bar{A}^R — левый и правый матричные делители нуля максимального ранга, удовлетворяющие тождествам $\bar{A}^L A = 0$, $A \bar{A}^R = 0$, соответственно; \tilde{A}^L , \tilde{A}^R — левый и правый канонизаторы (делители единицы) максимального ранга, удовлетворяющие тождеству $\tilde{A}^L A \tilde{A}^R = I$.

Каноническое разложение (5) фактически формализует прямые и обратные эквивалентные преобразования матрицы A , которые легко могут быть определены аналитически.

Ключевым моментом получения решения (4) является выполнение условия разрешимости (3), характеризующего совместность уравнения (2). Тем не менее, нередко встречаются случаи, при которых условие разрешимости (3) не выполняется, а уравнение (2) не имеет точного решения.

В этом случае, как правило, получают решение с использованием псевдообратной матрицы. При этом решение существует всегда, но появляется ряд существенных ограничений, присущих задачам синтеза систем управления [3]. Одним из ограничений использования псевдообращения является чрезмерное ужесточение требования к получаемому решению — накладывается условие минимизации суммы квадратов его сингулярных чисел, что не всегда требуется в практических задачах. Кроме того, единственность решения устраняет принципиальную возможность использования аналитического решения для настройки коэффициентов усиления по режимам полета, продемонстрированную в работе [1].

В связи с этим рассмотрим возможность аппроксимации решения задачи синтеза многосвязных систем управления, приводимой к линейным уравнениям вида (2), аналитическими зависимостями.

Перейдем от точного аналитического решения (4), удовлетворяющего условиям разрешимости (3), к некоторому приближенному решению, которое может быть оценено некоторой нормой невязки $E = AX - B$:

$$\|E\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\min\{m, n\}} \sigma_i^p \right)^{1/p}, \quad (6)$$

где σ_i — сингулярные числа получаемой невязки.

В качестве нормы могут быть использованы следовая норма ($p = 1$), норма Фробениуса ($p = 2$), спектральная норма ($p = \infty$) и т. д., по сути, не меняющие главное — оценку степени близости невязки (6) к нулю.

Далее будем использовать норму Фробениуса, для которой справедливо следующее равенство:

$$\|E\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^p} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |e_{ij}|^2}, \quad (7)$$

а вывод формул будем проводить с использованием только ортогональных преобразований, что позволит распространить полученные результаты на любые нормы вида (6) вследствие их инвариантности к таким преобразованиям.

Сформулируем и докажем следующую теорему об оптимальном решении линейного левостороннего матричного уравнения.

Теорема 2.

Левостороннее линейное матричное уравнение

$$AX = B + E, \quad (8)$$

где матричная норма невязки $\|E\|_p \leq \varepsilon$, разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется приближенное условие разрешимости

$$\|\bar{U}B\|_p \leq \varepsilon, \quad (9)$$

при этом все множество оптимальных решений, минимизирующих норму невязки $\|E\|_p = \min$, описывается формулой

$$X = [\tilde{V} \quad \bar{V}] \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}B \\ \Theta \end{bmatrix} = \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}B + \bar{V}\Theta = A^+B + \bar{V}\Theta, \quad (10)$$

где Θ — матрица с произвольными элементами, а сингулярное разложение матрицы A имеет вид

$$A = U^T \Sigma V^T = [\tilde{U}^T \quad \bar{U}^T] \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}^T \\ \bar{V}^T \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \bar{U} \end{bmatrix} [\tilde{U}^T \quad \bar{U}^T] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \tilde{V}^T \\ \bar{V}^T \end{bmatrix} [\tilde{V} \quad \bar{V}] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Доказательство. Подставим (11) в исходное уравнение (8) и умножим обе части уравнения слева на матрицу левых сингулярных векторов U :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}^T \\ \bar{V}^T \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \bar{U} \end{bmatrix} B + \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \bar{U} \end{bmatrix} E. \quad (13)$$

Из (13) следует условие на невязку $\bar{U}E = -\bar{U}B$, откуда по формуле решения левостороннего урав-

нения (4) вследствие его тождественной разрешимости можно записать выражение

$$E = \|\tilde{U}^R \quad \bar{U}^R\| \begin{bmatrix} -\bar{U}B \\ \Psi \end{bmatrix},$$

которое с учетом свойств ортогональных матриц (12) преобразуется в формулу всего множества возможных невязок вида

$$E = [\bar{U}^T \quad \tilde{U}^T] \begin{bmatrix} -\bar{U}B \\ \Psi \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Из (14) и (7) следует, что норма невязки не может быть меньше нормы $\|\bar{U}B\|$, а условием ее минимальности является равенство нулю свободных переменных $\Psi = 0$:

$$E = -\bar{U}^T \bar{U}B. \quad (15)$$

Подставим (15) в (13) и запишем эквивалентное уравнение сокращенной размерности $\tilde{\Sigma} \tilde{V}^T X = \tilde{U}B$, которое всегда разрешимо и имеет множество решений, соответствующее выражению (10). **Теорема доказана.**

Заметим, что при $\Theta = 0$ формула (10) соответствует частному решению, в точности совпадающему с псевдообратным, обеспечивающему помимо минимальности нормы невязки минимальность нормы искомой переменной.

В настоящее время авторам не известны алгоритмы вычисления сингулярного разложения в аналитическом виде, поэтому формулы (10) для получения аналитического решения в явном виде не применимы.

Однако заметим, что вычисление левых сингулярных векторов, соответствующих нулевым сингулярным числам, для проверки условия разрешимости (9) можно проводить по следующей аналитической формуле:

$$\bar{U} = (\bar{A}^L (\bar{A}^L)^T)^{-1/2} \bar{A}^L.$$

Матрица правых сингулярных векторов \bar{V} в (10) может быть вычислена по аналогичной дуальной формуле, однако по постановке задачи вследствие равенства по определению $A\bar{V} = 0$ может быть без потери общности заменена на \bar{A}^R .

Последним шагом получения аналитического решения является определение псевдообратной матрицы $A^+ = \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}$ в выражении (10). Существуют несколько вариантов аналитического вычисления псевдообратной матрицы. Здесь приведем теорему об аналитической формуле псевдообратной матрицы, сформулированную и доказанную в работе [4].

Теорема 3.

Пусть матрица A имеет следующее скелетное разложение:

$$A = LR,$$

тогда ее псевдообратная матрица определяется формулой

$$A^+ = R_A^T (L_A^T B_A R_A^T)^{-1} L_A^T.$$

Заметим, что матрицы скелетного разложения можно получить в аналитическом виде из канонического разложения (5) по следующим формулам:

$$L_A = \begin{bmatrix} \tilde{A}^L \\ \bar{A}^L \end{bmatrix}^{-1} [I \ 0]; \quad R_A = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{A}^R \ \bar{A}^R]^{-1}.$$

В итоге может быть сформулирована следующая теорема об оптимальном аналитическом решении линейного уравнения.

Теорема 4.

Левостороннее матричное уравнение

$$AX = B + E,$$

где матричная норма невязки $\|E\|_p \leq \varepsilon$, разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется приближенное условие разрешимости

$$\|(\bar{A}^L \bar{A}^{L^T})^{-1/2} \bar{A}^L B\|_p \leq \varepsilon,$$

при этом все множество оптимальных решений, минимизирующих норму невязки $\|E\|_p = \min$, описывается формулой

$$X = R_A^T (L_A^T B_A R_A^T)^{-1} L_A^T B + \bar{A}^R \Theta,$$

где Θ — матрица с произвольными элементами;

$$L_A = \begin{bmatrix} \tilde{A}^L \\ \bar{A}^L \end{bmatrix}^{-1} [I \ 0]; \quad R_A = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{A}^R \ \bar{A}^R]^{-1},$$

а каноническое разложение матрицы A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}^L \\ \bar{A}^L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \ 0 \\ 0 \ 0 \end{bmatrix} [\tilde{A}^R \ \bar{A}^R]^{-1}.$$

Рассмотрим далее возможность применения полученного результата для решения задачи оптимальной реконфигурации системы управления самолетом в случае возникновения отказов органов управления.

2. Основной результат

Пусть объект управления представлен в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (16)$$

где A — матрица собственной динамики; B — матрица эффективности управления; x — вектор состояния; u — вектор управления.

В случае отказа органов управления модель объекта примет вид

$$\dot{x}_f = Ax_f + BFu = Ax_f + B_f u_f, \quad (17)$$

где матрица F представима в виде диагональной матрицы с единицами на главной диагонали и нулями в местах, соответствующих отказавшему органу управления.

Будем искать управление u_f в виде суммы штатного u и компенсирующего u_p , которое определяется матрицей реконфигурации G_p и также зависит от штатного:

$$u_f = u + u_p = u + G_p u = (I + G_p)u.$$

Тогда система с реконфигурацией управления будет иметь вид

$$\dot{x}_f = Ax_f + B_f(I + G_p)u = Ax_f + B_p u.$$

Считая, что момент компенсации отказа совпадает с моментом его обнаружения, что соответствует совпадению начальных условий $x(t_0) = x_f(t_0)$, равенство векторов состояния до и после отказа $x = x_f$ достигается при выполнении тождества $B_f(I + G_p) = B$, записанного в виде линейного матричного уравнения [1]

$$\underbrace{B_f}_{A} \underbrace{G_p}_{X} = \underbrace{B - B_f}_{B}. \quad (18)$$

В результате задача реконфигурации сводится к разрешению матричного уравнения (18) относительно неизвестной матрицы G_p .

Аналитическое решение задачи реконфигурации вида (4), в случае выполнения условия ее точной разрешимости вида (3) $\bar{B}_f^L (B - B_f) = \bar{B}_f^L B = 0$ приводящее к полному совпадению матриц эффективности управления до и после отказа $B_p = B$, рассмотрено в работе [1]:

$$G_p = \bar{B}_f^R \bar{B}_f^L (B - B_f) + \bar{B}_f^L \Theta.$$

В случае невозможности получения точного решения задача реконфигурации заключается в достижении приближенного равенства $B_p = B + E$, где невязка E удовлетворяет условию минимальности некоторой нормы вида (6). В работах [5, 6] показано, что такая постановка задачи соответствует максимальному сохранению стереотипа управления летчика и минимальному отклонению собственных значений замкнутой системы.

Воспользуемся результатами теоремы 4 и сформулируем ее для решения задачи реконфигурации системы управления.

Теорема 5.

Задача реконфигурации управления вида

$$B_f G_p = B - B_f + E, \quad (19)$$

где матричная норма невязки $\|E\|_p \leq \varepsilon$, разрешима тогда и только тогда, когда выполняется приближенное условие разрешимости

$$\|(\bar{B}_f^L \bar{B}_f^{L\top})^{-1/2} \bar{B}_f^L (B - B_f)\|_p \leq \varepsilon, \quad (20)$$

при этом все множество оптимальных решений, минимизирующих норму невязки $\|E\|_p = \min$, описывается формулой

$$G_p = R_{B_f}^\top (L_{B_f}^\top B_{B_f} R_{B_f}^\top)^{-1} L_{B_f}^\top (B - B_f) + \bar{B}_f^R \Theta, \quad (21)$$

где Θ — матрица с произвольными элементами;

$$L_{B_f} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_f^L \\ \bar{B}_f^L \end{bmatrix}^{-1} [I \ 0]; \quad R_{B_f} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{B}_f^R \ \bar{B}_f^R]^{-1}, \quad (22)$$

а каноническое разложение матрицы B_f имеет вид

$$B_f = \begin{bmatrix} \tilde{B}_f^L \\ \bar{B}_f^L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \ 0 \\ 0 \ 0 \end{bmatrix} [\tilde{B}_f^R \ \bar{B}_f^R]^{-1}. \quad (23)$$

Прагматический смысл полученного результата заключается в следующем. При выполнении приближенного условия разрешимости (20) гарантируется, что задача реконфигурации управления на основе соотношений (21) будет решена с априорно заданной точностью, не превышающей ε . Это позволяет сохранить все достоинства аналитического решения и использовать полученное множество оптимальных законов управления для решения дополнительных задач (настройки коэффициентов усиления по режимам полета, упрощения реализации в СУ ЛА и т. д.).

3. Пример

Для исследования работы алгоритмов реконфигурации использовали линеаризованную систему дифференциальных уравнений движения среднемагистрального пассажирского самолета вида (16), где

$$x = [\Delta V \ \Delta \alpha \ \Delta \theta \ \Delta \omega_z \ \Delta \beta \ \Delta \omega_x \ \Delta \omega_y \ \Delta \gamma]^\top,$$

$$u = [\delta_{в \ лев} \ \delta_{в \ пр} \ \varphi \ \delta_{н} \ \delta_{э \ лев} \ \delta_{э \ пр} \ \delta_{и \ лев} \ \delta_{и \ пр}]^T,$$

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые скорости крена, рыскания и тангажа; $\alpha, \Theta, \gamma, \beta$ — углы атаки, наклона траектории, крена и скольжения; V — скорость полета; $\delta_{в \ лев/пр}$ — угол отклонения левого/правого руля высоты; φ — угол отклонения стабилизатора; $\delta_{н}$ — угол отклонения руля направления; $\delta_{э \ лев/пр}$ — угол

отклонения левого/правого элерона; $\delta_{и \ лев/пр}$ — угол отклонения левой/правой секции интерцепторов.

В общем виде матрица эффективности управления имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12} & b_{17} \\ b_{21} & b_{21} & 0 & 0 & b_{25} & b_{25} & b_{27} & b_{27} \\ -b_{21} & -b_{21} & 0 & 0 & -b_{25} & -b_{25} & -b_{27} & -b_{27} \\ b_{41} & b_{41} & b_{43} & 0 & b_{45} & b_{45} & b_{47} & b_{47} \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & 0 & 0 & b_{57} & -b_{57} \\ b_{61} & -b_{61} & 0 & b_{64} & b_{65} & -b_{65} & b_{67} & -b_{67} \\ b_{71} & -b_{71} & 0 & b_{74} & b_{75} & -b_{75} & b_{77} & -b_{77} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Смоделируем отказ двух секций интерцепторов, при котором матрица отказов соответствует $F = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0])$, а матрица эффективности управления с отказами имеет вид

$$B_f = BF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{21} & 0 & 0 & b_{25} & b_{25} & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{21} & 0 & 0 & -b_{25} & -b_{25} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{41} & b_{43} & 0 & b_{45} & b_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{61} & -b_{61} & 0 & b_{64} & b_{65} & -b_{65} & 0 & 0 \\ b_{71} & -b_{71} & 0 & b_{74} & b_{75} & -b_{75} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Определим матрицы канонического разложения B_f вида (23):

$$\bar{B}_f^L = \bar{U}_{B_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B}_f^R = \begin{bmatrix} \frac{b_{25}}{b_{21}} & 0 & 0 \\ -\frac{b_{25}}{b_{21}} & 0 & 0 \\ -2 \frac{(b_{21} b_{45} - b_{25} b_{41})}{b_{21} b_{43}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B}_f^L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2b_{21}} & 0 & 0 & \frac{r_1 - r_2}{2b_{21}b_{54}r_3} & \frac{b_{21}b_{75} + b_{25}b_{71}}{2b_{21}r_3} & \frac{b_{21}b_{65} + b_{25}b_{61}}{2b_{21}r_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2b_{21}} & 0 & 0 & \frac{r_1 + r_2}{2b_{21}b_{54}r_3} & \frac{b_{21}b_{75} - b_{25}b_{71}}{2b_{21}r_3} & \frac{b_{21}b_{65} - b_{25}b_{61}}{2b_{21}r_3} & 0 \\ 0 & \frac{b_{41}}{b_{21}b_{43}} & 0 & \frac{1}{b_{43}} & \frac{r_4r_5}{b_{21}b_{43}b_{54}r_3} & \frac{b_{17}r_4}{b_{21}b_{43}r_3} & \frac{b_{61}r_4}{b_{21}b_{43}r_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_{54}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_5}{b_{54}r_3} & \frac{b_{71}}{r_3} & \frac{b_{61}}{r_3} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B}_f^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$r_1 = b_{25}b_{61}b_{74} - b_{25}b_{64}b_{71}, r_2 = b_{21}b_{64}b_{75} - b_{21}b_{65}b_{74}, \\ r_3 = b_{61}b_{75} - b_{65}b_{71}, r_4 = b_{21}b_{45} - b_{25}b_{41}, \\ r_5 = b_{61}b_{74} - b_{64}b_{71}.$$

Запишем приближенное условие разрешимости

$$\bar{U}_{B_f} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{17} & b_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

из которого с учетом (20) следует, что задача реконфигурации управления разрешима с точностью до $\varepsilon = \|\bar{U}_{B_f} B\|_2 = \sqrt{2}|b_{17}|$.

Определим далее матрицы скелетного разложения (22):

$$L_{B_f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{21} & 0 & 0 & b_{25} \\ -b_{21} & -b_{21} & 0 & 0 & -b_{25} \\ b_{41} & b_{41} & b_{43} & 0 & b_{45} \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & 0 \\ b_{61} & -b_{61} & 0 & b_{64} & b_{65} \\ b_{71} & -b_{71} & 0 & b_{74} & b_{75} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R_{B_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{25}}{b_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{25}}{b_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\frac{b_{21}b_{45} - b_{25}b_{41}}{b_{21}b_{43}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и вычислим псевдообратную матрицу в аналитическом виде:

$$B_f^+ = R_{B_f}^T (L_{B_f}^T B_f R_{B_f}^T)^{-1} L_{B_f}^T = \\ = \begin{bmatrix} 0 & p_4 & -p_4 & p_7 & -p_5 & \frac{b_{75}}{p_2} & \frac{b_{65}}{2p_8} & 0 \\ 0 & p_4 & -p_4 & p_7 & p_5 & -\frac{b_{75}}{2p_8} & \frac{b_{65}}{p_2} & 0 \\ 0 & -p_1 & p_1 & b_{43} \frac{b_{21}^2 + b_{25}^2}{p_9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_{54}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_3 & b_{21} \frac{p_{10}}{p_9} & -p_6 & -\frac{b_{71}}{2p_8} & \frac{b_{61}}{p_2} & 0 \\ 0 & p_3 & -p_3 & b_{21} \frac{p_{10}}{p_9} & p_6 & \frac{b_{71}}{p_2} & -\frac{b_{61}}{2p_8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$p_1 = b_{43} \frac{b_{21}b_{41} + b_{25}b_{45}}{2b_{21}^2b_{43}^2 + 4b_{21}^2b_{45}^2 - 8b_{21}b_{25}b_{41}b_{45} + 4b_{25}^2b_{41}^2 + 2b_{25}^2b_{43}^2}, \\ p_2 = 2b_{61}b_{75} - 2b_{65}b_{71}, p_3 = \frac{2b_{25}b_{41}^2 - 2b_{21}b_{45}b_{41} + b_{25}b_{43}^2}{4p_9}, \\ p_4 = \frac{b_{21}b_{43}^2 + b_{21}b_{45}^2 - 2b_{25}b_{41}b_{45}}{4p_9}, p_5 = \frac{b_{64}b_{75} - b_{65}b_{74}}{2b_{54}p_8}, \\ p_6 = \frac{b_{61}b_{74} - b_{64}b_{71}}{2b_{54}p_8}, p_7 = -b_{25} \frac{p_{10}}{p_9}, p_8 = b_{61}b_{75} - b_{65}b_{71}, \\ p_9 = b_{21}^2 b_{43}^2 + 2b_{21}^2 b_{45}^2 - 4b_{21}b_{25}b_{41}b_{45} + 2b_{25}^2 b_{41}^2 + \\ + b_{25}^2 b_{43}^2, p_{10} = b_{21}b_{45} - b_{25}b_{41}.$$

Тогда все множество оптимальных решений задачи реконфигурации в соответствии с (21) примет следующий аналитический вид:

$$G_p = \hat{G}_p + \bar{B}_f^R \Omega,$$

где Ω — матрица с произвольными элементами;

$$\widehat{G}_p = B_f^+ (B - B_f) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{67}b_{75}}{g_1} - g_{10} + g_3 - g_7 - g_4 & g_{10} - \frac{b_{67}b_{75}}{g_1} + g_3 + g_7 - g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{65}b_{77}}{g_1} - g_9 + g_3 + g_7 - g_4 & g_9 - \frac{b_{65}b_{77}}{g_1} + g_3 - g_7 - g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_6 & g_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{57}}{b_{54}} & -\frac{b_{57}}{b_{54}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{61}b_{77}}{g_1} - g_{11} + g_2 - g_8 + g_5 & g_{11} - \frac{b_{61}b_{77}}{g_1} + g_2 + g_8 + g_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{67}b_{71}}{g_1} - g_{12} + g_2 + g_8 + g_5 & g_{12} - \frac{b_{67}b_{71}}{g_1} + g_2 - g_8 + g_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$g_1 = 2(b_{61}b_{75} - b_{65}b_{71}),$$

$$g_2 = b_{27} \frac{2b_{25}b_{41}^2 - 2b_{21}b_{45}b_{41} + b_{25}b_{43}^2}{2g_{14}},$$

$$g_3 = b_{27} \frac{2b_{21}b_{45}^2 - 2b_{25}b_{45}b_{41} + b_{21}b_{43}^2}{2g_{14}},$$

$$g_4 = \frac{b_{25}b_{47}g_{13}}{g_{14}}, g_5 = \frac{b_{21}b_{47}g_{13}}{g_{14}}, g_6 = b_{43}b_{47} \frac{b_{21}^2 + b_{25}^2}{g_{14}} - \frac{b_{27}b_{43}(b_{21}b_{41} + b_{25}b_{45})}{b_{21}^2b_{43}^2 + 2b_{21}b_{45}^2 - 4b_{21}b_{25}b_{41}b_{45} + 2b_{25}^2b_{41}^2 + b_{25}^2b_{43}^2},$$

$$g_7 = b_{57} \frac{b_{64}b_{75} - b_{65}b_{74}}{2b_{54}g_{15}}, g_8 = b_{57} \frac{b_{61}b_{74} - b_{64}b_{71}}{2b_{54}g_{15}},$$

$$g_9 = \frac{b_{67}b_{75}}{2g_{15}}, g_{10} = \frac{b_{65}b_{77}}{2g_{15}}, g_{11} = \frac{b_{67}b_{71}}{2g_{15}}, g_{12} = \frac{b_{61}b_{77}}{2g_{15}},$$

$$g_{13} = b_{21}b_{45} - b_{25}b_{41}, g_{14} = b_{21}^2b_{43}^2 + 2b_{21}^2b_{45}^2 - 4b_{21}b_{25}b_{41}b_{45} + 2b_{25}^2b_{41}^2 + b_{25}^2b_{43}^2,$$

$$g_{15} = b_{61}b_{75} - b_{65}b_{71}.$$

Подставим полученное множество решений в (19) и получим следующую невязку результирующей матрицы эффективности управления:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{17} & -b_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

норма которой в точности соответствует норме приближенного условия разрешимости (25) $\|E\|_2 = \sqrt{2}|b_{17}|$.

На одном из режимов полета ($H = 3000$ м, $V = 135$ м/с) матрица эффективности органов управления имеет следующее числовое значение:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0317 & 0,0317 \\ -0,0026 & -0,0026 & 0 & 0 & -0,0013 & -0,0013 & -0,0032 & -0,0032 \\ 0,0026 & 0,0026 & 0 & 0 & 0,0013 & 0,0013 & 0,0032 & 0,0032 \\ -1,04 & -1,04 & -2,887 & 0 & -0,1317 & -0,1317 & 0,1253 & 0,1253 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0016 & 0 & 0 & -0,0001 & 0,0001 \\ 0,593 & -0,593 & 0 & -0,572 & 1,2 & -1,2 & -1,841 & 1,841 \\ -0,0266 & 0,0266 & 0 & -7,102 & -0,0352 & 0,0352 & 0,171 & -0,171 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда все множество оптимальных решений задачи реконфигурации с точностью $\varepsilon = \|\bar{U}_{B_f} B\|_2 = \sqrt{2}|b_{17}| = 0,0448$ имеет вид $G_p = \widehat{G}_p + \bar{B}_f^R \Omega$, где

$$\widehat{G}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30,0512 & 30,9918 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30,9918 & -30,0512 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4087 & -0,4087 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0625 & -0,0625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14,6206 & -14,0404 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14,0404 & 14,6206 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_f^R = \begin{bmatrix} -0,500 & 0 & 0 \\ -0,500 & 0 & 0 \\ 0,269 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При $\Omega = 0$ приходим к псевдообратному решению, обеспечивающему минимизацию нормы Фробениуса $\|G_p\|_2 = 67,4482$.

Полученное множество решений может быть использовано и для удовлетворения других требований. Минимизируем, например, L_0 -норму решения, обеспечив минимальное число ненулевых элементов в матрице реконфигурации G_p , приняв в матрице свободных переменных Ω все элементы равными нулю, кроме $\omega_{17} = \omega_{18} = 1,5194$. Тогда получим следующее решение задачи реконфигурации:

$$\check{G}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30,8109 & 30,2321 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30,2321 & -30,8109 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0625 & -0,0625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16,1401 & -12,5210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12,5210 & 16,1401 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Данное решение содержит всего 10 нетривиальных переменных с четырьмя уникальными значениями и также обеспечивает оптимальное решение задачи реконфигурации в смысле минимума нормы невязки вида (6). При этом произошло незначительное увеличение нормы Фробениуса $\|\tilde{G}_p\|_2 = 67,5362$ с относительной погрешностью $(\|\tilde{G}_p\|_2 - G_p\|_2)/\|G_p\|_2 = 0,0013$, т. е. всего на 0,13%. При этом упрощение оптимального закона управления не изменило его L^2 -норму, совпадающую с максимальным сингулярным числом решения

$$\|\tilde{G}_p\|_{L^2} = \|G_p\|_{L^2} = 67,4367.$$

Заключение

Аппроксимация решения задачи реконфигурации многосвязных систем управления аналитическими зависимостями позволяет в случае неразрешимости задачи по критерию получения точного решения гарантировать приближение решения с заранее заданной точностью, определяемой с помо-

щью приближенного условия разрешимости. При этом аналитическое представление всего множества решений позволяет в дальнейшем удовлетворять другим требованиям, выполнять настройки коэффициентов реконфигурации в условиях нестационарности и получать простые в реализации схемы, позволяющие парировать последствия отказа.

Список литературы

1. **Зыбин Е. Ю., Косьянчук В. В.** Аналитический синтез многосвязных отказоустойчивых систем управления с упрощенной схемной реализацией // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. №1. С. 108—117.
2. **Буков В. Н., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В., Зыбин Е. Ю.** Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестник Киевского университета. Сер. "Физико-математические науки". 2002. № 1.
3. **Alwi H., Edwards C., Tan C. P.** Fault Detection and Fault Tolerant Control Using Sliding Modes. Springer Verlag, 2011.
4. **Ben-Israel A., Greville T. N. E.** Generalized Inverses: Theory and Applications. New York, Springer-Verlag, 2003.
5. **Gao Z., Antsaklis P. J.** Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems // International Journal of Control. 1991. 53:3. P. 717—729.
6. **Patton R. J.** Fault-tolerant control: The 1997 situation // IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes, Hull, 1997. P. 1033—1055.

E. Yu. Zybin, Senior Researcher, **V. V. Kosyanchuk**, Chief Researcher, **A. M. Kulchak**, Chief of Section, amkulchak@2100.gosniias.ru, State Research Institute of Aviation Systems

Analytical Solution of the Optimal Aircraft Control System Reconfiguration Problem in Case of Actuators Failures

The article discusses the optimal approximation by analytical functions algorithm for solving the problem of aircraft control reconfiguration in case of different actuators failures. The algorithm is based on optimal analytical solution of linear matrix equation, where the analytical form of pseudoinverse matrix is formed with the help of skeleton matrix decomposition. The notion of approximate solvability conditions is introduced, which allows evaluating the accuracy of the solution in advance, before reconfiguration problem solving. Solvability and accuracy conditions are both based on Frobenius norms. However, the results can be generalized for any type of Schatten p - norms due to their invariance to orthogonal transformations. It is shown that in the case of satisfaction of the solvability conditions the control reconfiguration problem can be analytically optimized in terms of the residual norm of the resulting control effectiveness matrix. This allows keeping all the advantages of analytical solutions while maintaining its specified accuracy. The results are successfully applied to aircraft control reconfiguration problem with deriving the whole set of analytical solutions with the best accuracy available.

Keywords: optimal analytical reconfiguration, approximate solution of linear matrix equations, approximate solvability condition

References

1. **Zybin E. Yu., Kos'yanchuk V. V.** Analyticheskyi Sintez mnogovsvyaznykh otkazoustoichivyykh Sistem upravleniya s uproshhennoi skhemnoi realizatsiey. *Izvestia RAN. Teoria i sistemy upravleniya*. 2010. N 1. P. 108—117.
2. **Bukov V. N., Ryabchenko V. N., Kosyanchuk V. V., Zybin E. Yu.** Reshenie linejnyh matrichnyh uravnenij metodom kanonizatsii. *Vestnik Kievskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki*. Kiev. Kievskij nacionalnyj universitet, 2002. N 1. P. 19—28.
3. **Alwi H., Edwards C., Tan C. P.** Fault Detection and Fault Tolerant Control Using Sliding Modes. Springer Verlag, 2011.
4. **Ben-Israel A., Greville T. N. E.** Generalized Inverses: Theory and Applications. New York, Springer-Verlag, 2003.
5. **Gao Z., Antsaklis P. J.** Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems. *International Journal of Control*. 1991, 53:3. P. 717—729.
6. **Patton R. J.** Fault-tolerant control: The 1997 situation. *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes*, Hull, 1997. P. 1033—1055.

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц.,

А. В. Молоденков, канд. техн. наук, ст. науч. сотр, iptmuran@san.ru,

Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Алгоритм оптимального в смысле комбинированного функционала разворота космического аппарата в классе конических движений*

Рассматривается задача оптимального разворота космического аппарата как твердого тела со сферическим распределением масс в кватернионной постановке. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на разворот космического аппарата. Для этой задачи получено новое аналитическое решение в классе конических движений. Дается алгоритм оптимального разворота космического аппарата. Приводится числовой пример.

Ключевые слова: оптимальное управление, космический аппарат, сферически симметричное твердое тело, регулярная прецессия

Введение

Построение управления угловым движением космического аппарата (КА) как твердого тела в традиционной постановке включает построение программного углового движения (разворота), программного управления и управления, стабилизирующего программу углового движения в малом. Задача построения программного углового движения и программного управления во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления. Точное аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (см. например, работы [1–8]), при этом для сферически симметричных КА эти решения получены в классе плоских эйлеровых разворотов. Поэтому расширение классов аналитических решений задачи оптимального разворота КА (твердого тела) в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В данной статье в кватернионной постановке рассматривается задача оптимального разворота сферически-симметричного КА при произвольных граничных условиях по угловому положению КА и произвольном по направлению векторе начальных условий по угловой скорости КА без ограничения на функцию управления. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на разворот КА. С помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина получено новое ана-

литическое решение этой задачи в классе конических движений. Представлено явное выражение для постоянного по модулю оптимального вектора угловой скорости КА. Траектория движения сферически-симметричного КА представляет собой регулярную прецессию, вектор оптимального управления КА перпендикулярен вектору угловой скорости и постоянен по модулю. Сформулированы условия, накладываемые на модуль начального и вид конечного значений вектора угловой скорости КА, при которых допустимо аналитическое решение задачи в классе конических движений. Вектор конечного значения угловой скорости КА должен принадлежать конической поверхности, порождаемой произвольно заданными постоянными условиями задачи. Приводится числовой пример.

Статья продолжает исследования, начатые в работах [9, 10].

1. Постановка задачи

Уравнения, описывающие кинематику и динамику углового движения КА (твердого тела) вокруг центра масс, имеют вид [1]

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda_0 \circ \omega; \quad (1.1)$$

$$I\dot{\omega} = M, \quad (1.2)$$

где $\Lambda(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\mathbf{i}_1 + \lambda_2(t)\mathbf{i}_2 + \lambda_3(t)\mathbf{i}_3$ — кватернион поворота КА; $\omega(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор угловой скорости (фазовые координаты); $M(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T$ — управление. Они подчинены известным требованиям ($\Lambda(t)$, $\omega(t)$ — непрерывные функции, $M(t)$ — кусочно-непрерывная функция); кватернион $\Lambda(t)$ нормирован, т. е.

$\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона); символ \circ означает кватернионное умножение. В динамических уравнениях Эйлера для сферически-симметричного КА (твердого тела) (1.2) I — осевой момент инерции КА.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \Lambda(T) = \Lambda_T \quad (1.3)$$

и угловой скорости твердого тела

$$\omega(0) = \omega_0, \omega(T) = \omega_T. \quad (1.4)$$

Необходимо определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{opt}(t)$ системой (1.1), (1.2) при граничных условиях (1.3), (1.4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T (1 + a\mathbf{M}^2)dt, \quad (1.5)$$

где $a = \text{const} > 0$, время T не задано. Функционал (1.5) представляет собой комбинацию двух критериев с размерным весовым множителем a — времени и энергии, затраченных на разворот КА.

2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных в задаче к безразмерным по формулам

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}a^{-1/2}; \bar{\omega} = \omega I^{-1/2}a^{-1/4}; \bar{t} = tI^{1/2}a^{1/4};$$

$$\bar{J} = JI^{1/2}a^{1/4},$$

при этом вид выражений (1.1), (1.3), (1.4) не изменится, а векторное уравнение (1.2) и функционал (1.5) примет вид

$$\dot{\omega} = \mathbf{M}; \quad (2.1)$$

$$J = \int_0^T (1 + \mathbf{M}^2)dt. \quad (2.2)$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи в безразмерных переменных, и верхняя черта у них будет опущена.

3. Применение принципа максимума

Выполним процедуру принципа максимума Л. С. Понтрягина [1, 11]. Введем вспомогательные функции $\Psi(t)$ (кватернион) и $\varphi(t)$ (вектор), соответствующие фазовым координатам $\Lambda(t)$ и $\omega(t)$. Составим функцию Гамильтона—Понтрягина

$$H = -\psi^*(1 + \mathbf{M}^2) + (\Psi, \Lambda \circ \omega)/2 + (\varphi, \mathbf{M}), \quad (3.1)$$

где постоянная $\psi^* \geq 0$, a (\cdot , \cdot) означает скалярное произведение векторов.

Будем рассматривать невырожденные решения краевой задачи принципа максимума, для которых $\psi^* > 0$. В силу однородности функции Гамильтона—Понтрягина H [11] в формуле (3.1) положим $\psi^* = 1$.

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega; \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)/2, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\text{vect}(\cdot)$ обозначает векторную часть кватерниона, a — сопряжение кватерниона.

Как видно, уравнения для переменных Ψ и Λ совпадают, а их решения различаются на кватернионную мультипликативную константу \mathbf{C} :

$$\Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda. \quad (3.3)$$

Условие трансверсальности на правом конце траектории имеет вид

$$\text{scal}(\Psi(T) \circ \tilde{\Lambda}(T)) = 0, \quad (3.4)$$

где $\text{scal}(\cdot)$ обозначает скалярную часть кватерниона. Заметим, что выражение $\Psi \circ \tilde{\Lambda} = \mathbf{C}$ является первым интегралом для системы уравнений (3.2). Тогда согласно (3.4)

$$\text{scal}(\Psi(t) \circ \tilde{\Lambda}(t)) \equiv 0. \quad (3.5)$$

Из (3.3), (3.5) следует, что скалярная часть \mathbf{C} равна нулю и $\mathbf{C} = \mathbf{c}_v$, где \mathbf{c}_v — постоянный вектор. При этом (3.3) принимает вид

$$\Psi = \mathbf{c}_v \circ \Lambda. \quad (3.6)$$

С использованием выражения (3.6) и введя обозначение [1]

$$\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad (3.7)$$

сопряженную систему (2.2) запишем в виде

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda; \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Следует отметить, что применение этого приема [1], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (1.1) (замена кватернионной сопряженной переменной Ψ на векторную переменную \mathbf{p} (3.7)) позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после применения принципа максимума, на четыре.

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (3.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$\mathbf{M}^{opt} = \varphi/2. \quad (3.9)$$

Как видно, вектор-функция управления в задаче носит непрерывный характер.

Из соотношений (1.1), (2.1), (3.8), (3.9) имеем:

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \omega]; \quad (3.10)$$

$$\mathbf{p} = -4\ddot{\omega}, \quad (3.11)$$

где $[\cdot, \cdot]$ означает векторное произведение.

Подставляя (3.11) в (3.10), получим

$$\ddot{\omega} = [\ddot{\omega}, \omega]. \quad (3.12)$$

Таким образом, оптимальная угловая скорость КА на всем интервале времени движения удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению третьего порядка (3.12). Решение поставленной задачи оптимального управления сводится, тем самым, к решению краевой задачи (1.1), (3.12), (1.3), (1.4).

Отметим, что функция Гамильтона—Понтрягина (3.1) для оптимального процесса управления может быть представлена в виде

$$H = -1 + \dot{\omega}^2 - 2(\omega, \ddot{\omega}) = 0, t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

4. Аналитическое решение задачи оптимального разворота твердого тела в классе конических движений

Будем искать решение уравнений (1.1), (3.12) в классе конических движений. Для этого оптимальную угловую скорость КА представим в виде

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \alpha \sin \Omega t + \mathbf{i}_2 \alpha \cos \Omega t + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K}, \quad (4.1)$$

где \mathbf{K} — кватернион и α, Ω — неопределенные постоянные; при этом

$$\|\mathbf{K}\| = K_0^2 + K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 1. \quad (4.2)$$

Отметим, что кватернион \mathbf{K} позволяет поворачивать вектор в круглой скобке в формуле (4.1) вокруг некоторой постоянной оси, проходящей через неподвижную точку твердого тела.

Последовательно дифференцируя (4.1) три раза по переменной t , получим:

$$\dot{\omega} = \alpha \Omega \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \Omega t - \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K}; \quad (4.3)$$

$$\ddot{\omega} = -\alpha \Omega^2 \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \sin \Omega t + \mathbf{i}_2 \cos \Omega t) \circ \mathbf{K}; \quad (4.4)$$

$$\ddot{\omega} = \alpha \Omega^3 \tilde{\mathbf{K}} \circ (-\mathbf{i}_1 \cos \Omega t + \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K}. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.1), (4.4), (4.5) в (3.12), можно убедиться в выполнении равенства. При этом отметим, что

$$\ddot{\omega} = [\ddot{\omega}, \omega] = (\ddot{\omega} \circ \omega - \omega \circ \ddot{\omega})/2.$$

Траектория движения КА при угловой скорости (4.1) из (1.1), (1.4) находится явно и имеет вид регулярной прецессии

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha t/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Omega t/2\} \circ \mathbf{K}, \quad (4.6)$$

где $\exp\{\cdot\}$ обозначает кватернионную экспоненту [1].

Подставляя в выражение для функции Гамильтона—Понтрягина (3.13) формулы (4.1), (4.3), (4.4), получим условие

$$\alpha^2 \Omega^2 = 1/3. \quad (4.7)$$

В выражения (4.1)—(4.6) входят пять произвольных постоянных $K_0, K_1, K_2, \alpha, \Omega$. Удовлетворим граничные условия задачи (1.3), (1.4). Из-за недостаточного числа произвольных постоянных в решении (4.1) на величины $|\omega_0|$ и ω_T будут наложены требования в ходе дальнейшего решения задачи. Направление единичного вектора начальной угло-

вой скорости $\omega_0^e = \omega_0/|\omega_0|$ произвольно и задано. При $t = 0$ из (4.1) имеем

$$\omega_0 = |\omega_0| \omega_0^e = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_2 \alpha + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K}; \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \|\omega_0\| &= \|\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_2 \alpha + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K}\| = \\ &= \|\tilde{\mathbf{K}}\| \cdot \|\mathbf{i}_2 \alpha + \mathbf{i}_3 \Omega\| \cdot \|\mathbf{K}\| = \alpha^2 + \Omega^2; \end{aligned} \quad (4.9)$$

при $t = T$ из (4.6) имеем

$$\Lambda_T = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Omega T/2\} \circ \mathbf{K}, \quad (4.10)$$

при этом

$$\text{scal}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) = \text{scal}(\exp\{\mathbf{i}_2 \alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Omega T/2\}). \quad (4.11)$$

Из соотношений (4.2), (4.7)—(4.10) найдем величины $T, |\omega_0|, \alpha, \Omega, \mathbf{K}$. Представим (4.8), (4.10) в виде

$$(\mathbf{i}_2 \alpha + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K} - \mathbf{K} \circ \omega_0 = 0;$$

$$\exp\{\mathbf{i}_2 \alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Omega T/2\} \circ \mathbf{K} - \mathbf{K} \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T = 0$$

или в векторно-матричной форме с использованием кватернионных матриц m - и n -типов [12]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha & -\Omega \\ 0 & 0 & -\Omega & \alpha \\ \alpha & \Omega & 0 & 0 \\ \Omega & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{01} & -\omega_{02} & -\omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & \omega_{03} & -\omega_{02} \\ \omega_{02} & -\omega_{03} & 0 & \omega_{01} \\ \omega_{03} & \omega_{02} & -\omega_{01} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\begin{pmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ m_1 & m_0 & -m_3 & m_2 \\ m_2 & m_3 & m_0 & m_1 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & m_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & n_0 & n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_3 & n_0 & n_1 \\ n_3 & n_2 & -n_1 & n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

где элементы матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (4.13) определяются компонентами кватернионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Omega T/2\}; \\ m_0 &= \cos(\alpha T/2) \cos(\Omega T/2), m_1 = \sin(\alpha T/2) \sin(\Omega T/2), \\ m_2 &= \sin(\alpha T/2) \cos(\Omega T/2), m_3 = \cos(\alpha T/2) \sin(\Omega T/2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

и

$$\mathbf{n} = \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T. \quad (4.15)$$

При этом

$$\|\mathbf{m}\| = 1; \quad (4.16)$$

$$\|\mathbf{n}\| = 1. \quad (4.17)$$

Отметим, что ранги матриц коэффициентов систем (4.12), (4.13) равны двум.

Выбирая из соотношений (4.12), (4.13) по два линейно независимых уравнения, получим СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} - \alpha & \omega_{03} - \Omega \\ -\omega_{01} & 0 & -(\omega_{03} + \Omega) & \omega_{02} + \alpha \\ m_1 - n_1 & 0 & -(m_3 + n_3) & m_2 + n_2 \\ 0 & n_1 - m_1 & n_2 - m_2 & n_3 - m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Для существования ненулевых решений этой однородной СЛАУ определитель матрицы коэффициентов СЛАУ должен быть равен нулю. Отсюда с учетом (4.9), (4.10), (4.13), (4.14) получим

$$|\omega_0| = (m_2\alpha + m_3\Omega)/(n_1\omega_{01}^e + n_2\omega_{02}^e + n_3\omega_{03}^e). \quad (4.19)$$

Из соотношений (4.7), (4.9), (4.11), (4.19) с учетом (4.14) следует система трех уравнений для определения величин α , Ω , T :

$$\begin{cases} \alpha^2\Omega^2 - 1/3 = 0; \\ (\alpha^2 + \Omega^2)(n_1\omega_{01}^e + n_2\omega_{02}^e + n_3\omega_{03}^e)^2 - \\ - (m_2\alpha + m_3\Omega)^2 = 0; \\ \text{scal}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) - \cos(\alpha T/2)\cos(\Omega T/2) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Величина $|\omega_0|$ находится по формуле (4.19) после решения системы (4.20). Величины K_3 , K_0 , K_1 , K_2 определяются следующим образом:

$$K_3 = \pm[1 + (A_0/D)^2 + (A_1/D)^2 + (A_2/D)^2]^{-1/2}, \quad (4.21)$$

$$K_0 = A_0K_3/D, \quad K_1 = A_1K_3/D, \quad K_2 = A_2K_3/D, \quad (4.22)$$

где

$$A_0 = -(m_2 + n_2)(\omega_{03} + \Omega) + (m_3 + n_3)(\omega_{02} + \alpha), \quad (4.23)$$

$$A_1 = (m_1 - n_1)\omega_{01} + (m_3 + n_3)(\Omega - \omega_{03}) + \\ + (m_2 + n_2)(\alpha - \omega_{02}), \quad (4.24)$$

$$A_2 = (m_1 - n_1)(\omega_{02} + \alpha) + (m_2 + n_2)\omega_{01}, \quad (4.25)$$

$$D = (m_1 - n_1)(\omega_{03} + \Omega) + (m_3 + n_3)\omega_{01}. \quad (4.26)$$

Граничное условие по угловой скорости КА в конечный момент времени T должно иметь вид

$$\begin{aligned} \omega(T) &= \omega_T = \\ &= \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1\alpha\sin\Omega T + \mathbf{i}_2\alpha\cos\Omega T + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Таким образом, в случаях, когда на граничные условия по угловой скорости КА наложены ограничения вида (4.19), (4.27) (это означает, что вектор ω на всем интервале времени движения принадлежит некоторой конической поверхности, определяемой в пространстве произвольными заданными граничными условиями по угловому положению КА Λ_0 , Λ_T и произвольным заданным направлением вектора начального значения угловой скорости КА ω_0^e), траектория углового движения сферически-симметричного КА находится в классе конических движений и вычисляется по явным аналитическим выражениям (4.1), (4.6).

Оптимальный управляющий момент из (3.1), (4.1), (4.3), (4.7)

$$\mathbf{M} = \dot{\omega} = \alpha\Omega\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1\cos\Omega t - \mathbf{i}_2\sin\Omega t) \circ \mathbf{K}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{M}^2 = \alpha^2\Omega^2 = 1/3. \quad (4.29)$$

Оптимальное значение функционала качества в безразмерных переменных (2.2) составляет величину

$$J = \int_0^T (1 + \mathbf{M}^2)dt = (1 + \alpha^2\Omega^2)T = 4T/3. \quad (4.30)$$

Из выражений (4.28), (3.9) и (3.11) можно найти сопряженные переменные φ и \mathbf{p} . Тем самым, задача при существующих ограничениях решена полностью.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА в классе конических движений в безразмерных переменных.

Шаг 1. По заданным кватернионам Λ_0 , Λ_T (1.3), единичному вектору ω_0^e из (1.4), формулам (4.20), (4.19) (с учетом (4.14), (4.15)) определяются величины α , Ω , T , $|\omega_0|$.

Шаг 2. Используя Λ_0 , Λ_T , α , Ω , T , $|\omega_0|$, по формулам (4.21)–(4.26) находим компоненты кватерниона \mathbf{K} .

Шаг 3. По формуле

$$\omega_0^{calcul} = |\omega_0|\omega_0^e$$

и формуле (4.27)

$$\omega_T^{calcul} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1\alpha\sin\Omega T + \mathbf{i}_2\alpha\cos\Omega T + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K}$$

вычисляются значения векторов ω_0^{calcul} , ω_T^{calcul} .

Шаг 4. Полученные значения ω_0^{calcul} , ω_T^{calcul} сравниваются с заданными в формуле (1.4) величинами ω_0 , ω_T .

Шаг 5. Если равенство на шаге 4 алгоритма выполняется, то оптимальное решение задачи находится в классе конических движений; при этом угловая скорость КА, траектория его углового движения, вектор управляющего момента и значение функционала оптимизации вычисляются по формулам (4.1), (4.6), (4.28), (4.30) и шагу 1 алгоритма.

Шаг 6. Сопряженные переменные задачи φ , \mathbf{p} вычисляются по формулам (4.28), (3.9) и (3.11).

5. Числовой пример

В данном разделе приводится пример решения задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА в классе конических движений по формулам раздела 3. Ниже на рисунке представлены графики изменения во времени компонент угловой скорости КА $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, векторной части кватерниона ориентации КА $\Lambda_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ и компонент вектора управляющего момента $M_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$.

Расчеты проводили для значений

$$\Lambda_0 = (0,9975; 0,0504; 0,0504; 0),$$

$$\Lambda_T = (0,5498; 0,4582; 0,2291; 0,6598),$$

$$\omega_0 = (0,8975; 0,4487; 0,5609),$$

$$\omega_T = (0,0754; 0,5212; 1,0218),$$

которые удовлетворяют ограничениям раздела 4.

Вначале, по формулам (4.20), (4.19) (с учетом (4.14), (4.15)), (3.20)–(3.25) находили величины α , Ω , T , $|\omega_0|$, K_0 , K_1 , K_2 , K_3 ($\alpha = 0,9909$, $\Omega = -0,5826$, $T = 1,7065$, $|\omega_0| = 1,1495$, $K_0 = 0,5810$, $K_1 = -0,6561$, $K_2 = -0,3122$, $K_3 = 0,3669$), затем по формулам (4.1), (4.28), (4.6) определяли векторы ω , \mathbf{M} и кватернион Λ . Значение комбинированного функционала (2.2) в рассматриваемом примере составляет 2.275.

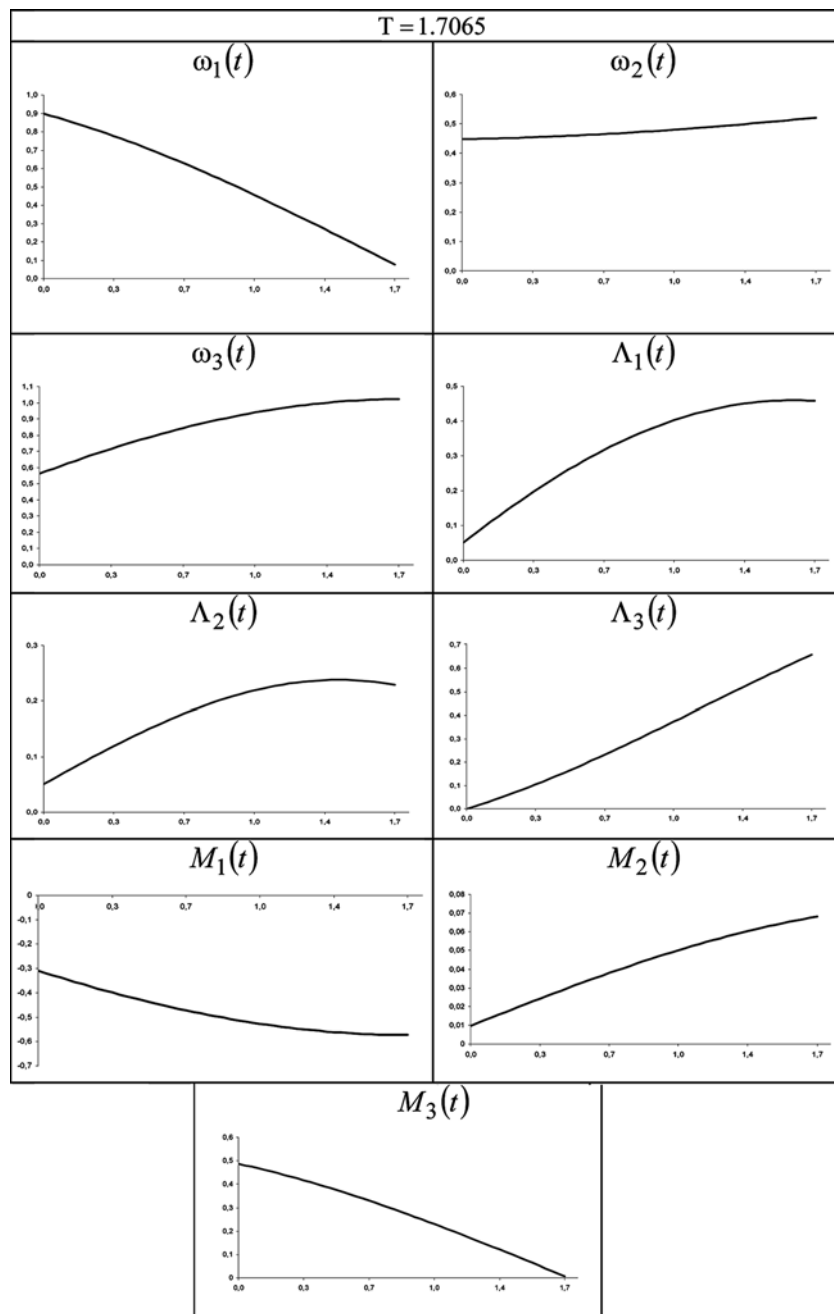
Отметим, что кватернион ориентации КА $\Lambda(t)$ может быть двузначным [1], т. е. Λ и $-\Lambda$ соответствуют одному и тому же угловому положению твердого тела в пространстве.

Заключение

Представленный в статье аналитический алгоритм оптимального разворота сферически-симметричного КА (твердого тела) в классе конических движений может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известное аналитическое решение задачи в классе плоских эйлеровых разворотов.

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers // J. guidance, control, and dynamics. 1994. V. 17, N. 2. P. 225–233.
3. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 6. С. 1235–1238.
4. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космические исследования. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
5. Сиротин А. Н. Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 36–46.
6. Сиротин А. Н. Об оптимальной по быстрдействию пространственной переориентации в положение покоя вращающегося сферически-симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3.
7. Молоденков А. В. Кватернионное решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота твердого тела // Проблемы механики и управления. Пермь: ПГУ, 1995. С. 122–131.
8. Молоденков А. В. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного космического аппарата для одного частного случая // Сб. трудов 6-й междунар. конф. "Системный анализ и управление космическими комплексами". Крым, Евпатория. М.: МАИ, 2001. С. 42



Решение задачи в классе конических движений

9. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2. С. 163–172.
10. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Алгоритм оптимального по быстрдействию разворота космического аппарата в классе конических движений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 10. С. 66–70.
11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 384 с.
12. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

Ya. G. Sapunkov, Senior Staff Scientist of the Laboratory of "Mechanics, Navigation and Motion Control",

A. V. Molodenkov, Senior Staff Scientist of the Laboratory of "Mechanics,

Navigation and Motion Control", iptmuran@san.ru

Precision Mechanics and Control Problems Institute of Russian Academy of Sciences, Saratov

Algorithm of the Optimal in the Sense of Combined Functional Turn of a Spacecraft in the Class of Conical Motion

The optimal slew problem for a spherically symmetric spacecraft as a rigid body with arbitrary attitude boundary conditions and arbitrary direction of the initial angular velocity with no restrictions on the control is considered in the quaternion formulation. The combined functional which combines the time and energy spent on turning of a spacecraft is used as optimality criterion. Using the Pontryagin maximum principle, a new analytical solution of this problem in the class of conical motions is obtained. An explicit expression for the constant in magnitude optimal angular velocity vector of the spacecraft is found. The motion trajectory of the spherically symmetric spacecraft is regular precession. The vector of the spacecraft optimal control is perpendicular to the angular velocity and is constant in magnitude. The conditions for the modulus of the initial and the form of the terminal values of the spacecraft angular velocity vector are formulated, which make it possible to solve the problem analytically in the class of conical motions. The terminal vector of the spacecraft angular velocity must be on the conical surface generated by arbitrarily given constant conditions of the problem. Algorithm of the optimal turn of a spacecraft is given. The numerical example is presented.

Keywords: optimal control, spacecraft, spherically symmetric rigid body, regular precession

References

1. **Branets V. N., Shmyglevskij I. P.** Primenenie kvaternionov v zadachax orientacii tverdogo tela. M.: Nauka, 1973. 320 p.
2. **Scrivener S. L., Thompson R. C.** Survey of time-optimal attitude maneuvers. *J. guidance, control, and dynamics*. 1994. V. 17, N. 2. P. 225—233.
3. **Petrov B. N., Bodner V. A., Alekseev K. B.** Analiticheskoe reshenie zadachi upravleniya prostranstvennym povorotnym maneвроm. *Dokl. AN SSSR*. 1970. V. 192, N. 6. P. 1235—1238.
4. **Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V.** Optimal'nyj razvorot tverdogo tela s odnoj osyu simmetrii. *Kosmicheskije issledovaniya*. 1984. V. 22, N. 3. P. 352—360.
5. **Sirotin A. N.** Optimal'noe upravlenie pereorientaciej simmetrichnogo tverdogo tela iz polozheniya pokoya v polozhenie pokoya. *Izv. AN SSSR. MTT*. 1989. N. 1. P. 36—46.
6. **Sirotin A. N.** Ob optimal'noj po bystrodejstviyu prostranstvennoj pereorientacii v polozhenie pokoya vrashhayushhegosya sfericheskij-simmetrichnogo tverdogo tela. *Izv. RAN. MTT*. 1997. N. 3.
7. **Molodenkov A. V.** Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo v smysle minimuma energeticheskix zatrat razvorota tverdogo tela. *Problemy mexaniki i upravleniya*. Perm: PGU, 1995. P. 122—131.
8. **Molodenkov A. V.** Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota sfericheskij simmetrichnogo kosmicheskogo apparata dlya odnogo chastnogo sluchaya. *Sb. trudov 6-j mezhdunar. konf. "Sistemnyj analiz i upravlenie kosmicheskimi kompleksami"*. Krym, Evpatoriya. M.: MAI, 2001. P. 42.
9. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** Analiticheskoe reshenie zadachi optimal'nogo razvorota sfericheskij-simmetrichnogo kosmicheskogo apparata v klasse konicheskix dvizhenij. *Izv. RAN. TISU*. 2013. N. 2. P. 163—172.
10. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** Algoritm optimal'nogo po bystrodejstviyu razvorota kosmicheskogo apparata v klasse konicheskix dvizhenij. *Mesatronika, avtomatizaciya, upravlenie*. 2013. N. 10. P. 66—70.
11. **Pontryagin L. S., Boltyanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishhenko E. F.** Matematicheskaya teoriya optimal'nyx processov. M.: Nauka, 1961. 384 p.
12. **Chelnokov Yu. N.** Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mexaniki tverdogo tela i ix prilozheniya. M.: Fizmatlit, 2006. 512 p.

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Дизайнер Т. Н. Погорелова.

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор Т. В. Пчелкина.

Сдано в набор 30.04.2014. Подписано в печать 11.06.2014. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН714. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансд солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансд солюшнз".

119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.